Rovnováha v podmínkách nejistoty

1 Arrow-Debreuův model

K nejvýznamnějším pracím v oblasti ekonomické teorie v posledních zhruba 20-ti letech patří práce pánů Arrowa a Debreua, která se stala základem pro teorii všeobecné rovnováhy. Tento Arrow-Debreuův model (dále jen A-D model) je jedním z nejobecnějších modelů dokonale konkurenční ekonomiky. Původně byl zaměřen pouze na rovnováhu ekonomiky v podmínkách jistoty, ale později byl dále rozpracován, což umožnilo jeho uplatnění i na případy nejistoty, konkrétně nejistoty týkající se prostředí.

Základní myšlenkou modelu je rozlišování komodit nejen podle fyzikálních vlastností, času a místa jejich dostupnosti či užití, ale navíc také podle stavu prostředí. To znamená, že např. zmrzlina prodávaná při teplém počasí je jinou komoditou, než zmrzlina prodávaná za chladného počasí ve stejném čase a na stejném místě. Nejistota je tedy koncipována pomocí různých stavů prostředí, které mohou nastat.

"Svět" je rozdělen na dvě množiny proměnných :

1. proměnné rozhodování, které jsou kontrolovány agenty,
2. proměnné prostředí, které žádný z agentů nemůže kontrolovat.

Všechny ostatní proměnné jsou určeny předešlými dvěma typy.

Stav prostředí je po celou dobu trvání daného ekonomického systému zcela určen proměnnými prostředí. Soubor stavů budeme nazývat událostí.

Příklad

Uvažujeme-li událost "1. července 1970 bylo v New Yorku teplé počasí", pak je tato událost souborem všech možných minulých stavů, kdy teplota v New Yorku během 1. července 1970 dosahovala alespoň (např.) 24 °C.

Připustíme-li, že nemůžeme s jistotou znát budoucnost, pak zde v jakoukoliv danou dobu bude skupina elementárních pozorovatelných událostí, které lze reprezentovat pomocí rozdělení množiny všech možných stavů na skupiny vzájemně disjunktních podmnožin.

Uvažujme nyní "trh", který je zorganizovaný před začátkem fyzického průběhu ekonomického systému. Základní kontrakt na tomto trhu se skládá z nákupu (nebo prodeje) daného počtu jednotek dané komodity, jež se mají doručit na dané místo a v danou dobu právě tehdy, když nastane určitá elementární událost. Platba za nákup se provede nyní, v zúčtovacích jednotkách a pro cenu stanovenou pro danou kombinaci komodita-čas-místo-událost. Aby byla dodána komodita při více než jedné elementární události, zkombinují vhodné elementární kontrakty.

Příklad

Pokud dodání 1 litru zmrzliny v teplém počasí (ve stanovený čas a na stanovené místo) stojí nyní 1,50 USD a dodání 1 litru zmrzliny v jiném počasí (ve stanovený čas a na stanovené místo) stojí nyní 1,10 USD, pak dodání 1 litru zmrzliny nezávisle na počasí bude stát 1,50 USD + 1,10 USD = 2,60 USD.

V modelu budeme rozlišovat dva druhy ekonomických agentů - výrobce a spotřebitele. Výrobce si zvolí strategii - *produkční plán* - která určí množství každé vstupní a výstupní komodity v každou dobu a při každé elementární události. Současná hodnota výrobního plánu je součtem hodnot vstupů zmenšeným o součet hodnot výstupů. Každý výrobce je tedy charakterizován množinou všech svých realizovatelných produkčních plánů - *množinou výrobních možností.*

Také spotřebitel si volí svou strategii - *plán spotřeby* - který určí jeho spotřebu každé komodity v každou dobu a při každé elementární události. Spotřebitel je charakterizován množinou všech svých realizovatelných plánů spotřeby - *množinou spotřebních možností*, preferencemi, zdroji a podíly v podnicích. Současné čisté jmění spotřebitele je součtem celkové hodnoty jeho zdrojů a celkové hodnoty jeho podílů.

Rovnováha je množinou cen, spolu s plány výrobců a spotřebitelů, taková, že :

1. každý spotřebitel maximalizuje své preference v množině spotřebních možností s ohledem na své majetkové omezení (náklady nesmí převýšit současné čisté jmění),

2. každý výrobce maximalizuje zisk uvnitř své množiny výrobních možností,

3. celková poptávka je rovna celkové nabídce v každou dobu a při každé elementární události.

Povšimněme si předpokladu, že výrobci i spotřebitelé jsou *příjemci ceny.* Dále si povšimněme, že přesvědčení týkající se pravděpodobnosti stavů a postoj k riziku nemá vliv na chování výrobce, neboť pro dané ceny neexistuje nejistota u hodnoty výrobního plánu. Naproti tomu přesvědčení a postoj k riziku ovlivňuje chování spotřebitelů, i když pro dané ceny neexistuje nejistota u hodnoty čistého jmění.

Popsaný model se nazývá Arrow-Debreuův model a lze dokázat, že při klasických podmínkách (konvexita a spojitost spotřebních a výrobních množin, aj.):

1. existuje rovnováha,
2. rovnováha je Pareto-optimální,
3. každá Pareto-optimální volba spotřebního a výrobního plánu je rovnováhou vztahující se k nějakému systému cen.

V takovéto ekonomice jsou všechny kontrakty sjednány na počátku a veškeré následující jednání je dáno již vybranými plány. Protože jsou všechny účty vypořádány na začátku a neexistuje potřeba změnit jakoukoliv strategii a jsou od začátku jisté současné hodnoty u výrobců i spotřebitelů, neexistuje zde potřeba peněz, likvidity ani nejsou podněty pro obchod s podíly.

1.1 Rozšíření A-D modelu

V dosud představeném A-D modelu mají sice všichni agenti neúplnou informaci o stavu prostředí (v jakoukoliv dobu), nicméně všichni mají stejnou informaci. Tento předpoklad však není kvůli vlivu nejistoty v ekonomice udržitelný. Rozšíříme tedy model tak, aby umožňoval rozdíly v informacích mezi ekonomickými agenty.

V každou dobu může být informace, kterou má daný agent k dispozici, charakterizována pomocí rozkladu množiny stavů prostředí. Předpokládejme, že každý rozklad musí být alespoň tak jemný, jako je rozklad popisující elementární události v tuto dobu.

Příklad

Každá množina v rozkladu událostí v danou dobu může stanovit teplotu, zatímco každá množina v informačním rozkladu daného agenta může jen specifikovat, zda byla teplota v danou dobu vyšší či nižší než (např.) 24°C.

Informace agenta omezuje jeho množinu realizovatelných plánů a to následovně. Předpokládejme, že v danou dobu agent ví, že stav prostředí leží v množině A (jedna z množin z jeho informačního rozkladu v danou dobu) a předpokládejme, že množina A obsahuje několik elementárních událostí. Pak jakékoliv opatření, jenž agent v tuto dobu přijme, musí být stejné pro všechny elementární události v množině A.

Příklad

Je-li agent spotřebitel, pak jeho spotřeba jakékoliv komodity v danou dobu musí být stejná pro všechny elementární události v informační množině A.

Posloupnost informačních rozkladů daného agenta se nazývá *informační struktura.* Tato struktura je pevná, pokud je stanovena nezávisle na akcích jakéhokoliv agenta. Řekneme, že daný plán je kompatibilní s touto strukturou, jestliže splňuje podmínky uvedené v předešlém odstavci.

Předpokládejme, že množiny spotřebních a výrobních možností charakterizují takové plány, které by byly realizovatelné, pokud by měl agent "úplnou informaci" (tj. jeho informační rozklad by v každou dobu splýval s rozkladem u elmentárních událostí). Množinu realizovatelných plánů pro jakéhokoliv agenta s pevnou informační strukturou můžeme získat, pokud mu zakážeme takové plány z množiny možností při úplné informaci, které jsou kompatibilní také s jeho danou informační strukturou.

Tímto jsme získali teorii existence a optimality rovnováhy v dokonale konkurenčním prostředí, která je vztažená k pevné informační struktuře.

1.1.1 Volba informací

Zpravidla vyžaduje získání a užití informací ohledně prostředí výdaje na zboží a služby, tj. na komodity. Pokud jeden z výrobních plánů vyžaduje více informací pro svou implementaci než ostatní plány (tj. potřebuje jemnější informační dělení v jednom či více časech), pak by seznam vstupů měl odrážet zvýšené vstupy pro informace. Tímto způsobem může množina realizovatelných výrobních plánů odrážet možnost volby mezi alternativními informačními strukturami.

Naneštěstí získání informací vyžaduje přípravné náklady, tj. zdroje potřebné k získání informací mohou být nezávislé na rozsahu výrobního procesu, při kterém jsou ty informace použity. Tyto přípravné náklady budou vnášet do množiny výrobních možností nekonvexnost a tedy jedna ze základních podmínek v teorii A-D ekonomiky by nebyla splněna.

1.1.2 Kritika rozšířeného A-D modelu

Pokud je A-D model interpretován přesně, pak od ekonomických agentů vyžaduje schopnosti, které daleko přesahují realitu. S tím souvisí i to, že teorie vyžaduje např. v zásadě kompletní systém pojistných trhů, což se ukázalo být až příliš komplexním a detailním, navíc bez praktického významu.

Dále je kritizováno, že teorie nebere v úvahu alespoň tři důležité základní rysy moderní kapitalistické ekonomie:

1. peníze,
2. akciové trhy,
3. trhy aktivní v každou dobu.

Obě linie kritiky však zároveň uvádějí doporučení, jak by se A-D teorie mohla poopravit, aby uvedené skutečnosti zohlednila.

1.2 Posloupnost trhů

Nyní budeme v našem modelu namísto rozsáhlého jednotného trhu uvažovat posloupnost trhů v po sobě jdoucích časech a předpokládejme, že žádný z těchto trhů není kompletní, tj. v každou dobu a pro každou komoditu existují nějaké časy a události v budoucnu, pro které nebude možné uzavřít smlouvy o budoucím doručení podmíněném těmito událostmi. V tomto modelu bude hned několik typů koncepcí rovnováhy.

Jednou z možností je uvažovat posloupnost chvilkových rovnováh, při které je aktuální trh zúčtován v každém čase. Ceny, při kterých bude zúčtován, jsou závislé na očekáváních agentů. Tyto očekávání lze vyjádřit pomocí funkcí - ukážou nám, jaké budou ceny ve stanovenou dobu při každé elementární události. Při postupném vývoji posloupnosti chvilkových rovnováh se budou očekávání jednotlivých agentů postupně korigovat a to z důvodu nových informací o prostředí a aktuálních cenách. Za určitých podmínek bude posloupnost rovnováh konvergovat ke stacionárnímu stavu. Tento stav pak bude tvořit druhý koncept.

Další z konceptů rovnováhy vyplyne ze zkoumání konzistence mezi očekáváními a plány agentů. Plány agentů budou *konzistentní*, pokud se pro každou komoditu, čas a událost plánovaná nabídka rovná plánované poptávce a pro akciové trhy platí odpovídající podmínka. Pak je *rovnováha plánů, cen a cenových očekávání* množinou cen na aktuálních trzích, množinou cenových očekávání a konzistentní množinou individuálních plánů takovou, že při daných aktuálních cenách a cenových očekáváních je pro každého agenta jeho plán optimální. Pokud agenti využívají rovnovážné ceny k posouzení prostředí, pak má rovnováha speciální formu tzv. *rovnováhy racionálních očekávání.*

2 Události, komodity, závazky a ceny

Uvažujeme ekonomiku s množinou času t a s množinou alternativních stavů S. Možné stavy prostředí jsou reprezentovány posloupnostmi $s = (s_t)$, kde s_t je ***stav prostředí v čase*** t a s jako ***kompletní historie prostředí***. Pro každé t bude množina alternativních stavů s_t označena S_t.

Ekonomické veličiny (spotřeba, ceny, ...), které mohou být pozorovány v čase t mohou záviset na minulých a současných stavech prostředí, ale ne na budoucích. *Elementární události v čase* t jsou tedy částečné posloupnosti $e_t = (..., s_{t-1}, s_t)$ stavů prostředí až do času t; *událost v čase* t je množina elementárních událostí v čase t.

Množina S_t je pro každý čas t konečná. Pokud je historie prostředí konečná (do minulosti), potom pro každý čas je pouze konečný počet událostí v tomto čase. Na druhou stranu, pokud se historie prostředí rozprostírá nekonečně daleko do minulosti, potom pro každý čas je nekonečně mnoho (resp. nespočetně mnoho) elementárních událostí v čase. V takovém případě se obvykle nepovažuje za "pozorovatelnou" (měřitelnou) každá množina elementárních událostí, ale pouze sigma-algebra takových množin (značená $\mathbf{F}_t$); $\mathbf{F}_t$ je bráno jako sigma-algebra generovaná všemi *válci*[1] (cylinders), např. kartézskými součiny $\times_{u \leqslant t} A_u$, takovými, že $A_u = S_u$ pro všechny časy u (pro jejich konečný počet). V obou případech bude $\mathbf{F}_t$ množina (pozorovatelných) událostí v čase t.

Pro každý čas existuje konečná množina "komodit" číslovaných $1, ..., H$. *Jednoduchý závazek* v čase t v (elementární) události e_i udává počet jednotek komodity h, kterou obchodník dodá "na trh" v čase $u\,(\geqslant t)$ v nějaké události $F \in \mathbf{F}_u$. Pro $u = t$ máme "spotový (současný)" závazek, zatímco pro $u > t$ máme "forwardový (budoucí)" závazek. Množina komodit v každém čase může záviset na čase a na události, která se v tomto čase objeví. My budeme předpokládat, že množina komodit je stejná v každé dvojici čas-událost.

V každém čase a v každé elementární události v tomto čase budeme mít trh v závazcích, s možností budoucího doručení podmíněného výskytem nějaké události v budoucnu. Množina trhů bude proto indexována množinou M možných dvojic čas-událost. Formálně: nechť M je množina všech dvojic (t, e) takových, že t je čas a e je elementární jev v čase t. Existuje přirozené uspořádání množiny M: pro $m = (t, e)$ a $n = (u, f)$ z M řekneme, že $m \leqslant n$ pokud $t \leqslant u$ a f je zjemněním e, tj. částečná historie e je počáteční podposloupností částečné historie f. To znamená, že $m \leqslant n$, pokud by dvojice čas-událost n mohla vyplývat z dvojice čas-událost m (nebo je stejná jako m).

Na reálných trzích nejsou všechny možné závazky obchodovány. Množina obchodovatelných závazků je dána zvnějšku v jakékoli specifické dvojici čas-událost. Pro každou dvojici čas-událost $m = (t, e) \in M$, každý čas $u \leqslant t$ a každou komoditu h, nechť $\mathbf{M}^h_{mu}$ je množina (ne nutně elementárních) událostí v čase u, která je dána exogenně a má následující vlastnosti:

[1] *Válec* je událost závisející na stavech prostředí pouze v konečně mnoha časech.

(a) $\mathbf{M}^h_{mu}$ je buď prázdná nebo je podpolem $\mathbf{F}_u$;

(b) $\mathbf{M}^h_{mt} = \mathbf{F}_t$, pokud $m = (t, e)$ tj. všechny spotové závazky jsou povolené;

(c) $\mathbf{M}^h_{mu}$ je konečná pokud $m = (t, e)$ a $t < u$. (2.1)

Množiny $\mathbf{M}^h_{mu}$ můžeme nazvat tržní soustava (pole).

Předpokládejme nyní, že pokud ve dvojici čas-událost m můžeme udělat závazek pro doručení v čase v (podmíněný událostí F), potom můžeme v pozdější dvojici čas-událost $n \geqslant m$ udělat to stejné. Formálně

pokud $m = (t, e)$, $n = (u, f)$, $m \leqslant n$, $v \geqslant u$ a F je v $\mathbf{M}^h_{mv}$

potom F je v $\mathbf{M}^h_{nv}$. (2.2)

Předpokládejme, že není povoleno udělat závazek ve dvojici čas-událost $m = (t, e)$ pro doručení v čase následujícím po čase u (podmíněným výskytem události F v čase u), pokud daná událost e, čas t a událost F v čase u nejsou možné.

Nakonec předpokládejme, že existuje horní hranice L přípustných závazků (L je kladné číslo). Hranice je přirozená - například závazek doručit množství mnohem větší, než je celková nabídka komodity, nebude věrohodná pro středně dobře informovaného obchodníka.

Jednoduchý závazek ve dvojici čas-událost $m = (t, e)$ na doručení nějakého množství komodity h v čase u, podmíněném výskytem události F v čase u, je ***přípustný*** pokud

m je v M a $u \geqslant t$,

F náleží do $\mathbf{M}^h_{mu}$, a

množství závazaného nepřekročí L. (2.3)

Přípustné závazky lze reprezentovat pomocí měřitelných funkcí. Nechť M je událost v čase u a uvažujme jednoduchý závazek na doručení r jednotek komodity h v čase u právě tehdy, pokud nastane událost F. Takový závazek je považovaný za funkci definovanou na elementárních událostech v čase u, která nabývá hodnoty r na množině F a nulu jinde. Zobecnělejší formou závazku může být reálná funkce z definovaná na množině elementárních událostí v čase u, kterou lze interpretovat tak, že množství $z(e)$ bude doručeno, pokud nastane elementární událost e. Pokud je $\mathbf{M}$ konečné podpole událostí v čase u, existuje konečné dělení množiny elementárních událostí v čase u takové, že každá událost z M je sjednocením prvků tohoto dělení. Každá suma jednoduchých závazků přípustných s ohledem na $\mathbf{M}$ bude funkcí definovanou na elementárních událostech s vlastností, že je konstantní na prvcích dělení generujících $\mathbf{M}$. Tato vlastnost je ekvivalentně: pro každé reálné číslo r je množina elementárních událostí, ve kterých je doručeno množství r, množinou v $\mathbf{M}$. Z toho dostáváme následující definici: pokud $\mathbf{F}$ je sigma-algebra událostí v čase u a z je reálná funkce na množině elementárních událostí v čase u, pak z je měřitelná s ohledem na $\mathbf{F}$ (je $\mathbf{F}$-měřitelná) pokud, pro každé reálné číslo r množina elementárních událostí e takových, že $z(e) \leqslant r$, je v $\mathbf{F}$.

