Kapitola 7

Trojný integrál

Podobně jako jsme v předcházející kapitole integrovali funkci dvou proměnných, budeme se nyní zabývat integrálem funkce tří proměnných – *trojným integrálem.*

Fyzikálně můžeme definovat trojný integrál takto: hmotnost tělesa je rovna součinu jeho hustoty a objemu. Máme-li těleso $V \subset \mathbb{R}^3$ a jeho hustota je v bodě (x, y, z) rovna $f(x, y, z)$, pak hmotnost tohoto tělesa je dána trojným integrálem

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Geometricky můžeme definovat trojný integrál funkce $f(x, y, z) \equiv 1$ na množině (tělese) V jako míru této množiny (tj. objem tělesa)

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = m(V).$$

K výpočtu slouží opět Fubiniova věta, která převádí trojný integrál na trojnásobný, a transformace integrálu, nejčastěji do válcových nebo sférických souřadnic.

7.1 Fubiniova věta pro trojný integrál

Základní metodou pro výpočet trojného integrálu je Fubiniova věta, která je podobná jako pro dvojný integrál.

Věta 7.1 (Fubini)**.** *Nechť funkce $f(x, y, z)$ je spojitá na kvádru (trojrozměrném intervalu) $J = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$. Pak trojný integrál je*

$$\iiint\limits_J f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left(\int_e^g f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Poznámka 7.2. a) Jednoduché integrály na pravé straně jsou dobře definované (tj. funkce jsou integrovatelné). Podrobněji, označíme-li $J_1 = [c, d] \times [e, f]$, pak platí:

1) Funkce $h(x) = \iint\limits_{J_1} g(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ je integrovatelná na intervalu $[a,b]$ a

$$\iiint\limits_J g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\iint\limits_{J_1} g(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x.$$

2) Podobně, funkce $k(y,z) = \int_a^b g(x,y,z)\,\mathrm{d}x$ je integrovatelná na dvojrozměrném intervalu J_1 a

$$\iiint\limits_J g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{J_1} k(y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{J_1}\left(\int_a^b g(x,y,z\,\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

b) Když jsme počítali dvojný integrál přes obdélník u nezáleželo na pořadí v jakém integrujeme, podobně ani u trojného integrálu nezáleží při integraci na pořadí, pokud integrujeme přes kvádr.

Příklad 7.3. Vypočtěte trojný integrál

$$\iiint\limits_V (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde množina V je krychle, pro kterou platí $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$ a $0 \le z \le 1$.

Řešení. Použijeme větu 7.1, přičemž meze trojnásobného integrálu jsou zřejmé ze zadání.

$$\iiint\limits_V (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1\left\{\int_1^2\left(\int_0^1 (x+y)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\int_1^2 [xz+yz]_0^1\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1\left(\int_1^2 (x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_1^2\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1\left(2x+2-x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(x+\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x\right]_0^1 = 2.$$

▲

Věta 7.4 (Fubini)**.** *Nechť je dána množina v rovině*

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},$$

kde $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $[a,b]$ a $\varphi(x) \le \psi(x)$, a množina v prostoru

$$V\ = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ [x,y] \in M, \Phi(x,y) \le z \le \Psi(x,y)\}.$$

kde $\Phi(x,y)$, $\Psi(x,y)$ jsou spojité funkce na množině M a $\Phi(x,y) \le \Psi(x,y)$.

Je-li funkce $f(x,y,z)$ spojitá na množině V v prostoru, pak platí

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b\left\{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\left(\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x.$$

Jinými slovy, trojný integrál převedeme na trojnásobný integrál „od bodu k bodu“, „od funkce k funkci“ a „od plochy k ploše“. Postupně integrujeme podle z, pak podle y a nakonec podle x.

Příklad 7.5. Vypočtěte trojný integrál

$$\iiint_V xz \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde pro množinu V platí $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$ a $0 \le z \le \sqrt{x+y}$.

