Kapitola 6

Dvojný integrál

V této kapitole se budeme zabývat integrálem funkce dvou proměnných – tzv. dvojným integrálem. Ukážeme dva způsoby, jak lze vypočítat dvojný integrál: převedení dvojného integrálu na dva jednoduché integrály (tzv. Fubiniova věta) nebo pomocí transformace do polárních souřadnic.

6.1 Co je dvojný integrál

Připomeňme si, co je integrál funkce jedné proměnné (jednoduchý integrál). Je-li funkce $f(x)$ nezáporná a spojitá na intervalu $[a, b]$, pak integrál této funkce na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

je číslo, které vyjadřuje *obsah rovinného obrazce* M ohraničeného grafem této funkce, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$. Pomocí nerovností můžeme množinu M zapsat

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Tento integrál lze spočítat pomocí primitivní funkce F k funkci f jako $F(b) - F(a)$.

Dvojný integrál je integrál funkce dvou proměnných. Při zavedení tohoto pojmu vyjdeme z geometrického významu dvojného integrálu:

Nechť funkce $f(x, y)$ je nezáporná a spojitá na množině $M \subset \mathbb{R}^2$

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}, \tag{6.1}$$

kde $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ a $\varphi(x) \le \psi(x)$. Pak *dvojný integrál této funkce na množině* M

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

je číslo, které vyjadřuje *objem tělesa* V ohraničeného grafem této funkce, rovinou xy a pláštěm vedeným přes hranici množiny M. Pomocí nerovností můžeme toto těleso zapsat

$$V \ = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le z \le f(x, y) \text{ pro } [x, y] \in M\}.$$

Poznamenejme, že přesné zavedení dvojného integrálu je poměrně technicky náročné, neboť je třeba zavést míru v rovině a pomocí míry pak definujeme Riemannův dvojný integrál.

Je-li M obdélník o stranách a, b a $f(x, y) \equiv c$, pak dvojný integrál vyjadřuje *objem kvádru* a platí

$$\iint\limits_M c \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a \cdot b \cdot c.$$

Je-li $f(x, y) \equiv 1$ na množině M, pak dvojný integrál vyjadřuje obsah (míru) množiny M:

$$\iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = m(M).$$

6.2 Fubiniova věta pro dvojný integrál

Základní metodou pro výpočet dvojného integrálu je převod dvojného integrálu na dva jednoduché integrály. Tato metoda je popsána v následujících dvou větách.

Věta 6.1 (Fubini)**.** *Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na obdélníku $J = [a, b] \times [c, d]$. Pak platí*

$$\iint\limits_J f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{6.2}$$

Poznámka 6.2. a) Integrál na pravé straně výrazu (6.2) se nazývá dvojnásobný integrál. V tomto integrálu integrujeme postupně nejprve podle y a pak podle x. Záměnou proměnných x a y dostaneme

$$\iint\limits_J f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Znamená to, že nezáleží na pořadí, v jakém na pravé straně integrujeme.

b) Důležitým předpokladem je spojitost funkce. Není-li funkce $f(x, y)$ spojitá na obdélníku J, pak uvedené tvrzení neplatí – dvojný integrál nemusí existovat a nelze změnit pořadí integrace v dvojnásobném integrálu.

c) V případě, že má integrovaná funkce tvar součinu $f(x)g(y)$, kde f je spojitá funkce na $[a, b]$ a g je spojitá funkce na $[c, d]$, je možné výpočet zjednodušit

$$\iint\limits_J f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 6.3. Vypočtěte

$$\iint\limits_M x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je obdélník s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [2, 1]$, $C = [2, 2]$ a $D = [0, 2]$.