Nyní zobecníme definici přípustných závazků: ***přípustný závazek*** ve dvojici čas-událost $m = (t, e)$ pro doručení komodity h v čase $u \geqslant t$ je reálná funkce na množině elementárních událostí v čase u, která je měřitelná s ohledem na $\mathbf{M}^h_{mu}$ a omezená (ohraničená) L. (2.4)

Měřitelné funkce poskytují způsob reprezentace cen. Uvažujme částečné dvojice čas-událost m, podposloupnost času u, komoditu h a odpovídající přípustný závazek z. Pokud p je reálná funkce na množině elementárních událostí v u měřitelná v $\mathbf{M}^h_{mu}$, a interpretujeme $p(e)$ jeko cenu (v m) komodity h doručené v čase u právě tehdy, když nastane elementární událost e, pak ***hodnota závazku*** z je skalární součin

$$pz = \sum_e p(e)\, z(e), \tag{2.5}$$

zajišťující, že je zde pouze konečně mnoho událostí v čase u.

Pro každou dvojici čas-událost $m = (t, e) \in M$, nechť Z_m značí vektorový prostor se všemi závazky přípustnými v m, tj. vektorový prostor všech polí (soustav) z^h_{mu} takových, že

$u \geqslant t$; $h = 1, ..., H$,

z^h_{mu} je měřitelné s ohledem na $\mathbf{M}^h_{mu}$. (2.6)

Pokud si dva obchodníci vymění závazky, říkáme, že uzavřeli smlouvu. Podmínky smlouvy určují relativní ceny zahrnutých komodit. Smlouva uzavřená daným obchodníkem na trhu v m bude soustava čistých závazků, které reprezentujeme vektorem $z_m \in Z_m$. Stejným způsobem ceny na trhu v m reprezentujeme vektorem $p_m \in Z_m$, který nazveme ***systém cen*** v m. Čistý příjem obchodníka v m je skalárním součinem těchto dvou vektorů $(p_m z_m)$.

3 Tržní rovnováha

3.1 Dočasná rovnováha na trhu

Uvažme určitý okamžik čas-událost, m. Budeme se nyní zabývat, jak můžeme determinovat rovnovážnou cenu a množství na určitém trhu v čase m. Systém cen v čase m označíme p_m, z_m bude označovat celkový přebytek tržní nabídky, tj. závazky obchodníků z minulosti, současné dostupné zdroje, zkušenosti s minulými cenami, očekávání budoucích cen, dostupnost zdrojů, preference současné a budoucí spotřeby. Zjednodušeně můžeme říci, že trh je v rovnováze je-li převis tržní nabídky nulový.

Teorie rovnováhy říká, že každý obchodník má jedinečný vektor převisu nabídky. Proto celkový vektor převisu nabídky trhu bude vytvořen jako množina vektorů převisu trhu všech obchodníků, což je zobrazení vektorů cen na vektory převisu nabídky.

Jakmile zaúčtujeme ceny, je přirozené předpokládat, že dva úměrné cenové vektory, by měly zvětšit množinu vektorů přebytku. Držba majetku může být reprezentována kontrakty, ve kterých je současný převod změněný jako příslib budoucího převodu, v tomto případě musí být majetek zahrnut na seznamu komodit. Budeme předpokládat, že ceny musí být nezáporné. Nechť P_m určuje jednotku simplexu Z_m, tj. množina všech nezáporných vektorů v Z_m, souhrn těch, jejichž souřadnice jsou jednotné. Cenový vektor v m je omezený na vektor v P_m. Celkový převis vyhovující nabídky, σ_m je zobrazení z P_m do podmnožiny Z_m.

Jakmile požadujeme nezápornost cen, můžeme předpokládat, že v rovnováze bude převis nabídky komodit pozitivní, ale pouze tehdy, je-li odpovídající cena nulová.

Nyní definujeme krátkodobou rovnováhu trhu v m. Předpokládejme, že σ_m vyjadřuje znalosti obchodníků o minulých cenách a událostech. Krátkodobou rovnováhu na trhu v m definujeme jako dvojici (z_m^*, p_m^*) tak, že

- z_m^* je v Z_m a p_m^* je v P_m^*
- z_m^* je v $\sigma_m(p_m^*)$
- $z_m^* \geq 0$
- pro libovolné přiřazení z_m^*, které je ostře positivní, odpovídající přiřazení p_m^* je nulové

Než přejdme k alternativním teoriím chování nabídky, předpokládejme, že může existovat převis nabídky a také zaručme existenci krátkodobé rovnováhy. Máme Walrasův zákon

$$pz = 0 \text{ pro každé } p \text{ v } P_m \text{ a } z \text{ v } \sigma(p)$$

Zákon plyne z dílčích rozpočtových omezení nebo jako pravidlo, které říká, že všechny uzavřené kontrakty v m zohledňují stejný cenový systém.

Požadavek, že přiřazení vektorů převisů nabídek obchodníkům bude možné, implikuje, že existuje horní hranice celkového převisu rovna IL, kde I je počet obchodníků a L je hranice z (2.4.) Tato horní hranice a podmínka c z (2.1), implikují možnou rovnováhu. Existuje tedy ohraničená podmnožina v Z_m, ke kterému můžeme omezit celkový převis vyhovující nabídky aniž bychom změnili množinu hranice L.

Následující věta dává postačující podmínky existence krátkodobé rovnováhy.

Věta 3.1. *Nechť σ_m je celkový převis vyhovující nabídky pro daný trh M. Na trhu existuje krátkodobá tržní rovnováhá v m, jestliže σ_m má následující vlastnosti:*

- *existuje uzavřená ohraničená podmnožina $\widehat{Z_m} \subset Z_m$ taková, že $sigma_m$ je horní hemicontinuous corespondence ze P_m do $\widehat{Z_m}$*
- *pro každé p z P_m , je $\sigma_m(p)$ neprázdný a konvexní*
- *pro každé p z P_m a Z ze $\sigma_m(p), pz = 0$*

3.2 Arrow-Debreu model

Arrow-Debreu model pro přesun komodit na úplném trhu, můžeme brát jako speciální případ našeho modelu pro rovnováhu na trhu v určitý okamžik. Předpokládejme, že čas běží od 0 do $T-1$ a začněme v $t = 0$. Dále předpokládejme, že neexistuje nejistota okolí v počáteční den. Podle předpokladu z předchozí kapitoly je každý trh $M_m u^h$ je konečný a každý vektorový prostor Z_m je konečné dimenze. Abychom popsali podmínky, že v počáteční okamžik 0 neexistuje nejistota, předpokládejme, že množina S_0 má jediný prvek, existuje tedy jediná vhodná dvojice v okamžiku 0. Tuto vhodnou dvojici označíme symbolem 0.

Předpoklad, že trh je úplný, formálně popíšeme vztahem

$$M_{0u}^{h} = F_u, \text{ pro každé } u \geq 0 \tag{1}$$

Předpoklad úplnosti trhu 1 a 2.2. říkají, že trhy jsou úplné v každé dvojici data-okamžiku, tj.

$$M_{0u}^{h} = F_u \text{ pro každé } m \text{ a každé datum } u \text{ následující po } m.$$

Nechť v (z_0^*, p_0^*) nastává krátkodobá rovnováha pro 0, jak bylo uvedeno v kapitole 2. Dále uvažme následující pár datum-čas, m. Každý závazek dpřípustný v m je také přípustný v 0. Nechť p_m^* je omezení cenového systému p_0^* ve vektorovém prostoru Z_m, vhodně normalizovaného. Otázkou je, zda-li agent v m, bude chtít uzavřít nové závazky, které neuzavřel v 0. Odpověď zní ne. Jednak všechny závazky, které jsou dostupné v m, byly také dostupné v 0. Dále rozpočtové omezení agenta v m by požadovalo, aby všechny nové závazky v m měly nulovou čistou hodnotu při cenách p_m^*, ale stejně tak při cenách p_0^*. Z toho důvodu jakékoliv nové závazky, které jsou dostupné a finančně výhodné v m, byly také výhodné a dostupné v čase 0, při cenách p_0^*. Z toho plyne, že za daných předpokladů nebude po čase 0 důvod trhy znovu otevřít, v 0 nastane krátkodobá rovnováha, při které agenti provádí své obchody po celou dobu existence dané ekonomiky. Trh v čase nula je formálně shodný s trhem s jistotou. Shodnost je stanovená tím, že jsme označili statky doručené v jiný pár čas-událost jako jiné statky.

3.3 Informace a očekávání

Připomeňme, že jsme stanovili zvláštní dvojici čas-událost, dále, že převis vhodné nabídky pro dvojici čas-událost reflektuje obchodníkovi informace o minulých cenách a o vývojí situace v souvislosti s daným okamžikem. Jestliže převis vhodné nabídky daného obchodníka je generován uspokojením potřeb, potom odpovídající potřeby budou podmíněny dostupnými informacemi. Jestliže obchodníkovi preference můžeme měřit podle užitku, subjektivní pravděpodobnosti a vyhovují-li Hypotézám očekávaného užitku, potom dané pravděpodobnosti jsou podmíněny dostupnými informacemi. Tyto podmíněné pravděpodobnosti vyjadřují obchodníkova očekávání budoucnosti. Pro naše řešení problému nutně nepotřebujeme, aby obchodníkovi preference splňovali hypotézy očekávaného užitku, ale v následujícím textu od nich neupustíme.

Obchodník očekává jak budoucí ceny, tak i vývoj situací v okolí. V očekávání vývoje situace není žádný konceptuální problém. Podle Hypotézy očekávaného užitku je každý obchodník charakterizován subjektivní pravděpodobností měřenou na množině úplných historií v okolí. Vývoj okolí tedy chápeme jako exogenní veličinu a obchodníkova subjektivní pravděpodobnost budoucích událostí dává informaci o čase a je dobře definovaná.

Není však tak zřejmé jak pohlížet na obchodníkovo očekávání budoucích cen. Ukážeme dva možné přístupy k tomuto problému. První označíme *dokonalá předpověď(perfect forseight approach*. Předpokládejme pro sled událostí s na trhu, má každý obchodník svůj jedinečný vektor cen $\phi_t^*(e_t)$. Jestliže každý zná zákony řízení ekonomického systému, potom každý obchodník dokáže spočítat následující posloupnost funkce ϕ_t^*. V tomto případě pro libovolnou dvojici čas-událost jsou obchodníkova očekávání budoucích cen dobře definovány z hlediska funkce ϕ_t^* a jeho podmíněné subjektivní pravděpodobnosti, měřené podle historie událostí, dané jeho současnými informacemi. Obchodníci se nepotřebují shodnout na pravděpodobnosti budoucích událostí a tedy ani na rozdělení budoucích cen. Potřebují se však shodnout, jaká cena připadá k jaké události. Tento typ nazveme*očekávání společné cenové funkce.*

Přístup dokonalé předpovědi implikuje, že v rovnováze obchodníci očekávají společnou cenovou funkci. Cenová funkce očekávání nám říká, jaká cena nastane v rovnováze pro danou dvojici čas-událost. Na základě těchto úvah, jsou obchodníkovi strategie takové, že pokud je v rovnováze provede, trh bude vyčištěn pro danou dvojici čas-událost. Otázka existence cenové rovnováhy je podrobněji zmíněna v následujících kapitolách.

Tento model, tak jak byl popsán v sekci 2, může být čištěn tak, že představuje pravděpodobnost, že různí obchodníci mají různé informace o okolní situaci. Například, každému obchodníkovi v čase t přiřadíme podpole F_t, které reprezentuje události jaké mohl daný obchodník v čase t vysledovat. Zvláště můžeme vyslovit hypotézu, že obchodníci nemohou sledovat individuální preference a počáteční bohatství ostatních. Popíšeme-li pro každého obchodníka alternativní hypotézu pravidel ekonomického systému, funkce očekávání společné ceny ztratí na svém významu.

Situace, ve které obchodníci vstupují na trh s odlišnými necenovými infomacemi, dává agentům možnost dozvědět se o vývoji situace z cen, poněvadž tržní ceny toto reflektují. Vezměme extrémní případ. Vnitřní informace mohou vést obchodníka k nastavení ceny o mnoho vyšší, než by běžně byla. V tomto případě chytrý pozorovatel trhu může z ceny rozpoznat, že někdo zjistil příznivé informace. Obecněji, agenti, kteří správně rozumí trhu, mohou z cen odvodit závěr o informacích obdržených od jiných zákazníků.

Ze vztahů mezi necenovými informacemi získanými účastí na trhu a cenami trhu v individuálních modelech můžeme odvodit tyto závěry. Na druhou stranu skutečná vazba je určena individuálním chováním agentů a odtud jejich individuální modely. Dále agenti mají možnost změnit jejich individuální modely na základě získaných pozorování a zveřejněných dat. Zde je opět zpětná vazba od vztahu k individuálnímu modelu. Rovnováha tohoto systému, ve kterém jsou individuální modely identické s opravdovým nazveme *rovnováha racionálních očekávání*.

Tento koncept rovnováhy je jemnější než běžný koncept rovnováhy nabídky a poptávky. V rovnováze racionálních očekávání nejsou ceny určeny pouze jako průsečík nabídky a poptávky, ale jednotliví agenti správně vnímají skutečné vazby mezi necenovými informacemi získanými z trhu a odpovídajícími rovnovážnými tržními cenami. Tento koncept se podstatně liší od modelu, ve kterém se agenti reagují na ceny, ale nepokouší se z nich odvodit necenové informace ostatních agentů.

Průzkum rovnováhy racionálních očekávání je poměrně čerstvý, subjekty zatím nebyly plně prozkoumány. Nicméně několik podstatných výsledků je v následujícím textu kapitoly 4.

Poslední přístup nazveme *omezený racionální přístup*. Tento přístup je mnohem méně definovaný, ale vyjadřuje mnoho různých ústupků z hypotézy plně racionálního chování obchodníků. Předpokládáme, že obchodníci plánují na omezenou dobu nebo, že jejich očekávání plynou, ze speciálních pravidel. Příklad je popsán v podkapitole (3.6).

3.4 Rozšířený Arrow-Debrau model

Připomeňme, že v Arrow-Debreuho modelu jsme předpokládali, že všichni obchodníci mají na daném trhu v daném čase stejné informace. Informace získané v čase t jsme označili F_t. V zobecněném Arrow-Debreu modelu předpokládáme, že obchodníci mohou mít různé informace, tj. informace obchodník i v čase t označíme F_{it}, závisí jak na i, tak na t. Jak vidíme Arrow-Debreu model potřebuje pozměnit a zahrnout předpoklad, že informace jsou exogenní.

Než získáme podmínky pro existenci optimální rovnováhy, uvedeme formální model preferencí a spotřeby obchodníků. Mějme obchodníka i, dále e_t označuje událost v čase t. Nechť $x_{it}(e_t)$ je H-rozměrný vektor počtu statků $1 \dots H$ spotřebovaných obchodníkem i v okamžiku e_t v čase t. Funkce x_{it} zobrazuje události v čase t do R^H. Pole $x_i = (x_{it})$ nazveme plán spotřeby obchodníka i.

Nechť X_i udává množinu vhodné spotřeby obchodníka i. Tato množina spotřeby reflektuje různá omezení obchodníka-biologická, psychologická, sociologická. X_i přesně odpovídá běžnému konceptu spotřeby v Arrow-Debreu modelu. Navíc X_i reflektuje informace dostupné pro obchodníka i. Abychom vyjádřili myšlenku, že obchodník může plánovat současnou spotřebu na základě informací, které se dozví v budoucnu, požadujeme měřitelnost x_{it} s ohledem na F_{it}. Tento požadavek pojmenujeme jako podmínka *informační proveditelnosti. (information feasibility)*

Je vhodné zmínit, že pro dané F_{it} informační proveditelnost představuje množinu lineárních omezení funkce x_{it}. Nejsnadněji je to vidět na případě konečného počtu událostí v čase t. V tomto případě je funkce x_{it} vektorem dimenze odpovídající součinu počtu komodit a počtu elementárních událostí. Jestliže množina F je prvkem rozdělení získaným z F_{it}, potom obchodníkovy i-té informace se neliší od dvou událostí v F, obchodníkova i-tá spotřeba musí být v těchto dvou okamžicích shodná. Soubor rovnovážných rovnic je shodný s podmínkami, že x_{it} je měřitelné podle F_{it}. Soubor funkcí informační proveditelnosti x_{it} je lineárním podprostorem množiny funkcí z elementárních události v R^H. Tato poslední vlastnost zobecňuje případ, ve kterém množina elementárních událostí v čase t není konečná. Z toho plyne, že obchodníkova i-tá spotřeba, X_i, leží v lineárním podprostoru plánů spotřeby x_i, tak že pro každé t je x_{it} měřitelné podle F_{it}.

Předpokládáme, že každý obchodník i má preference uspořádané na své množině spotřeby. Tyto preference označíme $\lesssim_i$. Nechť ψ_i je míra pravděpodobnosti množiny úplné historie S. Tato míra pravděpodobnosti vyjadřuje domněnky obchodníků týkající se relativní pravděpodobnosti různých budoucích historií, nebo může vyjadřovat vlastní informace obchodníka v čase 0, či obojí. Pro danou historii s, nechť $x_i(s)$ udává realizovanou spotřebu obchodníka, je to vektor z prostoru dimenze HT, kde T je číslo dne.

Obchodníkova užitková funkce je funkce reálné hodnoty, u_i na R^{HT} a očekávaný užitek z plánované spotřeby x_i je očekávaná hodnota $u_i[x_i(s)]$. Obchodník preferuje plán produkce s vyšším očekávaným užitkem, jestliže je očekávaný užitek shodný, mezi plány nerozlišuje. V následujícím textu nebudeme potřebovat, aby obchodníkovy preference byly konzistentní s očekávaným užitkem, ale při zapojení různých předpokladů na plánovanou spotřebu se to bude hodit.

Nechť pro každého obchodníka i, $w_{it}(e_t)$ udává vybavenost statky v čase t obchodníka i při události e_t. Je přirozené předpokládat, že funkce w_{it} je měřitelná podle F_{it}, stejně tak jako, že obchodníci sami mohou realizovat prodeje, když nastane vhodný okamžik. Nechť w_i udává sled w_{it}, což pojmenujeme i-té počáteční bohatství.