Řešení. Můžeme rovnou použít Fubiniovu větu 7.4 a daný integrál přepsat jako trojnásobný

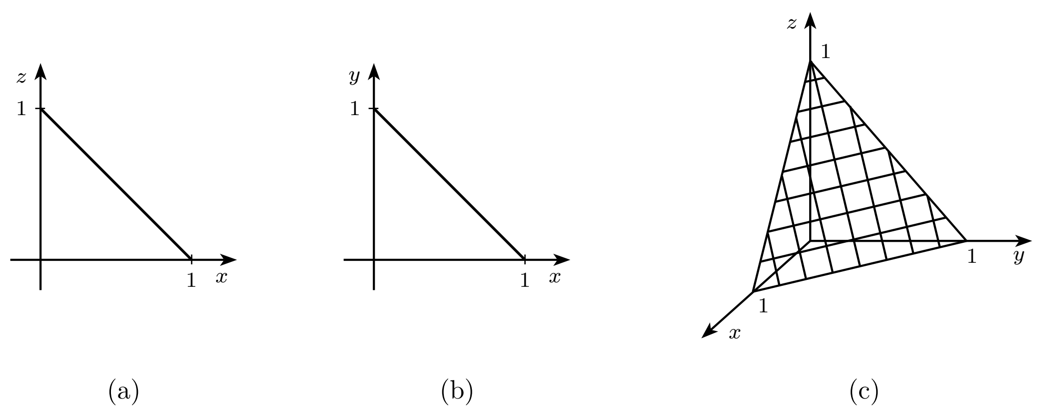
$$\iiint_V xz \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{\sqrt{x+y}} xz \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^x \left[xz^2\right]_0^{\sqrt{x+y}} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^x (x^2 + xy) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2}\right]_0^x \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^3 + \frac{x^3}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{3}{4} \int_0^2 x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{3}{4} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 3.$$

▲

Příklad 7.6. Vypočtěte

$$\iiint_V z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde množina V je ohraničena rovinami $x + y + z = 1$, $z = 0$, $y = 0$ a $x = 0$.



Obrázek 7.1: Zobrazení množiny V z příkladu 7.6

Řešení. Při výpočtu trojného integrálu, kdy daná množina není dána nerovnostmi, je výhodné si nakreslit dva obrázky, jeden pro danou množinu V a jeden pro její projekci na některou ze souřadných rovin (např. rovinu xy). V tomto případě můžeme vidět, že spodní hranicí našeho tělesa je rovina $z = 0$ a horní hranicí je rovina $x + y + z = 1$, resp. $z = 1 - x - y$. Obě tyto roviny se protínají v přímce $x + y = 1$ ($y = 1 - x$), které leží v rovině xy. Projekce do roviny xy je proto trojúhelník a máme tak popis dané množiny

$$V = \{(x, y, z) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\},$$

což nám umožní vypočítat daný integrál pomocí Fubiniovy věty

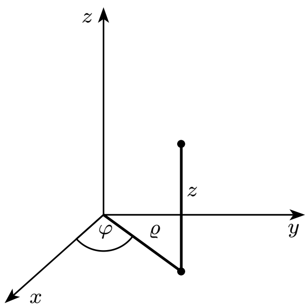
$$\begin{aligned}\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{1 - x - y}{3}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \left[-\frac{(1 - x)^4}{4}\right] = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

▲

7.2 Válcové souřadnice

Integrujeme-li přes válec V nebo jeho část, pak místo kartézských souřadnic x, y, z je výhodné používat válcové souřadnice ϱ, φ a z.

Nechť bod v prostoru má kartézské souřadnice $[x, y, z]$. Pak válcové souřadnice jsou: z (beze změny) a místo kartézských souřadnic x, y jsou polární souřadnice průmětu tohoto bodu do roviny xy. Odtud plynou rovnice transformace pro převod kartézských souřadnic do válcových:



$$x = \varrho \cos \varphi$$
$$y = \varrho \sin \varphi$$
$$z = z.$$

Příklad 7.7. Zapište v kartézských a v polárních souřadnicích následující množiny:

a) válec s osou v ose z, poloměrem $r = 10$ a výšce $v = 100$;
b) část koule se středem v počátku, poloměrem $r = 2$ ležící v prvním oktantu (tj. $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$,).

Řešení. a) Průmětem válce do roviny xy je kruh o poloměru 10. Vzhledem k tomu, že popis v této rovině provádíme pomocí polárních souřadnic a výška válce je 100, musí všechny body válce splňovat nerovnosti

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \varrho \le 10, \qquad 0 \le z \le 100.$$

b) Průmětem části koule do roviny xy je čtvrtkruh, který můžeme v polárních souřadnicích popsat nerovnostmi

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq \varrho \leq 2.$$

Rovnice koule o poloměru 2 a středu v počátku je v kartézských souřadnicích $x^2+y^2+z^2 = 4$. Rovnici v polárních souřadnicích dostaneme tak, že za x a y dosadíme transformační rovnice, tj.

$$x = \varrho\cos\varphi, \qquad\qquad y = \varrho\sin\varphi,$$

máme tak

$$z = \sqrt{4-\varrho^2}.$$

Celkem tak dostáváme popis naší množiny ve tvaru

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq \varrho \leq 2, \qquad 0 \leq z \leq \sqrt{4-\varrho^2}.$$

▲

Jakobián zobrazení F pro převod kartézských souřadnic do válcových je determinant

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} x_\varrho & y_\varrho & z_\varrho \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho.$$

Vidíme, že tento jakobián je stejný jako pro polární souřadnice.