Řešení. Vidíme, že platí $0 \le x \le 2$ a $1 \le y \le 2$. Podle Fubiniovy věty pak dostáváme

$$\iint\limits_M x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_1^2 x^2 y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_1^2 \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(2x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{2}x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{2} \right]_0^2 = 4.$$

Pokud zvolíme opačné pořadí integrace bude výpočet vypadat takto

$$\iint\limits_M x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^2 x^2 y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_0^2 \mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{8}{3} y \,\mathrm{d}y =$$

$$= \left[\frac{4}{3} y^2 \right]_1^2 = \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = 4.$$

Vzhledem k tomu, že integrační oblast je obdélník a integrovaná funkce je tvaru $f(x,y) = g(x)h(y)$, můžeme využít předchozí poznámky

$$\iint\limits_M x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}x \cdot \int_1^2 y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \frac{8}{3} \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 4.$$

▲

Uvedenou větu lze zobecnit pro integraci přes "deformovaný obdélník".

Věta 6.4 (Fubini)**.** *Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině $M \subset \mathbb{R}^2$, která je dána vztahem* (6.1)*. Pak platí*

$$\iint\limits_M f(x,y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{6.3}$$

Příklad 6.5. Vypočtěte

$$\iint\limits_M x^3 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je čtvrtkruh o daném poloměru $r \ge 0$ se středem v počátku a ležící v prvním kvadrantu.

Řešení. Množinu přes kterou integrujeme můžeme popsat nerovnostmi

$$0 \le x \le r, 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2},$$

Dosazením do (6.3) dostaneme

$$\iint\limits_A x^3 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x^3 y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Pro vnitřní integrál dostáváme

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x^3 y \,\mathrm{d}y = x^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{1}{2}x^3(r^2-x^2).$$

Proto dvojný integrál je

$$\iint\limits_M x^3 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^r (x^3r^2 - x^5)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4r^2}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_0^r = \frac{r^6}{24}$$

▲

Příklad 6.6. Vypočtěte

$$\iint\limits_M (2x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

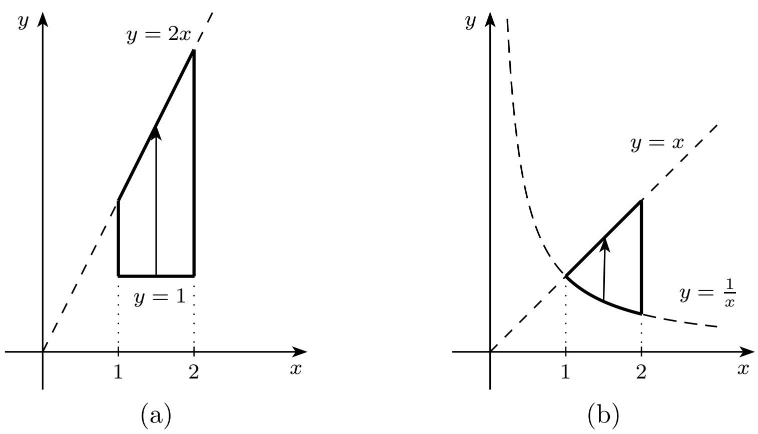
kde množina M je lichoběžník určený přímkami $x=1$, $x=2$, $y=1$ a $y=2x$

Řešení. Z obrázku 6.1a vidíme, že platí $1 \le x \le 2$ a $1 \le y \le 2x$. Dostáváme

$$\iint\limits_M (2x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_1^{2x} (2x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^{2x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^2 \left(4x^2 + 2x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[2x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x\right]_1^2 = \frac{21}{2}.$$

▲



Obrázek 6.1: Množiny z příkladů 6.6 a 6.7

.

Příklad 6.7. Vypočtěte

$$\iint\limits_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je ohraničená křivkami $y=x$, $x=2$ a $xy=1$.

Řešení. Z obrázku 6.1b vidíme, že například platí $1 \le x \le 2$ a $\frac{1}{x} \le y \le x$, přičemž souřadnici $x = 1$ jsem dostali z řešení rovnice $\frac{1}{x} = x$. Integrovaná funkce je na oblasti M spojitá. Dostáváme

