MATEMATICKÁ EKONÓMIA

Seminárna práca

DYNAMICKÉ SYSTÉMY

Vypracovali:
Bc. Vratislav Patrík
Bc. Juraj Horák

OBSAH

1 Základné pojmy 3
1.1 Dynamické systémy v R^n 3
1.2 Dynamické systémy na varietách....4
2 Základné nástroje....5
2.1 Existencia, jedinečnosť a spojitosť riešení....6
2.2 Existencia rovnováh....7
2.3 Jedinečnosť rovnováh 8
2.4 Lokálna stabilita rovnováh 9
2.5 Globálna stabilita rovnováh....10
2.6 Existencia cyklov 12
3 Niektoré špeciálne druhy dynamických systémov 13
3.1 Gradientové systémy....13
3.2 Hamiltonovské systémy 16
4 Niektoré novšie techniky 16
4.1 Štrukturálna stabilita 17
4.2 Teória katastrofy 18
5 Použitá literatúra....19

Dynamické systémy a ich aplikácia v ekonómii

Táto kapitola poskytuje prehľad o základných matematických výsledkoch, týkajúcich sa dynamických systémov, ktoré sa ukázali ako užitočné v ekonómii. Zameriava sa hlavne na opísanie základných foriem hlavných matematických nástrojov, ktoré sú použiteľné v ekonomických aplikáciách.

1 Základné pojmy

1.1 Dynamické systémy v R^n

Stav systému pozostáva z definovania všetkého, čo potrebujeme vedieť za účelom popísania toho, ako sa systém bude meniť. Vo väčšine ekonomických aplikácií stav systému môžeme opísať nejakou n-ticou reálnych čísel. *Stavový priestor* nejakého systému pozostáva zo všetkých uskutočniteľných, alebo relevantných stavov. V takmer všetkých ekonomických aplikáciách, za stavový priestor možno považovať nejakú podmnožinu R^n. V mnohých týchto aplikáciách môžeme stavový priestor považovať za topologicky ekvivalentný k jednotkovému disku,

$$D^n = \{ x \in R^n \colon \|x\| \le 1\}.$$

Príklad 1

Uvažujme štandardný model všeobecnej rovnováhy, kde k-rozmerný vektor previsu dopytu, $z(p)$, je homogénna funkcia k nezáporných cien. Potom môžeme považovať za stavový priestor množinu všetkých nezáporných cien, R_+^k. Vhodnejší stavový priestor môžeme dostať tým, že si uvedomíme, že ceny môžu byť normalizované vzťahom $\sum p_i^2 = 1$. Teda stavový priestor bude v prvom ortante jednotkovej sféry,

$$S_+^{k-1} = \{ x \in D^k \colon \|x\| = 1, x \ge 0\}.$$

S_+^{k-1} je topologicky ekvivalentné k jednotkovému disku dimenzie $k - 1$.

Nech X určuje stavový priestor nejakého systému. Potom *stavová prechodová funkcia*, T, je funkcia z $X \times R$ do X. Reálna os interpretuje čas a $T(x, t)$ udáva stav systému v čase t, za predpokladu, že systém bol v stave x v čase 0. Vo väčšine aplikácií sa stavová prechodová funkcia nezadáva explicitne, ale implicitne *systémom diferenciálnych rovníc*,

$$\dot{x}_i\ (t) = \mathrm{d}\, x_i\ (t) \,/\, \mathrm{d}\, t = f_i\,(x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

$x_i(0) = x_{0i}$,

vektorovo zapisujeme

$\dot{x}(t) = f(x(t))$,

$x(0) = x_0$.

Nech x: $R \to X$ je riešenie tohto systému diferenciálnych rovníc s podmienkou $x(0) = x_0$. Potom $x(t)$ určuje stavovú prechodovú funkciu nasledovne:

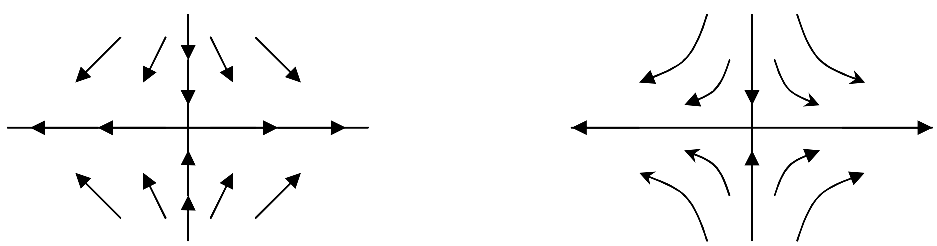
$T(x_0, t) \equiv x(t)$.

Niekedy chceme zdôrazniť závislosť stavu v čase t od počiatočného x. V tomto prípade budeme definovať *tok* diferenciálnej rovnice

$\phi_t = T(x, t)$.

Dynamický systém je stavový priestor so stavovou prechodovou funkciou.

Tieto pojmy sa dajú jednoducho predstaviť pomocou *vektorového poľa*. Tu uvažujeme priradenie vektora $f(x)$ každému bodu x v stavovom priestore. *Krivky riešenia* (trajektórie, dráhy) systému diferenciálnych rovníc $\dot{x} = f(x)$ sú grafy funkcie $\phi_t(x)$, kde t sa pohybuje na celej množine R a x na množine S. Je ľahko vidieť, že ak x je bod na nejakej krivke riešenia $\phi_t(\cdot)$, tak $f(x)$ je vektor dotyčnice krivky v bode x. Pre ilustráciu viď Obrázok 1.1.