7.3 Transformace trojného integrálu

Protože válcové souřadnice jsou polární souřadnice v rovině, postupujeme při transformaci trojného integrálu do válcových souřadnic podobně jako při transformaci dvojného integrálu.

Věta 7.8. *Nechť funkce $f(x,y,z)$ je spojitá na množině $V \subset \mathbb{R}^3$ a nechť je tato množina určená ve válcových souřadnicích nerovnostmi*

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \varrho_1(\varphi) \leq \varrho \leq \varrho_2(\varphi), \quad \Phi(\varrho,\varphi) \leq z \leq \Psi(\varrho,\varphi),$$

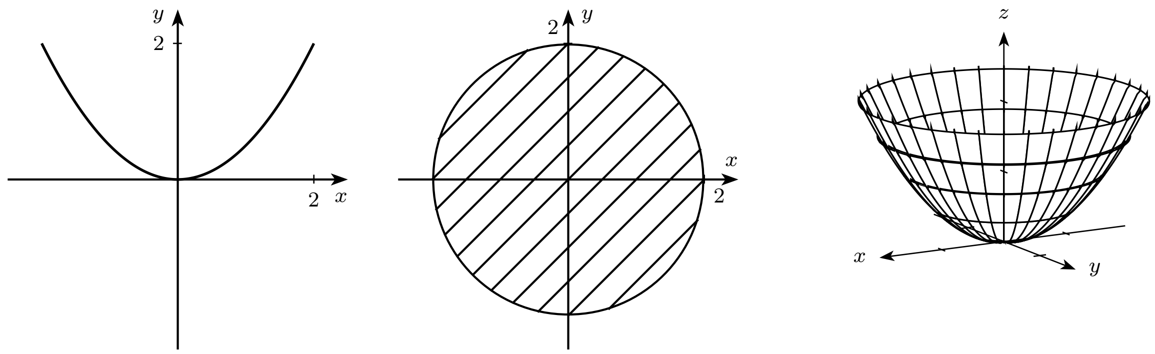
kde funkce ϱ_1, ϱ_2, $\Phi(\varrho,\varphi)$, $\Psi(\varrho,\varphi)$ jsou spojité. Pak platí

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \int_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} \left(\int_{\Phi(\varrho,\varphi)}^{\Psi(\varrho,\varphi)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)\,\varrho\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varrho \right\} \mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 7.9. Vypočtěte trojný integrál

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde pro množinu V platí $x^2+y^2 \leq 2z$ a $z \leq 2$.



(a) Průmět do roviny xz (b) Průmět do roviny xy (c) Graf funkce $z = x^2 + y^2$

Obrázek 7.2: Množina V z příkladu 7.9

Řešení. Množina V představuje část rotačního paraboloidu $z = \frac{x^2+y^2}{2}$, který je shora seříznut rovinou $z = 2$, která je rovnoběžná s rovinou O_{xy}. Integrál transformujeme do válcových souřadnic. Řez rovinou $z = 2$ získáme dosazením do rovnice paraboloidu, máme tak $4 = x^2 + y^2$. Vidíme, že řezem je kružnice se středem v počátku a poloměrem 2, do stejné kružnice v rovině xy se promítá i dané těleso. Pro množinu V tak dostáváme ve válcových souřadnicích popis

$$\frac{r^2}{2} \le z \ \le 2, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le r \le 2.$$

Pro daný integrál tak dostáváme

$$\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^3 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 \left[z\ \right]_{\frac{r^2}{2}}^2 \ \phi \,\mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(2r^3 - \frac{r^5}{2}\right) \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(2r^3 - \frac{r^5}{2}\right) \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \,\mathrm{d}r =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left(2r^3 - \frac{r^5}{2}\right) \,\mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12}\right]_0^2 = \frac{16\pi}{3}.$$