$$\iint_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} \mathrm{d}x =$$

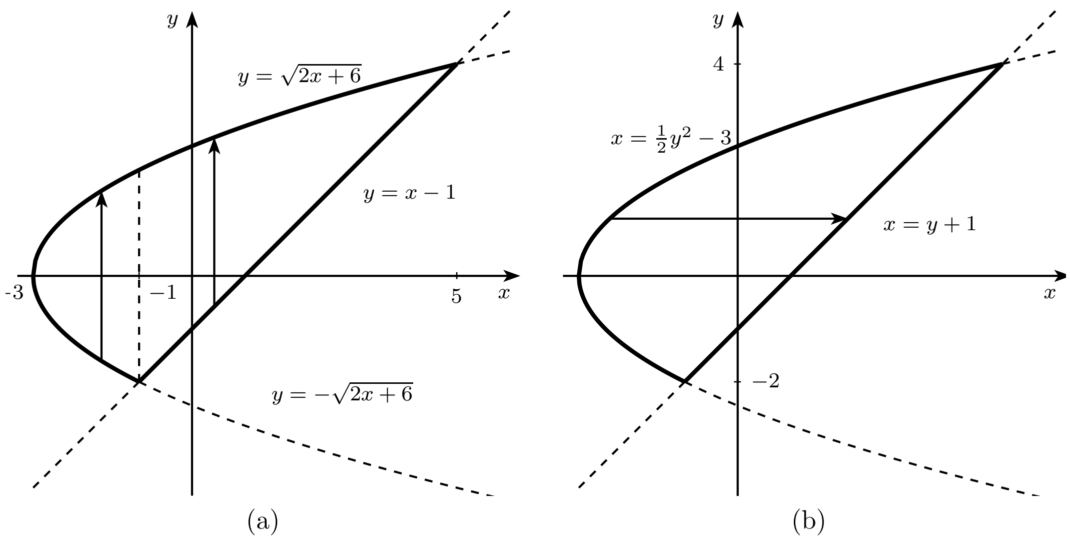
$$= \int_1^2 \left(-x + x^3\right)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{9}{4}.$$

▲

Příklad 6.8. Vypočtěte

$$\iint_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je množina ohraničená přímkou $y = x - 1$ a parabolou $y^2 = 2x + 6$.



Obrázek 6.2: Různé popisy množiny M z příkladu 6.8

Řešení. Nejprve vyjádříme danou množinu pomocí nerovností. K tomu potřebujeme určit průsečíky přímky a paraboly. Vyjádříme-li z obou předpisů proměnnou x, pak z rovnosti

$$y + 1 = \frac{y^2 - 6}{2}$$

dostaneme y-ové souřadnice těchto průsečíků, tj. $y = -2$ a $y = 4$. Dosazením do rovnice přímky získáme x-ové souřadnice $x = -1$ a $x = 5$. Máme dva způsoby, jak vyjádřit množinu M.

a) Při obvyklém pořadí integrace $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ vyjadřujeme množinu M pomocí nerovností tvaru (6.1). Tj. je hraničená funkcemi a dolní hranice je složena ze dvou částí, proto musíme v tomto případě množinu M rozdělit na dvě množiny $M = M_1 \cup M_2$, kde

$$\begin{aligned} M_1\colon & -3 \le x \le -1, \qquad -\sqrt{2x+6} \le \sqrt{2x+6}, \\ M_2\colon & -1 \le x \le 5, \qquad x-1 \le \sqrt{2x+6}. \end{aligned}$$

Při integraci v pořadí $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ tak musíme daný integrál rozdělit na dva integrály

$$\iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

b) Výhodnější proto bude integrovat v opačném pořadí $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Pak M vyjádříme nerovnostmi

$$-2 \le y \le 4, \qquad \frac{1}{2}y^2 - 3 \le x \le y+1$$

a dvojný integrál je roven

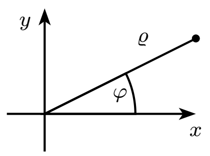
$$\begin{aligned} \iint\limits_A xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-2}^{4}\int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{4}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1}\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left[(y+1)^2 - (\frac{1}{2}y^2-3)^2\right]\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y\right)\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2\right] = 36. \end{aligned}$$

▲

6.3 Polární souřadnice

Integrujeme-li přes množinu M, která je ohraničená kružnicí (částí kružnice, mezikružím), pak místo kartézských souřadnic x, y je výhodné používat polární souřadnice ϱ, φ.