Nechť pro každý čas t je F_t nejmenší sigma algebra z množiny elementárních událostí v čase t, které pro každé i obsahuje F_{it}. Nechť Z_t je množina F_t-měřitelných funkcí zobrazující elementární události v t do R^H. Sigma algebra F_t představuje všechny informace dostupné obchodníkům v čase t. Podle definice sigma algebra F_t, počáteční bohatství obchodníka jsou body v Z a spotřeba obchodníků je podmnožina v Z.

Omezme nyní situaci na případ konečného počtu dní a konečného počtu událostí. V tomto případě bude množina Z konečné dimenze.
V rozšířeném Arrow-Debreu modelu, tak jak byl představen, budeme předpokládat, že trhy jsou úplné. Bez újmy nsa obecnosti můžeme vzít pouze jeden trh v čase 0 a cenový systém jako prvek Z. Podle plánů spotřeby x_i obchodníka i, je plán obchodu z_i definován jako $z_i = w_i - x_i$.

I-tice (x_i) plánu spotřeby (jeden pro každého obchodníka) nazveme dosažitelným, jestliže plán spotřeby každého obchodníka je v jeho množině spotřeby a celková spotřeba nepřekročí počáteční bohatství, což odpovídá

$$\sum_i x_i \leq \sum_i w_i \tag{2}$$

Jakmile máme jeden trh, každý obchodník i má vlastní rozpočtové omezení,

$$px_i \leq pw_i \tag{3}$$

kde p je cenový systém.
Nyní je rozšířený Arrow-Debreu model formálně ekvivalentní s Arrow-Debreu modelem s jistotou. Teorie rovnováhy v takovémto modelu je dobře známá, ale abychom přiblížili některé základní hypotézy této teorie v kontextu nejistoty, připomeneme soubor podmínek nutných pro existenci rovnováhy a uděláme nějaké poznámky k optimálním vlastnostem v rovnováze.
K definici vhodné poptávky i-tého obchodníka pro každý cenový systém p, nechť $\delta_i(p)$ je množina vektorů nejpreferovanější spotřeby v X_i, která vyhovuje rozpočtovému omezení (3.6). Rovnováha je dvojice $\{p, (x_i^*)\}$, kde p je

nenulový nezáporný systém cen, (x_i) je dostupná I-tice plánu spotřeby a

$$x_i^* \text{ je v } \delta_i(p), \qquad i = 1, \dots I \tag{4}$$

$$p \sum_i (w_i - x_i^*) \geq 0 \tag{5}$$

Předchozí podmínka a (2) spolu s nezáporným cenovým systémem p říkají, že pro každou komoditu h, v každý den t při každé události e_t v čase t, dávají, že převis nabídky

$$\sum_i [w_{it}^h(e_t) - x_{it}^{*h}(e_t)]$$

je nenulový nebo odpovídající cena $p_t^h(e_t)$ je nenulová.

Věta 3.2. *Rovnováha existuje pro každého obchodníka i, pokud jsou splněny následující podmínky*

- *X_i je uzavřené konvexní, existuje vektor $\bar{x}_i$, takový že $x_i \geq \bar{x}_i$ pro každé x_i v X_i*
- *ke každému vhodnému plánu spotřeby, existuje další, také vhodný, který obchodník i striktně preferuje před prvním*
- *obchodníkova i-tá předobjednaná preference je spojitá a konvexní*
- *w_i je v X_i*
- *existuje $\tilde{x}_i$ v X_i takové, že $\tilde{x}_i \leq w_i$*
- $\sum_i (w_i - \tilde{x}_i) \gg 0$

Konvexnost preferencí můžeme interpretovat jako absenci riskování (averze k riziku, či neutralita k riziku). Řekneme, že předobjednaná preference je konvexní na podmnožině X ze Z, jestliže pro každý bod x a y v X takový, že x je striktně preferováno před y, potom libovolná konvexní kombinace x a y odlišná od y je opět preferována před y. Předpokládejme, že x a x' jsou plány spotřeby, takové že F je množina historie okolí, že F' je doplňkem F a

$$x(s) = \begin{cases} r, & \text{pro } s \text{ v } F, \\ r' & \text{pro } s \text{ v } F', \end{cases} \quad x'(s) = \begin{cases} r', & \text{pro } s \text{ v } F, \\ r & \text{pro } s \text{ v } F', \end{cases}$$

Předpokládejme, že obchodník nerozlišuje mezi x a x', což můžeme interpretovat tak, že obchodník věří, že události F a F' jsou ekvivalentní. Nyní předpokládejme, že plán spotřeby x'', definovaný

$$x'' \equiv \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x'$$

Poznamenejme, že

$$x''(s) = \frac{r + r'}{2} \text{ pro každé } s$$

Spojitost a konvexita obchodníkových preferencí implikuje, že x'' je pro něj alespoň tak dobré jako x' nebo x. Tedy obchodník je averzní nebo neutrální k riziku.

Připomeňme, že dostupná I-tice plánu spotřeby je Paretovsky optimální, jestliže neexistuje žádná další dostupná I-tice plánu spotřeby, kterou si nějaký obchodník nepohorší a alespoň jeden nepolepší. Dostupnost je definována vzhledem k množinám spotřeby $X_1 \ldots X_I$, což odráží dostupné informace několika obchodníků. Paretovsky optimální je zde tedy vztaženo k dostupným informacím.

Uvažme jaký efekt bude mít zvýšení množství dostupných informací pro obchodníky. Zvýšení informací se promítne ve zjemnění sigma algeber F_{it}. To způsobí zvětšení množiny vhodných plánů spotřeby X_i a zvětšení I-tic plánů spotřeby. Nemůžeme však říct, že nová rovnováha bude Paretovsky nadřazena staré.

3.5 Soukromé informace, morální hazard, vlastní výběr a podněty pro znovu otevření trhu

Je neobvyklé, aby obchodníci uzavřeli kontrakt pouze na základě informací, které mohou sami zjistit, například soukromých informací. Tyto typy kontraktů jsou vyjmuty z rovnováhy v rozšířeném Arrow-Debreu modelu. Toto omezení a předpoklad, že pouze čisté exogenní události mohou být použity jako nepředvídané skutečnosti pro doručení, omezí množinu kontraktů v rovnováze.

Jako lepší se ukazuje definovat informace jako nesoukromé. Nejprve uvedeme speciální případ. Předpokládejme, že všechny informace v ekonomice máme znázorněny jako seznam proměnných, pojmenovaných informační signály. Informace jakéhokoliv obchodníka se skládají z podmnožin informačních signálů. Signál je soukromý, jestliže je pozorovaný pouze jedním obchodníkem. Veřejný signál je pozorován všemi obchodníky.

Uvažme rovnováhu rozšířeného Arrow-Debreu modelu, když je převis nabídky nulový. V tomto případě je jednoduché ověřit, že nenulové čisté závazky každého obchodníka s kladnou cenou musí být každý den měřitelné podle nesoukromých informací. Tím spíše jsou jakékoliv závazky k doručení na základě veřejných informací v rovnováze dostupné pro každého obchodníka.

Jestliže obchodníci uzavírají kontrakty vzájemně se sebou ne s abstraktním trhem, doručení bude podmíněné informacemi mezi těmito dvěma obchodníky, což vytváří další omezení. Jestliže je kontrakt vynucený zákonem, společné informace musí být obvykle ověřitelné ex-post třetí osobou podle pravidel.

Připomeňme, že v rozšířeném Arrow-Debreu modelu předpokládáme, že informace jsou způsobeny exogenními událostmi. Celkový efekt všech těchto omezení je, že trhy, na kterých budeme realizovat rovnováhu rozšířeného Arrow-Debreu modelu, by měly být menší než skupina trhů přednostně přístupných.

Na druhou stranu na skutečných trzích můžeme vidět mnoho typů kontraktů, které by nebyly přijaty v Arrow-Debreu modelu, protože obchází restrikce. U mnoho kontraktů se určuje výkonnost nahodile na základě endogenních událostí a dokonce událostí, jejichž vznik může záviset na rozhodnutí stran kontraktu. Tento typ kontraktů označujeme jako morální hazard a často obsahují opatření, které omezují obchodovatelné množství, nebo včleňují jiné formy nelineárního oceňování.

Rozdíly v soukromých informacích představují jednu formu rozdílu v preferencích, prodejci také mohou používat nelineární ceny, aby lákali potenciální nakupující s různými soukromými informacemi. Avšak nakupující mohou odkrýt soukromé informace podle volby kontraktu nebo podle proběhnutí předchozího kontraktu. Tyto úvahy vedou k zajímavým teoretickým otázkám sledující existenci a optimalitu rovnováhy.

V den, kdy obchodníci získají nové soukromé informace, se mohou rozhodnout realizovat nové kontrakty s nahodilým doručováním, které nebyly v rozšířeném Arrow-Debreu modelu možné. Což nasvědčuje tomu, že rozšíření o soukromé informace je důležité. Rozšířený Arrow-Debreu model není adekvátní pro tržní rovnováhu s nejistotou, vhodnější model by zahrnoval posloupnost trhů, na něj se zaměříme ve zbytku kapitoly.

3.6 Příklad omezeného racionálního přístupu: Grandmontův model dočasné rovnováhy

Abychom vysvětlili, co je myšleno přístupem omezené racionality, představíme Grandmontův model. V tomto modelu omezení racionality znamená, že každý obchodník plánuje pouze na jedno období dopředu. Nejistota budoucích cen není jednoznačně vztažena k nejistotě v okolí.

Uvažme dny 1 a 2 (obecněji t a $t+1$). Předpokládejme, že v každý den máme N fyzických komodit (zboží, služby) a jednu formu peněz. Nechť peníze představují komoditu číslo H, $H = N + 1$. Než podrobně popíšeme model, v krátkosti popíšeme situaci, ve které je model formulován. Obchodníci mají nezáporné vybavení fyzickými komoditami a penězmi každý den. Jsou dovoleny pouze spotové obchody s fyzickými komoditami, ale v čase 1 obchodníci mohou uzavírat závazky na dodání peněz v čase 2. Avšak závazky na dodání peněz v čase 2, nesmí být náhodně závislé na události v čase 2. Obchodníci nespotřebovávají peníze během žádného dne, peníze mohou přesouvat mezi těmito dvěmi obdobími. Celková peněžní bilance musí být nezáporná. V čase 1 si obchodníci nejsou jistí cenami v čase 2, třebaže původci nejistoty nejsou určeny explicitně. Rozdělení subjektivní pravděpodobnosti obchodníků o cenách v čase 2 je ovlivněno cenami v čase 1. Tedy ceny v čase 1 ovlivňují obchodníkovu poptávku v čase 1, nejen kvůli rozpočtovému omezení v čase 1, ale také kvůli obchodníkovým očekáváním cen v čase 2.

Primární cíl modelu je popsat, pomocí věty o existenci rovnováhy, kladnou cenu peněz vztaženou k fyzickým komoditám.

Pro každého obchodníka i a komoditu h v čase $t(=1,2)$, nechť x_{it}^h a w_{it}^h je odpovídající spotřeba a vybavenost zdroji obchodníka i.Vybavenost zdroji nám dává nezáporná čísla a spotřeba každé komodity v každý den musí být nezáporná. Spotřebitelé nespotřebovávají peníze. Nechť x_{it} dává vektor s prvky $x_{it}^1, \dots, x_{it}^N$ a nechť w_{it} dává vektor s prvky $w_{it}^1, \dots, w_{it}^N$. Každému w_{it} je přidělen bod v R_+^H a každý x_{it} je omezen, aby byl bodem v R_+^N.

Každý obchodník i je nejistý ohledně spotřeby v čase 2. Jeho preference odpovídají Hypotéze očekávaného užitku.

V čase 1 jsou povoleny pouze spotové obchody s fyzickými komoditami, obchodníci také mohou vytvářet závazky o jistém dodání peněz v čase 2. Nechť b_i udává množství peněz, které obchodník i získá v čase 2, jako následek z obchodu v čase 1, jinými slovy b_i je negativní množství peněz, které se i zavázal doručit v čase 2. Grandmont stanovuje přenos peněz do dalšího období jako nezáporné. Abychom vyjádřili myšlenku, že bilance peněz není důležitá, Grandmont omezuje cenu peněz v čase 1 doručenou do času 2 jako stejnou spotovou cenu peněz v čase 1. Nechť p_1 a p_2 jsou vektory spotových cen při okamžitém dodání v čase 1 a 2, postupně.

V čase 1 si obchodník i vybere vektor spotřeby x_{i1} a peněžní bilanci b_i podle rozpočtového omezení

$$p_1(x_{i1}, b_i) = p_1 w_{i1} \tag{6}$$

Při volbě tohoto rozhodnutí obchodník předpokládal, že v čase 2 si vybere vektor spotřeby x_{i2}, aby maximalizoval užitek $u_i(x_{i1}, x_{i2})$ s ohledem na rozpočtové omezení

$$p_2(x_{i2}, 0) = p_2 w_{i2} + p_2^H b_i$$

Všimněme si, že v čase 1 obchodník netušil, že v čase 2 si bude moci vypůjčit na období 3. Pro každý cenový vektor p_1, nechť $\gamma_i(p_i)$ je množina optimální volby v čase 1.

Jestliže si i vybere dvojici (x_{i1}, b_1), potom převis nabídky zboží a peněz je $w_{i1} - (x_i 1, b_i) = z_{i1}$, $\sigma_i(p_1)$ jsou vektory převisu nabídky z_{i1}. Celkový převis vyhovující nabídky σ je definován vztahem

$$\sigma(p_1) = \sum_i \sigma_i(p_i)$$

Nechť P udává množinu nezáporných vektorů v R^H. Dočasná rovnováha v čase 1 je cenový vektor p_1^* spolu s množinou výběru (x_{i1}^*, b_i^*), jeden pro každého obchodníka i takový, že

- p_1^* je v P,
- pro každé $i, (x_{i1}^*, b_i^*)$ je v $\gamma_1(p_1)$,
- $\sum_i [w_{i1} - (x_{i1}^*, b_i^*)] \geq 0$
- $p_1^* \sum_i [w_{i1} - (x_{i1}^*, b_i^*)] = 0$

Nyní popíšeme množinu předpokladů vhodných pro zaručení existence dočasné rovnováhy. Grandmont se zajímá o rovnováhu, ve které jsou peníze a ceny ostře pozitivní a určuje podmínky existence rovnováhy při všech ostře pozitivních cenách.

V Grandmont modelu nejsou okolní situace explicitně definovány jako proměnná. Avšak v čase 1 si každý obchodník není jistý s cenami p_2 v čase 2. Tuto nejistotu vyjadřuje míra pravděpodobnosti na množině možných cenových vektorů p_2. Rozdělení pravděpodobnosti ovlivňuje mnoho minulých událostí, mimojiné vektor cen p_1 v čase 1. Nechť $\phi_1(\cdot; p_1)$ je míra pravděpodobnosti, která vyjadřuje nejistotu i-tého obchodníka v čase 1 ohledně cen v čase 2, při daném vektoru cen p_1 v čase 1. Pro každé p_1 v P, $\phi_1(\cdot; p_1)$ je míra pravděpodobnosti na P.

Jakmile se p_2 vyskytuje v rozpočtovém omezení v čase 2, obchodník začíná být nejistý ohledně spotřeby, kterou si zvolí v čase 2. Nechť spotřeba obchodníka i v čase 2 je $\xi_{i2}(p_2; x_{i1}; b_i)$. V čase 1 s daným cenovým vektorem p_1, se předpokládá, že obchodník i si vybere (x_{i1,b_i}) nezáporné, aby maximalizoval očekávaný užitek $Eu_i[x_{i1}, \xi_{i2}(p_2; x_{i1}; b_i)]$ s ohledem na rozpočtové omezení (6).

Obchodníka i nazveme *regulárním,*jestliže splňuje následující podmínky:

- Jeho počáteční bohatství fyzických komodit je ostře pozitivní, $w_{it}^h \geq 0$ pro $h = 1, \ldots, N$ a $t = 1, 2$.
- Jeho užitková funkce u_i je spojitá, konkávní a ostře rostoucí v každém bodě, navíc preference spotřeby ve dvou obdobích jsou nezávislé.
- Pro každý ostře pozitivní cenový vektor p_1 je míře pravděpodobnosti $\phi_i(\cdot; p_1)$ přiřazena 1 k množině ostře pozitivních cenových vektorů p_2.
- Uvažme zobrazení z P_{++} do množiny pravděpodobnostní míry na P_{++}, ϕ_i je slabě spojité.

Nyní ukážeme podmínku, která vyjadřuje myšlenku, že očekávání obchodníka o cenách nejsou příliš citlivé na současné ceny.

Věta 3.3. *Jestliže všichni obchodníci jsou regulární a pro alespoň jednoho obchodníka i*

- *ϕ_i je rovnoměrně těsné a*
- *$w_{i1}^H > 0$ (i má kladné zdroje peněz v čase 1)*

potom existuje dočasná rovnováha v čase 1 se ostře pozitivním cenovým vektorem p_1.

Uvažme, že každý obchodník očekává kladnou cenu peněz v čase 2, třebaže nepředvídá poptávku peněz v čase 2. Samozřejmě, jestliže všichni obchodníci budou předvídat, že žádný obchodník nebude v čase 2 poptávat peníze, potom bude pro obchodníka racionální předpokládat pozitivní cenu peněz v čase 2, a z toho důvodu spotová cena peněz v čase 1 bude nulová. Tento částečný rozpor může být vyřešen dvěma způsoby. Nejprve si můžeme představit, že každý obchodník si uvědomí, že chce přenést peníze dopředu z období 2 do období 3, ale od tohoto upustí, aby si to zjednodušil. Za druhé si představme, že každý obchodník je na trhu pouze dvě období a předpokládá, že v čase 2 přijdou noví obchodníci poptávající peníze. Druhá interpretace s překrývajícími se generacemi do modelu moc nezapadá, protože předpokládá, že obchodníci v čase 2 a 1 jsou stejní. Nicméně obě interpretace jsou v duchu omezeného racionálního přístupu, ve smyslu toho, že očekávání budoucích cen není explicitně navázané na předpovědi budoucích událostí nebo individuální chování na trhu.