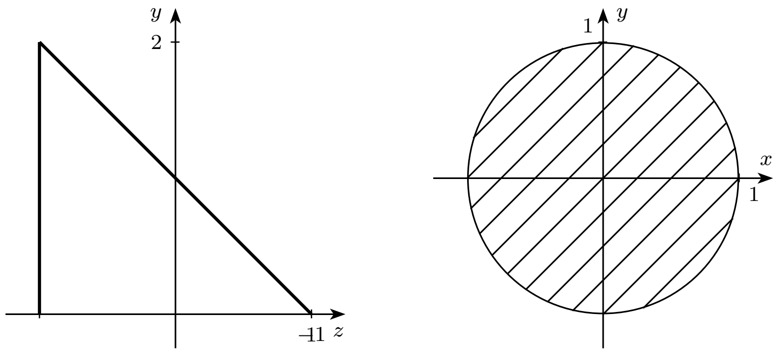
▲

Příklad 7.10. Vypočtěte

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V je množina omezená nerovnostmi $x^2 + y^2 \le 1$, $z \le 1 - y$ a $z \ge 0$.

Řešení. Množina V je válec, který je seříznut rovinou rovnoběžnou s osou x. Převodem do válcových souřadnic dostaneme $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ a dosazením transformačních rovnic



(a) Průmět do roviny xz (b) Průmět do roviny xy

Obrázek 7.3: Popis množiny V z příkladu 7.10

do rovnice roviny $0 \leq z \leq 1 - \sin\varphi$. Máme tak

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-\sin\varphi} r^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,[z]_0^{1-\sin\varphi}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(1-\sin\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[r^3\right]_0^1(1-\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

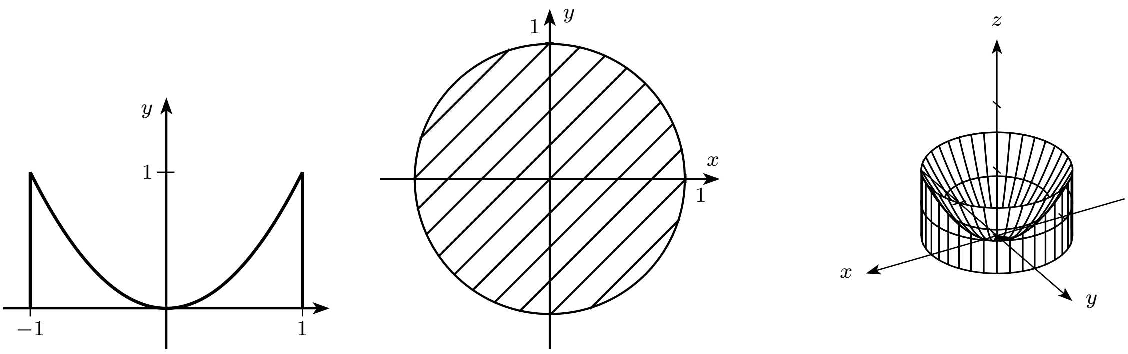
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(1-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\left[\varphi+\cos\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}.$$

▲

Příklad 7.11. Vypočtěte

$$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde pro množinu V platí $x^2+y^2 \geq z$, $x^2+y^2 \leq 1$, $z \geq 0$.



(a) Průmět do roviny xz (b) Průmět do roviny xy (c) Obraz množiny V

Obrázek 7.4: Ilustrace množiny V z příkladu 7.11

Řešení. Množina V je válec, ze kterého je „vyříznut“ kousek rotačního paraboloidu. Opět pomocí transformace do válcových souřadnic dostaneme $\varphi = [0, 2\pi]$, $r = [0, 1]$ (celé těleso je uvnitř daného válce), ve směru osy z je těleso omezené rovinou xy a daným paraboloidem, tedy $z = [0, x^2 + y^2]$ neboli $z = [0, r^2]$ po dosazení válcových souřadnic. Dostáváme tak

$$\iiint_V z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} rz \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^1 r \left[z^2\right]_0^{r^2} \mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi =$$

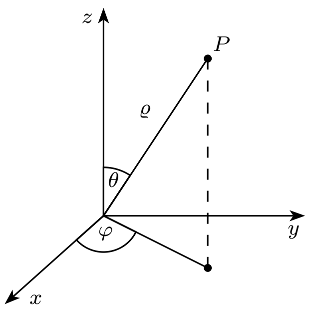
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^1 r^5 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left[r^6\right] \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{12} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}.$$

▲

Trojný integrál lze transformovat také do jiných souřadnic. Dalším typickým příkladem transformace jsou *sférické souřadnice* ϱ, φ a θ jsou definovány takto: Nechť bod v prostoru má kartézské souřadnice $[x, y, z]$. Pak souřadnice ϱ je vzdálenost bodu od počátku (průvodič), θ je úhel, který svírá průvodič s kladným směrem osy z, a φ úhel, který svírá průmět průvodiče do roviny xy, tj. hodnota $\varrho \sin\theta$, s kladným směrem osy x.