Nechť bod v rovině má kartézské souřadnice $[x, y]$. Pak polární souřadnice ϱ je vzdálenost bodu od počátku a φ úhel, který svírá *průvodič* (tj. úsečka spojující bod s počátkem) s kladným směrem osy x. Odtud plynou rovnice transformace pro převod kartézských souřadnic do polárních:



$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi \\ y &= \varrho\sin\varphi. \end{aligned}$$

Například, kruh o poloměru r je v polárních souřadnicích popsán $\varrho = r$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Podobně polopřímka $y = x$ pro $x \ge 0$ je popsána $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varrho \ge 0$.

Příklad 6.9. Nakreslete množinu, která je zapsaná v polárních souřadnicích:

$$2 \le \varrho \le 4, \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Řešení. Jde mezikruží ohraničené kružnicemi se středem v počátku a poloměry $r = 2$, $r = 4$ a vymezené přímkami $y = x$ a $x = 0$ (tj. osa y). ▲

Při transformaci integrálu do polárních souřadnic hraje důležitou roli determinant

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_\varrho & y_\varrho \\ x_\varphi & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho\cos^2\varphi + \varrho\sin^2\varphi = \varrho.$$

Tento determinant se nazývá *jakobián* zobrazení F pro převod kartézských souřadnic do polárních.

6.4 Transformace dvojného integrálu

Jestliže při výpočtu dvojného integrálu použijeme pro vyjádření množiny M polární souřadnice ϱ, φ, pak daný integrál transformujeme do polárních souřadnic, kde se objeví jakobián, a po té použijeme Fubiniovu větu. Tento postup lze popsat následujícím způsobem:

Věta 6.10. *Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na množině M a nechť je tato množina určená v polárních souřadnicích nerovnostmi*

$$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \quad \varrho_1(\varphi) \le \varrho \le \varrho_2(\varphi).$$

Pak platí

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 6.11. Vypočtěte

$$\iint_M (x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je kruh $x^2 + y^2 \le 9$.

Řešení. Nejprve popíšeme množinu M v polárních souřadnicích. Rovnice $x^2+y^2 = 9$ je rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem 3. V polárních souřadnicích tak dostáváme

$$0 \le r \le 3, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Nyní podle věty 6.10 dostaneme

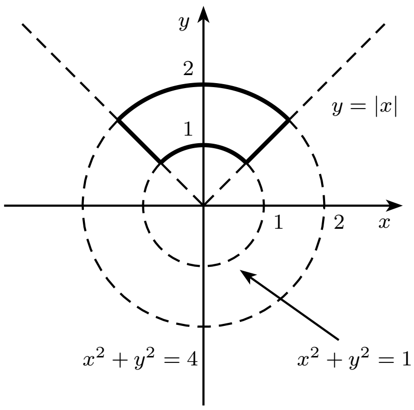
$$\iint_M (x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 r^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^3 (\cos\varphi - \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 9 \int_0^{2\pi} (\sin\varphi + \cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 9\,[\sin\varphi + \cos\varphi]_0^{2\pi} = 0$$

▲

Příklad 6.12. Vypočtěte
$$\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
kde oblast M je čtvrtinou kruhu $x^2+y^2 \le 1$ ležící v prvním kvadrantu.

Řešení. Množinu M v polárních souřadnicích můžeme popsat nerovnostmi
$$0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$
Podle věty 6.10 dostaneme
$$\iint_A \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r =$$
$$= \left| \begin{array}{c} 1-r^2=t \\ -2r\,\mathrm{d}r = \mathrm{d}t \\ 1 \rightsquigarrow 0, 0 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{-1}{2}\sqrt{t}\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_1^0 = \frac{\pi}{6}.$$
▲



Obrázek 6.3: Množina M z příkladu 6.13

Příklad 6.13. Vypočtěte
$$\iint_M \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
kde pro oblast M platí $1 \le x^2+y^2 \le 4$, $y \ge |x|$.