Obrázok 1.1: Vektorové pole a krivky riešenia.

1.2 Dynamické systémy na varietách

Pre niektoré aplikácie v ekonómii chceme stavový priestor, ktorý je všeobecnejší ako R^n, alebo D^n. Budeme ho volať *varieta*. V tejto podkapitole načrtneme stručný úvod do teórie dynamických systémov na varietách.

Najprv zadefinujeme uzavretý polpriestor $H^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in R^m\colon x_m \geq 0\}$. Ďalej difeomorfizmus: f: $X \to Y$ je difeomorfizmus, ak f je homeomorfizmus[1] a f aj f^{1} sú diferencovateľné. Môžeme teda definovať varietu.

Definícia

Množina $X \in R^k$ je hladká m-varieta, ak každé $x \in X$ má okolie $U \cap X$ difeomorfické na otvorenej podmnožine $V \cap H^m$ množiny H^m.

Nech x je bod z m-variety X. Nech g je konkrétny difeomorfizmus medzi $U \cap X$ a $V \cap H^m$. Potom g budeme označovať ako *parametrizácia $U \cap X$*.

Pokiaľ g je zobrazenie medzi R^k a R^m, jej derivácie môžeme reprezentovať ako maticu typu $k \times m$ $\mathrm{D}f(x)$. *Dotyčný priestor* množiny X v bode x je obraz priestoru R^m v rámci lineárnej mapy $\mathrm{D}g^{-1}(y)$, kde $y = f(x)$.

Geometricky povedané, varieta je zovšeobecnenie myšlienky m-rozmerného povrchu a dotyčný priestor je zovšeobecnenie myšlienky dotyčnej nadroviny.

Vektorové pole na variete X je mapa f: $X \to R^m$ taká, že $f(x)$ je dotyčný priestor množiny X v bode x. Budeme uvažovať, že f definuje štandardný systém diferenciálnych rovníc na podmnožine R^k. Môžeme nájsť riešenie x: $R \to R^k$ tohto systému diferenciálnych rovníc. Pokiaľ dotyčný vektor k $x(t)$ v bode x je vždy dotyčnica povrchu X, krivky riešenia systému diferenciálnych rovníc musia ležať vo variete X. Teda vektorové pole f definuje dynamický systém na X.

2 Základné nástroje

V systéme diferenciálnych rovníc a v stavovom priestore X vznikajú rôzne otázky. Napríklad:

- *Existencia riešení*. Keď máme $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$, existuje vždy riešenie $x(t)$? Aké má vlastnosti $x(t)$?
- *Existencia rovnováh*. Existujú body $x^* \in X$ také, že $f(x^*) = 0$?
- *Počet rovnováh*. Koľko rôznych rovnováh existuje?
- *Lokálna stabilita rovnováh*. Keď sa mierne odchýlime z rovnováhy, vráti sa systém späť?

[1] Homeomorfizmus alebo topologický izomorfizmus je v topológii spojité bijektívne zobrazenie medzi dvoma topologickými priestormi, ktoré má spojité inverzné zobrazenie.

- *Globálna stabilita rovnováhy*. Ak začneme na ľubovoľnom bode x, dostaneme sa k rovnováhe?
- *Existencia cyklov*. Ak začneme v bode x, môžeme sa dostať naspäť do bodu x?

V nasledujúcich kapitolách budeme popisovať niektoré matematické nástroje, ktoré použijeme na zodpovedanie vyššie uvedených otázok a načrtneme niektoré príklady, ako sa tieto problémy vyskytujú v aplikáciách v ekonómii.

2.1 Existencia, jedinečnosť a spojitosť riešení

Nech f: $X \to R^n$ a nech $\dot{x} = f(x)$ definuje systém diferenciálnych rovníc s počiatočnou podmienkou $x(0) = x_0$. *Riešenie* tohto systému je diferencovateľná funkcia x: $I \to X$, kde I je interval z X taký, že $\mathrm{d}x(t) / \mathrm{d}t = f(x(t))$ a $x(0) = x_0$.

Základný výsledok existencie jedinečných riešení je:

Veta

Nech X je otvorená podmnožina množiny R^n a nech $x_0 \in X$. Nech f: $X \to R^n$ je spojitá diferencovateľná funkcia. Potom existuje $a > 0$ a jedinečné riešenie x: $(-a,a) \to X$ diferenciálnej rovnice $\dot{x} = f(x)$, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku $x(0) = x_0$.

Dôkaz

Viď Hirsch and Smale (1974, str. 163)

Ak sa zaujímame o *existenciu* riešenia, stačí nám predpokladať, že f je spojitá funkcia. Avšak jedinečnosť riešenia hovorí, že *krivky riešenia sa nemôžu pretínať*.

Často chceme vedieť ako sa krivky riešenia budú správať, ak budeme meniť počiatočnú podmienku. Ukáže sa, že sa menia spojito, teda, že ak x_0 a y_0 sú dostatočne blízko, tak aj $\phi_t(x_0)$ a $\phi_t(y_0)$ sú blízko.

