# EKONOMIE NEJISTOTY

*Lucie Matušková*

*Lenka Pešková*

*Vladimíra Janková*

*Radka Vaníčková*

*Pavel Nechvátal*

*Lenka Zouharová*

# EKONOMIE NEJISTOTY: VYBRANÁ TÉMATA A PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODY*

## 1. Ekonomie nejistoty

### 1.1. Úvod a přehled

V této kapitole budeme definovat některé oblasti, ve kterých nám pravděpodobnostní analýza pomůže pochopit ekonomické jednání a vytvořit fundamentální postupy v ekonomické teorii.

Mohli bychom pochybovat, že má **nejistota** rozhodující vliv na ekonomické chování. Ale téměř všechny fáze spotřeby a produkce jsou ovlivňovány nejistotou. Většina významných nejistot je pravděpodobně dána **délkou života**. Také jednotlivci nemají jistotu ohledně svého důchodu a produkce a pochybují o svých nákupech a prodejích. Ekonomičtí činitelé se totiž v reálném světě setkávají se stochastickými (náhodnými) jevy a jejich základní ekonomické rozhodnutí je tím ovlivňováno.

Na první pohled se může zdát, že **riziko** nemá vliv na ekonomické chování, nemají-li lidé k němu averzi. Přesto je v mnoha situacích averze proti riziku skutečností a je základem k pochopení ekonomického chování. Velká část ekonomického chování je totiž řízena následky nejistoty a je závislá na averzi k riziku. Lidské jednání se přizpůsobuje nejistotě a averzi k riziku různými cestami, ekonomičtí činitelé využívají různé formy pojištění, future obchodů, kontingenčních kurzů a akciových trhů.
Mezi další metody používané jednotlivci i firmami patří řízení zásob, preventivní kontrola a každoroční zdravotní prohlídka sloužící k zvládnutí nejistoty a získání nezávislosti k averzi k riziku.

Tématem druhé části této kapitoly je ekonomie hledání práce, kde je využito mnoho pravděpodobnostních modelů. Základním problémem je určení, kdy jedinec může přestat hledat a přijmout zaměstnání. Jak ukážeme později, je to problém optimálního zastavení a může být vyřešen použitím **martingale**[1] argumentů.
Třetí část diskutuje o nejzajímavějším tématu ekonomie nejistoty – ekonomii pojištění. Krátce zde popíšeme subjektivní riziko a averzní selekci a poté použijeme jednoduché dvoustavové modely ke studiu efektu zvyšování averze k riziku a riziku požadovaném pro pojištění.

Ve čtvrté části prezentujeme základní stochastický proces a popisujeme bezpečnou cenu fluktuace; tj. Brownův pohyb, jehož použití je vyzkoušené i v jiných aplikacích.

Tématem páté a šesté části je spotřeba a produkce za nejistoty. Kapitolu 5 začínáme s jednoduchým dvoufázovým modelem a poté pokračujeme s několika vícefázovými modely. Protože nabídka ukazuje vše v charakteristických rysech postupných rozhodnutí tvořených za nejistoty, jsou tyto modely stejně jako ty z části 2 – 4 formulovány pomocí dynamického programování. Na rozdíl od kapitoly 2 – 4 zde hraje hlavní roli averze k riziku. Tuto esej zakončíme částí 7, která diskutuje úzký vztah mezi ekonomií a biologií.

## 1.2. Míry rizika a averze k riziku

Během naší analýzy budeme předpokládat, že se ekonomický činitel (agent) setkává se stochastickým prostředím a jedná tak, aby maximalizoval svůj předpokládaný užitek z náhodných výsledků.

[1] Martingalem vzhledem k posloupnosti náhodných proměnných $X_n: 0 \leq n < \infty$ nazýváme posloupnost náhodných proměnných $S_n: 0 \leq n < \infty$, která pro všechna $n > 0$ splňuje následující dvě podmínky:

a) $E|S_n| < \infty$
b) $E(S_{n+1}|\, X_0, X_1, \dots, X_n) = S_n$ (tzv. základní martingalová identita).

Agentova užitková funkce $u$ je z předpokladů neklesající a konkávní, tudíž $r_u \geq 0$, kde ***Arrow-Prattovo měřítko absolutní averze k riziku*** $\boldsymbol{r_u}$ je definováno jako:

$$r_u(t) = -u''(t)/u'(t).$$

Samozřejmě $r_u = 0$, jestliže $u$ je lineární.

Řekneme, že agent s užitkovou funkcí $u$ má větší averzi proti riziku než agent s užitkovou funkcí $v$, jestliže $r_u \geq r_v$.

V některých případech můžeme také použít ***Arrow-Prattovo měřítko relativní averze k riziku*** $\boldsymbol{R_u}$ definované takto:

$$R_u(t) = tr_u(t).$$

Nechť $X$ a $Y$ jsou dvě náhodné veličiny s rostoucími distribučními funkcemi $F$ a $G$. Naším cílem je poskytnout kritéria, díky kterým prohlásíme, že $X$ je lepší než $Y$. Řekneme, že náhodná proměnná $X$ je stochasticky větší než náhodná proměnná $Y$, píšeme $X >_1 Y$, jestliže

$$G(t) - F(t) \geq 0, \text{ pro všechna } t. \tag{1.1}$$

Jestliže $F$ a $G$ splňují (1.1), řekneme, že $X$ dominuje $Y$ nebo $F$ dominuje $G$ podle kritéria prvního pravidla stochastické dominance. Protože

$$E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F(t)dt + \int_{\infty}^{0}[1 - F(t)]dt \tag{1.2}$$

pro všechny náhodné veličiny $X$ (s podmínkou, že alespoň jeden z integrálů v (1.2) je omezený), což je zřejmé z $E(X) \geq E(Y)$, když $X >_1 Y$.

Spojení mezi prvním pravidlem stochastické dominance a očekávaným užitkem je stanoveno v následující větě.

*Věta 1*

Nezbytná a postačující podmínka pro $X$ stochasticky větší než $Y$ je

$$Eh(X) \geq Eh(Y) \text{ pro všechna } h \in \mathcal{L}_1,$$

kde $\mathcal{L}_1$ je množina neklesajících funkcí.

Skutečnost zjištěná v (1.2), $X >_1 Y$ a $F \neq G$, implikuje $E(X) > E(Y)$. Tudíž hledáme slabší podmínku, která nám umožní rozlišit mezi náhodnými veličinami se stejnými středními hodnotami. Řekneme, že náhodná proměnná $X$ je *méně riskantní* než náhodná proměnná $Y$,
píšeme $X >_2 Y$, jestliže

$$\int_{-\infty}^{t} [G(s) - F(s)]ds \geq 0 \text{ pro všechna } t. \tag{1.4}$$

Jestliže $F$ a $G$ splňují (1.4), řekneme že $X$ dominuje $Y$ ve smyslu druhého pravidla stochastické dominance. Opět (1.2) ukazuje, že $E(X) \geq E(Y)$, když $X >_2 Y$. Nicméně druhá podmínka stochastické dominance zahrnuje případ $X >_2 Y$, $F \neq G$ a $E(X) = E(Y)$.

Spojení mezi druhým pravidlem stochastické dominance a očekávaným užitkem je obsaženo v následující větě.

*Věta 2*

Nechť $\mathcal{L}_2$ je množina neklesajících konkávních funkcí. Nezbytná a postačující podmínka pro $X$ méně riskantní než $Y$ je

$$Eh(X) \geq Eh(Y) \text{ pro všechna } h \in \mathcal{L}_2. \tag{1.5}$$

Navíc pokud $X >_2 Y, F \neq G \; a \; E(X) = E(Y)$, pak:

$$Eh(X) \geq Eh(Y) \text{ pro všechny konkávní funkce } h. \tag{1.6}$$

# 2. Ekonomie hledání

## 2.1. Úvod

Hledání je základní vlastnost ekonomických trhů. Nejznámějším příkladem ekonomie hledání je pravděpodobně hledání na pracovních trzích. Hlavní rozhodnutí, konfrontované hledajícími (těmi, co např. hledají práci, zaměstnance …), jsou určena příslušným rozsahem informací a efektivní metodou přinášející informace před samotným jednáním, kde například jednání je přijetí určité pracovní nabídky hledajícím práci nebo přijetí zaměstnance s jistými identifikovatelnými charakteristikami zaměstnavatelem. Samozřejmě hledání není omezeno na pracovní trhy a hodně důležitých přínosů vychází i ze studií ostatních ekonomických modelů, které si kladou za cíl najít nejnižší cenu spíš než nejvyšší plat. Nicméně pro usnadnění vysvětlení se budeme soustředit na hledání práce na pracovních trzích.

## 2.2. Základní hledací model

Začneme s nejjednodušším sekvenčním modelem hledání práce. Jedinec, označený jako hledající, hledá zaměstnání. Každý den, dokud nepřijme práci, ji zkouší hledat a každý den zkouší právě jednu nabídku práce (bereme v úvahu, že v nějaký den nepřijme žádnou nabídku a tolerujeme některým zaměstnavatelům nabídku nulové mzdy). Nabídky mohou být interpretovány jako diskontovaná současná hodnota celoživotního příjmu z práce. Uvažujeme případy, kdy jsou nepřijaté nabídky okamžitě ztraceny a případ, ve kterém jsou všechny nabídky ponechány: tyto dva případy jsou uváděny jako **výběr bez odvolání** a **výběr s odvoláním**. Pokud je nabídka přijata, hledač změní svůj stálý stav na zaměstnaný.

Jelikož jsou schopnosti jednotlivých hledajících neměnné, případní zaměstnavatelé nehodnotí nutně rovným dílem; proto různí zaměstnavatelé nabízí různé nabídky hledajícím. Tento „rozptyl nabídek“ je začleněný v modelu za předpokladu, že to je pravděpodobnostní rozdělení mezd $F$, které určuje předložené nabídky; dodatečně předpokládáme, že je rozdělení neměnné v průběhu času. Tudíž pravděpodobnost $F(w)$, že v daný den hledající příjme nabídku $w$, je nezávislá na všech minulých nabídkách a době, kdy byla nabídka učiněna. Kromě toho předpokládáme, že hledající práci zná $F$. Všichni účastníci v procesu hledání práce jsou podle předpokladu rizikově neutrální (mají lineární užitkovou funkci) a usilují o maximalizaci svých očekávaných čistých benefitů. Záleží pouze na hledajícím, kdy přestane hledat a přijme nějakou nabídku práce.

Budeme-li přesnější, nabídka práce $X_i$ je prezentována jako každé období, kde každé $X_i$ je náhodná veličina s rostoucí distribuční funkcí $F(.)$, $E(X_i) < \infty$ a $X_i$ jsou vzájemně nezávislé. Hledající práci předpokládá, že si udrží nejvyšší nabídku práce, takže výnos ze zastavení po $n$-tém pokusu je dán

$$Y_n = \max(X_1, \dots, X_n) - nc,$$

kde $c$ je (peněžní) náklad za dobu hledání.

Cílem je najít pravidlo, kdy s hledáním přestat (nazvěme jej „zastavovacím“ pravidlem), které maximalizuje $E(Y_N)$, kde $N$ je náhodný zastavovací čas, tj. náhodný počet nabídek práce získávaný tak dlouho, dokud jedna z nich není přijata.

Je zřejmé, že optimální množství hledání (doba nezaměstnanosti) závisí na rozdělení mezd $F$, které jednotlivé služby přikazují pracovním trhům, a na $c$ – nákladům příležitosti hledání. Jestliže jsou hledačovy schopnosti vysoce hodnocené, bude odmítat nabídky, které neuspokojují jeho očekávání a zůstane nezaměstnaný. Na druhou stranu jestliže jsou náklady hledání vysoké, bude mít hledající tendenci své hledání omezovat. Literatura tohoto tématu se soustřeďuje na situace, ve kterých nejvhodnější postup pro hledajícího práci je odmítnout všechny nabídky pod jediným kritickým číslem, nazývaným **rezervační mzda** a přijmout všechny nabídky nad tímto číslem. Metoda s touto jednoduchou strukturou říká: *mít majetek rezervační mzdy*.

Omezíme tedy naši pozornost na tuto metodu (zastavovacího pravidla) ve formě:

$$\textit{Přijmout nabídku pouze tehdy, je-li přinejmenším velká jako } y, \tag{2.1}$$

kde $y$ je přesné (jediné) kritické číslo přicházející v úvahu.

V části 2.4 si ukážeme (za předpokladu, že rozptyl $X_1$ je neměnný), že existuje optimální pravidlo ve formě dané v (2.1). Prozatím předpokládáme bez důkazu, že

(a) existuje optimální pravidlo

(b) toto pravidlo má vlastnost omezené mzdy (tj. má tvar daný v 2.1).

Nechť $g_y$ je očekávaný výnos z hledání, když použijeme metodu s omezenou (rezervační) mzdou $y$. Dále označíme $N_y$ jako počet nabídek potřebných k nalezení přijatelné nabídky, z čehož plyne že $N_y$ je geometrická náhodná veličina s parametrem $p = 1 - F(y)$ $a$ $E(N_y) = 1/p$. Poté (pokud $1 - F(Y) > 0$) $g_y$ splňuje

$$g_y = -c/(1 - F(y)) + \int_y^\infty x dF(x)/(1 - F(y)), \tag{2.2}$$

poněvadž $N_y$ je počet měření potřebných k nalezení nabídky větší nebo rovné $y$ a druhý výraz na pravé straně rovnice (2.2) je pouze podmíněná očekávaná hodnota nabídky daná tak, že je přinejmenším $y$. Úpravou (2.2) získáme

$$c = \int_y^\infty (x - g_y) dF(x). \tag{2.3}$$

Z (2.3) a skutečnosti, že hledáme $y$ maximalizující $g_y$, je na základě úvahy zřejmé, že pokud je $\xi$ optimální rezervační mzda, potom $g_\xi = \xi$, takže $\xi$ splňuje

$$c = \int_\xi^\infty (x - \xi) dF(x). \tag{2.4}$$

Navíc $g$ je unimodální (jedno-vrcholové), jak je ukázáno v grafu 2.1.

Definujme $H$ jako

$$H(x) = \int_x^\infty (t - x) dF(t), \tag{2.5}$$

a řekněme (viz. Graf 2.2), že H je konvexní, nezáporná, striktně klesající funkce, která se blíží k 0 a $E(X_1)$, pokud se $y$ blíží k $\infty$ a 0, respektive z (2.4) vidíme, že $\xi$ je jedinečné řešení $H(x) = c$.

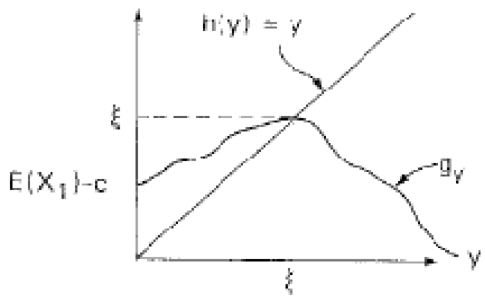



Figure 2.1. A graph of the g function.

Řada důvodů implikuje, že $\xi$ je jediná mzda, při které je hledajícímu jedno, jestli mzdu $\xi$ přijme nebo pokračuje v hledání. Jestliže pokračuje v hledání, je optimální zastavit v dalším pokuse, kdy mu je nabídnuta mzda přinejmenším tak velká jako je $\xi$. Takže $\xi$ by mělo splňovat

$$\xi = Emax(\xi, X_1) - c, \tag{2.6}$$

na levé straně rovnice je to, co dostane na základě přijetí nabídky $\xi$ a na pravé straně rovnice je očekávaný výnos z toho, kdyby ještě jednou hledal. Jednoduše si ověříme, že (2.6.) je ekvivalentní s (2.4.).