Řešení. Oblast ohraničená danými křivkami je část mezikruží, která je ohraničená přímkami $y = x$ a $y = -x$. Popsat mezikruží již umíme, jak můžeme popsat dané přímky? Jedna z možností je přímo, z názorného významu polárních souřadnic, tj. $y = x$ je $\varphi = \frac{\pi}{4}$ a $y = -x$ je $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Druhá možnost je pomocí dosazení transformačních rovnic a řešení příslušné goniometrické rovnice, například pro $y = x$, dostáváme $\cos\varphi = \sin\varphi$ a odtud $\varphi = \frac{\pi}{4}$. V polárních souřadnicích tak můžeme množinu M popsat nerovnostmi:
$$1 \le r \le 2, \qquad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}.$$

Pro daný integrál platí

$$\iint\limits_A \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^2 r^3(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_1^2 r^3\,\mathrm{d}r\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2\cdot[\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{15}{8}\pi.$$

▲

Závěrem podrobněji popíšeme transformaci dvojného integrálu. Tu lze provést nejen pro polární souřadnice, ale pro libovolnou "pěknou"transformaci. Příkladem je zobrazení, které transformuje lichoběžník na obdélník (takové zobrazení je lineární), nebo zobrazení které transformuje elipsu na obdélník. Výběr transformace se provádí podle tvaru množiny, přes kterou integrujeme.

Nejprve zaveďme následující pojmy.

Definice 6.14. Nechť je dáno zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené rovnicemi

$$x = k(u,v), \quad y = l(u,v), \tag{6.4}$$

kde funkce k a l mají spojité parciální derivace prvního řádu. Pak F se nazývá *spojitě diferencovatelné zobrazení* a determinant

$$\mathcal{J}(u,v) = \begin{vmatrix} k_u & k_v \\ l_u & l_v \end{vmatrix}$$

se nazývá *jakobián* zobrazení F. Jestliže $\mathcal{J}(u,v) \neq 0$, pak se toto zobrazení nazývá *regulární.*

Například, lineární zobrazení $x = au + bv$, $y = cu + dv$ má jakobián $J = ad - bc$. Toto zobrazení je regulární, jestliže $ad \neq bc$. Toto zobrazení transformuje lichoběžník v rovině xy na obdélník v rovině uv.

Věta 6.15. *Nechť je dána spojitá funkce f proměnných x a y na měřitelné množině $\mathcal{A}$. Nechť $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je prosté regulární zobrazení zadané rovnicemi* (6.4) *a nechť $A = F(B)$. Pak platí*

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_B f[k(u,v),l(u,v)]|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

6.5 Aplikace dvojného integrálu

Příklad 6.16. Určete obsah kruhu o poloměru R.

Řešení. Pro určení daného obsahu musíme spočítat $\iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde množina M je tvořena daným kruhem. Kvůli jednoduchosti umístíme kruh do počátku a množinu M popíšeme v polárních souřadnicích, dostaneme tak $0 \le \varrho \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Pro daný integrál tak máme

$$\iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^R r\,\mathrm{d}r = [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2$$

▲

Příklad 6.17. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného kružnicí $x^2 + y^2 = 2x$ a přímkami $y = x$, $y = 0$.

Řešení. Hledaný obsah bude určen integrálem $\iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je množina tvořená daným obrazcem. Upravíme-li doplněním na úplný čtverec rovnici $x^2 + y^2 = 2x$, dostaneme

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$

což je rovnice kružnice se středem v bodě $[1, 0]$ a poloměrem 1. Dosadíme-li za $x = r\cos\varphi$ a za $y = r\sin\varphi$ z transformačních rovnic, dostaneme pro danou kružnici rovnici $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin\varphi = 2r\cos\varphi$ a po úpravě $r = 2\cos\varphi$. Dané přímky mají rovnice $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{\pi}{4}$, máme tak popis množiny M

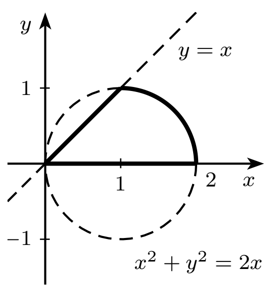
$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \le r \le 2\cos\varphi$$

Podle věty 6.10 dostáváme

$$\iint\limits_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos\varphi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[r^2\right]_0^{2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \left[\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

▲



Obrázek 6.4: Množina M z příkladu 6.17

Příklad 6.18. Určete objem tělesa, které je utvořené plochou rotačního paraboloidu $z = x^2 + y^2$ nad čtvercem určeného body $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[0, 1]$ a $[1, 1]$.