Veta

Nech f je taká, ako je vyššie spomenuté a nech y: $[t_0;t_1] \to X$ je riešenie, ktoré obsahuje $y(t_0) = y_0$. Potom existuje okolie U bodu y_0 také, že pre všetky x_0 z U je riešenie x: $[t_0;t_1] \to X$ obsahujúce $x(t_0) = x_0$ a konštanta K taká, že

$\left|y(t)-x(t)\right| \leq K\left|y_0 - x_0\right| \exp\left|(K(t-t_0))\right|$, *pre všetky t z intervalu* $[t_0;t_1]$.

Dôkaz

Viď Hirsch and Smale (1974, str. 173).

Táto veta hovorí, že tok diferenciálnej rovnice $\phi_t : X \to X$ je spojitý ako funkcia premennej x.

2.2 Existencia rovnováh

Rovnováha dynamického systému $\dot{x} = f(x)$ je bod $x^* \in X$ taký, že $f(x^*) = 0$. Ak je dynamický systém v stave rovnováhy, zostáva v ňom navždy. Otázka znie: Kedy sú dynamické systémy v stave rovnováhy?

Veta

Nech f: $D^n \to R^n$ *je spojité vektorové pole na jednotkovom disku, ktorý sa zobrazí na hranicu* D^n*, teda, že* $x.\, f(x) < 0$ *pre každé x také, že* $\|x\| = 1$. *Potom existuje* $x^* \in D^n$ *také, že* $f(x^*) = 0$.

Dôkaz

Viď Spanier (1966, str. 197)

Príklad 2

Uvažujme Walrasov model z Príkladu 1, kde $z(p)$ je funkcia na S_+^{k-1}. Budeme predpokladať nasledovné:

- *Spojitosť*: z: $S_+^{k-1} \to R^k$ je spojitá.
- *Walrasovo pravidlo*: $p.z(p) = 0$ pre $p \in S_+^{k-1}$.
- *Vhodnosť*: $z_i(p) > 0$ pre $p_i = 0$, i = 1,…, k.

Potom existuje $p^* \in S_+^{k-1}$ také, že $z(p^*) = 0$. Aby sme toto uvideli, pripomeňme, že Walrasovo pravidlo hovorí, že $z(p)$ musí ležať v dotyčnom priestore množiny S_+^{k-1} a potom vhodnosť hovorí, že $z(p)$ leží na hranici S_+^{k-1}. Výsledok teda vyplýva z predchádzajúcej vety.

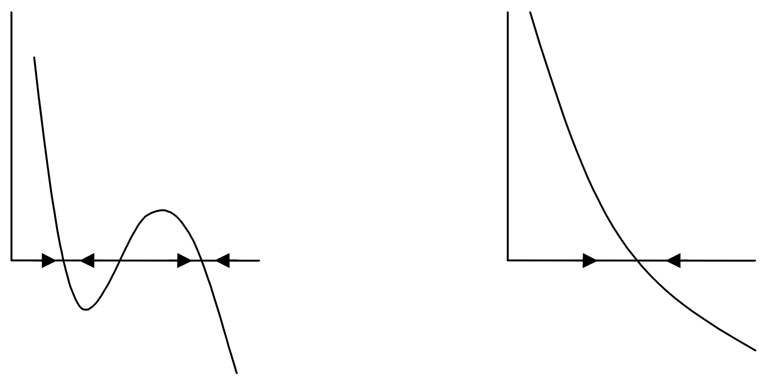
2.3 Jedinečnosť rovnováh

Predpokladajme, že máme hladký dynamický systém na disku, ktorý leží na hranici tohto disku. Vieme, že sa tu nachádza aspoň jeden bod rovnováhy x^*. Za akých podmienok bude existovať práve jeden bod rovnováhy?

Základný nástroj na zodpovedanie tejto otázky je *Poincarov index vektorového poľa*.

Uvažujme najprv jednorozmerný prípad, aby sme mohli dostať základnú predstavu. Nech $\dot{x} = f(x)$ definuje hladké vektorové pole na jednotkovom intervale, ktorého body ležia na hranici, teda napríklad také, že $f(0) > 0$, $f(1) < 0$. Potom bude platiť:

- S výnimkou „degenerovaných" prípadov existuje konečný počet rovnováh
- Vo všeobecnosti je toto číslo nepárne
- Ak $f'(x^*)$ má vždy rovnaké znamienko, tak existuje iba jediná rovnováha. (Obrázok 2.1.)



Obrázok 2.1: Jedinečnosť rovnováh.

Ukazuje sa, že tieto poznámky sa dajú zovšeobecniť na viacrozmerné prípady. V tom prípade, nech f: $D^n \rightarrow R^n$ je hladké vektorové pole na jednotkovom disku, D^n, ktoré sa zobrazí na hranicu D^n. Nech x^* je rovnováha. *Index* rovnováhy x^*, $I(x^*)$, je definovaný ako

+1	pre $\det(-Df(x^*)) > 0$,
- 1	pre $\det(-Df(x^*)) < 0$,
celé číslo závislé na topologických úvahách	pre $\det(-Df(x^*)) = 0$.