Rovnice (2.4) má jednoduchou ekonomickou interpretaci: kritická hodnota $\xi$ spojená s optimálním zastavovacím pravidlem je vybrána, tak, aby vyrovnala $c$, mezní náklady získání ještě jedné pracovní nabídky, s $H(\xi)$, tj. s očekávaným minimálním výnosem ještě jednoho hledání. Tudíž stačí, když hledající pouze porovná svůj výnos z přijetí zaměstnání s očekávaným výnosem z ještě jednoho hledání. Tomuto říkáme, že se hledající **chová „krátkozrace“**.

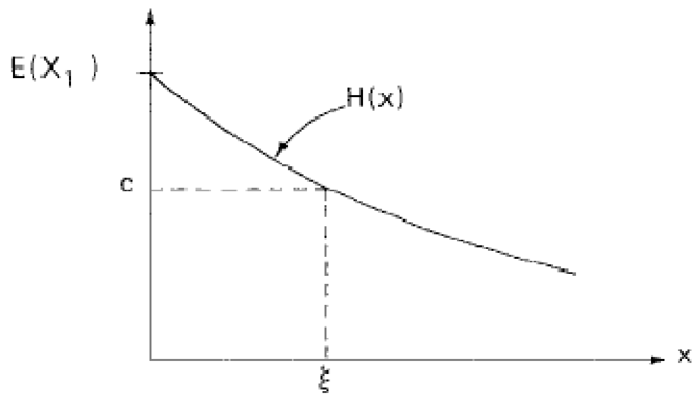


Figure 2.2. A graph of the *H* function.

Je důležité rozlišit mezi vlastností rezervační mzdy a vlastností krátkozrakosti: první z nich nám říká, která nabídka je přijatelná, zvláště ty, které převyšují $\xi$, zatímco druhá nám poskytuje jednoduchou metodu pro kalkulaci $\xi$.

V předchozí analýze jsme pouze uvažovali případ výběru s odvoláním, kde optimální metoda měla vlastnost rezervační (omezené) mzdy; nebyla zde nikdy využita možnost volby odvolání a díky tomu je jasné, že nedojdeme k žádnému rozdílu, když odvolání nedovolíme. Pokud by ale například mezní náklady hledání $c$ byly rostoucí v čase, nebo hledající práci měl averzi proti riziku, nebo by byl počet hledaných příležitostí konečný, tak možnost volby odvolání může hrát svou úlohu u nabídek, které byly kdysi unáhleně nepřijaty a později by se staly přijatelnými.

## 2.3. Dopad rostoucí nejistoty

Z grafu 2.1 je zřejmé, že čím nižší jsou náklady hledání, tím vyšší jsou rezervační mzdy a delší doby hledání. Méně známý je dopad na hledačovu optimální metodu spojenou s rostoucí nejistotou v některých aspektech jeho prostředí. Předpoklad, že je rostoucí nejistota vždy nevýhodná pro hledačovo blaho, je neodůvodněný. K důkazu tohoto si musíme nejprve rozmyslet změnu v nabídkovém rozdělení $F$ a za druhé musíme říct, že počet přijatých pracovních nabídek v období je náhodná veličina namísto konstanty 1.

Pro začátek nechť $X$ a $Z$ jsou nezáporné náhodné proměnné se souhrnnými distribučními funkcemi $F$ a $G$, respektive předpokládejme, že rozdělení mzdové nabídky $G$ je riskantnější než $F$ ve smyslu druhého stupně stochastické dominance. Abychom zajistili srovnatelnost, předpokládáme, že $E(Z) = E(X)$, takže průměrná předložená nabídka není závislá na faktu, zdali je rozdělení mzdové nabídky $F$ nebo $G$.

Označme $H_F$ a $H_G$ jako funkci $H$ přidruženou $F$ a $G$, kde $H$ je definováno v (2.5). Obdobně nechť $\xi_H$ a $\xi_G$ jsou přidružené rezervační mzdy a uvažujme konvexní rostoucí funkci $u_y$ definovanou jako

$$\begin{aligned} u_y(x) &= 0, \qquad x \leq y \\ &= x - y \quad x > y. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Aplikací (1.6) na (2.7) s připomenutím (2.5) získáme

$$H_G(y) = Eu_y(Z) \geq Eu_y(X) = H_F(y) \text{ pro všechna } y \geq 0, \tag{2.8}$$

tak, že $H_G$ leží nad $H_F$. Propojíme (2.4) a (2.8) a dostaneme

$$H_F(\xi_F) = c = H_G(\xi_G) \geq H_F(\xi_G), \tag{2.9}$$

takže klesající povahou $H_F$ získáme

$$\xi_F \leq \xi_G. \tag{2.10}$$

Protože se rezervační mzda rovná očekávanému výnosu z použití optimální metody, můžeme ukázat, že růst rizikovosti rozdělení mzdové nabídky je pro hledajícího prospěšný. Vysvětlení pro toto tvrzení se zakládá na skutečnosti, že střední hodnotu zachovávající změny pouze na konci rozdělení $F$ – v intervalu $[0, \xi]$ nebo $[\xi, \infty)$ – nemají žádný dopad, zatímco střední hodnotu zachovávající růst pravděpodobnosti $F$ umístěný na konci $[\xi, \infty)$ je vyloženě užitečný.

Dále předpokládáme, že počet nabídek $N_i$ získaný $i$-tý den je nezáporná, celočíselná náhodná veličina a že $N_i$ jsou nezáporné a se stejným rozptylem. Pro usnadnění porovnání se standardním případem, tj. $P(N_i = 1) = 1$, předpokládáme, že $E(N_i) = 1$, takže (očekávané) náklady hledání za předloženou nabídku zůstávají $c$.

Hledajícímu je dovoleno zvážit všechny $N_i$ nabídky než se rozhodne, jestli jednu z nich přijme. Samozřejmě, rozhodne-li se nějakou nabídku přijmout, přijme tu nejlepší ze všech nabízených. Tudíž rozdělení $G$ nejlepší přijaté nabídky, kde $N_1$ jsou předložené nabídky, je dáno

$$G(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i [F(t)]^i, \tag{2.11}$$

kde $p_i = P(N_1 = i)$.

Jensenova nerovnost říká, že $Eu(Z) \geq uE(Z)$ pro všechny náhodné veličiny $Z$ a konvexní funkci $u$ (pokud je $u(Z)$ definováno). Tudíž nechť je použita Jensenova nerovnost s $u(i) \; = \; F(t)^i, i \geq 0$ a nechť $Z$ má rozdělení $N_1$, pak

$$G(t) \geq F(t) \text{ pro všechna } t \geq 0. \qquad (2.12)$$

Tedy efektivní nabídkové rozdělení $G$ je stochasticky menší než původní nabídkové rozdělení $F$. Tudíž $H_G \leq H_F$ tak, že $\xi_G \leq \xi_F$, a proto je vhodnější mít právě jednu nabídku denně spíše než náhodné číslo se střední hodnotou jedna za den. Intuitivní vysvětlení tohoto tvrzení je následující: ačkoli očekávané výdaje na hledání jsou stále $c$, skutečnost, že (a) několik přijatelných nabídek (tj. nabídek s $w > \xi$) může přijít ve stejný den a za (b) skutečnost, že hledající může vyčerpat jenom jednu ucházející nabídku, předpokládá, že náklady na vyčerpání přijatelné nabídky jsou rostoucí.

Shrneme-li výše řečené, rostoucí rizikovost neboli změna nabídkových rozdělení (zatímco ponecháme jejich střední hodnotu neměnnou) je prospěšná, zatímco rostoucí variace v počtu nabídek předložených během jednoho dne (zatímco ponecháme jejich střední hodnotu neměnnou) je nevýhodná.

## 2.4. Martingales a existence rezervační mzdy

V této části prezentujeme argumenty, které demonstrují, že (i) skutečně existuje optimální pravidlo a že (ii) je dáno předpisem (2.1). K odvození těchto výsledků využijeme několik konceptů a výsledků z teorie martingales a optimálního zastavení. Pro začátek uvažujme libovolnou posloupnost $X_1, X_2, \ldots$ náhodných veličin a pro každé $n$ nechť je $Y_n$ náhodná veličina, jejíž hodnota je určena prvními $n$ pozorováními $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Posloupnost $Y_1, Y_2, \ldots$ nazveme **supermartingales** vzhledem k posloupnosti $X_1, X_2, \ldots$, jestliže pro všechna $n$ existuje $E(Y_n)$ a (s pravděpodobností 1)

$$E(Y_{n+1} | X_1, \ldots, X_n) \leq Y_n. \qquad (2.13)$$

Navíc, jestliže

$$E(Y_N) \leq E(Y_1), \tag{2.14}$$

pro všechna zastavovací pravidla[2] $N$, pro která existuje $E(Y_N)$, tak supermartingales nazveme pravidelnými (regulárními). Použijeme-li náš model hledání práce, zavedeme $X_i$ jako i-tou nabídku a $Y_i = \max\{X_1, X_2, \dots, X_i\} - ic$.

Naším cílem je vybrat zastavovací pravidlo $N$, nazývané „optimální" tak, abychom vytvořili $E(Y_N)$ tak velké, jak jen je možné. Tímto pokládáme otázku, jestli existuje optimální zastavovací pravidlo. Nedbajíce toho, zda posloupnost $Y_1, Y_2, \dots$ tvoří martingales, můžeme ukázat, že mezi třídou zastavovacích pravidel, které skutečně zastaví s pravděpodobností 1, existuje optimální zastavovací pravidlo, jestliže platí následující dvě podmínky:

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = -\infty \quad \text{s pravděpodobností 1} \tag{2.15}$$

a

$$E(|Z|) < \infty, \tag{2.16}$$

kde $Z \equiv sup_n Y_n$ .

Je užitečné uvažovat o $Z$ jako o výnosu, který bychom obdrželi, pokud bychom dokázali dokonale předvídat (vzhledem k $X_i$ ).

Předpokládejme, že v modelu hledání práce je $E(X_1^2) < \infty$, přímá aplikace Borel-Cantelliho lemmatu prokáže, že platí (2.15) a (2.16), takže pro model hledání práce existuje optimální zastavovací pravidlo. Navíc předpoklad $E(X_1^2) < \infty$ aplikovaný na model hledání práce implikuje

$$E(Y_n^2) \leq M < \infty, \text{ pro všechna } n, \tag{2.17}$$

takže posloupnost $Y_1, Y_2, \dots$ je rovnoměrně integrovatelná.[3]

---

[2] Nezápornou, integrovatelnou náhodnou veličinu N nazveme „zastavovacím pravidlem" pro posloupnost $X_1, X_2, \dots$, jestliže $N = k$ závisí pouze na pozorované hodnotě $X_{1,\dots,} X_k$ a nezávisí na (doposud nepozorované) hodnotě $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots$ Jinak řečeno, rozhodnutí zastavit není založeno na znalosti budoucnosti.

[3] Posloupnost $Y_1, Y_2, \dots$ náhodných proměnných je rovnoměrně integrovatelná, právě tehdy, pokud

$$\lim_{z\to\infty} \int_{(|Y_n|\geq z)} |y_n| dP = 0, \qquad \text{rovnoměrně s } n.$$

Výsledkem této úvahy je následující důležitý výsledek: Vezměme v úvahu zastavovací problém, ve kterém existuje optimální zastavovací pravidlo. Předpokládáme, že pro každý soubor pozorovaných hodnot $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$, který splňuje

$$E(Y_{n+1}|x_1, \dots, x_n) \leq y_n \,, \tag{2.18}$$

je posloupnost $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots$ regulární supermartingale vzhledem k posloupnosti $X_{n+1},\ X_{n+2}, \dots$. Potom existuje optimální zastavovací pravidlo, které zastavuje, jestliže platí (2.18) a pokračuje jinak.

Jinak řečeno, jestliže platí hypotézy této věty, pak je „krátkozraké“ zastavovací pravidlo optimální. Samozřejmě „krátkozraké“ zastavovací pravidlo je pravidlo, které zastavuje tehdy a jen tehdy, když aktuální výnos ze zastavení (např. pravá strana (2.18)) překročí očekávanou hodnotu zastavení po přibrání přesně jednoho dalšího pozorování (levá strana (2.18)).

Aby bylo možné tuto větu aplikovat na náš model hledání práce, potřebujeme ověřit všechny hypotézy. Předpokládejme, že $E(X_1^2) < \infty$ pouze ukazuje, že $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots$ je supermartingale, pokud platí (2.18). K tomuto závěru definujeme $\xi$ jako jediné řešení rovnice $H(y) - c = 0$ tak, že $y \geq \xi$ implikuje $H(y) - c \leq 0$.

Předpokládejme, že (2.18) platí pro $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$, a definujme

$$Z_n = Y_n + nc = max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Potom dostaneme

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}|X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= -(n+1)c + \int_0^\infty max[z_n, x]\, dF(x) \\ &= -(n+1)c + z_n + H(z_n) \\ &= y_n + [H(z_n) - c], \end{aligned} \tag{2.19}$$

takže $H(y) - c \leq 0$, jelikož (2.18) platí. Poněvadž $H$ je striktně klesající funkce a $Z_n$ roste s $n$, nerovnost (2.13) platí. Navíc (2.19) ukazuje, že (2.18) platí tehdy a jen tehdy, když $z_n \geq \xi$.

# 3. Ekonomika pojištění

## 3.1. Úvod

Rozmach averze k riziku vedl k různým institucionálním formám umožňujícím jednotlivcům a firmám rozložit riziko mezi sebe. Toto je nejčastějším úkolem pojišťovací politiky.

Podstatou pojišťovacích kontraktů je platba fixního poplatku za pojištění výměnou za slib pojišťovatele zaplatit určitou částku peněz za předpokladu, že se stane dohodnutá událost.

Jednotlivci mohou diverzifikovat své portfolio akcií k dosažení akceptovatelného stupně očekávaného výnosu pro daný stupeň rizika. Tato schopnost jednotlivců rozprostřít rizika proto povoluje firmám, aby se zabývaly projekty, které by jinak byly neakceptovatelné.

Pojištění je fenomén, který proniká ekonomickými institucemi a ekonomika pojištění je pro nás nejdůležitějším tématem ekonomie nejistoty. V následující části se jí proto budeme zabývat podrobněji a budeme prezentovat stručné popisy třech nejvýznamnějších problémů v ekonomice pojištění, kterými jsou morální hazard, nepříznivý výběr (adverzní selekce) a analýza rovnováhy pojistných trhů.

Častým problémem je vytvořit pojišťovací kontrakt, který sdílí riziko a zachovává motivaci. Tento motivační problém je označován jako **problém morálního hazardu**. Jeho podstata vychází z neschopnosti pojišťovatele sledovat akce pojištěného bez toho, aby na to vynaložil nějaké náklady. Morální hazard může být zmenšen požadavkem na nesení části nákladů výjimečné situace pojištěným anebo monitorováním jeho chování.

**Nepříznivý výběr (adverzní selekce)** je podobný morálnímu hazardu tím, že pojišťovací společnosti nemají beznákladový přístup k informacím vlastněným klienty atd. Například někteří klienti zdravotních pojišťoven mají mnohem více informací o svém zdravotním stavu než jejich pojišťovací společnosti. Kvůli neúplným informacím jednotlivců, kteří jsou odlišní, s nimi bude zacházeno jako s identickými, protože náklady na sledování každého zvlášť jsou obrovské. Pojišťovací společnosti se vyrovnávají s informační asymetrií pomocí (a) zkušenostního ratingu (tj. vytrvale regulují pojistné, aby odráželo velikost a rozsah působnosti podle individuálních požadavků pojištěného) a (b) vytváření politik ke zjištění informací potřebných pro rozdělení klientů do odlišných kategorií.