Následující příklad podle Grandmont ukazuje, že podmínka rovnoměrné těsnosti očekávání je potřeba. V tomto příkladě každý spotřebitel má bodová očekávání s jednotkovou elasticitou očekávání, formálně pro každého obchodníka i a každé p v P_{++},

$$\phi_i(\{p\};p) = 1$$

Nechť máme jen jednu fyzickou komoditu ($N = 1$) a nechť počáteční bohatsví na tuto komoditu jsou každý den $g_i(\geq 0)$. Dále nechť zdroje peněz v čase 1 jsou $\bar{b}_i > 0$ a předpokládejme, že jeho zdroje peněz v čase 2 jsou nulové. Tedy

$$w_{i1} = (g_i, \bar{b}_i); w_{i2} = (g_i, 0)$$

Označme q_t cenu fyzické komodity v čase t a cenu peněz r_t. Tedy

$$p_t = (q_t, r_t)$$

Pro $p_1 = (q, r)$ každý obchodník očekává se subjektivní jistotou, že p_2 se bude opět rovnat (q, r). Jestliže x_{it} udává spotřebu fyzické komodity obchodníka i v čase t a b_i cenovou bilanci, kterou přenese z času 1 do 2, potom jeho rozpočtové omezení pro dané ceny q a r v daných časech bude

$$\begin{aligned} qx_{i1} + rb_i &\leq qg_i + r\bar{b}_1 \\ qx_{i2} &\leq qg_i + rb_1 \end{aligned} \tag{7}$$

Nakonec předpokládejme, že jeho užitková funkce je Cobb-Douglasova typu

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = x_{i1}^{\alpha_i} x_{i2}^{1-\alpha} \tag{8}$$

kde α_i je dané číslo $0 < \alpha_i < 1$.

Jakmile očekávání každého obchodníka je drženo s určitou jistotou pro dané q a r, přeje si vybrat spotřebu x_{i1} a x_{i2} a bilanci peněz b_i, vše je nezáporné, aby maximalizoval (8) podle rozpočtového omezení (7). Toto maximum nastane při pozitivní spotřebě v obou obdobích a při rovností v rozpočtových omezeních. Jestliže je $\alpha_i \geq \frac{1}{2}$, potom se obchodník i pokusí mít spotřebu v čase 2 alespoň tak velkou, jako ji měl v čase 1, jestliže $r > 0$, potom to implikuje $b_i \leq (\bar{b}_i/2)$. Proto, jestliže je $\alpha_i \geq \frac{1}{2}$, pro každé i a $r > 0$, potom převis nabídky peněz v čase 1 bude alespoň $(\sum_i \bar{b}_i/2)$, nemůže tedy nastat žádná rovnováha v čase 1 s kladnou cenou peněz.

Jakmile očekávání budoucích cen nejsou explicitně navázány na budoucí činnost trhů, potom v tomto modelu není žádná přirozená cesta k analýze fenoménu racionálních očekávání. Tedy zobrazení ϕ_i jsou exogenní. Modely s endogenním očekáváním jsou popsány v následující kapitole.

4 Rovnováha plánů a očekávání

4.1 Rovnováha v posloupnosti trhů s běžnými informacemi

V předchozí kapitole byla popsána *dokonalá předpověď (perfect foresight approach)*, ke které se nyní vrátíme. Budeme zkoumat rovnováhu *posloupnosti trhů* za předpokladu, že v každém čase mají obchodníci stejné informace.

Preference obchodníka o současných a budoucích cenách můžeme vyjádřit *funkcí očekávané ceny*, která nám dává cenový systém v každé dvojici čas-událost. Předpokládejme, že každý obchodník plánuje svou spotřebu a obchodní závazky pro každou dvojici čas-událost. Plány obchodníků jsou *konzistentní*, pokud celková plánovaná nadbytečná nabídka každého obchodního závazku je nulová ve dvojici čas-událost. Zhruba řečeno rovnováha plánů a očekávané ceny je funkce běžného očekávání ceny a konzistentní množiny plánů (jedné pro každého obchodníka) tak, že pro danou funkci běžného očekávání ceny je plán každého obchodníka pro něj optimální, podřízený rozpočtovému omezení.

Pro konečnou množinou dat $t = 1, ..., T$ si definujme:

Spotřební plán obchodníka je vektor $x = (x_m)$, kde m je z množiny M všech elementárních dvojic čas-událost a kde pro každé m je x_m vektor z $\mathbb{R}^H$, který interpretujeme jako vektor množství komodit spotřebované obchodníkem ve dvojici m.

Obchodní plán je vektor $z = (z_m)$, kde pro každé $m \in M$ je z_m vektor závazků na trhu v m.

Plán (spotřební-obchodní) obchodníka je pak dvojice (x, z).

Nechť $Z = \times_m Z_m$ a $X = \mathbb{R}^{|M|H}$. Potom spotřební plán je bod v X, obchodní plán a funkce očekávané ceny jsou body v Z. Pokud je množina času konečná, množina M elementárních dvojic čas-událost je konečná a Z je konečně rozměrná.

Vektor cen v m omezíme na množinu P_m nezáporných vektorů v Z_m a P bude označovat kartézský součin množin P_m pro $m \in M$.

Obchodník i je charakterizován následujícími vlastnostmi:

1. spotřební množina X_i je podmnožina X;
2. preferenční před-uspořádání $\lesssim_i$ na X; a
3. vektor w_i=(w_{im}) zdroj bohatství, kde pro každou elementární dvojici čas-událost $m \in M$ je $w_{im} \in \mathbb{R}^H$.

Přípustný závazek byl uveden dříve; obchodní plán nazveme *přípustný*, pokud každý jeho člen je přípustný závazek. Kromě toho požadujeme, aby obchodník nedělal závazky, kterým nebude moci dostát.Vezměme dvě dvojice čas-událost $m = (t, e)$ a $n = (u, f)$ z M pro které platí $m \leqq n$; pro obchodní plán z píšeme

$$\overline{z}_n^h = \sum_{(t,e) \leqq n} z_{tu}^h(f);\ \overline{z}_n = \left(\overline{z}_n^h\right). \tag{4.1}$$

Číslo $\overline{z}_n^h$ je celková čistá dodávka komodity h ve dvojici čas-událost n, ke které se obchodník zavázal ve smlouvě v nebo před n.

Spotřební-obchodní plán (x_i, z_i) je ***přijatelný*** pro i, je-li daný cenový systém p a pokud:

(a) ... x_i je v X_i;

(b) ... z_i je přípustný;

(c) ... $\overline{z}_{in} \leqq w_{in} - x_{in}$, pro každé n v M,

(d) ... $p_m z_{im} = 0$, pro každé m v M. (4.2)

Množina plánů přijatelných pro i a dané p bude označována $\Gamma_i(p)$.

Chování obchodníka je shrnuté v jeho ***korespondenci chování*** označované γ_i, která je definovaná jako:

Pro každý cenový systém p je $\gamma_i(p)$ množina plánů $(x, z) \in \Gamma_i(p)$, které jsou optimální s ohledem na obchodníkovi preference. (4.3)

Poznamenejme, že $\gamma_i(p)$ může být pro nějaké p prázdná.

Předpokládejme, že pro každého obchodníka i:

- X_i je uzavřená a konvexní, a existuje vektor $\overline{x}_i$ takový, že $x \geqq \overline{x}_i$ pro všechna $x \in X_i$; (4.4)
- pro každé $x \in X_i$ a každé $m \in M$, existuje $x' \in X_i$ různé od x pouze na m, takové, že $x_i' >_i x_i$; (4.5)
- existuje $\widetilde{x}_i \in X_i$ tak, že $\widetilde{x}_i \ll w_i$; (4.6)
- a jeho před-uspořádání je spojité a konvexní. (4.7)

Z předpokladu (4.5) "nenasycennosti" dostáváme, že obchodník má kladnou subjektivní pravděpodobnost pro každou událost.

Rovnováha plánů a cenových očekávání je soustava $[(x_i, z_i), p]$ plánů a funkce cenového očekávání taková, že:

(a) ... $p \in P$;

(b) ... (x_i, z_i) je v $\gamma_i(p)$, pro každé i; a

(c) ... $\sum_i z_{im} \geqq 0$ a $p_m \sum_i z_{im} = 0$, pro každé $m \in M$. (4.8)

Věta 4.1: Jsou-li splněny předpoklady (4.4)-(4.7), pak čistě směnná ekonomika má rovnováhu plánů a cenových očekávání.

Pro každého obchodníka i definujeme jeho *korespondenci nadměrné nabídky* (tj. převis nabídky):

$$\sigma_i(p) = \{z \mid (x, z) \in \gamma_i(p)\text{, pro nějaké } x\}, \tag{4.9}$$

a definujeme *úplnou korespondenci nadměrné nabídky*:

$$\sigma(p) = \sum_i \sigma_i(p). \tag{4.10}$$

Pro každé m existuje kompaktní podmnožina Z_m taková, že lze úplnou korespondenci nabídky omezit hodnotami ze $\hat{Z} \equiv \times_m \hat{Z}_m$. Nechť $\hat{\sigma}$ značí odpovídající omezení σ. Pro každé $z \in \hat{Z}$ definujme $\mu(z)$ jako množinu $p = (p_m) \in P$, která minimalizuje $\sum_m p_m z_m$ v P. Poznamenejme, že $p^* = (p_m^*)$ je v $\mu(z)$ právě tehdy, když p_m^* minimalizuje $p_m z_m$ v P_m pro každé m.

Dále dostáváme:

$$p_m z_m^* \geqq p_m^* z_m^*\text{, pro každé } m \text{ a každé } p_m. \tag{4.11}$$

Z (4.2d) součtem přes všechny obchodníky i, dostáváme Walrasův zákon v každém m:

$$p_m^* z_m^* = 0 \text{ pro všechny } m \text{ v } M. \tag{4.12}$$

Ve standardním Arrow-Debreuově modelu je rovnováha optimální za poměrně všeobecných podmínek.

4.2 Rovnováha racionálního očekávání na trhu s odlišujícími informacemi

Uvažujme nyní rozšíření na model posloupnosti trhů dovolující informační rozdíly mezi obchodníky.

V sekvenční ekonomice budou rovnovážné ceny v různých časech statisticky závislé a někteří obchodníci tak budou schopní zlepšit svou předpověď budoucích cen pomocí této závislosti, tj. určují svou předpověď na základě současných a minulých cen stejně jako na základě jejich vlastních (exogenních) necenových informačních signálů. Dnešní hodnota aktiv závisí na očekávaném pravděpodobnostím rozdělení jejich budoucích cen, které mohou být korelované se současnými rovnovážnými cenami. Například aktiva jejichž některé kvality jsou částečně (imperfektně) známy některým obchodníkům, ale v budoucnosti se stanou veřejnou informací.

Příklad:

Je-li celková nabídka některých výběrových vín koupená soukromými osobami hned poté, co jsou stočená a dříve než jsou vypitá (ochutnaná), pak kupující platí, aniž by znali kvalitu vína. Někteří kupující ale budou mít lepší informace než jiní. Za těchto okolností budou kupující s horšími necenovými informacemi “usuzovat kvalitu podle cen”. Tito kupující vyvozují z (rovnovážné) ceny něco o informacích dostupných lépe informovaným kupujícím. Jejich závěry budou mít zpětnou vazbu na rovnovážnou cenu, a proto bude vztah mezi informacemi obchodníků a rovnovážnou cenou ovlivněný.

To vede k "rovnováhám racionálních očekávání". V této podkapitole představíme model aktiv, u kterých existuje racionální rovnováha očekávání, která ukazuje každému obchodníkovi počáteční bohatství všech ostatních obchodníků dohromady.

V tomto modelu je konečně mnoho stavů počátečních informací a vyžadujeme, aby každý obchodník znal vztah mezi počátečními informacemi a rovnovážnou cenou. Dimenze prostoru počátečních informací by měla být menší než dimenze prostoru cen.

4.2.1 Přímá směna při nejistotě

Uvažujme nejprve tradiční model čistě směnné ekonomiky s nejistotou. Rozhodovacím problémem i-tého obchodníka je vybrat vektor aktiv - *portfolio*. Užitek pro i z jeho portfolia je nejistý v čase, kdy za něj platí, a závisí jak na jeho portfoliu tak na vnějším prostředí. Každý obchodník má subjektivní pravděpodobnostní rozdělení na množině alternativních prostředí a kritériem pro výběr mezi alternativními portfolii je jeho předpokládaný užitek.

Je dané počáteční vlastnictví aktiv a vektor cen aktiv. Obchodník bude poptávat portfolio maximalizující předpokládaný užitek s ohledem na rozpočtové omezení tak, že náklady na portfolio nepřekročí hodnotu jeho počátečního bohatství. Budeme předpokládat pouze nezáporná portfolia (tj. není povolen sell short). Jeho *nadměrná nabídka* je vektor rozdílů mezi jeho počátečním bohatstvím a aktivy, která poptává.

Nechť p představuje vektor cen aktiv a π značí systém subjektivních pravděpodobnostních rozdělení prostředí a nechť $Z(p,\pi)$ značí odpovídající *celkovou nadměrnou nabídku*, tj. součet nadměrných nabídek jednotlivých obchodníků (vektor). *Rovnováha* je cenový vektor, pro který je celková nadměrná nabídka nulová, tj. p je rešení soustavy rovnic

$$Z(p,\pi) = 0. \tag{4.13}$$

Dvojici pravděpodobnostních polí (π_1, π_2) nazveme *zaměnitelné*, pokud existuje řešení (p_1, p_2) systému rovnic

$$Z(p_1,\pi_1) = 0;\ Z(p_2,\pi_2) = 0;\ p_1 = p_2. \tag{4.14}$$

Jinak řečeno pro zaměnitelnou dvojici pravděpodobnostních polí existuje jediný cenový vektor, který je rovnováhou pro každý z nich. Opačně: Je-li dvojice pravděpodobnostních polí nezaměnitelná, potom každý odpovídající cenový vektor bude rozdílný.

Pokud má systém rovnic (4.14) více rovnic než neznámých, zdálo by se možné, že rovnice "všeobecné polohy" nebudou mít řešení. Předpokládejme tedy, že množina E alternativních stavů prostředí je konečná; potom pravděpodobnostní rozdělení na E může být reprezentováno jako bod ve vektorovém prostoru dimenze $\sharp E - 1$, kde $\sharp E$ značí počet stavů v E. Pravděpodobnostní systém (pole) může být reprezentován jako bod v prostoru dimenze $I\,(\sharp E - 1)$, kde I je počet obchodníků, a množina Π_o dvojic pravděpodobnostních polí leží v prostoru dimenze $2I\,(\sharp E - 1)$. Systém rovnic (4.14) je tudíž parametrizovaný body z Π_o.

Vzhledem k tomu, že ceny jsou relativní, budeme je brát normalizované, tak aby jejich součet dával jedničku. Z toho důvodu, pokud existuje n aktiv a $(n-1)$ nezávislých cen, pak (4.14) má $2\,(n-1)$ neznámých a $3n$ rovnic. Nicméně pokud je užitková funkce taková, že je každý rozpočet vyčerpán, potom hodnota nadměrné poptávky bude vždy nulová, dokonce i mimo rovnováhu (Walrasův zákon). Kromě toho existuje pouze $(n-1)$ nezávislých cen tak, že podmínka $p_1 = p_2$ reprezentuje pouze $(n-1)$ nezávislých rovnic. Z tohoto důvodu máme v (4.14) nejvýše $3\,(n-1)$ nezávislých rovnic.

Množina zaměnitelných dvojic pravděpodobnostních polí je zanedbatelná, pokud její uzávěr má Lebesgueovu míru nula. Nechť C_0 je množina zaměnitelných dvojic v Π_0 a nechť $\overline{C_0}$ je uzávěr C_0. Pokud parametrický bod je v C_0 (tj. zaměnitelný), potom každé okolí má parametrický bod, pro který (4.14) nemá řešení. Naopak pokud parametrický bod není v $\overline{C_0}$ (tj. není zaměnitelný), potom existuje nějaké okolí takové, že pro všechny body v tomto okolí nemá systém (4.14) řešení. (Dodejme, že zde mohou existovat body z $\overline{C_0}$, které nejsou zaměnitelné, tj. nejsou v C_0.)

Jinak řečeno, pokud je vlastnost platná s výjimkou zanedbatelné množiny, řekneme, že platí *všeobecně*. Výsledkem je, že *obecně různá pravděpodobnostní pole dávají různé rovnovážné ceny.*

4.2.2 Rovnováha úplné komunikace a prozrazující (odhalující) ceny

Uvažujme čistě směnnou situaci s tím, že než začne tržní aktivita, je *všem* obchodníkům zpřístupněna vnější informace o prostředí. Tato informace může být nedokonalá (nekompletní) nebo rušivá: nechť f značí informační signál a předpokládejme, že každý obchodník má subjektivní pravděpodobnostní rozdělení spojené s tímto signálem f a prostředím e. Pro daný informační signál f budou preference každého obchodníka pro různá portfolia ovlivněna jeho *podmíněným* očekávaným užitkem (s využitím podmíněného pravděpodobnostního rozdělení e určeného f). Toto podmíněné pravděpodobnostní rozdělení označíme (vektorem) π_{fi}, a pro každé f označíme systém tohoto rozdělení π_f. Ke každému signálu f je vektor rovnovážných cen p_f řešením systému rovnic

$$Z\,(p_f, \pi_f) = 0. \tag{4.15}$$

Rovnováha úplné komunikace (FCE = full communication equilibrium) je zobrazení $\hat{\phi}$ z informačních signálů do cenového vektoru tak, že pro každý signál f je $\hat{\phi}\,(f)$ rovnováhou pro f, tj. rešením p_f systému (4.15). Řekneme, že FCE je *odhalující*, pokud zobrazuje různé signály na odlišné (normalizované) cenové vektory. Tudíž pokud jsou tržní ceny určené obnovujícím FCE, lze odvodit základní skrytý signál z pozorování tržních cen.

Předpokládejme, že množina F alternativních informačních signálů je konečná, a nechť π značí (konečný) systém pravděpodobnostních polí π_f. Množina Π systémů π má dimenzi $(\sharp F)\, I\, (\sharp E - 1)$. Pokud je F konečné, potom funkce $\hat{\phi}$ je konečně dimenzionální vektor s $(\sharp F)\, n$ souřadnicemi (kde n je počet aktiv); z důvodu normalizace cen leží $\hat{\phi}$ v množině dimenze $(\sharp F)\,(n-1)$. Tudíž bod $\pi \in \Pi$ je vektor parametrů následujícího systému rovnic

$$Z\left[\hat{\phi}\,(f)\,, \pi_f\right] = 0, \text{ pro každé } f \in S; \tag{4.16}$$

což je systém konečně mnoha rovnic s konečným počtem neznámých.