Teraz nasleduje základná veta diferenciálnej topológie:

Veta (Poincaré – Hopf)

Nech f: $D^n \to R^n$ má konečný počet izolovaných rovnováh (x_i), i=1,...,k, a nech sa f zobrazí na hranicu D^n. Potom

$$\sum_{i-1}^{k} I(x_i) = +1 .$$

Príklad 3

Aplikujeme túto vetu na problém jedinečnosti Walrasovej rovnováhy. Máme vektorové pole dané z: $S_{+}^{k-1} \to R^k$. Na výpočet indexu každej rovnováhy potrebujeme vybrať lokálnu parametrizáciu g: $S_{+}^{k-1} \to R^{k-1}$. Geometricky je zrejmé, že projekcia na R^{k-1} môže slúžiť ako vhodná parametrizácia. Algebraicky to znamená, že napíšeme $k \times k$ Jacobiho maticu pre $Dz(p^*)$ a vynechám posledný riadok a posledný stĺpec. Index rovnováhy p^* je determinant takto vzniknutej $(k-1)\times(k-1)$ matice s opačným znamienkom. S použitím Milnorovho tvrdenia, môžeme usúdiť, že ak $\det(-Dz(p^*)) \neq 0$ pre všetky rovnovážne hodnoty p^*, tak môže existovať len konečný počet rovnováh.

Z toho vyplýva jednoznačné riešenie nasledovne: ak $\det(-Dz(p^*)) > 0$ pre všetky rovnováhy, tak existuje len jedna. Ak existuje len jedna rovnováha, tak $\det(-Dz(p^*)) \geq 0$.

2.4 Lokálna stabilita rovnováh

Nech x^* je rovnováha dynamického systému $f : X \to R^n$. Približne povedané, táto rovnováha je lokálne stabilná ak sa systém vráti do x^* po jeho vychýlení do blízkych stavov. Ak má byť rovnováha ekonomicky relevantná v tom zmysle, že systém v nej zostáva rovnovážny nejakú dobu, zdá sa, že musí byť lokálne stabilná. Formulujeme presnú definíciu a vyšetríme kritériá stability:

Definícia

Rovnováha je lokálne asymptoticky stabilná ak existuje nejaké $e > 0$ také, že $\left|x_0 - x^*\right| < e$ tak, že platí $\phi_t(x_0)$ konverguje k x^* pre t idúce do nekonečna.

Veta

Nech x^* je rovnováha systému $f : X \to R^n$ a nech $Df(x^*)$ má všetky vlastné čísla záporné. Potom x^* je lokálne asymptoticky stabilná.

Dôkaz

Pozri Hirsch a Smale (1974).

Príklad 4

Uvažujme vyššie popísaný model Walrasovej rovnováhy. Je vhodné vybrať mierne odlišnú normalizáciu ceny. Nastavme *k*-tu cenu rovnú 1 a všetky ostatné ceny od nej odvodzujme. Nech *z* značí zobrazenie, ktoré zobrazuje týchto *k-1* normalizovaných cien na *k-1* previsov dopytu. Podľa Walrasovho zákona platí, ak $p^* >> 0$ a $z_1(p^*),...,z_{k-1}(p^*)$ sú nulové, tak aj $z_k(p^*)$ je nula. Teda rovnováhy systému $\dot{p} = z(p)$ sú práve Walrasove rovnováhy p^*, ktoré budú lokálne stabilné ak $Dz(p^*)$ bude mať všetky vlastné čísla záporné. Aká je ekonomická interpretácia tejto situácie?

Podľa Slutskyho rovnice môžeme $Dz(p^*)$ rozpísať ako

$$Dz(p^*) = \sum_{i=1}^{n} S_i(p^*) + \sum_{i=1}^{n} Y_i(p^*) = S(p^*) + Y(p^*),$$

kde $S_i(p^*)$ je substitučná matica *i*-teho spotrebiteľa (o ktorej vieme, že je negatívne definitná) a $Y_i(p^*)$ je „dôchodkový efekt“ pre *i*-teho spotrebiteľa. Matica $S(p^*)$ je negatívne definitná a preto má všetky vlastné čísla záporné. Teda ak „agregované dôchodkové efekty“ $Y(p^*)$ nie sú veľmi veľké, tak systém $\dot{p} = z(p)$ bude lokálne stabilný na p^*.

2.5 Globálna stabilita rovnováh

Nech x^* je rovnováha dynamického systému. Potom x^* je *globálne stabilná* ak sa $x(t)$ blíži k x^* pre *t* blížiace sa do nekonečna, pre všetky počiatočné podmienky x_0. To znamená, že x^* je globálne stabilné ak $\lim_{t\to\infty} \phi_t(x) = x^*$ pre každé *x*. Zrejme globálna stabilita zahŕňa lokálnánu stabilitu. Globálna stabilita je však oveľa silnejšia podmienka. Ako vieme povedať kedy je dynamický systém globálne stabilný? Hlavným nástrojom bude *Liaponovova funkcia.*

Definícia

Nech $\dot{x} = f(x)$ *je dynamický systém na X s rovnováhou* x^*. *Predpokladajme, že vieme nájsť diferencovatelnú funkciu* $V : X \rightarrow R$ *takú, že*

$$V(x^*) = 0, \quad V(x) > 0 \; pre \; x \neq x^*,$$

$$dV(x(t))/dt < 0 \qquad pre \; x \neq x^*.$$

Potom V sa nazýva Liaponovova funkcia.