Ve zbytku této sekce budeme prezentovat jednoduchou konstrukci **analýzy rovnováhy pojistných trhů**. Tou je dvoustavový model, kterým se budeme zabývat v následující podkapitole.

## 3.2. Dvoustavový model

Pro zjednodušení předpokládejme, že přirozeně převládá jen jeden ze dvou následujících stavů. Ve stavu 1, je jednotlivec vybavený příjmem (nebo bohatstvím) $w$, zatímco jeho příjem ve stavu 2, což je stav nějaké katastrofy, je $y$, s tím, že $y < w$. Pravděpodobnosti nastátí těchto stavů jsou $1 - p$ a $p$.

Předtím než je znám přirozený stav, se jednotlivec může bránit proti nižšímu příjmu ve stavu 2 sjednáním pojištění. Míra změny ze stavu 1 do stavu 2 je $\pi$, tj. nárůst příjmu $s$ ve stavu 2 může být způsoben snížením $\pi s$ v příjmu stavu 1. $\pi$ značí náklady pojištění. Všimněte si, že spravedlivá cena pojištění podle pojistné matematiky (např. posun ze stavu 1 do stavu 2) je jednoduše $p/(1-p)$, tedy šance, že nastane stav 2. Nejpraktičtější a také nejzajímavější případ je ten, pro který $\pi > p/(1-p)$.

Jednotlivec má rostoucí a striktně konkávní funkci užitku $u$. Jeho cílem je vybrat takový objem pojištění, nazveme jej optimálním, který by maximalizoval očekávaný užitek jeho příjmu. Takže hledá optimální úroveň pojištění $s^*$, kde $s^*$ splňuje

$$U(s^*) = \max_{s \geq 0} U(s), \tag{3.1}$$

a

$$U(s) = (1-p)u(w - \pi s) + pu(y + s). \tag{3.2}$$

Striktní konkávnost $u$ způsobuje, že $U$ je striktně konkávní. Následkem toho bude pojištění pořízeno (tj. $s^* > 0$) jen tehdy, pokud $U'(0) > 0$.

Předpokládejme příjmy (bohatství) $w$ a $y$, pravděpodobnost nastání katastrofy $p$, náklady pojištění $\pi$ a užitkovou funkci $u$ splňující $U´(0) > 0$, potom striktní konkávnost $U$ implikuje, že $s^*$ je jediným řešením podmínky prvního řádu rovnosti

$$\pi = \frac{p}{1-p}\frac{u´(y+s)}{u´(w-\pi s)}. \tag{3.3}$$

Jestliže $\pi = p/(1-p)$, potom $y + s^* = w - \pi s^*$, což znamená, že je jednotlivec plně pojištěn proti riziku, a tak mu nezáleží na tom, zda nastane stav 1 nebo 2.

Jestliže $\pi < p/(1-p)$, potom $y + s^* > w - \pi s^*$ a jednotlivec tedy preferuje katastrofu, zatímco když nastane případ $\pi > p/(1-p)$, pak je $y + s^* < w - \pi s^*$ a jednotlivec se katastrofě vyhýbá.

### *3.2.1. Efekt zvyšující se averze k riziku*

Nyní můžeme odpovědět na otázku, jak se optimální objem pojištění mění v závislosti na změnách v užitkové funkci, totiž zda jednotlivci mající vyšší averzi k riziku nakupují více pojištění. Pro rozlišení mezi optimálními stupni pojištění pro různé užitkové funkce a pro ukázání jeho závislosti na konkrétní užitkové funkci $v$, můžeme nahradit $s_v$ za $s^*$.

*Věta 1*

Jestliže $r_u > r_v$, potom $s_u > s_v$.

*Důkaz*

Viz literatura.

Výsledek této věty máme ilustrovaný na Obrázku 3.1.

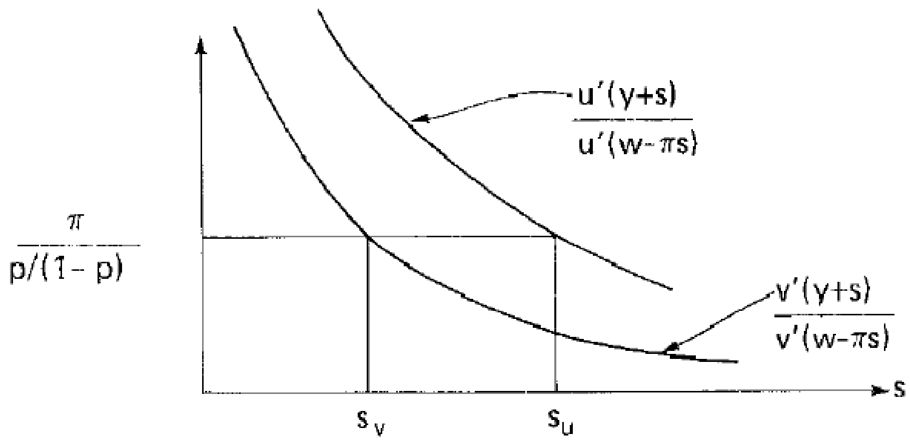



Figure 3.1

Věta 1 nám říká, že $s_v$ roste s $r_v$. Nicméně je obtížné pouze ukázat, jak rychle roste úroveň pojištění v závislosti na úrovni rizika. Navíc, není důležité, jakou má jednotlivec averzi k riziku, neboť nebude plně pojištěn, tj. $s^* < (w - y)/(\pi + 1)$, pokud $\pi > p/(1 - p)$. Existují ale jednotlivci, kteří se dostanou velmi blízko k plnému pojištění? S pomocí následujícího příkladu na tuto otázku odpovíme a ukážeme si nějaký příklad jak rychle $s_u$ roste s $r_u$.

Předpokládejme, že jednotlivec má konstantní averzi k riziku $\lambda > 0$, v tomto případě je jeho užitková funkce $u_\lambda$ dána jako

$$u_\lambda(x) = a + be^{-\lambda x} \text{ pro } b < 0. \tag{3.5}$$

Samozřejmě $u'_\lambda(x) = |b|\lambda e^{-\lambda x}$ a $r_{u_\lambda}(x) \equiv \lambda$.

Z (3.3) a (3.5) plyne, že $s_\lambda$ , optimální úroveň pojištění pro jednotlivce s konstantní averzí k riziku λ, je jednoduše (předpokládáme-li $U'(0) > 0$)

$$s_\lambda = \frac{w-y}{\pi+1} - \frac{1}{\lambda(\pi+1)} \ln \frac{\pi}{p/(1-p)}. \tag{3.6}$$

Z (3.6) vidíme, že pro malé hodnoty $\lambda$ není pořízeno žádné pojištění, $s_\lambda$ roste (jak předpokládá věta 1) s mírou růstu která je inverzní proporcionálně k $\lambda$, a $s_\lambda$ konverguje k $(w-y)/(\pi+1)$, tedy k úrovni, na které je jednotlivec plně pojištěn. Tato pozorování jsou užitečná při stanovování našeho dalšího výsledku, který vyjadřuje, že optimální množství nakoupeného pojištění roste do úrovně, ve které je jednotlivec plně pojištěn proti riziku, pokud jednotlivcova averze k riziku roste bez omezení.

*Věta 2*

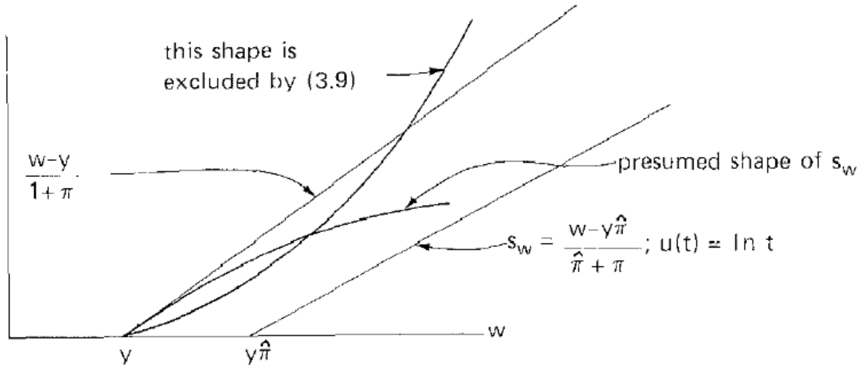
Nechť $\langle u_i \rangle$ je posloupnost užitkových funkcí takových, že $\langle r_{u_i} \rangle$ neomezeně roste (rovnoměrně na intervalu $[y, w]$). Potom $s_{u_i}$ konverguje k $(w-y)/(\pi+1)$.

*Důkaz*

Viz literatura.

### *3.2.2. Efekt rostoucího bohatství*

Označme $s_w$ jako optimální množství pojištění, $w$ jako funkci jednotlivcova příjmu ve stavu 1, s pevnými $u, p, y,$ a $\pi$. Pro zjednodušení můžeme předpokládat, že $w \geq y$ a $\hat{\pi} \equiv \pi/[p/(1-p)] \geq 1$, takže $s_w$ je striktně rostoucí. Bylo naším předpokladem, že $s_w$ by měla být striktně konkávní funkce.




obr. (3.2)

Toto však selhává, zejména pro nejběžnější funkce užitku.

Pro začátek uvažujme

$$f(s_w, w) = \frac{u'(y+s_w)}{u'(w-s_w)} - \hat{\pi} = 0. \tag{3.7}$$

Aplikací věty o implicitní funkci na (3.7) dostaneme ($r \equiv r_u$)

$$s'_w = \left[\frac{r(y+s_w)}{r(w-\pi s_w)} + \pi\right]^{-1} > 0, \tag{3.8}$$

pod podmínkou, že $s_w > 0$, ze které můžeme usuzovat, že (když $r'_u \leq 0$)

$$s'_w \leq 1/(1+\pi). \tag{3.9}$$

(Rovnosti se docílí, pokud $\hat{\pi} = 1$ (v případě, když $y + s_w = w - \pi s_w$) nebo pokud je $r$ konstantní na nějakém intervalu.)

Horní hranice $s_w$ umožňuje pomocí (3.9) ukázat, že $s_w$ nemůže být striktně konvexní na $[y, \infty)$. Toto všechno, včetně poptávkové funkce odvozené pomocí logaritmické užitečnosti, je zobrazeno na obrázku 3.2.

Derivací (3.8), získáme

$$sign\frac{d^2 s_w}{dw^2} = sign\left\{\frac{r'(y+s_w)}{r'(w-\pi s_w)} - \left[\frac{r(y+s_w)}{r(w-\pi s_w)}\right]^2\right\}. \qquad (3.10)$$

Definujme $m_\varepsilon(t)$ pro $\varepsilon > 0$ pomocí

$$m_\varepsilon(t) = \frac{r'(t)}{r'(t+\varepsilon)} - \left[\frac{r(t)}{r(t+\varepsilon)}\right]^2, \text{ pro všechna t,} \qquad (3.11)$$

je zřejmé, že (3.10) dává následující charakteristiku $s_w$.

*Věta 3*

Poptávka $s_w$ pro pojištění je konkávní nebo konvexní v závislosti na tom, zda

$m_\varepsilon \leq 0$ pro všechna $\varepsilon > 0$, nebo $m_\varepsilon \geq 0$ pro všechna $\varepsilon > 0$.

Níže si uvedeme pět příkladů. V prvních třech je $s_w$ lineární, což platí v případech (a) konstantní absolutní averze k riziku, (b) a (c) konstantní relativní averze k riziku. Linearita $s_w$ trvá, dokud je $a$ v příkladu (c) striktně kladné, takže relativní averze k riziku je klesající. Konkavity je docíleno v příkladu (d) a konvexity (na omezeném intervalu) v příkladu (e), kde se setkávají klesající a rostoucí absolutní averze k riziku.

*Příklady*

(a) $u(t) = e^{-\lambda t}$, $\lambda>0$:$r(t) \equiv \lambda$, a $m_\varepsilon \equiv 0$.

(b) $u(t) = \ln t$: $r(t) = 1/t$,$r'(t) = -1/t^2$ , $m_\varepsilon \equiv 0$.

(c) $u(t) = -(a+t)^{-q}$, $a \geq 0$, $q > 0$: $r(t) = (q+1)/(q+t)$, $r'(t) = -(q+1)/(a+t)^2$ , a $m_\varepsilon \equiv 0$.

(d) $u(t) = -e^{-\lambda t} + bt$, $\lambda > 0$, $b > 0$:$r(t) = \left(\lambda^2 e^{-\lambda t}\right)/\left(\lambda e^{-\lambda t} + b\right)$, a $m_\varepsilon\,(t) > 0$ pro všechna $t$ a všechna $\varepsilon > 0$.

(e) $u(t) = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$: $r(t) = \sin t/\cos t$ , $r'(t) = 1/\cos^2 t$,tak $m_\varepsilon\ (t) > 0$ pro $\varepsilon > 0$ a $0 \leq t \leq \pi/2$.

### *3.2.3. Efekt rostoucího rizika*

Nakonec uvažujme dopad nahrazení příjmu (bohatství) w náhodnou proměnnou W. (Stejně jako předtím, $w > y$). $W$ interpretujeme jako mzdy a $y$ jako (určité) neměnné benefity (death benefits). Na začátek analýzy, uvažujme dva jednotlivce s příslušnými dvojicemi příjmů $(w, y)$ a $(W, y)$, kde $EW = w$, a označme $s_w$ a $s_W$ jako množství pojištění, které si každý z nich pořídil.

Naivní intuicí můžeme navrhnout, že $s_W > s_w$, pokud je $(W, y)$ riskantnější a tedy potřebuje větší ochranu.

Rozumnější je však hypotéza, že $s_w > s_{W,}$ která je založena na následujícím argumentu: Protože $u(w) > Eu(W)$, jednotlivec s příjmy $(w, y)$ má více toho, co musí chránit proti možnosti pohromy a je to tedy on, který potřebuje více pojištění.

Přestože to není na první pohled vidět, tento argument není správný. Zatímco $u(w) > Eu(W)$ říká, že má jednotlivec větší bohatství k ochraně, nesleduje už to, že větší množství pojištění ho chrání víc, než jednotlivce s $(W, y)$. Pojištění podle všeho chrání oba jednotlivce. Podstata problému krouží okolo zřejmé otázky, který z nich má větší užitek z dodatečného pojištění.

Pokud je $s$ množství pořízených pojištění (při striktní konkavitě $u$), potom

$$u(w - \pi s) > Eu(W - \pi s).$$

$-\pi s$ interpretujeme jako pokles bohatství u těchto dvou jednotlivců. Jestliže užitková funkce jednotlivce ukazuje klesající averzi k riziku, potom to může intuitivně znamenat, poněvadž je druhý jednotlivec ten, který zažívá nejistotu ve stavu 1 (nejistotu, která nemůže být kontrolována), že mu náhodná povaha $W - \pi s$ způsobí, že bude postižen více než druhý jednotlivec s jistými příjmy, pokud je efektivní úroveň bohatství ve stavu 1 snížena.

Diskutujeme o tom, že úbytek užitků ve stavu 1 díky pořízení dodatečné jednotky pojištění splňuje

$$Eu(W-\pi s)-Eu\big(W-\pi(s+\varepsilon)\big)\geq u(w-\pi s)-u\big(w-\pi(s+\varepsilon)\big); \tag{3.12}$$

to znamená, že pojištění je pro druhého jednotlivce nákladnější. Na druhé straně, růst užitku ve stavu 2 spojený se zakoupením přípustné jednotky pojištění je stejný pro oba jednotlivce.

