Obsah:

MODELY A METODY TEORIE HER V MATEMATICKÉ EKONOMII

Kapitola podává přehled různých modelů a konceptů řešení z oblasti teorie her společně s nástinem jejich hlavního využití v politické ekonomii. Rovněž obsahuje ukázky hlavních otevřených úloh.

1 Metody modelování

Nejdůležitějším aspektem teorie her ve vztahu k politické ekonomii je snad to, že metodologie, kterou používá pro sestavení matematických modelů za účelem studia konfliktních i kooperujících sil, je v mnoha matematických rozborech politické ekonomie podána nesrozumitelně. Ucelený popis si žádá zejména *extenzivní forma* hry.

Plně popsaná hra by měla být bez větších těžkostí hratelná každou skupinou studentů. Pokud je hra dobře definovaná, ale je obtížně hratelná z důvodu časové tísně či neschopnosti zpracovat velké množství dat jednotlivcem, je pravděpodobně nevhodným modelem ekonomického procesu, který má představovat. Proto je nutné držet se postupů pro sestavení dostatečně definované a hratelné hry, díky kterým je ekonom schopen formulovat relevantní úsudek svého původního modelu a vyloučit z něj faktory, jež nejsou pokládány za důležité ve smyslu splnění kritéria hratelnosti.

Strategická hra je hra dvou a více hráčů, nad níž oba drží částečnou kontrolu, jelikož přínos každého z nich nezávisí pouze na vlastním rozhodnutí, ale i na rozhodnutí ostatních.

Existují celkem 3 různé podoby strategických her:

- *extenzivní forma*,
- *strategická forma* (*normální forma*) a
- *kooperativní forma* (*forma charakteristické funkce*).

Každá z nich se používá v jiné situaci, tzn. podává odpověď na jinou otázku, a proto pracují s různým popisem studovaného jevu. Hra v extenzivní formě se používá k vymezení hry ve strategické formě, která je na druhou stranu schopna definovat hru v kooperativní formě, přičemž ovšem zpětná implikace neplatí. Je možné nalézt řadu různých her ve strategické formě vedoucích k téže kooperativní formě. Nejlepší je nahlížet na tyto 3 formy jako na nezávislé formulace vytvořené pro různé účely, které se mohou nacházet ve vzájemném vztahu.

Ještě předtím, než se budeme zabývat jednotlivými formami, musíme zmínit předpoklady týkající se preference, užitku a zisku.

1.1 Preference, užitek a zisk

Von Neumann a Morgenstern (1944) formulovali axiomy existence užitkové funkce založené na předpokladu spekulace na množině výstupu, jejíž prvky je jednotlivec schopen seřadit dle svých preferencí. Toto měření užitku použili von Neumann a Morgenstern pro ohodnocení použití smíšených strategií her ve strategické formě. Plně nezávislé na takové konstrukci a jejím užití byl předpoklad týkající se existence určité formy tzv. „U-peněz“ či převoditelného užitku, díky kterému byli schopni poměrně snadno popsat hru v kooperativní formě.

V mnoha předchozích kritických studiích o použitelnosti teorie her v ekonomii a jiných vědních oborech vyvstala řada pochyb v otázce přínosu teorie her do věd o chování jedince právě kvůli zmíněným dvěma předpokladům, které se jevily jako velmi nerealistické. Přijetím von Neumann-Morgensternova přístupu nastal posun k hlubšímu pochopení významu rozhodování v podmínkách nejistoty a síly různých systémů axiomů, které vedly k možnosti měření užitku.

Co se týče kooperativních her a převoditelného užitku, jak uváděli von Neumann a Morgenstern, předpoklad převoditelného užitku bylo prozatímní zjednodušení, ze kterého se následně zrodila analýza, jež skýtala extrémně komplexní matematickou sféru. Koncepční rámec různých kooperativních teorií pro *řešení*[1] her nijak nezávisí na tomto předpokladu. I když Shapley a Shubik (1971-74) poukazovali na možnost řešení kooperativních her bez mimovyrovnání a Nash (1953) a Harsanyi (1959) uvedli analýzu vyjednávání, až do vydání díla Aumanna a Pelega (1960) se tyto přístupy nesetkaly s praktickým využitím.