Znamená to, že v rovině xy máme místo kartézských souřadnic x, y polární souřadnice s průvodičem $\varrho \sin\theta$ a úhlem φ. Odtud plynou rovnice transformace pro převod kartézských souřadnic do sférických:



$$\begin{aligned} x &= \varrho \sin\theta \cos\varphi \\ y &= \varrho \sin\theta \sin\varphi \\ z &= \varrho \cos\theta. \end{aligned}$$

Jakobián tohoto zobrazení je $J = -\varrho^2 \sin\theta$.

Příklad 7.12. Zapište v kartézských, válcových a sférických souřadnicích kouli se středem v počátku a poloměrem $r = 4$.

Poznámka 7.13. Podobně jako u dvojného integrálu bychom mohli formulovat větu o obecné transformaci trojného integrálu, opět je nutné integrovanou funkci při přechodu k nový souřadnicím násobit jakobiánem této transformace.

7.4 Aplikace trojného integrálu

Příklad 7.14. Vypočítejte míru množiny V, která je ohraničená nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z \leq 0, \qquad x^2 + y^2 - z^2 \leq 0.$$

Řešení. Pro určení míry množiny V, potřebujeme spočítat $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. První nerovnost můžeme upravit do tvaru

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1,$$

jedná se proto o kouli se středem v bodě $[0,0,1]$ a poloměrem 1. Druhá nerovnost představuje část kužele s vrcholem v počátku. Dosadíme-li do obou rovnic sférické souřadnice dostaneme

$$\varrho^2 \sin^2\theta + 2\varrho^2\cos^2\theta - 2\varrho\cos\theta = 0 \Longrightarrow \varrho = 2r\cos\theta$$

$$\varrho^2\sin^2\theta - \varrho^2\cos^2\theta = 0 \Longrightarrow \cos 2\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dostáváme tak integrační meze

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \varrho \leq 2r\cos\theta$$

a výpočet daného integrálu je podle předchozí poznámky

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\cos\theta} \varrho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}\varrho^3\right]_0^{2\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \frac{16}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \left|\begin{array}{c} \cos\theta = t \\ \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1,\ \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| = \frac{16}{3}\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^3\,\mathrm{d}t = \pi^3.$$

▲

Cvičení

1. Vypočtěte následující integrály
   a) $\iiint\limits_V xy^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde V je omezena nerovnostmi $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
   b) $\iiint\limits_V (7x+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde V je omezena nerovnostmi $0 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq xy$.
   c) $\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde V je omezena rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$ a $x+y+z=1$.
   d) $\iiint\limits_V xy^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde V je omezena nerovnostmi $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq xy$.
   e) $\iiint\limits_V (x-y+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde V je omezena nerovnostmi $1 \leq x \leq 2$, $x \leq y \leq 2x$, $x+y \leq z \leq 2x+3y$.
   f) $\iiint\limits_V 2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde V je množina v prvním oktantu $(x,y,z \geq 0)$ omezena plochami $x^2+y^2-z^2+1=0$ a $x+y=1$.

2. Vypočtěte objem kužele pomocí dvojného a trojného integrálu.

3. Vypočtěte objem množiny V určené nerovnicemi

   a) $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2$.
   b) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $x^2 + y^2 \leq 4$.

4. Pomocí transformace do válcových souřadnic vypočtěte následující integrály

   a) $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde pro množinu V platí $x^2 + y^2 \leq 4$, $z \geq 0$, $z + y \leq 2$.
   b) $\iiint\limits_V x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde pro množinu V platí $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$, $|z| \leq 2$.
   c) $\iiint\limits_V yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde pro množinu V platí $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq y$.
   d) $\iiint\limits_V xz\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde pro množinu V platí $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 3$, $x \leq 0$, $y \geq 0$.

   Výsledky:

   1. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{59}{270}$, c) $\frac{1}{60}$, d) $\frac{1}{90}$, e) $\frac{1035}{8}$, f) $\frac{2}{3}$.
   2. a) $\frac{7}{12}\pi$, b) $\frac{4}{3}\pi(9 - 5\sqrt{5})$.
   3. a) 8π, b) $\frac{248}{15}$, c) $\frac{64}{15}$, d) $-\frac{135}{8}$.