Tudíž logickým výsledkem (3.12) je, že $s_w > s_W$. Podělením $-\pi\varepsilon$ a položením $\varepsilon$ blížícím se 0 dostáváme

$$Eu'(W-\pi s)\geq u'(w-\pi s). \tag{3.13}$$

Pokud $w \succ_2 W$, (1.6) implikuje, že (3.13) nebo ekvivalentně (3.12), platí tehdy a jen tehdy, když $u'$ je konvexní. Naše další lemma vyjadřuje to, že pokud jednotlivec vykazuje klesající absolutní averzi k riziku, potom má jeho užitková funkce skutečně konvexní derivaci. (Obráceně Lemma 1 neplatí.)

*Lemma 1*

Jestliže $r_u$ je nerostoucí a $u'''$ existuje, pak $u''' > 0$; tj., $u$ má striktně konvexní derivaci.

*Důkaz*

Viz literatura.

Nyní formujme výše uvedený argument a zobecněme jej pro případy, kdy oba jednotlivci mají ve stavu 1 náhodné příjmy. Použitím Lemmatu 1 lze nyní ukázat, že růst rizikovosti příjmu (bohatství) ve stavu 1, vede k nákupu menšího množství pojištění, pokud je $r_u$ klesající.

*Věta 4*

Nechť $s_W$ a $s_Z$ jsou optimální množství pojištění pro dva jednotlivce s příjmy $(W, y)$ a $(Z, y)$. Jestliže $Z \succ_2 W$, potom

$$s_Z \geq s_{W,} \text{ jestliže } r_u \text{ je neklesající,} \tag{3.14}$$

a

$$s_Z \leq s_{W,} \text{ jestliže } u' \text{ je konkávní a } E(Z) = E(W). \tag{3.15}$$

*Důkaz*

Viz literatura.

# 4. Optimální spotřeba při nejistotě

## 4.1. Úvod

Množství spotřebovávaných statků je každodenním rozhodnutím, které se týká všech ekonomických subjektů a které se uskutečňuje v podmínkách nejistoty. Naším úkolem je objasnit, jak nejistota v kombinaci s problémy, které se postupně objevují, ovlivňuje alokaci spotřebitele mezi okamžitou spotřebou a úsporami.

Přítomnost nejistoty alokační rozhodnutí pravděpodobně změní, ale povede to ke zvýšení nebo snížení okamžité spotřeby?

V následující kapitole si představíme **dvoufázové modely**, které v literatuře dosahují značné pozornosti. Tyto dvoufázové modely spotřeby spadají do jedné ze dvou skupin, rozdíl mezi nimi je založen na původu nejistoty. **V první skupině** je nejistota způsobena náhodným pracovním příjmem ve druhém období. V těchto modelech využívajících pracovní příjem předpokládáme, že míra výnosnosti úspor v prvním období je nenáhodná. Problém nastává při výběru spotřeby v prvním období tak, abychom maximalizovali očekávanou užitečnost při spotřebě v obou obdobích.

**Druhá skupina modelů** se zaměřuje na náhodnost spojenou s investováním v prvním období: zde předpokládáme, že míra návratnosti kapitálu je náhodná veličina. Otázkou pak zůstává, jak alokovat fixní množství kapitálu mezi spotřebou a investováním v prvním období tak, abychom maximalizovali očekávaný užitek spotřeby obou období.

Jak bude dokázáno později, modely s kapitálovým rizikem jsou výrazně jednodušší pro analýzu. Na skutečné obtíže ale narazíme při rozšiřování těchto modelů na **vícefázové**. Toto je ukázáno v kapitole 4.3, avšak splněno je to pouze za předpokladu, že užitkové funkce jednoho období vykazují konstantní relativní averzi vůči riziku, nebo když je $u'$ konvexní v případě kapitálového a výnosového rizika. V předchozím případě, je model s neurčitým počtem období přesně tímto dvoufázovým modelem.

V druhém případě je náš model zpracován podle Millera (1976). Ukážeme si také Levhariho a Mirmanův model (1977), ve kterém jsou pracovní příjem a návratnost investice určité, ale délka rozhodování účastníka (tj. délka období) je náhodná.

### 4.2. Dvoufázové modely

Spotřebitel je na počátku vybaven prostředky $w$, a volí množství $c$, které spotřebuje v období 1, jeho úspory nebo investice jsou tedy rovny $w - c$. Ve druhém období spotřebuje prostředky v celém svém rozsahu, a tyto prostředky jsou součtem jeho náhodného pracovního příjmu $Y$ a $r(w-c)$, což je oceněná hodnota jeho investice, kde $r - 1$ je určitá úroková míra.

Cílem spotřebitele v tomto modelu čistého příjmového rizika je maximalizovat očekávanou hodnotu $V(w)$ jeho užitku pro spotřební tok v obou obdobích, který podléhá omezení $0 \leq c \leq w$. Problémem je tedy určit optimální úroveň spotřeby $c^*$ v období 1, tj.

$$V(w) \equiv \max_{0 \leq c \leq w} EU\big(c, Y + r(w-c)\big). \tag{4.1}$$

Obvykle předpokládáme, že užitková funkce $U$ spotřebitele je konkávní a rostoucí ve všech proměnných.

Podmínka prvního řádu pro řešení (4.1) je ($U$ je funkce diferencovatelná podle $c$)

$$EU_1 = rEU_2. \tag{4.2}$$

Jestliže $Y = EY$, pak je (4.2) redukována na známou podmínku

$$U_1 = rU_2 \tag{4.3}$$

Pro zjednodušení vztahu, nechť $c_d$ je optimální úroveň spotřeby (která řeší (4.3)) pro tuto deterministickou podobu problému. Užitím (4.3), rozšířením $EU_1$a $EU_2$ do Taylorova rozvoje na intervalu $\langle(c_d, EY + r(w - c_d)\rangle$ a vynecháním členů výrazu $\partial^k U_i/\partial^k c_2 E(Y - E(Y))^k/k!$ pro $k > 2$ (tyto členy pravděpodobně budou $o(\sigma^2)$, kde $\sigma^2 = E\{(Y - E(Y))^2\}$), obdržíme

$$\begin{aligned} EU_1 - rEU_2 &= U_1 + U_{122}\sigma^2/2 - r[U_2 + U_{222}\sigma^2/2] \\ &= \frac{\sigma^2}{2}[U_{122} - rU_{222}] \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\left[U_{122} - \frac{U_1}{U_2}U_{222}\right] \equiv \frac{\sigma^2}{2}\mathscr{U} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Předpokládejme vnitřní řešení, $0 < c_d < w$, $(d^2/dc^2)U|_{c_d} < 0$, implikující, že

$$\frac{d}{dc}\{EU_1 - rEU_2\}\Big|_{c_d} = \frac{d^2}{dc^2}EU\Big|_{c_d} < 0, \tag{4.5}$$

jelikož $(d^2/dc^2)EU|_{c_d} = (d^2/dc^2)U|_{c_d} + O(\sigma^2)$.

Následně, pokud je výraz (4.4) záporný, z (4.5) vyplývá, že $c^* < c_d$, pokud $Y$ vykazuje dostatečně malé riziko.

Jak jsme ukázali výše, můžeme zajistit, aby předběžná poptávka po úsporách byla kladná (tj. $c^* < c_d$), když je nejistota pracovního příjmu $Y$ malá, pokud je množství $\mathscr{U}$ záporné. Nyní, jestliže $U$ vykazuje klesající absolutní averzi k riziku, pak je $U_{iii} < 0$, navíc, pokud je $U$ aditivní (separabilní), pak jsou její křížové parciální derivace při splnění požadavku $\mathscr{U} < 0$ nulové.

Nyní se zaměříme na variantu modelu s čistým kapitálovým rizikem místo té s čistým výnosovým (pracovně-příjmovým) rizikem. Jedinec nebude pobírat pracovní příjem, ale spíše investovat rozdíl mezi jeho počátečním bohatstvím $w$ a spotřebou $c$ v období 1. Míra návratnosti $X - 1 \geq 0$ jeho investice či úspor je náhodná, takže částka, kterou má k dispozici pro spotřebu v období 2, je $(w - c)X$. Pro jednoduchost předpokládejme, že dvoufázová užitková funkce je aditivní, takže problémem spotřebitele je nalézt optimální úroveň spotřeby $c_X$, aby

$$\max_{0 \leq c \leq w}\{u(c) + Ev[X(w - c)]\} \tag{4.6}$$

kde $u$ a $v$ v uvedeném pořadí označují striktně konkávní užitkové funkce pro spotřebu v období 1 a 2.

Analogicky k modelu s čistým výnosovým rizikem je podmínka prvního řádu pro řešení (4.6)

$$u'(c) = E\{Xv'[X(w - c)]\} \tag{4.7}$$

Na rozdíl od tohoto modelu nám však přítomnost čistého kapitálového rizika umožňuje vymezit podmínky pro $v$ tak, že vzrůstající rizikovost $X$ způsobující $c_X$, tedy optimální úroveň spotřeby v období 1, můžeme snížit bez jakéhokoliv omezení míry nejistoty (rizikovosti) obsažené v náhodné proměnné $X$. Poznamenejme si ještě, že když řekneme, že $X$ je rizikovější či více nejisté než $Z$, myslíme tím, že $Z >_2 X$ [viz (1.4)].

*Věta 1*

Předpokládejme, že $X$ je rizikovější než $Z$ a $E(X) = E(Z)$. Pak $c_X \leq c_Z$, pokud je $f$ konvexní a $c_X \geq c_Z$, pokud je $f$ konkávní, kde

$$f(t) = tv'(t), \qquad \text{pro } t \geq 0. \tag{4.8}$$

*Důkaz*

Viz literatura.

Z Věty 1 ihned plyne důsledek, že nejistota v míře návratnosti na rozdíl od známé míry návratnosti vede ke snížení spotřeby v období 1 – nebo chceme-li, k růstu úspor – za předpokladu, že $f$ je konvexní.

I tady, stejně jako v modelu s čistým výnosovým rizikem, hraje kladnost třetí derivace užitkové funkce klíčovou roli. Protože $f''(c) = 2v''(c) + cv'''(c)$, je zřejmé, že nutná, nikoliv však postačující, podmínka pro konvexitu $f$ je, že třetí derivace $v$ je kladná. (Je samozřejmé, že záporná třetí derivace je postačující, abychom zaručili konkávnost $f$.) Nyní, všechny isoelastické užitkové funkce, tj. ty s konstantní relativní averzí k riziku, $v(c) = c^{\gamma}/\gamma, \gamma < 1$a $\gamma \neq 0$, mají kladné třetí derivace, ale $f$ je konvexní, když $\gamma < 0$ a konkávní, když $\gamma > 0$, protože $f''(c) = \gamma(\gamma - 1)c^{\gamma-2}$. (Na hranici (tj. $\gamma = 0$) položme $v(c) = lnc$. Zde $f'' \equiv 0$, tzn. $f$ je konvexní i konkávní, tudíž $c_X$ závisí na $X$ jen přes $E(X)$; ve skutečnosti $c_X = wE(X)/(E(X) + \beta)$, když $u = ln$ a $v = \beta ln$, kde $\beta$ je diskontní faktor.)

Nakonec poznamenejme, že $0 < dc_X/dw < 1$. Všimněme si, že růst $w$ způsobuje pokles pravé strany rovnice (4.7), zatímco levá strana zůstává nezměněna; a růst $c$ způsobuje pokles levé strany a růst pravé strany. Proto $dc_X/dw > 0$. Pokud $dc_X/dw \geq 1$, pak $X(w - c_X)$ klesá s $w$, čímž roste pravá strana rovnice (4.7), zatímco $dc_X/dw > 0$ způsobuje, že levá strana klesá s $w$. Toto však porušuje (4.7), proto musíme mít $dc_X/dw < 1$.

### 4.3. Vícefázové modely

Ve vícefázových modelech spotřeby je analytické tvárnosti dosaženo pouze výměnou některých omezujících předpokladů uvalených na vícefázovou užitkovou funkci $U$ spotřebního toku $c = \langle c_i \rangle_{i=1}^{\infty}$. Ve všech případech předpokládáme, že $U$ je aditivní a je ve tvaru

$$U(c) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{i-1} u(c_i), \tag{4.10}$$

kde $\beta$ je diskontní faktor, $0 < \beta < 1$ a jednofázová užitková funkce $u$ je jako vždy konkávní. Navíc předpokládáme, že všechny příslušné náhodné proměnné jsou nezávislé.

Jestliže k (4.10) a nezávislosti náhodných proměnných navíc předpokládáme, že jednofázová užitková funkce vykazuje konstantní relativní averzi k riziku, tj. $u$ je ve tvaru

$$u(c) = c^{\gamma}/\gamma, \qquad \gamma \neq 0, \gamma < 1,$$
$$u(c) = \ln c, \qquad \gamma = 0. \tag{4.11}$$

Pak jsou dvou- a vícefázové modely s čistým kapitálovým rizikem ekvivalentní; jako předtím, kdy rostoucí riziko způsobovalo pokles spotřeby, když $\gamma < 0$ a růst spotřeby, když $\gamma > 0$.

Miller (1976) ve svých vícefázových modelech s čistým výnosovým rizikem uvažuje poněkud širší skupinu jednofázových užitkových funkcí, než je popsána v (4.11). V jeho modelu je $u$ omezena na skupinu $\mathscr{T}$, kde

$$\mathscr{T} = \{u: u' > 0 \text{ a } u' \text{ je konvexní}\}. \tag{4.12}$$

Tudíž podmínka $u''' > 0$ je nezbytná a, jak bude dále uvedeno, spotřeba klesá s rostoucím rizikem, pokud $u \in \mathscr{T}$. Protože $u''' > 0$, pokud je $u$ definovaná podle (4.11), směr změny pro optimální úroveň spotřeby nezávisí na znaménku $\gamma$. Tento rozdíl zobrazuje odlišnost mezi dvěma modely.

Nechť $Y_j$ je nezáporný příjem obdržený na konci období $j$, $\{Y_j\}$ jsou tedy nezávislé. Pro zjednodušení výkladu předpokládejme, že $Y_j$ mají stejné rozdělení a není dovoleno půjčování. Následující předpoklad vyjadřuje, že současná spotřeba $c$ je omezena tím, že se nachází mezi 0 a $w$, což je současná velikost bohatství. Zaručenou návratnost investice označíme $r-1$, tedy současné bohatství $w$ společně se současnou spotřebou $c$ nám dává velikost bohatství $Y + r(w\text{-}c)$ následujícího období.

Musíme přidat předpoklad $r^{\gamma}\beta < 1$ proto, abychom zaručili, že užitek plynoucí z optimálního spotřebního toku zůstává patřičně omezen. Analýza začíná demonstrací, že operátor $A$ je kontrakční zobrazení[4] do prostoru funkcí $\mathscr{V}$, kde $A$ je definováno jako

$$Av(w) = sup_{0\leq c\leq w}\{u(c) + \beta Ev[Y + r(w-c)]\}, \qquad w > 0, v \in \mathscr{V} \tag{4.13}$$

a $\mathscr{V}$ je (Banachův) prostor spojitých, rostoucích a konkávních funkcí na intervalu $(0,\infty)$, který z technických důvodů splňuje omezující podmínku

$$\|v\| \equiv sup_{w>0}|v(w)|/\max(|u(w)|,1) < \infty. \tag{4.14}$$

Znalost toho, že $A$ je kontrakce, nám kromě jiného umožňuje dospět k závěru, že $A$ má jediný pevný bod (na $\mathscr{V}$ ), a tak $V(w)$, což je užitek z následného optimálního spotřebního toku, kde počáteční bohatství je $w$, je jediným řešením

$$V(w) = sup_{0\leq c\leq w}\{u(c) + \beta EV\big(Y + r(w-c)\big)\}, \qquad w > 0, \tag{4.15}$$

a $c_Y(w)$, optimální úroveň spotřeby, když $w$ je bohatství a $Y$ je náhodný pracovní příjem, je jedinou hodnotou $c$, která dosahuje maxima v (4.15). Navíc, pokud je $V$ pevným bodem $A$, pak je $V$ konkávní. Konkávnost $u$ a $V$ nám s využitím stejného principu jako na konci předešlé kapitoly umožňuje ukázat, že $c_Y(w)$ a $w - c_Y(w)$ jsou rostoucí funkce $w$, tj. že $0 < dc_Y(w)/dw < 1$.