Hra vede obecně k množině výsledků, přičemž jedinci mají ve vztahu k nim dané preference. Zaměření teorie her na její využití v určitých oborech nabývá velkého rozsahu ve vytváření vhodných předpokladů, které zajišťují patřičnou strukturu množiny výsledků. Např. *tržní hry* odráží zvláštní strukturu barterové ekonomiky s preferencemi jedinců a *jednoduché hry* nachází přirozenou interpretaci v oblasti voleb.

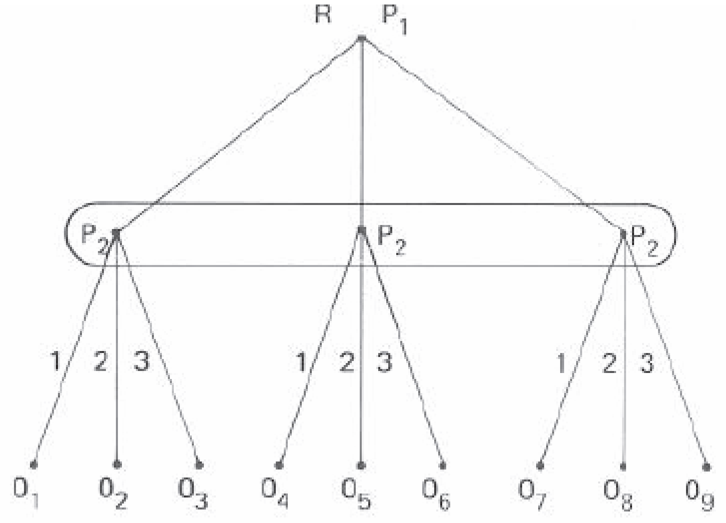
1.2 Extenzivní forma

Literatura pojednávající o oligopolních tržních strukturách, aukcích, vyjednávání a zejména také o mezinárodním obchodu, ať už z matematického či jiného pohledu, je plná buď částečného nebo úplného popisu procesů. Nabídky, protinabídky, hrozby, sliby, požadavky apod. – to vše jsou rozhodující znaky popisu procesů. Teorie her přináší konvenční jazyk zabývající se popisem pravidel hry, který nám umožňuje vystihnout detaily procesu s velkou přesností. A to je jazyk, jež popisuje hru v extenzivní formě.

Nejstarší popisy her v extenzivní formě podali von Neumann a Morgenstern (1944) a poté i Kuhn (1953). Všichni se zabývali konečnými hrami, tzn. hrami s konečným počtem hráčů, tahů i možností výběru. Příkladem mohou být šachy nebo poker. Mnoho situací, se kterými se setkáváme v ekonomii nebo v politice jsou jen hrubě modelovány jako konečné hry. Obvykle totiž mívají spojité strategické možnosti ve spojitém čase a nelze vyloučit ani nekonečné pokračování do budoucnosti.

Kuhnův herní strom znázorňuje jednoduchý duopolní trh jako konečnou aproximaci. Uvažujme dvě firmy, které si současně vybírají jednu ze tří úrovní výstupu. Jejich společná úroveň výstupu určuje celkový výstup trhu a zisky každé z nich. Graf 1.1 zobrazuje popis této hry v extenzivní formě. Diagram ukazuje *rozvětvený strom* s počátečním uzlem označeným jako R. Každý uzel značí stav, ve kterém se z pohledu pozorovatele může hra nacházet. Každý uzel nebo vrchol je označen jako P_i nebo O_j a znamená buď rozhodovací bod pro hráče nebo výsledek hry. Uzel P_i je rozhodovacím bodem pro i-tého hráče. Ten si musí zvolit jednu z větví vycházející z daného uzlu.