Veta

Nech $f : X \rightarrow R^n$ *je dynamický systém, s rovnováhou* x^*, *kde X je kompaktná množina. Predpokladáme, že vieme nájsť Liaponovovu funkciu pre tento systém. Potom rovnováha* x^* *je globálne stabilná.*

Dôkaz

Pozri Hirsch a Smale (1974, str. 193)

Bohužiaľ všeobecne neexistuje jednoduchá cesta, ako nájsť Liaponovovu funkciu. Napriek tomu sú Liaponovove funkcie celkom prirodzene využiteľné v ekonomických aplikáciách.

Príklad 5

Nech p^* je rovnováha Walrasovho systému $\dot{p} = z(p)$. Predpokladáme, že $z(p)$ sa riadi „slabým zákonom odhalených preferencií", takže $p^* \cdot z(p) > 0$ pre každé $p \neq p^*$. Potom p^* je globálne stabilná rovnováha. Aby sme toto mohli dokázať. Musíme ukázať, že stavový priestor môže byť zvolený ako kompaktný, a že systém pripúšťa Liaponovove funkcie. Vynecháme prvú časť dôkazu a jednoducho ukážeme, že $V(p)$ môže byť zvolené ako $V(p) = \left\| p - p^* \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} (p_i - p_i^*)^2$.

Stačí nám derivovať $V(p(t))$,

$$\frac{dV(p(t))}{dt} = 2\sum_{i=1}^{k} (p_i(t) - p_i^*)\dot{p}_i(t).$$

Teraz využijeme fakt, že $\dot{p}_i(t) = z_i(p(t))$,

$$\frac{dV(p(t))}{dt} = 2\left[\sum_{i=1}^{k} p_i(t) z_i(p_i(t)) - \sum_{i=1}^{k} p_i^*(t) z_i(p(t)) \right] = -2p^* \cdot z(p(t)) < 0$$

Kde posledný krok vychádza z Walrasovho zákona a zo slabého zákona teórie odhalených preferencií.

2.6 Existencia cyklov

Nech $f : X \to R^n, \dot{x} = f(x)$ je hladký dynamický systém. Bod x sa nachádza v *uzavretej dráhe* ak x nie je rovnováha, ale platí $\phi_t(x) = x$ pre nejaké $t \neq 0$. To znamená, že stav je v uzavretej dráhe ak sa systém nakoniec vráti do tohto stavu. Uzavreté dráhy sú bežne označované ako *cykly*. Užitočným kritériom pre existenciu uzavretých dráh je Poincré – Bendixonova veta. Pred uvedením tejto vety potrebujeme niektoré definície.

Bod y v X je ω*-limitným bodom* bodu x ak existuje postupnosť $t_n \to \infty$ taká, že $\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(x) = y$. ω*-limitná množina* bodov *y*, $L_\omega(y)$ je množina všetkých ω-limitných bodov *y*.

Ak x^* je bod rovnováhy, potom $L_\omega(x^*)$ pozostáva iba z x^*. Ak x^* je globálne stabilná rovnováha, potom $L_\omega(x) = \{x^*\}$ pre ľubovoľné *x* z *X*. Ak *x* leží na nejakej uzavretej dráhe *C*, potom $L_\omega(x) = C$. Vo vyšších dimenziách, limitné množiny môžu mať veľmi komplikovanú štruktúru. Avšak v dvojdimenzionálnych systémoch ich štruktúra je jednoduchá:

Veta (Poincaré – Bendixson)

Neprázdna kompaktná limitná množina spojito diferencovateľného systému v R^2*, ktorá neobsahuje bod rovnováhy, je uzavretá dráha.*

Dôkaz

Viď Hirsch and Smale (1974, str. 248).

Príklad 6

Uvažujme Walrasov systém s troma tovarmi tak, aby $\dot{p} = z(p)$ definovalo dynamický systém na S_+^2. Predpokladáme, že tento systém smeruje na hranicu S_+^2, a budeme uvažovať, že tento systém je dynamický na D^2. Vieme, že musí existovať aspoň jeden bod rovnováhy p^* taký, že $z(p^*) = 0$. Predpokladajme, že všetky body rovnováhy sú úplne nestabilné v zmysle, že vlastné čísla matice $\mathrm{D}\,z(p^*)$ sú kladné. Potom tu musí existovať uzavretá dráha – „obchodný cyklus“.

Dôkaz je priama aplikácia Poincaré – Bendixsonovej vety. Najprv musíme zobrať na vedomie, že s indexom argumentu môže existovať len jeden bod rovnováhy p^*. Vyberieme ďalší bod p z D^2 a uvažujeme jeho limitnú množinu $L_\omega(p)$. Je to neprázdna, uzavretá a teda kompaktná podmnožina D^2. Ďalej neobsahuje bod rovnováhy, pretože p^* je jediný bod rovnováhy a je nestabilný. Preto $L_\omega(p)$ musí byť uzavretá dráha.

3 Niektoré špeciálne druhy dynamických systémov

Až do teraz sme sa zaoberali všeobecnými dynamickými systémami. V tejto časti uvažujeme dva špeciálne druhy dynamických systémov, ktoré sa často vyskytujú v ekonómii.