Podotkněme, že pro jakýkoli bod π, každé FCE je odhalující právě tehdy, když pro každou dvojici (f, f') různých signálů, není dvojice $(\pi_f, \pi_{f'})$ zaměnitelná. Nechť C je množina bodů $\pi \in \Pi$ takových, že pro různé f a f' je dvojice $(\pi_f, \pi_{f'})$ zaměnitelná. Pokud je množina F konečná a sjednocení konečně mnoha zanedbatelných množin je zanedbatelné, potom pokud pro každé dvě různé f a f' je množina zaměnitelných množin zanedbatelná, tak množina C je také zanedbatelná. Z toho důvodu máme, že *obecně je v* Π *rovnováha úplné komunikace odhalující*.

4.2.3 Odlišující informace a rovnováha racionálního očekávání

V posledním stupni analýzy uvažujme situaci, ve které různí obchodníci přicházejí na trh s odlišným vnějším informačním signálem. Nechť f_i značí vnější informační signál dostupný pro obchodníka i a nechť $f = (f_1, ..., f_I)$ značí celkové vnější informace dostupné na trhu.Tudíž každý obchodník má dostupnou pouze část z celkové informace. Každý obchodník i má subjektivní pravděpodobnostní rozdělení f a e.

Podle daného informačního signálu f_i si každý obchodník vybírá mezi portfoliy podle svého podmíněného očekávaného užitku (podmíněné pravděpodobností rozdělení e při daném f_i). Tak dostaneme funkci nadměrné nabídky pro každého obchodníka i (pro dané f_i) a odtud i celkovou funkci nadměrné nabídky pro všechny obchodníky s daným f. Cenový vektor "rovnováhy vnějších informací" $\phi\,(f)$ s daným f bude jeden, pro který je celková nadměrná poptávka (tj. převis poptávky) nulová. Předpokládejme, že každý obchodních se chová tak, že $\phi\,(f)$ je v podstatě tržní cena, pokud je f realizována a každý obchodník i zná f_i.

Představme si, že po nějakém počtu nezávislých realizací této situace, se konkrétní l-tý obchodník stane "sofistikovaným" (rafinovaným) a uvědomí si, že existuje vztah mezi celkovým informačním signálem a tržní cenou popsanou zobrazením ϕ. Obchodník l bude tedy z pozorování tržní ceny $\phi\,(f)$ schopný dovozovat něco o celkovém informačním signálu (pokud ovšem není tržní cena stejná pro všechna f). To ale změní jeho funkci nadměrné poptávky, poněvadž tržní cena ovlivní jeho rozpočtové omezení a poskytne doplňkový (dodatečný) signál (k jeho vnějšímu signálu f_i) upravující jeho očekávaný užitek. Bude-li ale jeho nadměrná poptávka podstatnou částí celkové, potom takové "sofistikované" chování ovlivní funkci celkové nadměrné poptávky, čímž se změní vztah ϕ! Pokud se tedy všichni obchodníci stanou sofistikovanými, potom původní cenový vektor vnější rovnováhy $\phi(f)$ nebude dále ozřejmovat trh s daným celkovým vnějším informačním signálem f. Proto zavedeme samo-vykonatelnou (samo-plnící) "předpovídací funkci" ϕ.

Předpovídací funkce ϕ je zobrazení, které spojuje s každým celkovým vnějším informačním signálem f cenový vektor $\phi(f)$. Máme-li předpovídací funkci ϕ, každý obchodník i vybírá mezi portfoliy v závislosti na jeho podmíněném očekávaném užitku daném (rozšířenou) informací $[f_i, \phi(f)]$.

Toto chování bude generovat (pro každý celkový signál a každého obchodníka) nadměrnou nabídku, kterou nazveme *sofistikovaná nadměrná nabídka.* Tato nabídka závisí na předpovídací funkci ϕ a na konkrétním signálu f; značíme $\sigma(f, \phi)$. Rovnováha racionálního očekávání (REE = rational expectation equilibrium) je taková předpovídací funkce, že odpovídající sofistikovaná nadměrná nabídka je nulová pro každý celkový informační signál, tj. funkce ϕ taková, že

$$\sigma(f, \phi) = 0, \text{ pro všechna } f \in F. \tag{4.17}$$

Sofistikované nabídkové chování vyžaduje znalost kompletní (úplné) funkce ϕ pro určení nabídky odpovídající jakémukoli signálu f a systém rovnic (4.17) je *systém souběžných (simultánních) rovnic v hodnotách funkce* ϕ.

Uvažujme FCE (částečnou předpovídací funkci) $\hat{\phi}$ založené na uplných informačních signálech a předpokládejme, že FCE je odhalující, potom pro každého obchodníka a každý úplný informační signál f, bude podmíněné pravděpodobnostní rozdělení e určené $\hat{\phi}(f)$ stejné jako pravděpodobnostní rozdělení e určené f. Sofistikovaná nabídka i-tého obchodníka je tedy určená f_i a $\hat{\phi}(f)$ bude rovno jeho běžné nabídce určené f. Z vlastností rovnováhy $\hat{\phi}$ je běžná celková nadměrná nabídka (kde každý obchodník zná f a cenový vektor je $\hat{\phi}(f)$) je nulová. FCE $\hat{\phi}$ je tedy předpovědní funkce splňující (4.17) a *odhalující rovnováha úplné komunikace je rovnováhou racionálního očekávání.*

4.2.4 Preciznější model

Uvažujme čistě směnné hospodářství s I obchodníky. Z vnějšku ovlivněné charakteristiky ekonomiky nazveme *prostředí* a reprezentujeme je jako bod e v konečné množině E. Před uzavřením jakéhokoli obchodu má každý agent i dostupnou nějakou vnější informaci f_i (*signál* obdržený i-tým obchodníkem), bod v konečné množině F_i. Pro každého obchodníka i, mají proměnné $e, f_1, ..., f_I$ společné (sdružené) pravděpodobnostní rozdělení Q_i (obecně různé pro různé obchodníky). Nechť F je kartézský součin množin signálů F_i, potom Q_i je pravděpodobnostní míra na kartézském součinu $E \times F$. Bod $f \in F$ reprezentuje všechny vnější informace dostupné společně všem obchodníkům.

Rozhodovací problém i-tého obchodníka je vybrat si vektor "aktiv " x_i. Předpokládejme, že máme H aktiv, a že x_i je nezáporné. Počáteční bohatství i-tého obchodníka je w_i. Pokud p značí cenový vektor aktiv, potom rozpočtové omezení i-tého bude

$$px_i \leqq pw_i. \tag{4.18}$$

Hodnota (užitek) x_i pro i záleží na prostředí e; značíme $u_i\left(x_i, e\right)$. Kritériem i-tého bchodníka pro výběr mezi alternativními portfoliy je jeho podmíněný očekávaný užitek určený jemu dostupnými informacemi obsahujícími (vnější) signál f a *tržní cenu*.

Rovnováha tržních cen je funkcí proměnné f. Nechť $\mathbf{P}$ značí množinu všech normalizovaných nezáporných cenových vektorů. Funkci z F do $\mathbf{P}$ nazveme *předpovídající funkcí* ϕ. Mějme ϕ, f a cenový vektor p, potom *poptávka* i-tého obchodníka je vektor x_i maximalizující jeho předpokládaný užitek,

$$E_{Q_i}\left\{U_i\left(x_i, e\right) \mid f_i, \phi\left(f\right) = p\right\}, \tag{4.19}$$

podmíněný rozpočtovým omezením (4.18). Pokud poptávka i-tého obchodníka je x_i, celková tržní *nadměrná* nabídka je

$$\sum_i \left(w_i - x_i\right).$$

Nadměrná nabídka závisí na signálu f přímo skrz signály jednotlivých obchodníku f_i a nepřímo skrz cenový vektor $p = \phi\left(f\right)$. Celkovou nadměrnou poptávku značíme $\sigma\left(f, \phi\right)$. Rovnováha racionálního očekávání (REE) je předpovídající funkce ϕ^* taková, že

$$\sigma\left(f, \phi^*\right) = 0, \text{ pro každé } f \in F. \tag{4.20}$$

Obchodovaná aktiva mohou být prodaná (nebo oceněná) v pozdějším čase. Předpokládejme, že vektor x_i má tvar $\left(c_i, y_i\right)$, kde

c_i ... finanční náklady i-tého obchodníka na současnou spotřebu, a

y_i ... portfolio i-tého obchodníka s K různými aktivy.

Tudíž c_i je nezáporné reálné číslo a y_i je nezáporný K-rozměrný vektor. Hodnota jedné jednotky aktiva k v dalším časovém období bude v^k (obchodníci v současnosti neznají přesně vektor budoucích hodnot aktiv $v = \left(v^k\right)$). Vektor v může nabívat konečně mnoha hodnot v_e, $e \in E$; e je *prostředí s relevantím výnosem*. Pokud i-tý obchodní zvolí $\left(c_i, y_i\right)$ a prostředí e se nemění, potom budoucí hodnota jeho portfolia bude skalární součin $v_e' y$; předpokládejme, že užitek takového výsledku bude

$$u_i\left(x_i, e\right) = U_{0i}\left(c_i\right) + U_i\left(v_e' y_i\right). \tag{4.21}$$

$U_i\left(Y\right)$ je nepřímý (vedlejší) užitek začínající v následující časové periodě s bohatstvím Y.

Vektor cen aktiv značíme q a ceny normalizujeme, aby cena současné spotřeby byla 1.

Připomeňme, že w_i značí vektor počátečního bohatství i-tého obchodníka. První člen w_i můžeme interpretovat jako bohatství i-tého obchodníka v "hotovosti". Pokud jsou členy w_i očíslovány $0, ..., K$ a $W_i \equiv \left(w_i^1, ..., w_i^K\right)$ (bohatství aktiv i-tého obchodníka), potom rozpočtové omezení i-tého obchodníka je

$$c_i + q'y_i \leqq w_1^0 + q'W_i. \tag{4.22}$$

Máme-li normalizovanou cenu spotřeby na jedničku, je pouze K cen aktiv proměnných. Předpovídající funkce tedy jsou z F do $\mathbb{R}_+^K$. Při daném ϕ, q a f_i je poptávka i-tého obchodníka (c, y), která maximalizuje jeho podmíněný očekávaný užitek

$$E_{Q_i}\left\{U_{i0} + U_i\left(v_e'y\right) \mid f_i, f \in \phi^{-1}\left(a\right)\right\}, \tag{4.23}$$

podřízený rozpočtovému omezení (4.22). Nechť $\xi_{if_i}\left(q, \phi\right)$ značí poptávku i-tého obchodníka po aktivech; *celková* nadměrná poptávka po aktivech je

$$\sigma_f\left(q, \phi\right) \equiv \sum_i [pW_i - \xi_{if_i}\left(q, \phi\right)], \tag{4.24}$$

Rovnováha racionálního očekávání (REE = rational expectations equilibrium) je předpovídající funkce ϕ^* taková, že

$$\sigma_f[\phi^*\left(f\right), \phi^*] = 0, \text{ pro každé } f \in F. \tag{4.25}$$

Za vhodných podmínek regularity (stejnoměrnosti) lze dokázat (viz Radner 1979), že:

1. množina zaměnitelných dvojic (π_1, π_2) je zanedbatelná v Π_0,
2. s výjimkou zanedbatelné podmnožiny Π pro každé pravděpodobnostní pole v Π jsou všechny odpovídající rovnováhy úplné komunikace odhalující,
3. s výjimkou zanedbatelné podmnožiny Π pro každé pravděpodobnostní pole v Π existuje odpovídající rovnáha racionálního očekávání, které je odhalující.

4.3 Příklad neexistence rovnováhy racionálního očekávání

Pokud množina prostředí a informačních signálů není konečná a dimenze cenového prostoru nepřevyšuje dimenzi prostoru signálů, potom existence rovnováhy racionálního očekávání nemusí být všeobecná (viz následující příklad).

Předpokládejme dva obchodníky $(i = 1, 2)$ a dvě "aktiva". Portfolio i-tého obchodníka značíme $x_i = (y_i, z_i)$ a předpokládáme, že jeho preference mají tvar ("Cobb-Douglasova" forma):

$$u_i\left(x_i, e\right) = \alpha_i\left(e\right)\log y_i + [1 - \alpha_i\left(e\right)]\log z_i, \text{ pro } 0 < \alpha_i\left(e\right) < 1. \tag{4.26}$$

kde $e \in E$ značí stav prostředí s relevantím výnosem ($e \in \mathbb{R}$, $e \in \langle 0, 1\rangle$ a tedy E je jednotkový interval). Předpokládejme, že

$$\alpha_1\left(e\right) = \tfrac{1+e}{3};\ \alpha_2\left(e\right) = \tfrac{2-e^2}{3}. \tag{4.27}$$

Obchodník 1 zná e, ale obchodník 2 ne, tj. informační signál prvního obchodníka je e, zatímco informační signál druhého onchodníka je konstatní. Nechť obchodník 2 má rovnoměrné pravděpodobnostní rozdělení e na jednotkovém intervalu. Počáteční bohatství každého obchodníka je $(1, 1)$.

Normalizujeme ceny, aby cenový vektor byl $p = (q, 1-q)$, kde $q \in \langle 0, 1 \rangle$. Předpovídající funkce je tedy měřitelná funkce z E (jednotkového vektoru) do množiny možných cen prvního "aktiva" (také jednotkový vektor).

Vzhledem k tomu, že počáteční bohatství každého obchodníka je $(1, 1)$, majetek obchodníka je $q + (1-q) = 1$ nezávislý na ceně. Nechť ϕ je předpovídající funkce. Pokud cena aktiva 1 je $q = \phi(e)$, pak poptávka prvního obchodníka je:

$$y_1 = \frac{\alpha_1(e)}{q} = \frac{1+e}{3q},$$
$$z_1 = \frac{1-\alpha_1(e)}{1-q} = \frac{2-e}{3(1-q)}. \tag{4.28}$$

Obchodník 2 maximalizuje svůj podmíněný očekávaný užitek určený $\phi(e) = q$. Nechť

$$\bar{\alpha}_2 = E\left[\alpha_2(e) \mid \phi(e) = q\right],$$
$$\bar{e}^2 \equiv E\left[e^2 \mid \phi(e) = q\right]; \tag{4.29}$$

potom poptávka druhého obchodníka určená $\phi(e) = q$, je

$$y_2 = \frac{\bar{\alpha}_2}{q} = \frac{2-\bar{e}^2}{3q},$$
$$z_2 = \frac{1-\bar{\alpha}_2}{1-q} = \frac{1+\bar{e}^2}{3(1-q)}. \tag{4.30}$$

Nadměrná nabídka je rovna nule, pokud

$$y_1 + y_2 = 2,\ z_1 + z_2 = 2. \tag{4.31}$$

Dáme-li dohromady (4.28) – (4.31) a řešíme pro q, dostáváme

$$q = \left(\tfrac{1}{6}\right)\left(3 + e - \bar{e}^2\right).$$

Je-li předpovídající funkce ϕ rovnováhou racionálního očekávání, potom je

$$\phi(e) = \left(\tfrac{1}{6}\right)\left(3 + e - E\left[e^2 \mid \phi(e)\right]\right). \tag{4.32}$$

Nyní bychom měli ukázat, že podmínka rovnováhy (4.32) pro REE nemá řešení. (4.32) lze přepsat jako

$$e = 6\phi(e) + E\left[e^2 \mid \phi(e)\right] - 3. \tag{4.33}$$

Pokud tedy $\phi(e) = \phi(e')$, pak $e = e'$. Jinak řečeno pokud ϕ je REE, pak je jedno-na-jedno. Ale pokud ϕ je jedno-na-jedno, pak $E\left[e^2 \mid \phi(e)\right] = e^2$ a proto z (4.32) máme

$$\phi(e) = \left(\tfrac{1}{6}\right)\left(3 + e - e^2\right), \tag{4.34}$$

která *není* jedno-na-jedno. Z (4.34) máme $\phi(e) = \phi\left(\frac{1}{2} - e\right)$. Neexistuje tedy řešení ϕ v (4.32) a proto není ani REE.

Nyní uvažujme skupinu ekonomik, které dostáváme z předcházejícího příkladu změnou užitkových funkcí obchodníků.

Nechť U je množina všech užitkových funkcí u s argumenty y, z a e (kde y a z jsou kladná reálná čísla a e je jednotkový interval) taková, že

(i) ... u je dvakrát spojitě diferencovatelná;

(ii) ... pro každý stav e je $u(y, z, e)$ striktně rostoucí a striktně konkávní v y a z; a

(iii) ... pro každý stav e se indiferenční křivky nedotknou os y a z.

Uvažujme množinu $\mathbf{A}$ $(U \times U)$ ekonomik získanou specifikací užitkové funkce u_1 pro obchodníka 1 a užitkové fuknce u_2 pro obchodníka 2 $(u_1, u_2 \in U)$. Předcházející příklad je speciální ekonomikou v $\mathbf{A}$. Existuje otevřená množina $\mathbf{A}^0 \in \mathbf{A}$ tak, že pro každou ekonomiku v $\mathbf{A}^0$ neexistuje REE.

4.4 Rovnováhy racionálního očekávání v stacionárním lineárním modelu

Uvažujme speciální případ, ve kterém máme trh s jednou komoditou, rovnice nadměrné nabídky jsou lineární a základní události s relevantím výnosem a informační signály jsou stacionární Gaussovy procesy.

Uvažujme nekonečnou posloupnost dat t a označíme p_t cenu komodity v čase t. Každý obchodník má (náhodné) nezáporné množství komodity v každém čase; nechť e_i značí celkové množství v t. Každý obchodník i zná v každém čase nějaký informační signál f_{it} (náhodný vektor).

Nechť ε_{tj} jsou nezávislé náhodné veličiny a $\varepsilon_{tj} \sim N(0,1)$, kde $j = 1, ..., J$ a $-\infty < t < \infty$. Nechť ε_t značí J-rozměrný vektor se členy ε_{tj}. Nechť H je soustava všech náhodných proměnných tvaru

$$\sum_t \alpha_t \cdot \varepsilon_t, \tag{4.35}$$

kde (α_t) je nekonečná polsoupnost J-rozměrných vektorů, jejichž délky jsou square-summable (tj. posloupnost jejíž řada čtverců konverguje ke konečnému součtu). Taková náhodná proměnná je $N\left(0, \sum_t \alpha_t \cdot \alpha_t\right)$.