[4] Operátor $A$ je kontrakcí na prostor $\mathscr{V}$, jestliže existuje číslo $\alpha < 1$ takové, že

$$\|Av_1 - Av_2\| \leq \alpha\|v_1 - v_2\|, \text{ pro všechna } v_1, v_2 \in \mathscr{V},$$

kde $\|\cdot\|$ je normou prostoru $\mathscr{V}$. Zde je norma $\|\cdot\|$ daná stejně jako v (4.14).

Konkávnost $V$ nám také dovoluje jednoduchou ukázku toho, že rizikovější výnos $Z$ je požadován méně než $Y$, protože $V_Z(w) \leq V_Y(w)$ pro všechna $w$, přičemž jsme u $V$ a $A$ použili dolní indexy, abychom rozlišili výnos spojený s $Z$ a $Y$. Abychom to ukázali, poznamenejme, že pro každé $c$, $0 \leq c \leq w$, skutečnost, že $Z$ je rizikovější než $Y$ (tj. $Y >_2 Z$) vyjadřuje, že

$$u(c) + \beta E V_Y\big(Z + r(w-c)\big) \leq u(c) + \beta E V_Y\big(Y + r(w-c)\big), \tag{4.16}$$

protože $V_Y$ je konkávní rostoucí funkce. Maximalizací levé strany (4.16) přes všechna $c$ obdržíme

$$A_Z V_Y(w) \leq u\big(c_Z(w)\big) + \beta E V_Y(Y + r(w - c_Z(w))) \leq V_Y(w),$$

nebo jednoduše

$$A_Z V_Y \leq V_Y. \tag{4.17}$$

Protože $A_Z$ je monotónní (tj. $v \leq \hat{v}$ implikuje $A_Z v \leq A_Z \hat{v}$), můžeme (4.17) opakovat a získáme

$$A_Z^{n+1} V_Y \leq A_Z^n V_Y \leq \cdots \leq V_Y. \tag{4.18}$$

Skutečnost, že $A_Z$ je kontrakce znamená, že metoda postupných aproximací může být použita k nalezení pevného bodu; tj.

$$\lim_{n\to\infty} A_Z^n v = V_Z \qquad \text{pro všechna } v \in \mathscr{V}. \tag{4.19}$$

Zejména, užití (4.19) s $v = V_Y$ve spojení s (4.18) vede k požadovanému

$$V_Z = \lim_{n\to\infty} A_Z^n V_Y \leq V_Y.$$

Miller (1976) pomocí vysvětlení, že $u \in \mathscr{F}$ implikuje $V \in \mathscr{F}$, ověřuje, že $c_Z(w) \leq c_Y(w)$ vždy, když je $Z$ rizikovější než $Y$.

Levhari a Mirman (1977), (spíše než pokládání výnosového či kapitálového rizika za zdroj nejistoty), uvažují případ, kde nejistota vyvstává jako důsledek spotřebitelovy neznámé délky života. Nechť $p_i$ je pravděpodobnost, že žije přesně $i$ let, $i = 0,1, \ldots, n$, tudíž $n$ je maximální délka jeho života. Předpokládáme, že rozhodnutí o velikosti spotřeby je učiněno na začátku každého období dříve, než spotřebitel zjistí, zda toto období přežije; kromě toho nepřipisujeme žádnou hodnotu dědictví. Pro jednoduchost také předpokládejme, že nemáme žádný pracovní příjem. Zaručenou návratnost investice označme $r-1$ a $P_i$ definujme jako pravděpodobnost, že spotřebitel žije nejméně $i$ let, tedy

$$P_i = \sum_{j=i}^{n} p_j. \tag{4.20}$$

Ponecháním $V_i(w)$ jako maxima očekávané současné hodnoty užitečnosti spotřeby v obdobích $i$ až $n$, přičemž $w$ je bohatství na počátku období $i$, dostaneme

$$V_i(w) = \min_{0\leq c\leq w}\left\{P_i u(c) + \beta V_{i+1}\big(r(w-c)\big)\right\}, \qquad i = 0, 1, \dots, n-1, \tag{4.21}$$

a

$$V_n(w) = P_n u(w). \tag{4.22}$$

Zřejmě hodnota $c_i(w)$ z $c$, která dosahuje maxima, je optimální velikostí spotřeby v období $i$, pokud bohatství na počátku období $i$ je $w$.
Jak již bylo uvedeno dříve, omezíme naši pozornost na jednofázové užitkové funkce, které splňují (4.11). Když $\gamma \neq 1$, můžeme prostřednictvím indukce ukázat, že existují konstanty $K$ a $f$ takové, že

$$V_i(w) = u(w)K_i, \tag{4.23}$$

a

$$c_i(w) = wf_i. \tag{4.24}$$

Optimální velikost spotřeby $f_i$ v období $i$ splňuje

$$f_i = \frac{P_i^{1/(1-\gamma)}}{P_i^{1/(1-\gamma)} + \alpha k_i},$$

kde $\alpha = (\beta r^{\gamma})^{\frac{1}{1-\gamma}}$ a $k_i = [P_i f_i^{\gamma} + P_{i+1}\alpha^{1-\gamma}(1-f_i)^{\gamma}]^{1/(1-\gamma)} = K_i^{1/(1-\gamma)}$.

Analogie (4.23) a (4.24) pro jednodušší případ $\gamma = 1$ je

$$V_i(w) = \sum_{j=0}^{n-i} P_{i+j}\beta^j \ln w + K_i \tag{4.25}$$

a

$$c_i(w) = w\frac{P_i}{\sum_{j=0}^{n-i} P_{i+j}\beta^j}. \tag{4.26}$$

Nyní porovnejme dva jedince s různými náhodnými délkami života $X$ a $Y$, $P(X=i)=p_i$, $P(Y=i)=q_i$, $P_i = \sum_{j=i}^{n} p_j$ a $Q_i = \sum_{j=i}^{n} q_j$. Srovnejme jejich spotřebu v období 0, pokud je $Y$ považováno za rizikovější.

*Věta 2*

Předpokládejme, že $Y \neq X$ a $Y$ je rizikovější než $X$, tedy

$$\sum_{i=0}^{j} P_i \geq \sum_{i=0}^{j} Q_i, \qquad j = 0, 1, \dots, n. \tag{4.27}$$

Pak jedinec s délkou života $Y$ spotřebuje v počátečním období určitě více bez ohledu na to, zda $E(X) > E(Y)$ nebo $E(X) = E(Y)$.

*Důkaz:* Viz literatura.

Ještě poukážeme na to, že kdyby byl na počátku diskontní faktor roven jedné, spotřeba by pak závisela na $X$ pouze přes svou střední hodnotu, protože by byla proporcionální k $1/(E(X)+1)$.

# 5. Konkurenční firma při nejistotě

## 5.1. Úvod

V této kapitole omezíme naši pozornost na chování konkurenčních firem v nejistém prostředí. Dále se v rámci tohoto problému zaměříme na jednofázové modely a ukážeme, že nejistota je důležitá, i když jsou firmy rizikově neutrální.

Pro připomenutí začneme analýzou averze k riziku těch firem, které vyrábějí v konkurenčním jednofázovém prostředí. Rozhodnutí o optimálním výstupu je porovnáváno s klasickým, rizikově neutrálním prostředím a je vidět, že pokud je rozhodnutí kombinováno s nejistotou averze k riziku, je výstup nižší. Navíc, čím je větší averze k riziku, ve smyslu Arrowa a Pratta, tím větší je snížení výstupu. Na druhé straně však nové výsledky odhalují, že změna ve výstupu způsobená udržovaným průměrným růstem rizika závisí na sklonu křivky nákladů, a stejně tak na znaménku třetí derivace užitkové funkce. Na rozdíl od případu, kde figuruje jistota, efekt rostoucích fixních nákladů či přiměřené daně ze zisku má vliv na výstup, a směr vlivu se mění nepřímo úměrně s absolutní a relativní averzí k riziku.

Pak jsou prezentovány důsledky averze k riziku na trh výrobních faktorů. Následně je vyhodnoceno "optimální" chování konkurenční firmy, když jsou použita především kritéria bezpečnosti namísto maximalizace očekávaného užitku. Nakonec uvedeme analýzu chování konkurenčního odvětví při nejistotě. Za účelem oddělení efektu nejistoty, předpokládejme, že jsou firmy rizikově neutrální. Hlavními výsledky jsou: očekávaný výstup každé z firem je menší než výstup, který minimalizuje průměrné náklady odvětví, konkurenční rovnováha je efektivní a počet firem v odvětví roste s růstem buď střední hodnoty výstupu, nebo rozptylu výstupu.

## 5. 2. Konkurenční výroba firem averzních k riziku

V této podkapitole určíme optimální výstup konkurenční firmy, která je k riziku averzní. Cena $P \geq 0$ je náhodná proměnná (se známou distribuční funkcí $F$ a střední hodnotou $\mu$), a firma ji nemůže jakkoliv ovlivnit. Proto, jelikož se jedná o konkurenční prostředí, firma prodává celý svůj výstup $q$ za obvyklou cenu $p$. Hodnota $p$ z $P$ je tedy známa až poté, co se firma rozhodne o velikosti svého výstupu $q$. V našem případě se jedná o jednofázový model, což znamená, že není povoleno uskladnění zásob mezi obdobími.

Vztah mezi ziskem firmy $\pi$ a výstupem $q$ je dán jako

$$\pi(q) = Pq - C(q), \tag{5.1}$$

kde $C(q)$, tedy celkové náklady na výrobu $q$ jednotek produkce, se skládají z fixních nákladů $B$ a variabilních nákladů $c(q)$. $C$ je samozřejmě rostoucí funkce. Protože předpokládáme neklesající mezní náklady na produkci ($C'$ je kladná a neklesající), $\pi$ je konkávní funkce argumentu $q$. Firma má striktně konkávní užitkovou funkci $u$ a hledá takové množství $q$, které bude maximalizovat očekávaný užitek $U$ ze zisku. Firma tedy hledá optimální úroveň produkce $q^*$, kde $q^*$ splňuje

$$U(q^*) = \max_{q \geq 0} U(q), \tag{5.2}$$

a

$$U(q) = Eu\big(\pi(q)\big). \tag{5.3}$$

Během celé této kapitoly budeme využívat následujícího důsledku:

*Lemma 1*

Jestliže $h > 0$ je klesající funkce a *Z* je nedegenerovaná náhodná proměnná, pak

$$E\{Zh(Z)\} < h(0)E(Z).$$

*Důkaz*

Viz literatura.

Podmínkou prvního řádu je (konkávnost *u* a *π* zaručuje, že se to vztahuje i na *U*)

$$E\{u'(\pi(q))P\} = C'(q)Eu'(\pi(q)). \tag{5.4}$$

Jelikož $u'$ je klesající funkce a $\pi$ roste na $P$, z Lemmatu 1 plyne, že $E\{u'(\pi)(P-\mu)\} < 0$. Po odečtení $\mu Eu'(\pi)$ z obou stran (5.4) tato nerovnost ukazuje, že

$$(C'(q) - \mu)Eu'(\pi) = E\{u'(\pi)(P-\mu)\} < 0,$$

z čehož kladnost $Eu'(\pi)$ implikuje, že

$$C'(q^*) < \mu. \tag{5.5}$$

Vzhledem k (5.5), neklesajícímu $C'$ a skutečnosti, že optimální výstup, ať už firmy rizikově neutrální či určené poptávkou, má mezní náklady rovny ceně, zjistíme, že nejistota spojená s averzí k riziku vede ke snižování výstupu. (Pokud firma riziko preferuje, tj. $u$ je konvexní, pak stejný argument znamená, že výstup roste.)

*5.2.1. Vliv rostoucího rizika*

Protože růst rizikovosti $P$ zachovávající střední hodnotu ponechává μ nezměněné, nebude pro nás překvapením, že taková změna má vliv na $q^*$. Ovšem směr změny je nejistý; ve skutečnosti jsou možné nárůsty i poklesy výstupu. Začněme ověřením očekávaného výsledku, že růst rizika povede k poklesu produkce. V naší diskusi o optimálních spotřebních strategiích hraje svou roli funkce $f$ definovaná jako

$$f(t) = tu'(t), \qquad t \geq 0, \tag{5.6}$$

stejně jako znaménko $u'''$; mimo to zde vstupují i fixní náklady.

*Věta 1*

Nechť $q_i$ označuje optimální výstup, když cena $P$ má stejné rozdělení jako náhodná proměnná $P_i$, $i = 1, 2$, a předpokládejme, že $P_1$ je striktně rizikovější než $P_2$ se středními hodnotami $E(P_1) = E(P_2)$. Výstup klesá (tj. $q_1 < q_2$), když $f$ je konkávní a, buď $u'$ je konvexní a mezní náklady převyšují průměrné, nebo $u'$ je konkávní a průměrné náklady převyšují mezní. Výstup roste (tj. $q_1 > q_2$), když $f$ je konvexní a, buď $u'$ je konvexní a průměrné náklady převyšují mezní, nebo $u'$ je konkávní a mezní náklady převyšují průměrné.

*Důkaz*

Viz literatura.

Nejznámější užitkové funkce splňující $f$ konkávní a $u'$ konvexní jsou isoelastické užitkové funkce s parametrem $\gamma \geq 0$, tj. $u(c) = lnc$ a $u(c) = C^\gamma/\gamma$, $0 < \gamma < 1$; $f$ je konvexní, pokud $\gamma \leq 0$. Předpoklad, že jsou mezní náklady vyšší než průměrné náklady, vyžaduje nulové fixní náklady (tj. $B = 0$), zatímco fixní náklady musí být nenulové, pokud průměrné náklady překračují mezní náklady. Větu 1 lze snadno rozšířit pro případ $U$ křivky průměrných nákladů.

I když to nepřináší zvláště užitečný výsledek v této zvláštní souvislosti, Věta 1 má zajímavý důsledek pro vzájemný dopad změn v riziku. Zejména nechť $v(p,q)$ je užitek spojený s rozhodnutím $q$, kdy náhodná proměnná $P_r$ předpokládá hodnotu $p$. Ten, kdo se rozhoduje, usiluje o maximalizaci

$$U_r(q) = \int v(p,q)dF_r(p), \tag{5.7}$$

kde $F_r$ je rostoucí distribuční funkce náhodné veličiny $P_r$, a zvýšení $r$ představuje růst rizika zachovávající střední hodnotu. Označme optimální rozhodnutí $q_r^*$ a předpokládejme, že $v$ roste v $p$ a je striktně konkávní v $q$. Je dokázáno, že $q^*$ roste (klesá) s $r$, pokud je $\partial v/\partial q$ přísně konvexní (konkávní) funkcí $p$, tedy $\partial^3 v/\partial q \partial p^2 > (<) 0$.