3.1 Gradientové systémy[2]

Dynamický systém na X, $\dot{x} = f(x)$ je *gradientový systém* ak existuje nejaká funkcia V: X$\rightarrow$ R taká, že $f(x) \equiv$-DV(x). Funkcia V(x) je často označovaná ako *potenciálová funkcia* systému, $f(x)$ je gradient V na x.

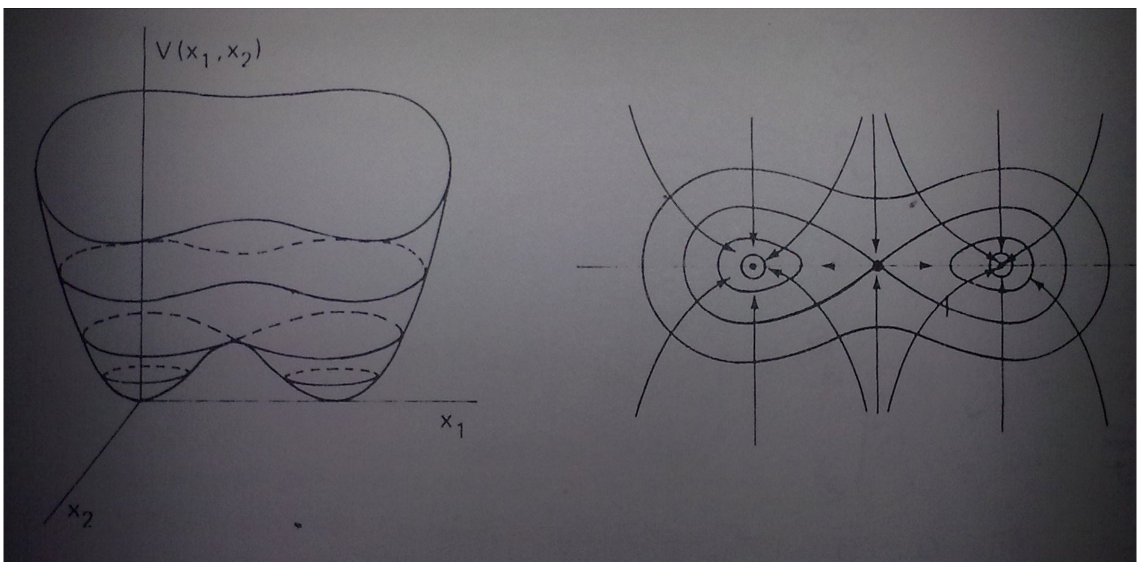


Figure 3.1. Gradient systems.

Obrázok 3.1: Gradientové systémy.

[2] Gradientové systémy vznikajú prirodzene v ekonómii, vždy pri použití algoritmov pre maximalizáciu alebo minimalizáciu nejakej funkcie. Pozri napríklad, Arrow-Hurwitz-Uzvawa (1958)

Veľmi dôležitá je geometrická interpretácia gradientových systémov. Na obrázku 3.1 je nakreslený graf potenciálovej funkcie V: $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ a niektoré úrovňové množiny tejto funkcie v R^2.

Smerová derivácia $V(x)$ v smere $h=(h_1,\ldots, h_n)$, $\|h\|=1$, je definovaná ako $\mathrm{D}V(x)\cdot h$. Smerová derivácia meria, ako rýchlo rastie V v smere h. Z definície vyplýva, že je to vlastne projekcia $\mathrm{D}V(x)$ na vektor h. Je preto zrejmé, že táto projekcia bude maximalizovaná ak $\mathrm{D}V(x)$ samotné bude ukazovať v smere h. Máme teda peknú geometrickú predstavu o gradiente: *Ukazuje smer v ktorom V rastie najrýchlejšie.*

Ďalej je ľahko vidieť, že $\mathrm{D}V(x)$ *musí byť kolmé na úrovňovú množinu* funkcie V v x. Pre úrovňovú množinu funkcie V na x, platí, že je to množina bodov, kde hodnota funkcie V ostáva konštantná. Preto smerová derivácia funkcie V v smere dotyčnice k úrovňovej množine V na x musí byť rovná nule. Ale toto nám hovorí, že $\mathrm{D}V(x)$ je kolmé na každý taký dotyčnicový vektor a preto je kolmé na celú úrovňovú množinu.

Tieto pozorovania nám zjednodušujú konštrukciu trajektórií $\dot{x}=-\mathrm{D}V(x)$ pre známu funkciu V. Typický príklad ukazuje obrázok 3.1. Niektoré ďalšie špeciálne vlastnosti gradientových systémov popisuje nasledujúca veta:

Veta

Nech f: $X \to R^n$ definovaný $\dot{x}=f(x)=-DV(x)$, kde V: $X \to R$ je nejaká hladká funkcia. Potom:

1) *Ak x^* je izolované minimum funkcie V, x^* je asymptoticky stabilná rovnováha systému $\dot{x}=-DV(x)$,*
2) *Každý ω-limitný bod trajektórie je rovnováha,*
3) *Vlasté čísla $Df(x)$ sú reálne na celom x.*

Dôkaz

Pozri Hirsch and Smale (1974, str. 199-209)

Bod 3) platí pretože $\mathrm{D}f(x)$ je vlastne $\mathrm{D}^2V(x)$ a teda musí byť reálna symetrická matica. Je tiež užitočné vedieť, že platí opačné tvrdenie: Ak máme dynamický systém na X, $\dot{x}=f(x)$, taký že $\mathrm{D}V(x)$ je všade reálna symetrická matica, potom existuje nejaká potenciálová funkcia V: $X \to R$ taká, že $f(x)=-DV(x)$. (Presné znenie Frobeniovej vety pozri Hartman(1969, kap. 6.))