[1] „Řešením“ se v podstatě rozumí výběr z podmnožiny výsledků se speciálními vlastnostmi.

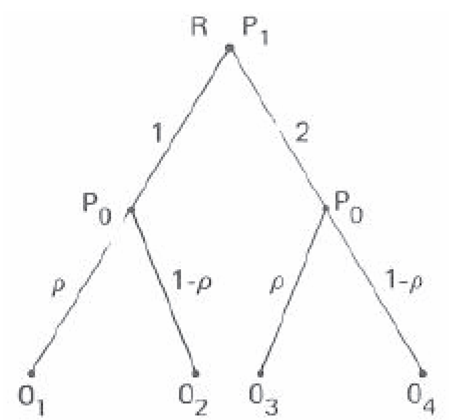


Graf 1.1

Ve výše uvedeném příkladě má možnost první volby Hráč 1. Svůj tah si musí zvolit jako jednu ze tří větví vycházející z uzlu označeném jako P_1. Po jeho tahu hra postoupí do jednoho ze tří uzlů označených jako P_2. Hráč 2 si vybírá a hra se poté dostává do jednoho z 9 konečných uzlů označených jako O_j, které představují výsledky. Jakákoli cesta z počátečního uzlu stromu ke konečnému uzlu představuje možné *zahrání* hry.

V mnoha situacích můžeme požadovat podmínku, aby se hráči rozhodovali současně. Obecně vzato, nesnažíme se tím o to, aby hráči vybírali své tahy ve stejném okamžiku, ale aby se činili svá rozhodnutí, aniž by znali tah toho druhého. Nezáleží na tom, kdo bude táhnout dříve, protože vzájemné tahy neznají. Tuto chybějící informaci můžeme ilustrovat na herním stromě seskupením všech uzlů, jejichž výběr hráč není schopen ovlivnit, do uzavřené křivky, což znamená, že tyto možnosti výběru spadají do stejné informační množiny (resp. přesněji do stejné „množiny chybějících informací“). V Grafu 1.1 jsou tři uzly Hráče 2 seskupeny do jedné množiny, tudíž pokud má zvolit svůj tah, neví, jaký byl tah Hráče 1.

Náš popis můžeme dále rozšířit o exogenní nejistotu přidáním hráče „Okolí“. Označme si jej P_0. Jakmile má zvolit svůj tah, vybere si určitou větev s danou pravděpodobností. Jednoduchý příklad znázorňuje Graf 1.2. Hráč zvolí svůj tah a poté Okolí determinuje výsledek.



Graf 1.2

Hra pouze s jednoprvkovými informačními množinami je nazývána hrou s *dokonalými informacemi*. Takovou hrou jsou např. šachy. V jakémkoli okamžiku hry znají všichni hráči veškeré podrobnosti o cestě do daného bodu. To však neplatí u pokeru ani v případě zapečetěné nabídky v rámci veřejné soutěže.

Strategie hráče je ucelený plán jednání, který stanovuje co dělat při různých nepředvídatelných událostech. Ve smyslu našeho popisu herního stromu bychom jej mohli charakterizovat jako:

> Strategie je funkce, která přiřazuje každé informační množině hráče jednu možnost z této množiny.

Při menším zamyšlení nad rozměry herního stromu šachové hry a velikostí množiny strategií pro hráče šachů snadno pochopíme, že kromě her s malým počtem tahů a možností obecně nelze přímo aplikovat herní strom. Kromě toho definice strategie používaná v teorii her je zjevně odlišná od definice, kterou by vyslovil obecný či politický stratég, v tom smyslu, že tito bezpochyby uvažují i podstatné hromadění detailů nebo delegování rozhodovacích pravomocí na agenty.

I přes to, že nejsme schopni načrtnout detailně herní strom celého tržního procesu, zmíněná konvenční metoda by měla poskytnout vodítko při zjednodušování a zkracování popisu procesů.