V našem konkurenčním modelu máme $v(p,q) = u(pq - C(q))$. Nyní $v$ roste v $p$; tedy $\partial^2 v(p,q)/\partial q^2 = (p - C'(q))^2 u''(\pi) - C''(q)u'(\pi) < 0$, protože je $u$ striktně konkávní a $\partial^3 v/\partial q \partial p^2 < 0$ za předpokladu, že

$$-\frac{u'''(\pi)}{u''(\pi)} \left[ q\big(p - C'(q)\big)\right] > 2. \tag{5.8}$$

Pokud tedy $u$ splňuje (5.8) na příslušném rozsahu $p$ a $q$, zvýšení rizika povede ke snížení výstupu.

*5.2.2. Změny averze k riziku*

Ukázali jsme, že pro firmy s konstantní absolutní averzí k riziku platí, že firma averzní k riziku produkuje méně než rizikově neutrální firma a ta produkuje méně než riziko preferující firma. Bohužel se tento výsledek vztahuje pouze na omezenou třídu užitkových funkcí a navíc neumožňuje žádné srovnání mezi firmami odmítajícími riziko. Náš další výsledek tato omezení překonává. Pro rozlišení mezi optimální hodnotou $q$ pro užitkové funkce $u$ a $v$, nahradíme $q^*$ $q_u$ respektive $q_v$.

*Věta 2*

Když $r_u > r_v$ , *pak* $q_u < q_v$.

*Důkaz:* Viz literatura.

*5.2.3. Vliv fixních nákladů a zisků daní*

Reakce konkurenční firmy na fixní náklady se v podmínkách nejistoty a jistoty radikálně liší. Je samozřejmě pevně stanoveno, že krátkodobá rozhodnutí o produkci fixní náklady nemění. To neplatí pro firmy vlastnící konkávní užitkové funkce a pracující v rizikovém prostředí popsaném zde: zvýšení fixních nákladů vede k poklesu výstupu, pokud má podnik klesající absolutní averzi k riziku.

Důvod pro toto (paradoxní) chování je poměrně jasný. Bylo již prokázáno, že firmy odmítající riziko produkují méně než firmy rizikově lhostejné. Pokud má firma klesající (rostoucí) funkci absolutní averze k riziku, pak by se měl výstup zvýšit (snížit) s bohatstvím. Ale fixní náklady jsou podobné negativnímu bohatství, a tudíž jsou výsledky následující.

*Věta 3*

Pokud je $r_u$ klesající (rostoucí), pak $dq^*/dB < 0$ [$> 0$].

*Důkaz:*

Viz literatura.

Dále předpokládejme, že existuje proporcionální míra zdanění $t$ zisku tak, že zisk $\pi$ po zdanění je dán vztahem

$$\pi\,(q) \;=\; (1 - t)(Pq - C(q)), \tag{5.11}$$

a stejně jako předtím se firma snaží maximalizovat $q^*$

$$U\,(q) \;=\; Eu\,(\pi\,(q)). \tag{5.12}$$

Pokud neuvažujeme nejistotu, výstup se s $t$ nemění. V přítomnosti nejistoty je nicméně $t$ klesající nebo rostoucí v souladu s klesající nebo rostoucí povahou firemní relativní averze k riziku.

*Věta 4*

Pokud je $R_u$ klesající (rostoucí), pak $dq^*/\,dt < 0$ $(> 0)$.

*Důkaz*

Viz literatura.

Pokud by se ceny měly zvýšit o $\varepsilon$ s pravděpodobností 1 a $r_u$ je nerostoucí, pak

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right) U'(q) = E\left\{u'\big(\pi(q)\big) + q\big(P - C'(q)\big)u''(\pi)\right\}$$
$$> -E\,\{(P - C'\,(q))\,u'\,(\pi)\,r_u\,(\pi)\}\,/\,q$$
$$> -U'\,(q)\,r_u\,(C'\,(q)\,q - C\,(q))\,/\,q.$$

Proto, $dU'(q^*)/d\varepsilon > 0$, takže $dq^*/d\varepsilon > 0$. Obráceně to zde však neplatí; rostoucí $r_u$ nezajišťuje $dq^*/d\varepsilon < 0$.

*5.3. Poptávka po výrobních faktorech v cenové nejistotě*

Opět předpokládáme model, kdy je firma příjemcem ceny a vyrábí dříve, než jsou známy ceny výstupu. Firma zná rozdělení cen a maximalizuje očekávaný užitek ze zisků.

Nechť $q, K$ a $L$ jsou výstup, kapitál a práce, (neklesající) produkční funkce je daná jako

$$q = f(K, L) \tag{5.13}$$

a zisk jako

$$\pi = Pq - wL - rK - B, \tag{5.14}$$

kde $w$ je mzdová sazba, $r$ cena kapitálu a $B$ fixní náklady. Firemní užitková funkce $u$ je striktně konkávní, a hledáme množství vstupních faktorů $K^*$ a $L^*$ tak, abychom maximalizovali očekávaný užitek $U$ zisků, kde

$$U(K, L) = Eu(Pf(K, L) - wL - rK - B. \tag{5.15}$$

Pro zajištění toho, že je $U$ striktně konkávní, předpokládáme, že $f$ je konkávní.

Protože $f$ je konkávní (tj. firma nemůže mít rostoucí výnosy z rozsahu) a náklady jsou lineární ve faktorech, celkové náklady $C(q)$ na výrobu $q$ jednotek odvozené použitím optimální úrovně vstupů výrobních faktorů $K_q$ a $L_q$, mají neklesající mezní náklady. Proto analýza předchozí části říká, že má nejistota za následek menší výstup.

Navíc menší výkon samozřejmě vyžaduje změny v $K$ a $L$. Zejména se bude snižovat (zvyšovat) $K$, pokud $f_K f_{LL} - f_L f_{KL} < 0$ $(> 0)$ a odpovídajícím způsobem bude $L$ klesat (růst), pokud $f_L f_{KK} - f_L f_{KL} < 0$ $(> 0)$. Podle všeho se $f$ chová správně, pokud $f_{KL} > 0$, což znamená, že nejistota způsobí pokles vstupů obou výrobních faktorů.

Nejistota způsobuje také to, že (očekávané) hodnoty mezního produktu každého faktoru zvyšují jeho mezní náklady. Abychom to mohli ukázat, ukažme si, že podmínky prvního řádu jsou:

$$f_K E\{Pu'(\pi)\} = rEu'(\pi), \tag{5.16}$$

a

$$f_L E\{Pu'(\pi)\} = wEu'(\pi). \tag{5.17}$$

Jak bylo ukázáno dříve, $E\{(P - \mu)u'(\pi)\} < 0$. Následně odečtením $\mu f_K Eu'(\pi)$ od (5.16) dostáváme $(r - \mu f_K)Eu'(\pi) < 0$, z čehož

$$r < \mu f_K, \tag{5.18}$$

pokud $u' > 0$.
Stejně tak lze tvrdit, že

$$w < \mu\, f_L\,. \tag{5.19}$$

Zřejmě bychom měli interpretovat $f_i E(Pu'(\pi))/Eu'(\pi)$ jako hodnotu mezního produktu faktoru $i$, $i = K, L$.

A konečně, uvažujme monopolistickou (klesající) křivku poptávky $X$ danou jako

$$X(q) = D(q) + Z_q \tag{5.20}$$

kde $Z_q = Z$ a $EZ = 0$.

Potom

$$0 = U_L \;=\; E\{u'(\pi)(d\pi/dL)\}$$
$$\;=\; E\{u'(\pi)[-w + f_L(D(q*) + qD'(q*)) + f_L Z]\},$$

z čehož dostaneme (pokud $u$ je lineární, $E(Zu'(\pi)) = 0$)

$$w = f_L MR_{q^*} + f_L\,(E(Zu'(\pi))/Eu'(\pi))$$
$$< f_L MR_{q^*} = MRP_{q^*}\,, \tag{5.21}$$

kde nerovnost vyplývá z Lemma 1 kapitoly 5.2. Opět platí, že nejistota způsobuje, že mezní produkt (marginal revenue product) výrobku překročí cenu faktoru.

## 5.4. Alternativy k očekávané hypotéze užitečnosti: První bezpečnostní kritérium (Safety – first criteria)

Nechť je poptávková funkce $D$ charakterizující firmu dána

$$D(q, Z) = g(q) + h(q)Z, \tag{5.22}$$

kde $q$ je výstup, $h > 0$, a $Z$ je náhodná proměnná (která není závislá na $q$) s $E(Z) = 1$. Tato formulace zahrnuje dodatečnou (aditivní) nejistotu ($h \equiv 1$) a multiplikativní nejistotu ($g \equiv 0$) ve zvláštních případech. Pro zajištění toho, že zahrneme monopolní i konkurenční prostředí, předpokládejme, že očekávaná cena $\mu(q) \equiv ED(q, Z)$ je nerostoucí, tj.

$$\mu'(q) = g'(q) + h'(q) < 0, \qquad \text{pro všechna } q > 0. \tag{5.23}$$

Stejně jako předtím je zisk firmy definován jako

$$\pi(q) = D(q, Z)q - C(q), \tag{5.24}$$

kde $C$ představuje celkové náklady. Konečně předpokládejme, že existuje úroveň výstupu, pro kterou je očekávaný zisk kladný, a že $E\pi(q)$ je konkávní.

Vzhledem k výše uvedenému, je optimální úroveň $\bar{q}$ v případě jistoty (tj. $Z \equiv 1$) jediným řešením rovnice

$$\overline{MR}\,(q) = q\mu'(q) + \mu(q) = C'(q) = MC(q). \tag{5.25}$$

*5.4.1. Royovo kritérium*

Roy (1952) navrhl nastavení výstupu tak, aby se minimalizovala pravděpodobnost $R$, že dojde ke ztrátě. Podle Royova kritéria hledá firma úroveň $q_R$, která splňuje

$$R(q_R) = min_{q \geq 0}\, R(q), \tag{5.26}$$

kde

$$R(q) = P(\pi(q) \leq 0). \tag{5.27}$$

Využitím (5.22) a (5.24), dostáváme

$$R(q) = P\{Z \leq (AC(q) - g(q))/h(q)\},$$

kde $AC(q) \equiv C(q)/q$ jsou průměrné náklady.

Nyní se snažíme minimalizovat $H(q) = (AC(q) - g(q))/h(q)$. Derivací a úpravou výrazu dostaneme

$$H' = \left[\left(MC - \overline{MR}\right)h - (AC - \mu)(h + qh')\right]/qh^2\,. \tag{5.28}$$

Když vyhodnotíme $H'$ v $q_R$, tak z (5.28) dostáváme

$$\overline{MR} = MC + (\mu - AC)(h + qh')/h. \tag{5.29}$$

S aditivní nejistotou výraz zredukujeme na

$$\overline{MR} = MC + \mu - AC, \tag{5.30}$$

zatímco multiplikativní nejistota má za následek ($\mu = h$)

$$\overline{MR} = MC + (\mu - AC)\overline{MR}/h = MC(\mu/AC). \tag{5.31}$$

Pokud $E\pi(q_R) > 0$, $\mu q_R > AC(q_R)$, tak $\overline{MR}(q_R) > C'(q_R)$ v obou případech a postupně

$$q_R < \bar{q} \tag{5.32}$$

při konkavitě $E\pi(q)$. V obecném případě $h + qh' > 0$ je dostatečné pro zajištění $q_R < \bar{q}$.

Při konkurenci je $D(q,\cdot)$ konstantní v $q$ pro každou hodnotu $Z$ takovou, že $g' = h' = 0$. Jak se očekávalo, důsledkem je, že se (5.29) redukuje na $MC = AC$.

### *5.4.2. Telserovo kritérium*

Podle Telsera (1955) je výstup optimální, když firma maximalizuje očekávaný zisk za podmínky, že pravděpodobnost ztráty nepřekročí určitou předem danou úroveň $\alpha,\ 0 \leq \alpha < 1$. Problém tak nastává v nalezení výstupu $q_T$, který maximalizuje $E\pi(q)$, vzhledem k omezení $P\{Z \leq H(q)\} \leq \alpha$. Pokud $P\{\pi(\bar{q}) \leq 0\} \leq \alpha$, pak $q_T = \bar{q}$, jinak musíme mít $H(q_T) < H(\bar{q})$. Ale $\bar{q} > q_R$ a $H'(q) > 0$ pro $q > q_R$, takže to znamená, že $q_T < \bar{q}$. Kromě toho také $q_T > q_R$, pokud $P\{\pi(q_R) \leq 0\} < \alpha$.

## 5.5. Konkurenční odvětví za nejistoty

Uvažujme odvětví, které se skládá ze $s$ identických firem vyrábějících jediný výrobek. Průmyslová poptávka je náhodná proměnná $Q \geq 0$ s $EQ = \mu > 0$ taková, že cenová elasticita je nulová. Poté co bylo $Q$ pozorováno, je poptávka rozdělena rovnoměrně mezi $s$ firem. Jelikož zde neuvažujeme skladování, každá firma vyrábí $Q/s$. Celkové náklady, průměrné náklady a mezní náklady spojené s firemní produkcí $q$ jednotek jsou označovány jako $T(q), A(q)$, a $M(q)$. Předpokládáme, že (1) neexistují žádné překážky vstupu na trh (2), U-křivka průměrných nákladů je spojitě diferencovatelná a (3) mezní náklady jsou rostoucí a konvexní. Pokud je odvětví konkurenční, bude cena $p$ rovná mezním nákladům firmy.

Protože $A$ je křivka tvaru U, existuje číslo $\bar{q}$ tak, že

$$A'(q) \ < 0 \ pro \ q < \bar{q}$$

$$> 0 \ pro \ q > \bar{q}, \tag{5.33}$$

a

$$M(q) < A(q) pro \ q < \bar{q}$$

$$> A(q) \ pro \ q > \bar{q},$$

pro

$$M(q) \ = \ A(q) \ + \ qA'(q). \tag{5.34}$$

Propojení (5.34) a skutečnosti, že se cena rovná mezním nákladům, vede k tomu, že $\pi(q)$, tedy zisk firmy vyrábějící $q$ jednotek, splňuje

$$\pi(q) = qM(q) - T(q) = q(M(q) - A(q)) = q^2 A'(q). \tag{5.35}$$

Prvním problémem je najít velikost odvětví $s^*$, která minimalizuje očekávané náklady $C$ pro dané odvětví. Proto hledáme optimální velikost odvětví $s^*$ splňující

$$C(s^*) \ = \min_{s>0} C(s), \tag{5.36}$$

$$C(s) = E\{sT(Q/s)\}. \tag{5.37}$$

Průměrný (mean) výkon firmy v odvětví optimální velikosti je samozřejmě $q^* = \mu/s^*$. První výsledek ukazuje, že nejistota způsobuje, že výstup pro odvětví s rizikově neutrálními firmami bude menší než výstup $\bar{q}$, který minimalizuje průměrné náklady.

*Věta 5*
Pokud $varQ > 0$, pak $q * < \bar{q}$ tak, že $A(q^*) > M(q^*)$.

*Důkaz*
Viz literatura.

Z (5.28) a skutečnosti, že zde existují volné vstupy do odvětví, je zřejmé, že počet firem, pro které je očekávaný zisk roven nule, je přesně $s^*$. Konkurenční rovnováha je tak efektivní v tom, že celkové očekávané náklady jsou na svém minimu a vyznačují se nadbytečnou výrobní kapacitou, kde $q^* < \bar{q}$.