Príklad 7

Uvažujme skoro štylizovaný Walrasov model, kde všetci spotrebitelia majú úžitkové funkcie lineárne v peniazoch. Problém maximalizácie úžitku pre spotrebiteľa i je

$$\max u_i(x_i) + m_i \quad \text{za podmienky } p\cdot x_i + m_i = w_i$$

kde

x_i= dopyt i-teho spotrebiteľa po tovare ($x_i^1,\ldots,x_i^k$),

m_i= dopyt i-teho spotrebiteľa po peniazoch,

w_i= počiatočné držané peniaze i-teho spotrebiteľa,

p= cenový vektor ($p_1,\ldots,p_k$).

Dopytová funkcia $x_i(p)$ i-teho agenta musí spĺňať podmienky prvého rádu:

$$\partial u_i(x_i(p))/\partial x_i^j = p_j\,, \qquad j=1,\ldots,k,$$

Alebo vo vektorovom zápise,

$$\mathrm{D}u_i(x_i(p))=p.$$

Derivovaním tejto rovnosti podľa p dostávame

$$\mathrm{D}^2u_i(x_i(p))\cdot\mathrm{D}\, x_i(p)=I,$$

alebo

$$\mathrm{D}\, x_i(p)= [\mathrm{D}^2u_i(x_i(p))]^{-1}.$$

Teda Jakobián dopytovej funkcie každého agenta je práve inverzia Hessiána úžitkovej funkcie.

Nech teraz ω je nejaká agregovaná ponuka k tovarov a definujeme agregovaný previs dopytovej funkcie $z(p)=\sum_{i=1}^{n} x_i(p)-\omega.$ Uvažujme dynamický systém $\dot{p}=z(p)$. Podľa vyššie uvedeného výpočtu je D$z(p)$ reálna symetrická matica, takže máme gradientový systém. Nie je ťažké, nájsť potenciálovú funkciu pre tento systém. Nech $v_i(p)=u_i(x_i(p))$ je *nepriama úžitková funkcia* i-teho agenta. Potom potenciálová funkcia pre systém $\dot{p}=z(p)$ je daná

$$V(p)=\sum_{i=1}^{n} v_i(p) + p\cdot\omega.$$

Z toho plynú nasledujúce vlastnosti. Ak predpokladáme, že $u_i(x_i)$ je striktne konkávna funkcia, tak $D^2 u_i(x)$ bude negatívne definitná matica. Tá má potom negatívne všetky vlastné čísla. Aplikovaním predchádzajúcich výsledkov vidíme, že systém má jedinú stabilnú rovnováhu p^*, ktorá vlastne minimalizuje súčet nepriamych úžitkových funkcií.

3.2 Hamiltonovské systémy

Nech $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ je dynamický systém pre *x* a *y* na $X \times Y$ obsiahnutý v $R^n \times R^n$. Takýto systém sa nazýva *Hamiltonovský systém*, ak existuje nejaká funkcia $H : X \times Y \to R$ (Hamiltonovská funkcia) taká, že

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) = D_y H(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y) = -D_x H(x, y). \end{aligned}$$

Hamiltonovské systémy vznikli celkom prirodzene v klasickej mechanike a slúžia k zjednoteniu štúdií mnohých javov v tejto oblasti. Ekonómovia si nedávno uvedomili mnohé ich aplikácie v ekonómii.

Primárnou vlastnosťou Hamiltonovských systémov v ekonomických aplikáciách je, že majú určité žiaduce vlastnosti stability. V klasickej teórii Hamioltonovskej mechaniky, *H* bolo kvadratické, a teda Hamiltonovský systém bol lineárny systém diferenciálnych rovníc. V tomto prípade klasická Poincarého veta hovorí, že ak je λ vlastné číslo lineárneho systému na (x^*, y^*), tak aj $-\lambda$ je vlastné číslo. Takže rovnováhou Hamiltonovského systému sú symetrické sedlové body. Vo všeobecnom prípade, keď Hamiltonovský systém nie je lineárny, nastáva rovnaký druh vlastnosti sedlových bodov, keď je funkcia konkávna v *x* a konvexná v *y*.

4 Niektoré novšie techniky

V tejto kapitole budeme skúmať dve novšie oblasti štúdia dynamických systémov a preberieme aj ich možné využitia v ekonómii.

4.1 Štrukturálna stabilita

Nech $f: X \to R^n$ definuje vektorové pole na nejakom stavovom priestore *X*. Potom, približne povedané, je tento systém *štrukturálne stabilný* ak malé odchýlky vo funkcii *f*, nemenia topologickú štruktúru vektorového pola $\dot{x} = f(x)$. Uvažujme napríklad prípad, keď $X = R^2$ a $f(x) = Ax$ kde A je regulárna matica typu 2×2. Potom vieme, že počiatok je jediná rovnováha systému a topologický charakter toku okolo počiatku je určený charakterom vlastných čísel matice *A*.