Pro náhodnou proměnnou $h \in H$, viz (4.35), definujme *posun* h značený Th jako

$$Th = \sum_t \alpha_t \cdot \varepsilon_{t-1}. \tag{4.36}$$

Posloupnost (h_t) náhodných proměnných z H nazveme *stacionární*, pokud existuje takové $h \in H$, že $h_t = T^t h$ pro všechna t. Posloupnost náhodných vektorů se členy z H nazveme *stacionární*, pokud je stacionární člen po členu. Všechny náhodné proměnné v této podkapitole budou z H.

Uvažujme stacionární posloupnosti (e_t) a (f_{it}). Pro každého obchodníka i nechť $\mathbf{F}_{it}$ značí sigma-algebru generovanou náhodným vektorem $\{f_{im} : m \leqq t\}$ a nechť $\mathbf{F}_t$ značí sigma algebru získanou shromážděním sigma algeber $\mathbf{F}_{it}$, $i = 1, ..., I$. Potom předpokládáme, že každý obchodník zná své počáteční bohatství a každé t, e_t je měřitelné s ohledem na $\mathbf{F}_t$. Nechť $\mathbf{P}_t$ značí sigma algebru generovanou současnými a minulými cenami, tj. $\{p_m : m \leqslant t\}$.

Podmíněné očekávání i-tého obchodníka p_{t+1} určené jeho informacemi v čase t (zahrnující jeho současné a minulé informační signály a současné i minulé ceny) je

$$\tilde{p}_{it} = E\{p_{t+1} \mid \mathbf{F}_{it}, \mathbf{P}_t\}. \tag{4.37}$$

Předpokládejme, že celková nadměrná nabídka v čase t je

$$\alpha p_t - \sum_t \tilde{p}_{it} + e_t, \tag{4.38}$$

kde $\alpha > I$ je parametr. Rovnováha (stacionárních) racionálních očekávání je stacionární cenová posloupnost taková, že nadměrná poptávka v každém čase je (téměř jistě) rovna nule.

Můžeme opět definovat rovnováhu úplné komunikace (FCE = full communication equilibrium), ve které každý obchodník v každém čase shromáždil informace $\mathbf{F}_t$. *V tomto modelu existuje jediné FCE značené* $\hat{p} = (\hat{p}_t)$. FCE nazveme *informativní*, pokud pro každé i a t

$$E\{\hat{p}_{t+1} \mid \mathbf{F}_{it}, \mathbf{P}_t\} = E\{\hat{p}_{t+1} \mid \mathbf{F}_t\}. \tag{4.39}$$

Pokud $p^* = (p_t^*)$ je rovnováha racionálního očekávání, nazveme p^* *symetrickou*, pokud pro každé i, j a t budou obchodníci i a j (téměř jistě) dělat stejné podmíněné předpovědi p_{t+1}^*; tj. $\hat{p}_{it}^* = \hat{p}_{jt}^*$.

Věta 4.2: Symetrická rovnováha racionálního očekávání (REE) existuje právě tehdy, když odpovídající rovnováha úplné komunikace (FCE) je informativní; v tomoto případě jsou tyto dvě rovnováhy stejné.

Podmínka (4.39) je dobře definovaná pro jakékoli cenové posloupnosti, ale je REE informativní? Podle definice je informativní REE symetrické; odtud podle Věty 4.2: REE je informativní právě tehdy, když je FCE. Informativní rovnováha nemusí být odhalující, ale každému obchodníkovi umožňuje dělat dobré podmíněné předpovědi cen v následující časové periodě, jelikož má shromážděné informace od všech obchodníků.

Prostor H náhodných proměnných může být určen prostorem square-summable posloupností (a_t) a proto je Hilbertovým prostorem. Navíc každá stacionární posloupnost náhodných proměnných v H je generována posunem jediné náhodné proměnné v H. Nakonec lze ukázat, že každý uzavřený podprostor H může být určen sigma algebrou generovanou nějakým souborem náhodných proměnných v H. Odtud máme následující větu:

Věta 4.3: Množina modelů bez REE a množina modelů s pouze symetrickými REE mají neprázdný vnitřek.

Věta 4.3 ukazuje, že dokonce i ve speciálním případu lineárního modelu s normálně rozdělenými náhodnými proměnnými je situace, ve které je prostor prostředí a informací nekonečný, docela jiná než situace, ve které je konečný. Zejména už není případem, kdy je existence REE všeobecná.

5 Výroba

Produkční plán výrobce určuje jeho čistý výstup pro každou dvojici čas-událost. Protože jsou trhy pro podmíněné dodávky kompletní, je současná hodnota výrobního plánu pro jakýkoliv stanovený cenový systém určena, takže je přesně stanoveno uspořádání produkčních plánů podle současných hodnot. Přestože jsou tyto současné hodnoty mezi spotřebiteli známy, neexistuje rozdíl v názoru na hodnoty akcií a proto zde není prostor pro triviální trh s akciemi. Tyto poznatky můžeme využít i pro náš rozšířený model.

5.1 Výroba v Arrow-Debreuově modelu

Na abstraktní úrovni může být výroba zavedena do Arrow-Debreuova modelu velmi jednoduše. Pro výrobce j označme y_{jt} náhodný vektor čistých výstupů v čase t a nechť y_j označuje posloupnost vektorů (y_{jt}) . Náhodný vektor y_{jt} musí být měřitelný vzhledem k sigma-algebře $\mathbf{F_t}$; ta představuje informace, které mají agenti v čase t k dispozici. Posloupnost y_j se nazývá *výrobní plán* výrobce j, který má k dispozici množinu realizovatelných výrobních plánů Y_j - *výrobní množinu.*

Připomeňme, že cenový systém v Arrow-Debreuově modelu je posloupnost vektorů $(p_t) = p$ takových, že p_t je měřitelný vzhledem k $\mathbf{F_t}$. Současná hodnota produkčního plánu y vzhledem k cenovému systému p je součet skalárních součinů,

$$py = \sum_t p_t y_t = \sum_{(t,e)} p_t(e) y_t(e).$$

Každý spotřebitel i je vybaven vektorem komodit w_i a vektorem podílů $f_i = (f_i^j)$, kde jsou složky vektoru zlomky a suma podílů jakékoliv firmy je rovna jedné. Pro daný cenový systém p a produkční plány y_j (jeden pro každou firmu) je jmění spotřebitele i v zúčtovacích jednotkách dáno jako

$$pw_i + \sum_j f_j \, p \, y_j.$$

Každý spotřebitel si vybere svůj nejvíce preferovaný plán spotřeby ze své množiny spotřeby s ohledem na omezení, že náklady jeho plánu nesmí převýšit jeho jmění.

Tímto způsobem bude model ekonomiky v podmínkách nejistoty formálně zredukován na model v podmínkách jistoty. Nyní si stručně vysvětlíme, proč je model výrobní množiny, který vyjadřuje volbu mezi informačními strukturami, nekonvexní. Zřejmě je zde hned několik zdrojů možné nekonvexnosti. Za prvé získání informací může vyžadovat výdaje zdrojů, které jsou nezávislé na rozsahu výroby. Jinak řečeno tyto výdaje za informace mohou být fixní což zpravidla narušuje konvexnost výrobní množiny.

Za druhé předpokládejme, že výrobce má k dispozici skupinu alternativních informačních struktur, každé z nich odpovídá výrobní množina. Celková výrobní množina výrobce je tedy sjednocením jednotlivých množin. Dokonce i kdyby byly jednotlivé množiny konvexní, jejich sjednocení obecně konvexní nebude. Bylo by jen v případě, že by byl počet alternativních informačních struktur konečný, což je nepravděpodobné.

5.2 Akciové trhy a optimální alokace v dvoudobém modelu s fixními výrobními plány

Pro teoretickou analýzu akciových trhů v podmínkách nejistoty použijeme velmi jednoduchý dvoudobý model, který zdůrazňuje jejich alokační roli pro spotřebitele. V tomto modelu jsou plány výrobních jednotek dané, výstupy v čase 2 nejisté a spotřebitelé v čase 1 obchodují s komoditami kvůli aktuální spotřebě a s podíly na fyzických výstupech firem v čase 2. Ukážeme si, že takovýto trh může podporovat vynucenou Pareto-optimální alokaci komodit, které jsou v obou časech dostupné pro spotřebu. Povaha vynucení je taková, že míra výstupu každé výrobní jednotky v čase 2 alokovaná k jakémukoliv spotřebiteli se nesmí stav od stavu prostředí lišit. Tento teorém optimality nebyl rozšířen pro obecné modely sekvenčních trhů s výrobou, ale přesto naznačuje zajímavý pohled na užitečnost akciových trhů jakožto institucí pro alokaci v podmínkách nejistoty.

Uvažujme nyní model se dvěma časy, H komoditami v každém čase, m spotřebiteli a n výrobními jednotkami. Plán každé výrobní jednotky je daný. Nechť w^h je celkové dostupné množství komodity h pro alokaci ke spotřebitelům a nechť $w = (w^h)$. Existuje zde nejistota týkající se výstupů několika výrobních jednotek v čase 2. To můžeme zformulovat do předpokladu, že existuje konečná množina alternativních stavů prostředí S a že vektor výstupů jednotky j v čase 2 závisí na stavu s, který skutečně nastane. Tento vektor označíme $y_j(s)$. Celkové dostupné množství komodity h pro spotřebu v čase 2 ve stavu s je

$$y^h(s) \equiv \sum_j y_j^h(s) \tag{5.1}$$

Obyčejně by se uvažovaly všechny možné alokace vektoru $y(s)$ v čase 2 ve stavu s. Avšak my budeme uvažovat omezenou množinu alokací ve tvaru

$$x_{i2}(s) = \sum_j f_i^j y_j(s), \tag{5.2}$$

kde f_i^j je zlomek výstupu jednotky j alokovaný spotřebiteli i a tento zlomek je stejný pro všechny stavy s.

Nechť $|S|$ značí počet stavů v S. Plán spotřeby spotřebitele i je dvojice (x_{i1}, x_{i2}), kde x_{i1} je vektor v R^H a představuje spotřebu spotřebitele i v čase 1, $x_{i2} = (x_{i2}(s))$ je vektor v $R^{H|S|}$ a reprezentuje spotřebu i v čase 2 v každém stavu s z S. Nechť X_i označuje množinu realizovatelných plánů spotřeby spotřebitele i. X_i je podmnožinou $R^{H(1+|S|)}$. Předpokládejme, že i má preferenční předuspořádání $\lesssim_i$ na X_i.

Nechť F je množina vektorů $f = (f^j)$ v R^H taková, že pro každé j je $0 \leq f^j \leq 1$. Alokace ke spotřebiteli i je dvojice (x_{i1}, f_i) taková, že x_{i1} je z R^H

a f_i je z F. Alokace určuje plán spotřeby pro i podle vztahu (5.2). Nechť A_i označuje množinu alokací ke spotřebiteli i, které odpovídají plánům spotřeby v X_i. Preferenční předuspořádání na X_i obsahuje odpovídající preferenční předuspořádání na A_i, které budeme značit stejně, tj. jako $\lesssim_i$.

Alokace je m-tice alokací k několika spotřebitelům. Alokace $((x_{i1}, f_i))$ je dosažitelná, jestliže:

1. pro každé i je (x_{i1}, f_i) z A_i ,
2. pro každé j je $\sum_i f_i^j = 1$,
3. $\sum_i x_{i1} = w$.

Množinu dosažitelných alokací označíme A. Dosažitelná alokace a^* je Pareto-optimální, pokud neexistuje jiná dosažitelná a' taková, že ji jakýkoliv spotřebitel preferuje před a^* a alespoň jeden ostře preferuje a^* před a'.

Nyní se budeme zajímat o charakterizování Pareto-optimálních alokací jakožto rovnováh vztažených k nějakému cenovému systému. Abychom byli přesní, použijeme koncept rovnováhy ocenění. Nechť p označuje vektor komoditních cen v čase 1 a nechť v označuje vektor cen akcií, tj. v^j je cena 100 % výstupu výrobní jednotky j v čase 2. Rovnováha ocenění je $(m+2)$-tice $(((x_{i1}^*, f_i^*)), p, v)$, kde

(a) $((x_{i1}^*, f_i^*))$ je dosažitelná alokace,

(b) pokud je pro každé i (x_{i1}, f_i) z A_i a $(x_{i1}, f_i) \gtrsim_i (x_{i1}^*, f_i^*)$, pak

$$px_{i1} + vf_i \geq px_{i1}^* + vf_i^*. \tag{5.3}$$

Podmínka (5.3) nám říká, že při daných komoditních a akciových cenách jakákoliv alokace k i, kterou chce stejně jako (x_{i1}^*, f_i^*) také stejně stojí.

S takto formulovaným modelem lze přímo uplatnit standardní teorii vztahu mezi Pareto-optimálními alokacemi a rovnováhou ocenění. Alokace $a_i \equiv (x_{i1}, f_i)$ z A_i nazveme nasycenou alokací pro i, pokud neexistuje žádná jiná alokace v A_i taková, že je ostře preferována spotřebitelem i před a_i. Nechť $a = (a_i)$ označuje dosažitelnou alokaci. Řekneme, že rovnováha ocenění (a, v, p) je *nad minimálními náklady*, pokud jsou pro každé i náklady na a_i (při daném p a v) ostře větší než minimální náklady alokací v A_i.

Věta 5.1

Předpokládejme, že pro každé i je množina spotřeby X_i konvexní a preferenční předuspořádání $\lesssim_i$ je spojité a konvexní. Pokud je (a, v, p) rovnováha ocenění, která je nad minimálními náklady a taková, že žádné a_i není nasycenou alokací pro i pak a je Pareto-optimální. Naopak pokud a je Pareto-optimální alokace taková, že pro nějaké i a_i není nasycenou alokací, pak existuje cenový systém (p, v) takový, že (a, v, p) je rovnováhou ocenění.
Věta 5.1 nám však neposkytuje žádné přímé informace o účinnosti akciových trhů při volbě výrobních plánů.

5.3 Rovnováha plánů a cenových očekávání s trhy výroby a akciovými trhy

Jednoduchý dvoudobý model, jenž byl výše popsán, není vhodný pro analýzu problému posloupnosti trhů.

Nyní si načrtneme model rovnováhy plánů a cenových očekávání (viz kapitola 4), avšak rozšířený o výrobní rozhodnutí a akciové trhy. Poznáme, že existence rovnováhy v tomto modelu je nejistá.

Znovu uvažujme model z části 2, ale nyní jsou obchodníky výrobci a spotřebitelé. Výrobce je charakterizován pomocí množiny technologicky realizovatelných výrobních plánů, které specifikují čistý výstup každé komodity za každé dvojice čas-událost. Každý výrobce si vybere výrobní a obchodní plán. Tyto dva plány musí být *konzistentní* - v každou dvojici čas-událost se musí celkový počet minulých a současných smluv na aktuální dodávky rovnat aktuálnímu čistému výstupu. Při daném cenovém systému $p = (p_m)$, určuje jednotlivý obchodní plán $z_j = (z_{jm})$ pro výrobce j vektor čistých příjmů $r_j = (r_{jm})$, kde

$$r_{jm} = p_m z_{jm}. \tag{5.4}$$

Každý výrobce má na množině všech možných vektorů příjmů preferenční předuspořádání, což je klíčovým předpokladem o chování výrobce. Toto preferenční předuspořádání vyjadřuje výrobcova přesvědčení pokud jde o relativní pravděpodobnosti událostí stejně jako o jeho postoj k riziku. Při daném systému komoditních cen se u každého výrobce předpokládá, že si vybere výrobně-obchodní plán, který maximalizuje jeho preference u odpovídajících vektorů příjmů.

V každou dvojici čas-událost m, je každý čistý příjem výrobce r_{jm} rozdělen mezi akcionáře podle počtu akcií držených v bezprostředně předcházející dvojici čas-událost. Tyto akcie jsou obchodovány na akciovém trhu v každou dvojici čas-událost a akcionáři si ponechají své akcie mezi dvěma časy, pokud je neprodali. Pokud jsou ponechané zisky interpretovány jako vstupy do aktuální výroby, pak r_{jm} může být interpretován jako celková dividenda výrobce j v každou dvojici čas-událost m.

Každý spotřebitel si zvolí plán spotřeby, obchodní plán a plán portfolia. Obchodní a spotřební plán byl popsán v předešlé kapitole. V každou dvojici čas-událost $m = (t, e)$ je *portfolio* spotřebitele i vektor $f_{im} = (f^j_{im})$, kde f^j_{im} je podíl spotřebitele i na čistém příjmu výrobce j v čase $(t + 1)$, tj. při každé elementární události v čase $(t+1)$. Portfolio je tedy v každou dvojici čas-událost reprezentováno vektorem z F, což je množina takových vektorů (f^j) v R^n, že pro každé j je $0 \leq f^j \leq 1$. Plán portfolia spotřebitele i je takový vektor $f_i = (f_{im})$, že pro každé m je f_{im} z F. Nechť v^j_m označuje cenu 100 % podílů výrobce j v každou dvojici čas-událost m, pak $v_m = (v^j_m)$ je vektor cen akcií v m a $v = (v_m)$ je systém cen akcií. Při daném v_m je tržní hodnota portfolia spotřebitele i f_{im} v m skalárním součinem $v_m f_{im}$.

Každý spotřebitel čelí v každé dvojici čas-událost, $m = (t, e)$, rozpočtovému omezení. Na straně aktiv v m jsou tři položky:

1. tržní hodnota jeho portfolia převedená z předchozího času t-1 a vypočítaná v aktuálních cenách akcií v_m,

2. jeho podíl na dividendách v m, jak je určen portfoliem,

3. tržní hodnota kladných složek z_{im} vypočítaných na základě komoditních cen p_m.

Na straně pasiv jsou položky dvě:

1. náklady na nové portfolio v m,

2. tržní hodnota záporných složek z_{im}.

V žádném m nesmí jeho pasiva převýšit jeho aktiva. Spotřebitel je charakterizován množinou spotřeby, preferenčním předuspořádáním a vybaveností zdroji a navíc oproti kapitole 4 má počáteční vybavení akciemi v čase 1. Při daném systému komoditních cen a akciových cen se u každého spotřebitele předpokládá, že si vybere spotřebně-obchodně-portfoliový plán, který maximalizuje jeho preference s ohledem na rozpočtová omezení v každém m.