# 6. Brownův pohyb, martingales a jejich ekonomické aplikace

## 6.1. Úvod

Brownův pohyb se ukázal mimořádně užitečný pro popis chování mnoha ekonomických veličin, především cen. Brownův pohyb se v poslední době objevil jako klíčový aktér ve fundamentálním výzkumu oceňování opcí a hrál také klíčovou roli při navrhování modelů pro optimální kontrolu (I) zásob, (II) údržby zařízení, (III) poptávky po peněžních zůstatcích a (IV) analýzy indexu dluhopisů.
Tuto kapitolu začneme stručným popisem Brownova pohybu. Následovat bude diskuze o hypotéze efektivního trhu, ve které si ukážeme vztah mezi Brownovým pohybem a martingales. Model náhodné procházky peněžních zůstatků, je pak předložen spolu s odvozením poptávky po peněžních zůstatcích. Nakonec je studována poptávka po indexních dluhopisech.

## 6.2. Brownův pohyb

V této části začneme představením jednoduchého omezujícího tvrzení pro Brownův pohyb, pak stanovíme axiomy Brownova pohybu a zmíníme některé z jeho vlastností.

### *6.2.1. Omezující tvrzení pro Brownův pohyb*

Částice, které mohou, například, reprezentovat cenu na burze, nebo individuální pozici bohatství, se posunují vpravo či vlevo o vzdálenost $\Delta x$ se stejnou pravděpodobností, tj. jedna polovina. K těmto pohybům dochází každých $\Delta t$ jednotek času, tj. v době, $\Delta t, 2\Delta t, \ldots$ Nechť $Y_1, Y_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých náhodných proměnných takových, že

$$P(Y_i = \Delta x) = P(Y_i = -\Delta x) = \frac{1}{2} \qquad pro\ i = 1, 2, \ldots \tag{6.1}$$

V čase $t$ je celkový počet posunů jednoduše $[t/\Delta t]$, kde $[w]$ označuje největší celé číslo menší nebo rovno $w$, a pozice částice (celkové bohatství) v čase $t$ je dána vztahem

$$X(t) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{[t/\Delta t]}. \tag{6.2}$$

Chceme-li získat Brownův pohyb $B(t)$ jako omezující stochastický proces, $\Delta x$ a $\Delta t$ se musí blížit k nule takovým způsobem, že $X(t) \to B(t)$. Pro začátek poznamenejme, že $E\left(X^2(t)\right) = \Delta x^2 [t/\Delta t]$, takže

$$EX^2(t) \cong (\Delta x)^2 t/\Delta t. \tag{6.3}$$

Aby byl tento rozptyl striktně kladný a menší než nekonečno, musí $\Delta x$ být řádově $(\Delta t)^{1/2}$. Nechť $\Delta x = (\Delta t)^{1/2}$ a $\Delta t = 1/n$. Potom pro všechna $i$, se $Y_i$ rovná $\pm(n)^{-1/2}$, každé s pravděpodobností $1/2$.

V důsledku toho má $X(t)$ stejné rozložení jako

$$X^{(n)}(t) = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{[nt]}}{\sqrt{n}} = \sqrt{t}\ \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{[nt]}}{\sqrt{nt}}, \tag{6.4}$$

kde $Z$ je $\pm 1$ s pravděpodobností $1/2$. Při centrální limitní větě $X^{(n)}(t)$ konverguje k normálnímu rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $t$, pokud $n \to \infty$.

### *6.2.2. Axiomy Brownova pohybu*

(I) *Nezávislost:* Náhodná proměnná $B(t + \Delta t) - B(t)$ je nezávislá, generovaná na sigma algebře všemi náhodnými proměnnými až do času $t$, to znamená, že změna polohy během $(t, t + \Delta t)$ je nezávislá na všem, co se stalo do doby $t$.

(II) *Stacionarita:* Rozdělení náhodné proměnné $B(t + \Delta t) - B(t)$ je nezávislé na $t$.

(III) *Kontinuita:* Pro všechny $\delta > 0$, $\lim_{\Delta t \to 0} P(|\, B(t + \Delta t) - B(t)| \geq \delta)/\, \Delta t = 0$.

Fyzikální interpretace prvního axiomu je taková, že hybnost částice vzniklé z molekulárního „bombardování" během $(t, t + \Delta t)$, je nezávislá na všem, co se vyskytlo před $t$. To je rozumné, pokud posunutí částice vzhledem k její počáteční rychlosti na začátku $(t, t + \Delta t)$, je zanedbatelné vzhledem k pohybu vyvolanému molekulárním útokem během $(t, t + \Delta t)$. Předpoklad stacionarity vyžaduje, aby proces (tj., pohyb částic) byl homogenní v čase - pravděpodobnost změny v jakémkoliv časovém intervalu závisí pouze na délce intervalu, a nikoli na jeho umístění vzhledem k počátku. Třetí axiom je přesně tím, co je potřeba zajistit, aby pohyb částice byl kontinuální, což by samozřejmě mělo být. Konkrétně by každý výběr $B(t,\omega)$, musel být spojitou funkcí $t$ - snad s výjimkou souboru těch $\omega$, které mají pravděpodobnost nula. Prokázání, že výběrové cesty Brownova pohybu jsou spojité, je náročný úkol. Místo toho bychom měli ukázat, že (III) je téměř ekvivalentní s tím, že $B(t)$ bude spojité v $t$ s pravděpodobností jedna. Chceme-li tak učinit, položme $\delta > 0$ a definujme

$$Y_n = max_{l<k<n} |B(k/n) - B((k-l)/n)|. \tag{6.5}$$

Pokud $Y_n \to 0$, pak je $B(t)$ ve skutečnosti spojité na $[0,1]$, a to by znamenalo, že

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \geq \delta) = 0 \tag{6.6}$$

Ale nezávislost a stacionarita $B(1/n) - B(0),\ B(2/n) - B(1/n)$, ... dávají

$$\begin{aligned} P\ (Y_n \geq \delta) &= 1 - P(Y_n < \delta) \\ &= 1 - P(|B(1/n) - B(0)| \geq \delta)^n \\ &= 1 - [1 - P\left(\left|B\left(\tfrac{1}{n}\right) - B(0)\right| \geq \delta\right)]^n \\ &\approx 1 - exp - nP(|B(1/n) - B(0)| \geq \delta), \end{aligned}$$

pokud $1 - t \approx e^{-t}$ (ve skutečnosti $1 - t \leq e^{-t}$ pro všechna $t \geq 0$). Tak $P(Y_n \geq \delta) \to 0$ právě tehdy, když $nP(|B(1/n) - B(0)| \geq \delta) \to 0$, což je přesně vyjádření kontinuity s axiomem $\Delta t = 1/n$, takže (6.6) je ekvivalentní s axiomem kontinuity.

### *6.2.3. Vlastnosti Brownova pohybu*

Zásadní význam má skutečnost, že když $B(0) = 0$, existují čísla μ a $\delta$ taková, že pro každé $t$, má $B(t)$ normální rozdělení se střední hodnotou $\mu t$ a rozptylem $\sigma^2 t$. Když $\mu = 0$ a $\sigma = 1$, nazýváme $B$ jako standardní Brownův pohyb. (Je tradičně předpokládáno, že $B(0) = 0$.)

Vzhledem k diskuzi o axiomu (III), by nemělo být překvapením, že existuje verze Brownova pohybu na $[0,\infty)$ taková, že všechny výběrové cesty jsou spojité. Nicméně, je dost pozoruhodné, že téměř žádná Brownova cesta není nikde diferencovatelná. Zkusme to ukázat.

Pro začátek, můžeme ukázat, že pro každou cestu je celková druhá mocnina odchylky standardního Brownova pohybu na $[0, t]$ jednoduše $t$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \Delta_{n,k}^2 = t, \tag{6.7}$$

Kde $\Delta_{n,k} \equiv |B(kt/2^n) - B\,((k-1)t/2^n)|$. Definujme $\delta_n$ jako maximum, $\Delta_{n,k}$, $1 \le k \le 2^n$ a poznačme si, že $\Delta_{n,k} \ge \Delta_{n,k}^2\,/\delta_n$, tudíž

$$\sum_{k=1}^{2^n} \Delta_{n,k} \ge \sum_{k=1}^{2^n} \Delta_{n,k}^2\,/\delta_n\ . \tag{6.8}$$

Rovnice (6.7) tvrdí, že čitatel na pravé straně (6.8) konverguje k $t$, zatímco $\delta_n$ konverguje k $0$, protože Brownovy cesty jsou spojité a tedy stejnoměrně spojité na intervalu $[0, t]$. Proto, když vezmeme limitu na $n$ v (6.8), dostaneme, že celková změna každé Brownovy cesty na $[0, t]$ je nekonečná; nekonečná variace, která je sama středem zájmu naznačuje, že cesty nejsou nikde diferencovatelné. Nekonečné variace na celkových konečných intervalech můžou vést k tomu, abychom uvěřili, že lze něco říci o oscilaci Brownova pohybu. Oscilace nicméně následují pravidlo opakovaného logaritmu:

$$P\left\{\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B(t)}{\sqrt{2tlog\,(\log 1/t)}} = 1\right\} = 1 \tag{6.9}$$

*6.2.4. Výpočet provozních charakteristik*

Brownův pohyb je pravděpodobně nejpřizpůsobivější ze všech náhodných procesů. Pomocí standardních matematických metod - existuje několik odlišných pojetí - lze vypočítat explicitní vzorce prakticky pro všechny operační vlastnosti politik, které mají formu uvedenou v sekci 6.4. Zejména proto, že je problém zjednodušený, zajímají nás Laplaceovy transformace (s proměnnou α) různých časů prvního projití. Pro ilustraci budeme využívat martingale vzorců při výpočtu dvou operačních vlastností pro jednoduchou $S$ politiku, které nalezneme v oddílu 6.4.2.

Zaprvé chceme vypočítat pravděpodobnost $p$, že proces dosáhne $S$ předtím, než klesne na nulu, když v čase nula začíná na $w$ [tj. $X(0) = w$]. Toto je ekvivalentní s pravděpodobností, že tento proces dosáhne $S - w$ dříve, než se dosáhne $-w$, když $X(0) = 0$. S $a = -w$, $b = S - w$ a časem $T$ prvního průchodu, který je časem, kdy proces poprvé zásáhne $a$ nebo $b$; to znamená, že

$$T = inf\{t \geq 0: X(t) = a \; nebo \; X(t) = b\}. \tag{6.10}$$

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že $\mu = 0$. Když $X(0) = 0$ a $\mu = 0$, $E(X(t)) = 0$, proto se můžeme domnívat, že $E(X(T))$ se také rovná nule, v tomto případě máme

$$\begin{aligned} 0 &= E(X(T)) \\ &= aP(X(T) = a) + bP(X(T) = b) \\ &= a(1 - p) + bp. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Řešením (6.11) pro $p$ dostaneme:

$$p = -a/(b - a) = w/S \tag{6.12}$$

Nyní přikročíme k ověření, že $E(X(T)) = 0$. Abychom to mohli udělat, potřebujeme pouze ověřit, že $T$ splňuje následující verzi Věty optimálního výběru:

Nechť $\{X(t)\}$ je martingale a $T$ Markovův čas nebo čas zastavení.[5] Je-li

$$P(T < \infty) = 1,\ E(|X(T)|) < \infty,\ \int_{\{T>t\}} X(t)P(d\omega) \to 0 \qquad \text{pro } t \to \infty \tag{6.13}$$

potom $E(X(T)) = E(X(0))$.

Protože $|X(t)| \leq |a| + b$ pro všechna $t \leq T$, druhá podmínka v (6.13) platí. Toto omezení nám také umožní ověřit třetí podmínku, že $P(T > t) \to 0$, pokud $t \to \infty$ . To je ale pouze ekvivalent $P(T < \infty) = 1$. Abychom ukázali, že čas zasažení $T$ $a$ nebo $b$ je konečný budeme pokračovat tím, že poznamenáme, že $V(t) \equiv X^2(t) - \sigma^2 t$ je martingale, pro ($v^2 \equiv u + \sigma^2 t$)

$$\begin{aligned} E(X^2(t+s)|X^2(t) = v^2) &= E\{[X(t+s) - X(t) + X(t)]^2|X^2(t) = v^2\} \\ &= E\{(X(t+s) - X(t))^2|X^2(t) = v^2\} \pm 2vE\{X(t+s) - X(t)\} + v^2 \\ &= s\sigma^2 + 0 + v^2, \end{aligned}$$

takže

$$E\{V(t+s)|V(t) = u\} = s\sigma^2 + v^2 - \sigma^2(t+s) = u.$$

[5] Náhodná proměnná T je Markovův čas (zastavení) relativně ke stochastickému procesu $\{Z_n\}$, pokud nabývá hodnot nezáporných celých čísel a pokud pro každé $n = 0, 1, \dots$, závisí událost $\{T = n\}$ pouze na ($Z_0$, $Z_1$, ..., $Z_n$). Podobná definice platí pro nepřetržitý čas náhodných procesů. Zejména, čas zasažení nějaké uzavřené množiny (např. $\{a, b\}$) je čas zastavení, pokud tento proces má spojité výběrové cesty jako Brownův pohyb.

Jelikož $T \wedge t$[6] splňuje (6.13), $E\{ V(T \wedge t) \} = EV(0) = 0$, takže

$$\sigma^2 E(T \wedge t) = E\{X^2(T \wedge t)\} \leq a^2 + b^2 \qquad \text{pro všechna } t \geq 0. \tag{6.14}$$

Z limity (6.14) vyplývá, že $E(T)$ je konečná, a tedy $P(T < \infty) = 1$.

Dále, vypočítáme $E(T)$, tedy předpokládaný čas než dojde k převodu (z hotovosti na cenné papíry, pokud $S$ je první zásah nebo z cenných papírů na hotovost, pokud 0 je první zásah). Vzhledem k tomu, že $V(t)$ je martingale, který splňuje podmínky věty optimálního výběru, získáme

$$0 = E[V(0)] = E[V(T)] = E\left(X^2(T)\right) - \sigma^2 E(T), \tag{6.15}$$

$$E(T) = E(X^2(T))/\sigma^2 = [a^2(1-p) + b^2 p]/\sigma^2 = w(S-w)/\sigma^2. \tag{6.16}$$

## 6. 3. Hypotéza efektivního trhu

Ve studii kapitálových trhů hrají klíčovou alokační roli ceny cenných papírů. Firmy je používají jako vodítko při rozhodování o investicích. Stejně tak je i rozdělování finančních prostředků investorů v rámci cenných papírů (výběr portfolia) založeno na těchto cenách. Ptáme se, jak informativní jsou tyto ceny s ohledem na tato rozhodnutí. Při odpovědi na tuto otázku, rozlišujeme mezi třemi různými typy informací: (i) informace obsažené v minulých cenách dotyčných cenných papírů $\mathscr{F}^1$; (ii) informace obsažené nejen v minulých cenách, ale také ve všech minulých událostech, které byly veřejně oznámeny $\mathscr{F}^2$ a (iii) informace obsažené ve všech minulých událostech $\mathscr{F}^3$. Zřejmě $\mathscr{F}^1 \subset \mathscr{F}^2 \subset \mathscr{F}^3$ a otázka může být formálněji formulována jako: po odpisu "normální" míry návratnosti je posloupnost cen martingale vzhledem k $\mathscr{F}^1$, $\mathscr{F}^2$ nebo $\mathscr{F}^3$? Pokud vlastnosti martingale platí pro $\mathscr{F}^1$, trh říká, že je "slabě efektivní", pokud to platí i pro $\mathscr{F}^2$ trh je „Semi-silně efektivní" a konečně, jestliže platí vlastnost martingale

[6] $x \wedge y \equiv \min(x,y)$.

pro $\mathscr{F}^3$, trh je "silně efektivní". Existuje několik důvodů pro vymezení účinnosti trhu pomocí martingales. První je jednoduchý a šetrný. Definice martingale nevyžaduje, aby posloupnost $\{X_n\}$ náhodných proměnných byla stejně rozdělená, nebo nezávislá. Předpoklady jsou pouze

$$E(|X_n|) < \infty \qquad \text{pro všechna } n, \tag{6.17}$$

a

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n, \tag{6.18}$$

kde $\mathscr{F}_n$ je $\sigma$-algebra tvořená náhodnými veličinami $X_1, \dots, X_n$. V tomto bodě nastal zmatek. První studie o chování bezpečnostní ceny předpokládaly, že základní stochastický proces byl buď náhodná procházka nebo Brownův pohyb. Víme, že náhodná procházka má vlastnost martingale (a je Markovovská) s posloupností nezávislých a stejně rozdělených náhodných proměnných. Takže každá náhodná procházka je martingale, ale ne naopak. Podobně je to s Brownovým pohybem. Standardní Brownův pohyb $B(t)$ je normálně rozdělený se střední hodnotou 0 a rozptylem $t$. Standardní Brownův pohyb má vlastnost martingale, ale zjevně ne všechny martingale jsou Brownovým pohybem. Takže stochastické chování cen akcií nemusí být normální; ve skutečnosti existují nekonečně – rozptylová rozdělení, která splňují vlastnost martingale.