Pre „väčšinu" volieb matice A bude systém daný $\dot{x} = Ax$ štrukturálne stabilný, pokiaľ malé odchýlky v A nezmenia znamienka vlastných čísel. Jedinou výnimkou je, ak obidve vlastné čísla majú nulovú reálu časť. V tom prípade sa tok systému skladá z uzavretých dráh okolo počiatku. Avšak každá malá odchýlka matice *A*, ktorá dáva vlastnému číslu nenulovú reálnu časť, sa ukáže ako tok bez uzavretých dráh. Topologická štruktúra systému ukazuje drastickú zmenu – máme prípad štrukturálnej nestability.

Vráťme sa teraz k základnému nastaveniu vektorového pola $\dot{x} = f(x)$. Nech je stavový priestor tohto systému D^n. Nech je γ priestor všetkých spojite diferencovateľných funkcií z D^n do R^n, a vybavme γ štandardnou C^1 normou, tj. Dve funkcie sú blízko ak ich hodnoty sú blízko a aj ich derivácie sú blízko. Potom môžeme brať *odchýlku* funkcie *f* ako voľbu ľubovoľnej funkcie v nejakom ε-okolí funkcie *f*.

Chceme aby topologická štruktúra $\dot{x} = f(x)$ bola invariantná (nemenná) vzhľadom na malé odchýlky *f*. Čo to znamená? Ako popíšeme myšlinku, že dve vektorové polia majú rovnaké kvalitatívne vlastnosti?

Dôležitým pojmom je *topologická rovnosť*. Približne povedané, toky dvoch dynamických systémov na D^n sú topologicky rovné ak existuje homeomorfizmus $h: D^n \to D^n$, ktorý nanesie dráhy jedného toku na dráhy druhého toku. Tento homeomorfizmus môžeme považovať za nejakú spojitú zmenu súradníc, takú že topologická rovnosť dvoch tokov znamená, že môžeme nájsť spojitú zmenu súradníc tak, že jeden tok vyzerá ako druhý.

Nakoniec definujeme pojem *štrukturálna stabilita.* Dynamický systém $\dot{x} = f(x)$ na D^n je štrukturálne stabilný ak existuje okolie funkcie *f* také, že pre každú funkciu *g* v tomto okolí, tok indukovaný $\dot{x} = g(x)$ je topologicky rovný toku funkcie *f.* Voľne povedané, dynamický systém je štrukturálne stabilný ak malé odchýlky v základnej funkcie *f* nezmenia kvalitatívnu povahu toku.

4.2 Teória katastrofy

Nech máme nejaký dynamický systém daný funkciou $f : X \times A \to R^n, \dot{x} = f(x,a)$. Tu je systém myslený ako parametrizovaný nejakými parametrami $a = (a_1,...,a_r)$. Predpokladajme, že parametre a považujeme za pomaly sa meniace v čase. Väčšinu času malé zmeny v a nebudú mať za následok veľké zmeny v kvalitatívnej povahe dynamického systému. Niekedy však dostaneme reálnu štrukturálnu zmenu.

Napríklad uvažujme systém v R^1 daný

$$\dot{x} = x^2 + a .$$

Ak a je kladné, tak neexistuje rovnováha systému. Ak a je nulové, tak existuje jediná rovnováha $x^* = 0$ a ak je a záporné, tak existujú dve rovnováhy v $x_1^* = -a^{1/2}, x_2^* = +a^{1/2}$. Topologická povaha systému podstupuje radikálnu zmenu ako a prechádza cez nulu. Hovoríme, že nula je *bod katastrofy* pre systém $\dot{x} = x^2 + a$.

Cieľom teórie katastrofy je klasifikovať všetky cesty v ktorých môže systém podstupovať štrukturálne zmeny. Bohužiaľ, k dosiahnutiu tohto cieľa je ešte ďaleko. Súčasný stav teórie je dobre vyvinutý len na študovanie *lokálnych katastrof gradientových systémov.*

Nech $V : R^n \times R^r \to R$ je potenciálová funkcia pre gradientový systém. R^n je chápané ako stavový priestor systému a R^r je chápané ako priestor parametrov. Potom rovnováhy systému

$$\dot{x} = D_x V(x,a),$$

sú práve singularity funkcie $V(x,a)$, tj. x^* je rovnováha práve vtedy keď $D_x V(x,a)$ zmizne (neexistuje). Teda študovanie toho ako sa mení povaha systému $\dot{x} = D_x V(x,a)$ s meniacim sa a, môžeme zredukavať na študovanie singularít $V(x,a)$.

Predchádzajúci príklad $\dot{x} = x^2 + a$ sedí na túto konštrukciu pokiaľ je to gradientový systém s $V(x,a) = x^3/3 + ax$.

Pozoruhodné je že pre $r \le 4$, existuje len sedem rôznych druhov „stabilných“ singularít. To je sedem základných katastrof Thomovej klasifikačnej vety. Približne povedané, každá „nedegenerovaná“ singularita $V(x,a)$ môže byť klasifikovaná ako jedna z týchto siedmych základných typov. Predchádzajúci príklad kde $V(x,a) = x^3/3 + ax$ je príkladom tzv. *fold katastrofy*, najjednoduchšej z elementárnych katastrof.

5 Použitá literatúra

ARROW J., INTRILIGATOR M. *Handbook Of Mathematical Economics, volume 1,* ISBN 978-0-444-86126-9