Řešení. Objem daného tělesa je dán integrálem $\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je množina tvořená daným čtvercem. Pro hledaný objem tak dostáváme

$$V = \int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^1 \mathrm{d}x = $$
$$= \int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

▲

Příklad 6.19. Určete hmotnost obdélníkové desky $M\colon 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{3}{2}$, která má v každém bodě $[x,y]$ plošnou hustotu $\rho(x,y) = xy$.

Řešení. Pro hmotnost H tenké desky M platí

$$H = \iint_M \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Dostáváme tak

$$H = \iint_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2\int_0^{\frac{3}{2}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{3}{2}} y\,\mathrm{d}y =$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}} = 2\cdot\frac{9}{8} = \frac{9}{4}.$$

▲

Poznámka 6.20. Mezi další fyzikální aplikace patří například určení momentů setrvačnosti či těžiště daného rovinného útvaru, případně určení celkového elektrické náboje na rovinné desce.

Cvičení

1. Vypočtěte následující integrály

   a) $\iint_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je čtverec určený body $[0,0]$,$[2,0]$,$[0,2]$ a $[2,2]$.

   b) $\iint_M xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je lichoběžník omezený přímkami $y=-1$, $y=x$, $x=0$ a $x=2$.

   c) $\iint_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je množina ohraničena nerovnostmi $1\le x\le 4$, $\frac{1}{x}\le y\le\sqrt{x}$.

   d) $\iint_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je trojúhelník určený body $[0,0]$, $[1,1]$ a $[2,0]$.

   e) $\iint_M (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je ohraničena křivkami $y=x^2$, $y=x$.

   f) $\iint_M (12+y-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je ohraničena parabolami $y=x^2$, $y^2=x$.

   g) $\iint_M \frac{y}{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je ohraničena přímkami $x=0$, $x=2\pi$, $y=0$ a grafem funkce $y=2+\sin x$.

2. Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočtěte následující integrály

a) $\iint\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde pro množinu M platí $x^2+y^2\leq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.
b) $\iint\limits_M xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde množina M je menší kruhová úseč vyťatá přímkou $x+y=1$ v kruhu $x^2+y^2\leq 1$.
c) $\iint\limits_M \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde pro množinu M platí $x^2+y^2\leq 1$, $x\geq 0$.
d) $\iint\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde pro množinu M platí $x^2+y^2-2y\leq 0$.
e) $\iint\limits_M \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde pro množinu M platí $x^2+y^2\geq 1$, $x^2+y^2\leq 3$, $y\geq\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y\leq\sqrt{3}x$
f) $\iint\limits_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde pro množinu M platí $1\leq x^2+y^2\leq 4$, $y\geq 0$, $y\leq x$.
g) $\iint\limits_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde pro množinu M platí $x^2+y^2\leq 4$, $y\leq x$, $y\geq -x$.

3. Určete obsah množiny M

a) Množina M je ohraničena hyperbolou $xy=1$ a přímkou $2x+2y=5$.
b) Množina M je omezená kružnicemi $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$ a přímkami $y=x$, $y=0$.

Výsledky:

1. a) $\frac{32}{3}$, b) $\frac{14}{5}$, c) $\frac{21}{2}-\ln 2$, d) $\frac{1}{3}$, e) $\frac{3}{20}$, f) $4+\frac{9}{140}$, g) $\frac{3\pi}{2}$.
2. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{20}$, c) $\frac{\pi(\mathrm{e}-1)}{2\mathrm{e}}$, d) $\frac{32}{9}$, e) $\frac{\pi^2}{6}$, f) $\frac{15}{16}\pi$, g) 0.
3. a) $\frac{15}{8}-2\ln 2$, b) $\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{2}$