Druhým důvodem pro předpoklad martingale je jeho informační dopad na ceny. Jak je uvedeno v oddílu 6.2.4, věta optimálního výběru tvrdí, že když má základní proces vlastnost martingale, je nemožné vytvořit systém, který je příznivý. Podle slabé formy předpokladu martingale, aktuální ceny akcií obsahují všechny minulé informace a žádný systém nemůže, v průměru, vynést výnos přesahující „normální“ sazby.

Třetí důvod pro předpoklad martingale je, že jeho dopady mohou být empiricky testovány. Empirické studie ukázaly, že hypotéza slabé efektivnosti nemůže být zamítnuta. Sériové korelace mezi cenami se zaostávajícími tendencemi se téměř blíží nule. Také obchodovací systémy (pravidla filtru) nebyly nadřazeny jednoduché politice nákupu a držby. Zde bylo dokázáno, že velké denní změny cen následují velké změny, což naznačuje, že nezávislost předpokladu modelu náhodné procházky je porušena. Nicméně, příznaky těchto velký změn jsou náhodné, a tak to není důkaz proti hypotéze martingale. Kromě toho semi-silná forma testů předpokládá, že ceny plně odrážejí všechny veřejnosti dostupné informace, což také podporuje hypotézu efektivních trhů.

## 6.4. Stochastické modely zásob a poptávky po peněžních zůstatcích

V této části odvodíme poptávku po hotovosti pomocí Millerova a Orrova (1966) diskrétního modelu, a poté předložíme Brownovu verzi Harrisonova a Taylorova (1978) modelu kontinuálního času.

### *6.4.1. Diskrétní model poptávky po peněžních zůstatcích*

Předpokládejme, že firma má dvě aktiva: peněžní zůstatky a portfolio likvidních aktiv. Výnos z portfolia je $r$ dolarů za den a fixní náklady $\gamma$ vznikají vždy, když se jedná o převody z jednoho účtu na další. Jakmile bylo jednou rozhodnuto o provedení převodu, dojde k němu bez prodlení. Kolísání v peněžních zůstatcích se řídí symetrickou náhodnou procházkou; během určitého časového intervalu se peněžní zůstatky zvyšují nebo snižují o $m$ dolarů s pravděpodobností $p$ resp. $1-p$. Firma si přeje minimalizovat dlouhodobé průměrné náklady na správu hotovostních zůstatků. Tato objektivní funkce se vztahuje na následující jednoduchou politiku: Peněžní zůstatky mohou kolísat v závislosti na výše uvedené náhodné procházce za předpokladu, že jsou větší než $0$ a menší než $h$. Když je dosažena horní hranice $h$, částka $h-z$ v hotovosti je převedena na portfolio likvidních aktiv; když je dosažena spodní hranice $0$, $z$ dolarů je převedeno z likvidního portfolia do peněžních zůstatků. Nazývejme to politikou $(h, z)$, která počítá optimální hodnoty $h$ a $z$ a odvozuje dlouhodobou průměrnou poptávku po penězích.

Rozdělení držení hotovosti ve stálém stavu je trojúhelníkové se střední hodnotou $(h+z)/3$, kterou ztotožníme s dlouhodobou průměrnou poptávkou po hotovostních zůstatcích. Optimální hodnoty $h$ a $z$ jsou

$$h^* = 3z^* \qquad \text{a} \qquad z^* = \left(\frac{3\gamma}{4r}\sigma^2\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{6.19}$$

takže poptávka po penězích je

$$M = \frac{h^*+z^*}{3} = \frac{4}{3}\left(\frac{3\gamma}{4r}\sigma^2\right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.20}$$

kde $\sigma^2$ $(= 4m^2p(1-p))$ je rozptyl denních peněžních toků. Poptávka po penězích se mění přímoúměrně s $\gamma$ a $\sigma^2$ a nepřímoúměrně s náklady příležitosti držení hotovosti $r$.

*6.4.2. Model spojitého času poptávky po peněžních zůstatcích*

Nyní uvažujme firmu vlastnící rezervu peněžních zůstatků, která je rozšiřována tržbami a snižována provozními náklady. Předpokládejme, že výše peněžních zůstatků $X(t)$ vytvořená těmito stochastickými přírůstky a úbytky je popsána Brownovým pohybem.

Především $X = (X(t), t \geq 0)$ je Brownův pohyb s počátečním stavem $x \geq 0$, odchylkou $\mu$ a rozptylem $\sigma^2$ tak, že $E[X(t)] = x + \mu t$ a $var[X(t)] = \sigma^2 t$ . Výše peněžních zůstatků je ovlivňována pohybem fondů sem a tam z portfolia likvidních aktiv. K těmto transferům dochází okamžitě za cenu $k$ za dolar převedený do peněžních zůstatků a za cenu $c$ za dolar převedený z peněžních zůstatků. Peníze držené ve formě peněžních zůstatků nevydělávají nic, zatímco výnos na jednotku z portfolia likvidních aktiv je $h$ za jednotku času. Takže $h$ je nákladem příležitosti z držby peněžních zůstatků na jednotku. Nechť $Y(t)$ označuje celkovou částku převedenou z likvidního portfolia aktiv do peněžních zůstatků za čas $t$. Stejně tak, nechť $Z(t)$ je celková částka převedená z peněžních zůstatků do portfolia likvidních aktiv za čas $t$. Cílem je určit vstupní a výstupní kontroly $Y$ a $Z$, které mají minimalizovat očekávané diskontované náklady, s podmínkou nezápornosti peněžních zůstatků, tj.

$$W(t) = X(t) + Y(t) - Z(t) \geq 0, \qquad \text{pro všechna } t \geq 0. \tag{6.21}$$

Nechť $\alpha$ je diskontní sazbou, potom je výše uvedené ekvivalentní s nalezením přijatelné politiky $(Y, Z)$, která minimalizuje

$$hE\int_0^\infty e^{-\alpha t}W(t)dt + k\left\{Y(0) + E\int_0^\infty e^{-\alpha t}dY(t)\right\}$$
$$+ c\left\{Z(0) + E\int_0^\infty e^{-\alpha t}dZ(t)\right\}. \tag{6.22}$$

Definujme $R(g) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}g(t)dt$ pro neklesající, integrovatelné funkce $g$, integrace po částech v (6.22) spolu s (6.21) nám umožňuje demonstrovat, že minimalizace (6.22) je ekvivalentní s minimalizací

$$(h/\alpha + k)ER(Y) + (-h/\alpha + c)ER(Z), \tag{6.23}$$

protože (6.22) a (6.23) se liší pouze nekontrolovatelnými náklady $ER(X)h/a$, což je termín, který nezahrnuje ani $Y$, ani $Z$. Optimální politika se vyznačuje minimálním párem kontrol $(Y, Z)$ takovým, že $0 \le W(t) \le S$ pro všechna $t \ge 0$, kde $S$ je jediné kladné řešení konkrétní transcendentní rovnice. Proto by měl manažer převést peněžní zůstatky na likvidní cenné papíry tak, aby $W(t) \le S$, a přeměnit minimální počet cenných papírů na hotovost tak, aby $W(t)$ zůstalo kladné. Řízený proces $W(t)$ následuje Brownův pohyb $X$ s hranicemi na 0 a $S$.

Pokud navíc k proporcionálnímu poplatku $k$ vzniknou vždy při přeměně likvidních aktiv na hotovost fixní náklady $K$, pak je optimální politikou zvýšení peněžních zůstatků vždy, když dosáhnou nulové hodnoty. Toho je dosaženo rozšířením $Y$ o $s$ jednotek, kde $s$ je řešení jiné transcendentní rovnice. Manažer snižuje peněžní zůstatky, pokud překračují $s + S$. Toho je dosaženo vhodným zvýšením $Z$ kdykoliv je $W$ vyšší než $s + S$. S pevnou cenou pro převody v obou směrech je optimální politika charakteristická třemi kritickými čísly: zvýšení $Y(t)$ o $s$, kdykoli hotovostní zůstatek klesne na nulu a zvýšení $Z(t)$ o $q$ kdykoli $W(t)$ dosáhne horní kritické hodnoty $S$, kde hodnoty pro $s, q$ a $S$ jsou jedinečná řešení pro tři nezávislé transcendentní rovnice.

### 6.5. Poptávka po indexových dluhopisech

Tuto část uzavíráme jednou z nedávných aplikací difúzních procesů do ekonomie. Ve své studii indexových dluhopisů Fischer (1975) předpokládá, že individuální portfolio obsahuje tři aktiva: reálné dluhopisy, vlastní kapitál a nominální dluhopisy. Nechť $w_1, w_2$ a $w_3$ jsou podíly investované do reálných dluhopisů, vlastního kapitálu, a nominálních dluhopisů. Výnosy z těchto aktiv jsou dány difusními procesy. Existují dva zdroje nejistoty, oba jsou Brownovým pohybem. První vychází z difusního procesu inflace, zatímco druhý pochází z akciového trhu. Při odvozování poptávky po indexových dluhopisech Fischer předpokládá, že domácnosti si vybírají spotřebu $w_1, w_2$ a $w_3$ tak, aby maximalizovaly očekávaný užitek.
Základní stochastický předpoklad této studie je, že míra inflace splňuje stochastické diferenciální rovnice

$$dP/P = \pi dt + \sigma dB, \tag{6.24}$$

kde $P$ je cenová hladina, a $\pi$ je očekávaná míra inflace, difúzní koeficient $\sigma$ je rozptyl procesu za jednotku času. Termín $dB$ je náhodná složka této diferenciální rovnice, kde $B$ je standardní Brownův pohyb. Na první pohled vypadá analýza této rovnice beznadějně, protože

$$(B(t + \Delta t) - B(t))/\Delta t$$

má střední hodnotu nula a odchylku $1/\Delta t$, a tudíž nemá žádnou pravděpodobnostní limitu. Jelikož $B(t)$ nemá derivace, diferenciál $dB(t)$ je bezvýznamný. Část tohoto problému je vyřešena interpretací (6.24) v integrované formě

$$P(t) = P(u) + \int_u^t \pi P(r)dr + \int_u^t \sigma P(r)dB(r). \tag{6.25}$$

Nyní jsou však cesty $B$ neomezenými variacemi, a tak musíme definovat, co je míněno stochastickým integrálem ve vztahu k Brownovu pohybu. To je východiskem pro rozvoj náhodného počtu. Ignorujme tento problém a jednoduše interpretujme (6.24) jako stanovení, že v průběhu krátkého časového období je poměrná změna v cenové hladině normální se střední hodnotou $\pi dt$ a rozptylem $\sigma^2 dt$. Nyní přepišme (6.24) jako

$$dP = P\pi dt + P\sigma dB, \tag{6.26}$$

a nechť

$$y(t) = P(0)exp\left[(\pi - \sigma^2/2)t + \sigma \int_0^t dB\right]. \tag{6.27}$$

Hlavním výsledkem náhodného počtu je lemma, které ukazuje, že $y(t)$ je řešením (6.26). Přičemž logaritmus obou stran (6.27) dává

$$\ell \equiv log\frac{P(t)}{P(0)} = (\pi - \sigma^2/2)t + \sigma \int_0^t dB. \tag{6.28}$$

Proto je $P(t)$ logaritmicko-normální s

$$E\ell = (\pi - \sigma^2/2)t \quad \text{a} \quad var\,\ell = \sigma^2 t. \tag{6.29}$$

# 7. Evoluční procesy v ekonomii

## 7.1. Úvod

V soutěži o přežití si příroda vybírá ty organismy, které jsou nejvhodnější pro životní prostředí, špatně navržené organismy jsou eliminovány. V podstatě v přírodě nelítostně platí zákon velkých čísel a po nesčetných pokusech přijde na "optimální" směs organismů, tj. soubor organismů, z něhož každý má strukturu, která prošla přírodním výběrem.

Ekonomické subjekty v tomto pojetí mohou odpovídat organismům, genům, mutacím a přirozeným výběrem jsou příslušně firmy, imitace, inovace a pozitivní zisky. Inovace mohou vyplývat ze zkažených imitací, stejně jako vědomého úsilí o zlepšení.

Čas hraje v podstatě stejnou roli v Darwinovské evoluci jako v evoluci firem; formování působí na biologické systémy po miliony let, zatímco ve srovnání s tím je firma jen dítě. Organismy, které byly nepřijatelné, byly poklidně vyloučeny. Racionální člověk obchodující ve firmě zřejmě reaguje méně pasivně na hrozbu vyloučení. Firmy uvažují a rozhodují se, které postupy s největší pravděpodobností povedou k přežití, tj. pozitivním ziskům. Výsledky těchto jednání jsou vyzkoušeny, a pokud jsou shledány chybujícími, jsou rychle odstraněny. Protože se firmy mohou rychle přizpůsobit prostřednictvím pokusů a omylů, podnikatelské prostředí by mohlo být vnímáno jako vhodné ve vztahu k Darwinovu prostředí. Navíc schopnost přežít chyby znamená, že se efektivní firma může vyvinout rychleji než účinný organismus.

### 7.2. Farrellův evoluční spekulant

Jako aplikaci evoluční logiky na ekonomiku zvažme Farrellův (1970) spekulantní model. Na začátku procesu má spekulant jeden dolar. Pokud je jeho první spekulace úspěšná, získá dva dolary, pokud je neúspěšná, je zruinován. Nechť $p$ je pravděpodobnost, že vyhraje a předpokládejme, že spekulant bude nadále s každým dolarem spekulovat v nezávislých podnicích. Každý podnik má pravděpodobnost $p$ úspěchu. Použitím rozvětveného procesu lze ukázat, že pravděpodobnost úpadku nebo zániku je nejmenší nezáporný kořen z

$$g(s) = s,$$

kde $g(s)$ *je* generující funkce pro spekulantův individuální hazard a je dána předpisem

$$g\,(s) \;=\; 1-p \;+\; ps^2.$$

Proto je pravděpodobnost zániku řešením rovnice

$$(s-1)(s-(1-p)/p) = 0$$

a rovná se $(1-p)/p$, jestliže $p > 1/2$, a jedničce, když $p \leq 1/2$.

Pokud na začátku existuje $n$ jedinců se schopností $p_i > 1/2$, potom je pravděpodobnost zániku skupiny $[(1-p_i)/\,p_i]^{n_i}$ .V důsledku toho všechny skupiny s $p < 1/2$ zaniknou, ale velká skupina s $p_i = 1/2 + \varepsilon$ má velkou pravděpodobnost přežití vzhledem k jednotlivci s $p_i$ blízko k jedničce.