1.3 *Hry ve strategické formě*

Pokud je hra modelována ve strategické formě, podrobnosti o tazích a informacích jsou potlačeny. Na strategie je nahlíženo jako na primitivní prvky bez toho, aniž bychom se snažili vysvětlit jejich vznik. Strategická forma hry s *n* osobami, kterou je v extenzivní formě možné vyjádřit jako konečný herní strom, je dána množinou *n* výplatních matic dimenze *n*. Související formu hry vyjadřuje příklad založený na hře zobrazené Grafem 1.1.

Hráč 2

		1	2	3
	1	O_1	O_2	O_3
Hráč 1	2	O_4	O_5	O_6
	3	O_7	O_8	O_9

Graf 1.3

V Grafu 1.3 čísla nalevo od matice nazýváme strategiemi Hráče 1. Protože nemá informaci o tom, kdy potáhne, odpovídají tato čísla jeho tahům. Čísla nad maticí jsou strategiemi Hráče 2. Devět prvků uvnitř matice jsou zisky. Můžeme říci, že O_j je vlastně *n*-dimenzionální vektor, který nás informuje o zisku jednotlivých hráčů. Dle Grafu 1.3 by tedy platilo např. $O_1 = (5,4)$, což by znamenalo zisk o velikosti 5 jednotek pro Hráče 1 a 4 pro Hráče 2, pokud oba zahrají svoji první strategii.

Nyní nahraďme informační množinu Hráče 2 v Grafu 1.1 dvěma informačními množinami. To pak znamená, že pokud Hráč 1 vybere první strategii, Hráč 2 o tom má informaci, ale pokud se Hráč 1 rozhodne jinak, Hráč 2 neví, zda vybral strategii 2 nebo 3. Strategickou formu příslušející této hře vyjadřuje matice s rozměry 3 x 9. Tahy a výsledky jsou naprosto stejné jako v předcházejícím případě, ale strategie Hráče 2 nyní závisejí na dodatečných informacích. Rozhoduje se mezi 9 strategiemi, které lze popsat následovně:

Pokud Hráč 1 zvolí 1,	potom Hráč 2 zvolí i,
pokud Hráč 1 zvolí 2 nebo 3,	potom Hráč 2 zvolí j.

Pro každé i = 1, 2, 3 a j = 1, 2, 3 je definována strategie Hráče 2 v této hře.

Nejvíce se studie v oblasti teorie her orientovaly na maticové hry s rozměry 2 x 2, zejména na tzv. „Vězňovo dilema“. Jedná se o maticovou hru rozměrů 2 x 2 s výplatními hodnotami zobrazenými v Grafu 1.4, kde $a_i > b_i > c_i > d_i$ a $a_i + d_i < 2b_i$,[2] pro $i = 1, 2$.

		Hráč 2	
		1	2
Hráč 1	1	b_1, b_2	d_1, a_2
	2	a_1, d_2	c_1, c_2

Graf 1.4

Rapoport a Guyer (1966) spočítali, že za předpokladu striktního uspořádání a vyloučení symetrií existuje 78 strategicky různých ordinálních vyjádření maticové hry rozměrů 2 x 2. Všechny tyto hry byly využity pro experimentální účely.

Jednoduché maticové hry s rozměry 2 x 2 nebo 3 x 3 byly ve velkém měřítku využívány pro výkladové i výzkumné účely, jak dokládá dílo Luceho a Raiffa (1957) a Schellinga (1960).

Většina duopolních modelů nebo jiných ekonomických modelů používá kompaktní strategické množiny, v jejichž nejjednodušších příkladech se strategie a tahy shodují. Např. Cournotův (1838) model duopolu vyžaduje, aby si všichni hráči současně zvolili úroveň produkce z určitého intervalu. Tedy pokud si Hráč 1 vybere x, kde $0 \le x \le A$, a Hráč 2 zvolí y, kde $0 \le y \le B$, pak zisky hráčů jsou dány dvěma funkcemi $f_1(x,y)$ a $f_2(x,y)$.