Rovnováha plánů a cenových očekávání je takové pole plánů (jeden pro každého spotřebitele a výrobce) a systému (p, v) komoditních a akciových cen, že při daném p a v je plán každého agenta optimální a že v každém m je převis nabídky každé komodity a akcie roven nule. Připomeňme, že $p = (p_m)$ a $v = (v_m)$ mohou být interpretovány jako funkce obecných cenových očekávání.

Blízce příbuzný s pojmem rovnováha je pojem *pseudorovnováhy.* Ta je definována stejně jako rovnováha s výjimkou podmínky zúčtování trhů, která byla nahrazena následující podmínkou: v každém m je hodnota celkového převisu nabídky menší při pseudorovnovážných cenách než při jakýchkoliv jiných.

Věta 5.2

Pokud

(a) každý spotřebitel splňuje podmínky 4.4 - 4.7 z kapitoly 4 a navíc na počátku drží kladný počet všech akcií,

(b) celková počáteční nabídka akcií je zcela držena spotřebiteli,

(c) produkční množina každého výrobce je uzavřená a konvexní a splňuje podmínku bezplatného použití,

(d) celková množina produkčních možností splňuje podmínku nevratnosti výroby,

(e) preference každého výrobce u čistého příjmu mohou být reprezentovány pomocí spojité a ostře konkávní užitkové funkce,

pak existuje pseudorovnováha. Navíc pseudorovnováha, při které jsou veškeré ceny akcií kladné a akciový trh je zúčtován na počátku, je rovnováhou.

5.4 Komentáře k předpokladům a alternativním formulacím

V současném modelu mají držitelé akcií neomezenou odpovědnost, a proto mají spíše postavení partnerů než akcionářů. Jedním ze způsobů, jak odpovědnost akcionářů omezit, je uvalení omezení na výrobce - jejich čisté příjmy nesmí být v žádném m nezáporné. Tímto však vzniká problém analogický tomu, kdy je pro daný cenový systém spotřebitel nucen být na hranici své množiny spotřeby. V jeho případě však lze tuto situaci vyloučit (např. podmínkami 4.7). V případě výrobce není považováno za neobvyklé, že maximální dosažitelný zisk v daném cenovém systému může být nulový.

Bylo by zajímavé mít podmínky na výrobce i spotřebitele, které by přímo garantovaly existenci rovnováhy, ne jen pseudorovnováhy. Jinak řečeno, za jakých podmínek by byl akciové trhy v každém m zúčtovány? Povšimněme si, že pokud je převis nabídky akcií daného výrobce j v (t, e), pak v čase $t{+}1$ bude rozdělena jen část čistého příjmu výrobce. Očekávali bychom, že tato situace vznikne pouze tehdy, pokud při alespoň jedné události v čase $t{+}1$ bude jeho příjem záporný. Takovýto výrobce by v tuto chvíli zkrachoval.

Jedním z postupů by mohlo být eliminování všech výrobců z pseudorovnováhy, jejichž převis nabídky akcií je nenulový v nějakém m, a poté hledat rovnováhu s touto zmenšenou množinou výrobců. Následovaly by další a další redukce této množiny, dokud by rovnováha nebyla nalezena. Tento postup má triviální důsledky - rovnováha vždy existuje, protože existuje pro přímou směnu, kdy je množina výrobců prázdná.

Přestože současný model nepovoluje odchod výrobců (s výjimkou minulého odstavce), dovoluje však vstup a sice následovně : výrobce může mít nulovou výrobu až do nějakého data, po němž už však plánuje vyrábět.

Předpoklady v části 5.3 popisovaly model chování výrobce, který není ovlivněn akcionáři či přímo cenami akcií. Obecná alternativní hypotéza říká, že se výrobce snaží maximalizovat aktuální tržní hodnotu své firmy. Zdá se však, že zde existují alespoň dvě překážky. Za prvé v různá m jsou různé tržní hodnoty, takže není jasné, jak je maximalizovat souběžně. Za druhé je tržní hodnota podniku v jakémkoliv m cenou, u které se předpokládá, že je stejně jako ostatní ceny určena rovnováhou nabídky a poptávky. Zdá se tedy, že hypotéza o maximalizování tržní hodnoty vyžaduje, aby výrobci předpovídali vliv změny v jejich plánu na rovnovážnou cenu. V tomto případě by výrobci již nadále nebyli příjemci ceny a bylo by zapotřebí nějaké teorie obecné rovnováhy v podmínkách monopolu.

6 Přizpůsobování, stabilita a stacionární nerovnováha

6.1 Úvod

Dosud jsme se omezili na případy, ve kterých je trh každý den alespoň v krátkodobé rovnováze. Pokud je časový interval mezi obdobími vzhledem k rychlosti přizpůsobování cen krátký, pak se ekonomika bude nacházet v dalším období a prostředí bude změněno dříve, než se ceny stihnou přizpůsobit krátkodobé rovnováze. Můžeme pak pozorovat proces opakovaného nedokončeného přizpůsobování se stochastickými změnami v prostředí a ekonomika bude v rovnováze v tom smyslu, že trhy se nikdy (nebo zřídka) vyčistí. Nicméně, i v tomto případě opakované nerovnováhy můžeme odlišit situace, ve kterých ceny a množství kolísají rovnoměrným způsobem kolem dlouhodobých průměrů, od situací, ve kterých množství, ceny nebo obojí kolísají s větším rozptylem, nebo rostou bez omezení. K popisu první situace můžeme použít pojem *stacionární stochastický proces*, který je zobecněním případu nejistoty v pojmu deterministické rovnováhy. Nicméně, je důležité zdůraznit, že stacionarita stochastického procesu nevylučuje kolísání měnící se fáze a amplitudy.

Budou nás rovněž zajímat podmínky, za nichž je stochastický proces přizpůsobování "stabilní" v tom smyslu, že konverguje ke stacionárnímu procesu. Budeme zde hovořit o třech případech takové stability. V prvním případě (6.2) je každé opakování následované změnou v prostředí a po sobě jdoucí prostředí jsou nezávislá a identicky rozložená. Toto můžeme interpretovat jako model posloupnosti spotových trhů, na kterých nejsou cenné papíry přenášeny z jednoho dne na druhý. Cena závisí v každém období na ceně a převisu poptávky z předešlého období a převis nabídky v každém období závisí na aktuální ceně a stavu prostředí. Výsledná posloupnost je Markovův proces. Tento příklad má tu vlastnost, že v "rovnováze", tj. když je proces stacionární, očekávaný (nebo dlouhodobě průměrný) převis nabídky nemusí být nula.

Ve druhém případě (6.3) jsou možné zásoby komodit a přebytek zásob v libovolném období je přidán k zásobám na skladě. S předpoklady, které jsou podobné podmínkám "diagonální dominance", lze dokázat silnou fromu stability v Markovově případě a slabší formu stability v nemarkovském případě. V důsledku převodu přebytečných zásob je očekávaný převis nabídky v rovnováze nula.

Třetí případ (6.4) se týká změn vedoucích k racionálnímu očekávání rovnováhy ve speciálním lineárně-Gaussově modelu.

6.2 Stochastické přizpůsobování bez zásob

V této části bude popsán příklad stochastického přizpůsobování bez zásob. Předpokládejme posloupnost trhů, na kterých, pro každé období t, p_t je vektor cen, z_t je vektor převisu nabídky a s_t je vnější stav prostředí. Po sobě jdoucí stavy prostředí jsou považovány za nezávislé a shodně rozložené. Po sobě jdoucí ceny a převisy nabídek jsou určeny

$$z_t = \zeta(p_t, s_t);\ p_{t+1} = \alpha(p_t, z_t), \tag{6.1}$$

kde ζ je funkce převisu nabídky (*excess supply function*) a α je funkce cenového vyrovnání (regulace cen, *price adjustment function*). Rovnice (6.1) můžou být spojeny do jednoho vztahu, který určuje další cenový vektor jako funkci aktuálního cenového vektoru a stavu prostředí:

$$p_{t+1} = \beta(p_t, s_t) = \alpha[p_t, \zeta(p_t, s_t)]. \tag{6.2}$$

Vzhledem k tomu, že po sobě jdoucí stavy prostředí jsou nezávislé a shodně rozložené, po sobě jdoucí cenové vektory tvoří Markovský proces. (Marginální) rozdělení pravděpodobnosti, označme π_t, p_t bude obecně záviset na t a na počátečním rozdělení π_0. Nechť P_0 označuje soubor normalizovaných vektorů cen v jakémkoli období. Míra pravděpodobnosti π na P_0 je nazývána *invariantní* (stálá), jestliže $\pi_0 = \pi$ implikuje, že $\pi_t = \pi$ pro všechna t. Můžeme pak nazývat invariantní míru pravděpodobnosti rovnovážnou cenou distribuce *(equilibrium price distribution)*. Tato terminologie je v souladu s terminologií z části 6.1 ve smyslu, že pokud π_0 je rovnovážná cena distribuce, pak posloupnost cenových vektorů tvoří stacionární proces.

Nicméně, je důležité zdůraznit, že cenový proces může být stacionární, *a přesto dlouhodobý průměr převisu nabídky nemusí být nula*!

Nyní ukážeme soubor předpokladů na převis nabídky a přizpůsobení cenové funkce, které zabezpečí existenci rovnovážného rozdělení. Připomeňme si, že každá S_t je opis S_0 a že jsme pro jednoduchost předpokládali, že S_0 je konečné.

(a) $\zeta(\cdot, s)$ je spojité na P_0 pro každé s z S_0.

(b) Jestliže $p_n \to p$ v P_0, a p není ostře kladné, pak délka $\zeta(p_n, s)$ roste bez omezení, protože roste n , pro každé s z S_0.

(c) Pro každou komoditu h je $\delta_h > 0$ takové, že pro každý cenový vektor p, $p^h \leqq \delta_h$ znamená, že $\zeta^h(p, s) > 0$, pro každé s z S_0.

(d) α je spojitá na $P_0 \times Z_0$.

(e) Existuje $\varepsilon > 0$, menší než každé δ_h v (c) takové, že pro každou komoditu h, každé p z P_0, a každé z ze Z_0 platí

$$\left|\alpha^h(p, z) - p^h\right| < \varepsilon.$$

(f) $-\left[\alpha^h(p, x) - p^h\right]$ je označení pro zobrazení z^h.

Věta 6.1

Podle předpokladů (a) - (f) existuje rovnovážná cena distribuce.

Věta 6.2

Přidáme-li předpoklad, že pro každé s z S_0, je $\beta(\cdot, s)$ zmenšení zobrazení na P_0, pak pro jakoukoliv počáteční cenu distribuce π_0, posloupnost π_t bude konvergovat k rovnovážné ceně distribuce, která je nezávislá na π_0, tj. cenový proces je stabilní.

Důkazy těchto vět viz Green a Majumdar (1975).

6.3 Stochastické přizpůsobování se zásobami

Ve velkém počtu trhů, zásoby a back-orders slouží jako pojistka proti náhodným změnám v nabídce a poptávce. Budem používat pojem zásoby *(stock)* k označení stavu zásob (kladné zásoby) nebo back-orders (záporné zásoby). Úrovně a pohyby zásob poskytují důležité signály o minulém a současném stavu poptávky, a tyto signály zase ovlivňují pohyby cen. Na druhou stranu, ceny jsou ovlivňovány jinými signály než zásoby a samy slouží jako signály, které ovlivňují nabídky a poptávky a tím také zásoby.

Zde vytvořené předpoklady přizpůsobování cen a zásob jsou svým významem podobné předpokladům Diagonální Dominance používané Lionelem McKenzie ke studiu stability přizpůsobovacího procesu v deterministickém procesu. [Viz McKenzie, (1960); viz též Arrow, Block, a Hurwicz (1959).] Tyto předpoklady nejsou přímo srovnatelné s Diagonální Dominancí kvůli odlišnosti v modelu. Předpoklady o přizpůsobování můžeme popsat tímto způsobem: pro každou komoditu, když její zásoby jsou dostatečně vysoké (nízké) její cena *v průměru* klesne (vzroste), a když je její cena dostatečně vysoká (nízká), jeho zásoba v průměru vzroste (klesne).

Využijeme rovněž dalších dvou předpokladů: (B) přírustek cen a zásob za jeden časový úsek je shodně omezený a (M) stochastický proces cen a zásob je Markovův, se stabilními změnami pravděpodobností a diskrétním stavem prostoru. S těmito předpoklady můžeme ukázat, že Markovův proces konverguje ke stacionárnímu procesu, který, jak jsem uvedl, je stochastický model “rovnováhy”. Předpoklady nevylučují několikanásobnost rovnováhy, ale zabezpečují, že je jich jen konečně mnoho. Obecně platí, že z jakéhokoliv počátečního stavu bude rozdělení pravděpodobnosti na množině konečné rovnováhy, tj. na množině alternativních stacionárních procesů, ke kterým proces může konvergovat.

V tomto modelu, převis nabídky není uveden jednoznačně. Pokud je převis nabídky (pozitivní nebo negativní) v každém období přidán do aktuální zásoby a není zde vyčerpání zásob, pak stacionarita zásob znamená, že dlouhodobý průměr převisu nabídky bude nula. Bude tomu tak i v případě, že vyčerpání je vhodně symetrické.

I bez Markovova předpokladu (M) můžeme dokázat stabilitu - jako důsledek: existuje ohraničená množina D taková, že z každého počátečního stavu, každé trajektorie (téměř jistě) vstupuje D, a očekávaný čas prvního vstupu je konečný.

Uvažujeme posloupnost trhů; v každém období t stav trhu je charakterizován vektorem cen p_t, a vektorem zásob v_t. Ceny jsou nezáporné. Zásoby mohou být kladné nebo záporné; negativní zásoby jsou interpretovány jako přijaté, ale neuskutečněné objednávky. Pro účely pouze této části, *stav ekonomiky* v období t je označen $s_t = (p_t, v_t)$. (Všimněte si, že toto vychází z jiného označení v této kapitole, protože s_t není výhradně exogenní.)

Vytvoříme čtyři předpoklady o posloupnosti (s_t), které jsou uvedeny níže. První (S) je, že (s_t) je stochastický proces. V druhé části věty posílíme tento předpoklad předpokladem, že stochastický proces s_t je *Markovův* se stacionárními změnami pravděpodobností a diskrétním stavem prostoru. Druhý předpoklad, (B), je formální, ale podstatný; vyžaduje, aby přírustky proměnných p_t^h, v_t^h byly totožně omezené. Třetí a čtvrtý předpoklad [(PA) a (SA)] se týká přizpůsobování cen a zásob, v tomto pořadí. Tyto poslední dva předpoklady mohou být interpretovány následovně: pro každou komoditu, když její zásoby (*stock*) jsou dostatečně vysoké (nízké), její cena *v průměru* klesne (vzroste), a když je její cena dostatečně vysoká (nízká) její zásoba (*stock*) *v průměru* vzroste (klesne).

Přesné formulace těchto čtyř předpokladů jsou:

(S) *Proces (p_t, v_t) je stochastický proces definovaný* na nějakém pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \boldsymbol{F}, \Phi)$. Nechť $\boldsymbol{F}_t$označuje sub-sigma-pole $\boldsymbol{F}$ tvořené částečnou historií procesu během období t, tj. $\boldsymbol{F}_t$ je nejmenší sub-sigma-pole $\boldsymbol{F}$, takové že náhodné proměnné $s, \ldots, s_t$ jsou měřitelné.

(B) *Souřadnice bodů p_t a v_t mají totožně omezené přírůstky.* Tato hranice bude označena γ, tj. pro každé h a t, $\left|p_{t+1}^h - p_t^h\right| \leqslant \gamma$ a $\left|v_{t+1}^h - v_t^h\right| \leqslant \gamma$.

(PA) *Pro každou komoditu h existují čísla* $v^{*h} > 0$, $\alpha^{*h} > 0$, $v_*^h \leqslant 0$ a $\alpha_*^h > 0$ takové, že:

(1) $$\mathrm{E}\left(p_{t+1}^h \mid \boldsymbol{F}_t\right) \leqslant \max\left\{0, p_t^h - \alpha^{*h}\right\} \text{ on } \left\{v_t^h \geqslant v^{*h}\right\};$$

(2) $$\mathrm{E}\left(p_{t+1}^h \mid \boldsymbol{F}_t\right) \geqslant p_t^h - \alpha_*^h \text{on } \left\{v_t^h \leqslant v_*^h\right\}.$$

(SA) *Pro každou komoditu h existují kladná čísla* p^{*h}, β^{*h}, p_*^h, β_*^h s $p_*^h < p^{*h}$ takové, že:

(1) $$\mathrm{E}\left(v_{t+1}^h \mid \boldsymbol{F}_t\right) \geqslant v_t^h + \beta^{*h} \text{on } \left\{p_t^h \geqslant p^{*h}\right\};$$

(2) $$\mathrm{E}\left(v_{t+1}^h \mid \boldsymbol{F}_t\right) \leqslant \max\left(0, v_t^h - \beta_*^h\right) \text{ on } \left\{p_t^h \leqslant p_*^h\right\}.$$

Věta 6.3.

Předpoklad (S), (B), (PA), a (SA) vyjadřují, že existuje ohraničená množina $D \subset R^H \times R^H$ stavů stochastického procesu (p_t, v_t) taková, že každá trajektorie protíná D a očekávaný čas prvního protnutí je konečný, tj.

$$\mathrm{E}\,(T) < \infty, \text{ kde } T\,(\omega) = \inf\left\{t \mid \left(p_t\,(\omega), v_t\,(\omega)\right) \in D\right\}.$$

Navíc, jestliže stochastický proces (p_t, v_t) je Markovský, se stabilními změnami pravděpodobností a diskrétním stavem prostoru, pak je rozdělení stavového prostoru do konečně mnoho kladných opakujících se tříd a množina přechodných stavů taková, že není podmnožinou žádné uzavřené množiny.

První část věty může být posílena. Můžeme ukázat, že množina D je pozitivně stálá (*positive reurrent*) v tom smyslu, že každá trajektorie stráví kladnou část období D, tj. existuje nějaké číslo $c > 0$ takové, že

$$\liminf_{t} \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{t-1} 1_D\,(s_k) \geqslant c, \mid \Phi\text{- a.s.},$$

kde symbol 1_D označuje ukazatel funkce pro množinu D. [Pro důkaz tohoto silnějšího tvrzení, viz. Föllmer (1977).]

