

Příklady na druhé cvičení v počítačové učebně, SMI, PS 2010

Definice stacionárního vektoru stochastické matice: Necht' \mathbf{a} je stochastický vektor a \mathbf{P} stochastická matice odpovídající dimenze. Jestliže platí $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$, pak vektor \mathbf{a} se nazývá stacionární vektor matice \mathbf{P} .

Definice stacionárního rozložení HMŘ: Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu \mathbf{P} . Stochastický vektor \mathbf{a} , který je stacionárním vektorem matice \mathbf{P} , se nazývá stacionární rozložení daného řetězce.

Definice limitního rozložení HMŘ: Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$. Jestliže existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n) = \bar{\mathbf{p}}$, pak vektor $\bar{\mathbf{p}}$ se nazývá limitní rozložení daného řetězce. Jestliže vektor $\bar{\mathbf{p}}$ nezávisí na vektoru počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$, pak řekneme, že daný řetězec je ergodický (regulární).

Věta o vztahu mezi stacionárním a limitním rozložením HMŘ: Jestliže $\{X_n; n \in N_0\}$ je ergodický homogenní markovský řetězec a existuje jeho stacionární rozložení \mathbf{a} , pak limitní rozložení $\bar{\mathbf{p}}$ je rovno stacionárnímu rozložení \mathbf{a} .

Markovova věta: Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu \mathbf{P} . Jestliže existuje takové číslo $n \in N_0$, že matice \mathbf{P}^n má všechny prvky kladné, pak

- existuje stacionární rozložení daného řetězce a je jediné,
- řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ je ergodický,
- posloupnost matic \mathbf{P}^n konverguje k limitní matici \mathbf{A} , jejíž řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru \mathbf{a} .

Návod na hledání stacionárního vektoru stochastické matice pomocí MATLABu

- Zadáme matici přechodu \mathbf{P} . Její řád zjistíme příkazem $n = \text{size}(\mathbf{P}, 1)$.
- Vytvoříme jednotkovou matici $\mathbf{I} = \text{eye}(n)$.
- Získáme matici soustavy $\mathbf{A} = [(\mathbf{I} - \mathbf{P})'; \text{ones}(1, n)]$.
- Vytvoříme vektor pravých stran $\mathbf{f} = [\text{zeros}(n, 1); 1]$.
- Vypočteme stacionární vektor $\mathbf{a} = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{f})'$.

Příklad 1.: Předpokládejme, že v nějaké oblasti může být počasí pouze ve třech stavech, a to déšť, jasno, sníh. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že nikdy nebývají dva jasné dny za sebou. Jestliže je v jistém dni jasno, pak další den bude buď déšť nebo sníh, a to se stejnou pravděpodobností. Jestliže je v jistém dni sníh nebo déšť, pak následující den se počasí buď nezmění, a to s pravděpodobností 0,5 nebo se změní, a pak v polovině případů bude jasno. Popište stav počasí homogenním markovským řetězcem a vypočtete jeho stacionární rozložení.

Řešení: Homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ má množinu stavů $J = \{1, 2, 3\}$, kde stav 1 znamená déšť, stav 2 jasno a stav 3 sníh. Matice přechodu \mathbf{P} má tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Vektor stacionárních pravděpodobností $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, kde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ vyhovuje rovnici $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$, tedy

$$a_1 = 0,5a_1 + 0,5a_2 + 0,25a_3,$$

$$a_2 = 0,25a_1 + 0a_2 + 0,25a_3,$$

$$a_3 = 0,25a_1 + 0,5a_2 + 0,5a_3,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1.$$

Po úpravě:

$$0,5a_1 - 0,5a_2 - 0,25a_3 = 0,$$

$$-0,25a_1 + a_2 - 0,25a_3 = 0,$$

$$-0,25a_1 - 0,5a_2 + 0,5a_3 = 0,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Řešením tohoto systému je vektor $\mathbf{a} = (0,4 \ 0,2 \ 0,4)$

$$\text{Matice soustavy: } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,25 \\ -0,25 & 1 & -0,25 \\ -0,25 & -0,5 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ vektor pravých stran: } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Řešení soustavy}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \text{ dostaneme ve tvaru } \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}, \text{ tedy v našem případě } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{pmatrix}. \text{ Vektor stacionárních}$$

pravděpodobností je roven transponovanému řešení \mathbf{x} , tj. $\mathbf{a} = (0,4 \ 0,2, \ 0,4)$.

Příklad 2.: Letka má při zahájení akcí tři letadla. Při akci je letadlo zničeno s pravděpodobností 0,2. Letka se do akce vydá v případě, že má aspoň jedno letadlo. Pokud jsou všechna letadla zničena, pak s akcemi končí. Určete vektor absolutních pravděpodobností pro počty letadel v letce po třetí akci a vektor stacionárních pravděpodobností.

Řešení: Homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ má množinu stavů $J = \{0,1,2,3\}$, kde stav j znamená, že po n -té akci má letka právě j letadel.

Vektor počátečních pravděpodobností: $\mathbf{p}(0) = (0,0,0,1)$.

Pro stanovení pravděpodobností přechodu použijeme binomické rozložení.

Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $Y \sim \text{Bi}(k, \vartheta)$ je $P(Y = y) = \binom{k}{y} \vartheta^y (1 - \vartheta)^{k-y}$ pro

$$y = 0, 1, \dots, k.$$

V našem případě k je postupně 0, 1, 2, 3 a $\vartheta = 0,8$.

$$p_{00} = 1, p_{01} = 0, p_{02} = 0, p_{03} = 0$$

$$p_{10} = 0,2, p_{11} = 0,8, p_{12} = 0, p_{13} = 0$$

$$p_{20} = \binom{2}{0} 0,8^0 0,2^2 = 0,04, p_{21} = \binom{2}{1} 0,8^1 0,2^1 = 0,32, p_{22} = \binom{2}{2} 0,8^2 0,2^0 = 0,64, p_{23} = 0$$

$$p_{30} = \binom{3}{0} 0,8^0 0,2^3 = 0,008, p_{31} = \binom{3}{1} 0,8^1 0,2^2 = 0,096, p_{32} = \binom{3}{2} 0,8^2 0,2^1 = 0,384,$$

$$p_{33} = \binom{3}{3} 0,8^3 0,2^0 = 0,512$$

$$\text{Matice přechodu: } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,04 & 0,32 & 0,64 & 0 \\ 0,008 & 0,096 & 0,384 & 0,512 \end{pmatrix}$$

Vektor absolutních pravděpodobností po třech akcích:

$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^3 = (0,1162 \ 0,3658 \ 0,3838 \ 0,1342)$$

Vektor stacionárních pravděpodobností:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, a_1, a_2, a_3)\mathbf{P}, \text{ přičemž } a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1. \text{ Odtud dostaneme } \mathbf{a} = (1, 0, 0, 0).$$

Znamená to, že po dostatečně velkém počtu akcí s pravděpodobností jedna nezbude letce žádné letadlo.

Příklad 3.: Na malém městě jsou dva obchody, označme je A a B. Zajímáme se o nákupy zákazníků v těchto obchodech. Uvažujeme přitom týdenní období a sledujeme, kde zákazníci v jednotlivých týdnech nakupovali a jak tyto obchody střídali. Pro jednoduchost předpokládejme, že v průběhu jednoho týdne navštěvovali buď pouze obchod A nebo obchod B. Jako součást marketingového výzkumu byla shromážděna data od 1000 zákazníků v časovém horizontu 10 týdnů. Na základě tohoto výzkumu bylo zjištěno, že 90% zákazníků nakupujících v obchodě A tam bude nakupovat i v následujícím týdnu a 10% přejde do obchodu B. Dále 80% zákazníků nakupujících v obchodě B tam bude nakupovat i v následujícím týdnu a 20% přejde do obchodu A. Pro modelování této situace zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1, 2\}$, přičemž $X_n = 1$, když zákazník v n-tém týdnu nakupuje v obchodě A a $X_n = 2$, když zákazník v n-tém týdnu nakupuje v obchodě B.

a) Jestliže na začátku nakupovalo 1000 zákazníků v obchodě A, kolik jich bude po šesti týdnech? (706 zákazníků)

b) Jestliže na začátku nakupovalo 1000 zákazníků v obchodě B, kolik jich bude po šesti týdnech? (412 zákazníků)

c) Jak velký je tržní podíl těchto dvou obchodů za předpokladu dostatečně velkého počtu období? (Tržní podíl obchodu A činí 66,7%, obchodu B 33,3%.)

d) Obchod B provede reklamní kampaň, aby přilákal zákazníky nakupující v obchodě A. Došlo k určitému přesunu zájmu nakupovat v obchodě B. Dle nového průzkumu byla

stanovena matice přechodu $\begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,20 & 0,80 \end{pmatrix}$. Jak se nyní změnil tržní podíl obchodů A a B za

předpokladu dostatečně velkého počtu období? (Tržní podíl obchodu A činí 57,1%, obchodu B 42,9%.)

Příklad 4.: Obchodník prodává tři druhy pracích prášků, které označíme A, B, C. Aby zjistil, jak se vyvíjí poptávka po těchto prášcích, provedl v 1. měsíci prodeje průzkum, v němž se zjišťovalo, který druh prášku zákazníci kupují. Při tomto průzkumu bylo zjištěno, že prášek A kupuje 50% zákazníků, prášek B 20% a prášek C 30% zákazníků. Za měsíc byl proveden další průzkum, který zjišťoval, ke kterému druhu prášků zákazníci přešli. Výsledky průzkumu

zachycuje matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$.

a) Určete absolutní pravděpodobnosti po dvou měsících a interpretujte je. (Po dvou měsících bude prášek A nakupovat 80,6% zákazníků, prášek B 12,8% a C 6,6% zákazníků.

b) Najděte vektor limitních pravděpodobností a limitní matici přechodu.

$$(\bar{\mathbf{p}} = (0,8281 \quad 0,125 \quad 0,0469), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,8281 & 0,125 & 0,0469 \\ 0,8281 & 0,125 & 0,0469 \\ 0,8281 & 0,125 & 0,0469 \end{pmatrix})$$