6.4 Přizpůsobení vedoucí k rovnováze racionálních očekávní

Teorie rovnováhy racionálních očekávání (4.2) předpokládá chování, které dává silné požadavky na racionalitu ekonomických subjektů, natolik, že vyžaduje, aby nejenom dělali obvyklý výpočet očekávaného užitku ve standartním modelu trhu s nejistotou, ale také aby měli správný model simultánního rozložení rovnováhy cen, jejich vlastní počáteční informace, a možné hodnoty pohledávek, se kterými obchodují - jejich "tržní modely". Jaké jsou odpovídající předpoklady o racionalitě obchodníků během procesu "učení" v teorii přizpůsobení vedoucích k rovnováze racionálních očekávání (REE)? I když obchodníci opraví jejich model trhu, odpovídající model trhu se změní způsobem, který v podstatě závisí na opravě pravidel všech obchodníků. Tedy, teorie využívající racionalitu směřuje k pojetí učení a procesu přizpůsobení jako postupná hra s neúplnou a nedokonalou informací.

Podle názoru autora by tento přístup byl nereálný a v rozporu se smyslem procesu přizpůsobování a učení. Realističtější alternativou by bylo předpokládat nějakou formu omezené racionality v procesu přizpůsobování, která, jakožto stabilní, by se blížila k úplné racionální rovnováze. Budou zde uvedeny dva úzce související procesy tohoto typu, v rámci lineárního modelu podobného jako v části 4.4, ale jednoduššího.

Uvažujme opět I účastníků trhu v obdobích t=1, 2,..., atd. Na rozdíl od modelu z části 4.4, výsledná "hodnota" jednotky zboží koupeného v období t nebude jeho cena na budoucím promptním trhu, ale spíše nějaká exogenní náhodná proměnná r_t. Nechť f_{it} označuje obchodníkovu i-tý exogenní informační signál v t, a p_t cenu zboží v t; jako v 4.4, $\boldsymbol{F}_{it}$ bude označovat sigma-algebru tvořenou aktuální a minulou informací signálu, $\{f_{im} : m \leqq t\}$, a $\boldsymbol{P}_t$ budou označovat sigma-algebru tvořenou aktuálními a minulými cenami, $\{p_m : m \leqq t\}$. Definované $\tilde{r}_{it}$ které má být i-tým odhadem r_t, daného $\boldsymbol{F}_{it}$ a $\boldsymbol{P}_t$, a předpokládáme, že i-tý převis poptávky v t je lineární funkcí

$$\delta\tilde{r}_{it} - \delta' p_t, \text{ kde } \delta,\ \delta' > 0. \tag{6.3}$$

(Pro jednoduchost jsme předpokládali, že parametry δ a δ' v poptávkové funkci jsou stejné pro všechny účastníky trhu.)

Představte si, že kromě jakéhokoliv možného záporného převisu poptávky ze strany obchodníků, který je popsaný výše, je zde i exogenní nabídka e_t, která je náhodnou proměnnou. Celkový převis nabídky v období t je proto

$$\alpha p_t - \delta \sum_i \widetilde{r}_{it} + e_t, \text{ kde } \alpha \equiv I\delta'. \tag{6.4}$$

Předpokládejme dále, že pro každé i a t,

$$f_{it} = r_i + y_{it}, \tag{6.5}$$

a že náhodné veličiny e_t, r_t, y_{1t},..., y_{It}, jsou všechny Gaussovy a vzájemně nezávislé (mezi sebou a skrz čas), a že po sobě jdoucí $(I+2)$-tice $(e_t, r_t, y_{1t}, ..., y_{It})$ jsou identicky rozdělené. (Můžeme interpretovat f_{it} jako "míru" z r_t založenou na i-té necenové informaci, a y_{it} jako chybu měření.) Pro zjednodušení výkladu, a bez zásadní ztráty na obecnosti (s předpoklady uvedenými dále v textu), předpokládejme, že všechny náhodné proměnné mají průměr nula; definujme jako

$$\varepsilon = Ee_t^2;\ \rho = Er_t^2;\ \eta_i = Ey_{it}^2. \tag{6.6}$$

V důsledku předpokladu časové nezávislosti, v REE odhadu by $\tilde{r}_{it}$ záviselo pouze na f_{it} a p_t, a kvůli Gaussově předpokladu by bylo lineární, tj.

$$\tilde{r}_{it} = a_i^* + b_i^* p_{it} + c_{it}^* f_{it}. \tag{6.7}$$

Poslední věta spolu s předpokladem, že převis nabídky je nula, znamená, že

$$\left(\alpha - \delta \sum_i b_i^*\right) p_t - \delta \sum_i c_i^* f_{it} + e_t - \sum_i a_i^* = 0. \tag{6.8}$$

Rovnice (6.8) udává "rovnovážné" aspekty REE; aspekty "racionálních očekávání" jsou vyjádřeny

$$\mathbf{E}\left\{r_t \mid f_{it}, p_t\right\} = a_i^* + b_i^* p_t + c_i^* f_{it},\ i = 1, ..., I. \tag{6.9}$$

Je snadné ověřit, že (6.8) a (6.9) znamená, že

$$\mathbf{E}p_t = 0;\ a_i^* = 0,\ i = 1, ..., I. \tag{6.10}$$

Rovnice (6.7)-(6.10) můžou teď být shrnuty

$$p_t = \frac{\delta \sum_i c_i^* f_{it} - e_t}{\alpha - \delta \sum_i b_i^*}, \tag{6.11}$$

$$\mathbf{E}\left\{r_t \mid f_{it}, p_t\right\} = b_i^* p_t + c_i^* f_{it}, \tag{6.12}$$

kterékoliv z těchto řešení je definováno jako REE. I přes zdánlivou jednoduchost modelu, kompletní rozbor řešení (6.11) a (6.12) není dosud známý. Nicméně, můžeme dokázat, že řešení existuje.

Rovnice (6.11) a (6.12) naznačují základní přizpůsobovací proces, což je nereálné, ale bude sloužit ke zjednodušení některých problémů. Předpokládejme, že pro některý počet období, obchodník i používá předpovídací funkci,

$$\tilde{r}_{it} = b_i p_t + c_i f_{it},\ i = 1, ..., I, \tag{6.13}$$

takovou, že koeficienty (b_i, c_i) nemusí bezpodmínečně tvořit REE, tj. nejsou řešení (6.11) a (6.12). V každém období, ve kterém jsou předpovídací funkce (6.13) užívány, tržní zúčtovací cena bude

$$p_t = \frac{\delta \sum\limits_i c_i f_{it} - e_t}{\alpha - \delta \sum\limits_i b_i}; \tag{6.14}$$

toto nazýváme krátkodobým očekáváním rovnováhy (*temporary expectations equilibrium - TEE*). Předpokládejme nyní, že obchodníci používají jejich individuální předpovídací funkce (6.13) pro velký počet období, takže obchodník i se efektivně učí spojité (Gaussovo) rozdělení (f_{it}, p_t, r_t). (Přesněji řečeno, je nutné nekonečné množství dat!) Můžeme dokázat, že pro toto rozdělení, podmíněné očekávání r_t dané p_t a f_{it} je

$$E\left\{r_t \mid p_t, f_{jt}\right\} = b'_j p_t + c'_j f_{jt}, \tag{6.15}$$

kde

$$\begin{aligned}
c'_j &= \left[\frac{1}{\Delta_j}\right] p\delta^2 \left[\frac{\sum\limits_i c_i^2 \eta_i}{I^2} + \frac{\mu}{\delta^2} - \frac{\bar{c} c_j \eta_j}{I}\right], \\
b'_j &= \left[\frac{1}{\Delta_j}\right] \left(\delta' - \delta\bar{b}\right) \delta\rho\eta_j \left[\bar{c} - \frac{c_j}{I}\right], \\
\Delta_j &= \delta^2 \left[\bar{c}\rho\eta_j \left[\bar{c} - \frac{2c_j}{I}\right] + (\rho + \eta_j) \left[\frac{\sum\limits_i c_i^2 \eta_i}{I^2} + \frac{\mu}{\delta}\right] - \frac{c_j^2 \eta_j^2}{I^2}\right], \\
\bar{b} &= \frac{1}{I} \sum_i b_i;\ \bar{c} = \frac{1}{I} \sum_i b_i;\ \mu = \frac{\varepsilon}{I^2}.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Všimněte si, že c'_j je poměr kvadratické funkce všech koeficientů c_i a b'_j je funkcí obou množin koeficientů. Definujeme-li přizpůsobovací proces pomocí diferenční rovnice

$$\begin{aligned}
&c_j (n+1) = c'_j (n);\ b_j (n+1) = b'_j (n), \\
&j = 1, ..., I,\ n = 1, 2, ..., \text{atd},
\end{aligned} \tag{6.17}$$

pak jakákoliv limita posloupnosti je REE. Můžeme dokázat, že soustava (6.17) může být lokálně stabilní nebo nestabilní, v závislosti na parametrech. Přibližně, soustava může být nestabilní, jestliže v REE jsou koeficienty b_i^* aktuální ceny "příliš velké" ve srovnání s koeficienty c_i^* současné necenové informace. Tato situace může nastat, například, jestliže rozptyl ε exogenní nabídky je dostatečně malý.

Diferenční rovnice (6.17) přibližně znázorňuje situaci, ve které obchodníci občas opravují jejich odhady koeficientů, ale pouze na základě zkušeností od poslední opravy. Následující diferenční rovnice představuje situaci, ve které, v každé opravě, obchodník počítá průměr přes všechny jeho předchozí zkušenosti:

$$c_j(n+1) = \left[\frac{1}{n+1}\right]\left(c'_j(n) + c_j(n) + \cdots + c_j(1)\right), \tag{6.18}$$

analogicky pro $b_j(n+1)$. Můžeme dokázat, že alespoň v některých jistých speciálních případech je (6.18) stabilní, když (6.17) stabilní není.

Další postačující teorie přizpůsobení by měla přihlížet ke skutečnosti, že obchodníci musí opravovat jejich předpovídací funkce pouze po konečný počet period, takže posloupnost jejich koeficientů tvoří *stochastický proces,* spíše než deterministický proces jako v (6.17) nebo (6.18). Například, uvažujte proces, ve kterém po každém období, každý obchodník i používá obyčejné nejmenší čtverce pro odhad nových předpovědí (regrese) koeficientů ze všech předchozích pozorování (f_{it}, p_t, r_t). Pro účely této části budu tento proces nazývat OLS procesem. Bohužel, OLS proces vede k vysoce nelineárním stochastickým diferenčním rovnicím, jejichž asymptotické chování dosud nebylo analyzováné dokonce ani v nízkých stupních obecnosti tohoto modelu. Nicméně, Bray (1980) prokázal stabilitu OLS procesu v jednodušším příkladu. Předpokládejme, že existují dvě množiny obchodníků, “informovaní”, označme je $\boldsymbol{N}$ a “neinformovaní”, označme je $\boldsymbol{U}$. Všichni informovaní obchodníci mají stejné necenové informace.

$$f_{it} = r_t + y_t \equiv f_t,\ i \text{ in } \mathbf{N}, \tag{6.19}$$

kdežto neinformovaní obchodníci nemají necenové informace,

$$f_{it} = \text{constant},\ i \text{ in } \mathbf{U}. \tag{6.20}$$

Předpokládejme, že náhodné proměnné r_t, y_t a e_t jsou nezávislé a Gaussovské a že po sobě jdoucí trojice (r_t, y_t, e_t) jsou rovnoměrně rozložené, se střední hodnotou nula a příslušnými rozptyly ρ, η a ε. Předpokládejme, že *struktura informace je obecně známá.*

Důsledek posledního předpokladu je, že informovaný obchodník může odvodit, že v TEE, cena p_t může záviset pouze na současných a minulých necenových signálech f_t (které jsou známé všem informovaným obchodníkům), a proto neposkytuje informace o r_t dosud neprojevené f_t. Proto informovaný obchodník nemůže udělat lépe, než použít předpovídací funkci

$$\tilde{r}_{it} = E\{r_t \mid f_t\} = \left(\frac{\rho}{\rho+\eta}\right) f_t,\ i \text{ in } \mathbf{N}. \tag{6.21}$$

Předpovídací funkce neinformovaného účastníka trhu musí záviset nanejvýš na cenách a v REE bude záviset na aktuální ceně. Tedy předpokládáme, že předpovídací funkce neinformovaných obchodníků jsou

$$\tilde{r}_{it} = b_{it} p_t,\ i \text{ in } \mathbf{U}. \tag{6.22}$$

Je jednoduché ověřit, že rovnice pro TEE odpovídající (6.14) je

$$p_t = \frac{\delta N\left(\frac{\rho}{\rho+\eta}\right) f_t - e_t}{\alpha - \delta \sum\limits_{i \in \mathbf{U}} b_{it}}, \tag{6.23}$$

kde $N = \#\boldsymbol{N}$ je počet informovaných obchodníků. Vzhledem k TEE (6.23), odpovídající regrese r_t na p_t je

$$E\left(r_t \mid p_t\right) = b_t' p_t, \tag{6.24}$$

kde

$$\begin{aligned} b_t' &= k\left[\frac{\delta'}{(1-\nu)\delta} - \bar{b}_t\right], \\ \bar{b}_t &= \frac{\sum\limits_{i \in \mathbf{U}} b_{it}}{I-N}, \\ v &= N/I, \\ k &= \frac{v(1-v)\delta^2\rho^2}{v^2\delta^2\rho^2 + \mu(\rho+\eta)}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

[Tyto rovnice odpovídají (6.15) a)6.16).] Všimněte si, že v je zlomek (*fraction*) informovaného obchodníka.

Z (6.23) vidíme, že koeficienty b_{it} v REE budou stejné pro všechny informované obchodníky, řekněme b^*, kde b^* je jediné řešení z

$$b^* = k\left[\frac{\delta'}{(1-v)\delta} - b^*\right],$$

nebo

$$b^* = \frac{k\delta'}{(1+k)(1-v)\delta}. \tag{6.26}$$

V tomto příkladu, OLS proces je definován takto. Výchozí koeficienty (b_{i1}) pro neinformované obchodníky jsou stanovena prioritně. V každém období $t + 1 \geqq 1$ cena je dána TEE rovnicí (6.23) a v každém období $t > 1$ je koeficient $b_{i,t+1}$ odhadem obyčejných nejmenších čtverců b v rovnici $r = bp$, vhodných informačních bodů$(p_1, r_1), ..., (p_t, r_t)$, tj.

$$b_{i,t+1} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{t} r_n p_n}{\sum\limits_{n=1}^{t} p_n^2},\ t > 1. \tag{6.27}$$

Všimněte si, že pro $t > 1$ budou mít všichni neinformovaní obchodníci stejné koeficienty b_{it}.

Věta 6.4 Pro OLS proces definovaný (6.23) a (6.27) platí

$$\lim_{t \to \infty} b_{it} = b^*, \text{ a.s.}$$

[Důkaz Věty 6.4, viz Bray (1980).] Bray rovněž uvažuje případ, ve kterém f_t a e_t jsou negativně korelovány. V tomto případě parametry odpovídající k můžou být záporné. REE existuje pouze tehdy, jestliže $k \neq -1$, a konvergence OLS procesu byla dokázána pouze pro $k > -1$. Je doměnkou, ale dosud nedokázanou, že OLS proces je nestabilní pro $k < -1$.

Je zajímavé srovnat asymptotické vlastnosti OLS procesu v tomto příkladu ($k > 0$) s deterministickým procesem odpovídajícím (6.17). Zde je vidět z (6.25), že tento je stabilní, tehdy a jen tehdy, pokud $k < 1$. Na druhou stranu, deterministický proces, který odpovídá (6.18), je stabilní pro všechny $k > 0$. V jistém smyslu, OLS proces je stochastická obdoba tohoto druhého deterministického procesu.

Předpoklad, že struktura informace je veřejně známá, hraje důležitou roli při dosažení jednoduchosti modelu Braya. Bez těchto znalostí by nebyl informovaný obchodník oprávněný předpovídat r_t z f_t samostatně, tj. v ignorování aktuální ceny, alespoň pokud trh není v REE. Efektem zrušení tohoto předpokladu by bylo, aby byl OLS proces spíše vícerozměrný než jednorozměrný. Předpoklad, že průměry r_t a e_t jsou nulové, hraje podobnou roli. Předpokládejme, že připouštíme, aby se tyto průměry lišily od nuly. Bez újmy na obecnosti, můžeme vzít $Ef_{it} = Er_t$, protože můžeme nahradit f_{it}tímto: $E\{r_t \mid f_{it}\}$. Předpokládejme, že v období t obchodník i používá předpovídací funkci

$$\tilde{r}_{it} = a_{it} + b_{it}p_t + c_{it}f_{it}. \tag{6.28}$$

Pokud $\tilde{r}_{it}$ měl stejné (absolutní) průměry jako r_t (nepodmíněně nestranný odhad), pak z (6.28),

$$Er_t = a_{it} + b_{it}Ep_t + c_{it}Er_t. \tag{6.29}$$

Je jednoduché ukázat, že pro TEE [použité (6.14)], (6.29) vyjadřuje

$$Ep_t = \left(\tfrac{1}{\alpha}\right)(\delta I E r_t - Ee_t), \tag{6.30}$$

tak, že *předpokládaná cena nezávisí na jednotlivých koeficientech v obchodníkově předpovídací funkci*, za předpokladu, že jsou bezpodmínečně nestranné, tj. že (6.29) je splněna. Tedy pro dané b_{it} a c_{it}, obchodník, který zná (6.30), může zvolit a_{it} tak, že (6.29) je splněna za předpokladu, že všichni ostatní obchodníci dělají totéž. Tento požadavek je samozřejmě mnohem méně informačně náročný než předpoklad REE. Jakmile je (6.29) splněna, všechny náhodné proměnné (včetně p_t) můžou být měřeny od svých středních hodnot, a není zde ztráta na obecnosti v předpokladu, že tyto střední hodnoty jsou nula.

Uzavřeme tuto část některýma poznámkama k rozdílu mezi formulací REE používanou zde a používanou v části 4.2. Jedním ze způsobů interpretace rozdílu mezi REE1 a REE2 je, že v REE2 se musí necenová informace obchodníků odrazit v ceně prostřednictvím poptávkové funkce, zatímco v REE1 není žádné takové omezení. Každá obchodníkova poptávka je nezávislá na jeho necenové informaci (vzhledem k ceně), a proto rovnovážná cena nemůže odrážet žádnou necenovou informaci.