Kompaktní strategické množiny se zejména v ekonomii využívají z toho důvodu, že se zde často setkáváme s přirozenou strukturou, kterou ve většině obecných her nenajdeme. Např. šachy nelze modelovat se spojitými tahy, na rozdíl třeba od trhu s pšenicí. Navíc v mnoha ekonomických příkladech existují přirozené způsoby, jakými lze seskupovat tahy. Čili na trhu s pšenicí jedinec i může zvolit jako svoji nabídku q_i jednotek, ale jeho výsledek je závislý pouze na jeho nabídce a na celkovém objemu pšenice, tedy $q = \sum_{j=1}^{n} q_j$. Ve většině her nemá přidávání tahů žádný funkční význam.

[2] Poslední podmínka je nutná pro vyloučení rovnováhy ve smíšených strategiích.

1.4 Hry v kooperativní nebo koaliční formě

Při výkladu her ve strategické formě je důraz kladen na sílu jednotlivců ve smyslu, že to, co získají, je funkcí jejich strategií a strategií ostatních. Na zřejmé náznaky kooperace nebyl brán zvláštní zřetel.

Pokud se ovšem zajímáme o studium kartelové dohody, mezinárodního obchodu, vyjednávání či jiných uskupení nebo sociologických jevů, měli bychom se zaměřit na potenciální přínos z vytvoření koalice bez větší pozornosti věnované informačním podmínkám, detailům o tom, proč a jak jsou dostupné různé strategické možnosti, nebo podrobnostem a nákladům na vytvoření koalice (za předpokladu, že jsou zanedbatelně nízké). Naše pozornost by se měla orientovat na fundamentální otázky typu: kolik si na základě kooperace jednotlivé skupiny zajistí? Tato pozornost vede k formulaci a výkladu hry v kooperativní nebo koaliční formě.

Jako názorný příklad můžeme využít hru z Grafu 1.4 danou ve strategické formě. Ukážeme si dvě různé formy této hry v koaliční formě: první je založena na předpokladu převoditelného užitku, zatímco druhá toto nepředpokládá.

Nechť $v(S)$ je obnos, který získá koalice hráčů S, pokud budou vystupovat jako jeden celek. Označme si *charakteristickou funkci* písmenem v. Jedná se o funkci z podmnožin hráčů jdoucí do **R**. Pro hru s n-hráči existuje $2^n - 1$ neprázdných koalicí.

Zápisem $v(\overline{ij})$ označíme koalici sestavenou z hráčů i a j. Charakteristická funkce pro Vězňovo dilema z Grafu 1.4 vypadá následovně ($\emptyset$ znázorňuje prázdnou množinu hráčů):

$$v(\emptyset) = 0,\ v(\bar{1}) = c_1,\ v(\bar{2}) = c_2,$$
$$v(\overline{12}) = \max\left[(b_1 + b_2), (a_1 + d_2), (a_2 + d_1)\right].$$

Charakteristickou funkci můžeme považovat za „předběžné řešení“ hry vzhledem k tomu, že jakožto kalkulační úkon nám poskytuje důležitý náhled na strukturu hry. V tomto příkladě byly hodnoty určeny hledáním maximální hodnoty, které jsou jednotlivé koalice schopny samy dosáhnout za předpokladu, že ostatní hráči se snaží minimalizovat její zisk. Nejlepšího může Hráč 1 nebo Hráč 2 sám dosáhnout zahráním své druhé strategie (viz Graf 1.4), a tak získat c_1 nebo c_2. Dohromady mohou hráči získat $b_1 + b_2$. V tomto případě snadno vidíme, že je přijatelné $v(\bar{1})$ vyčíslit jako c_1, jelikož Hráč 2 ve snaze minimalizovat výsledek Hráče 1 zároveň optimalizuje svůj vlastní výsledek. Obecně to neplatí, jak ukazuje hra v Grafu 1.5.

		Hráč 2	
		1	2
Hráč 1	1	5, 5	0, -100
	2	10, 5	-1, -1000

Graf 1.5

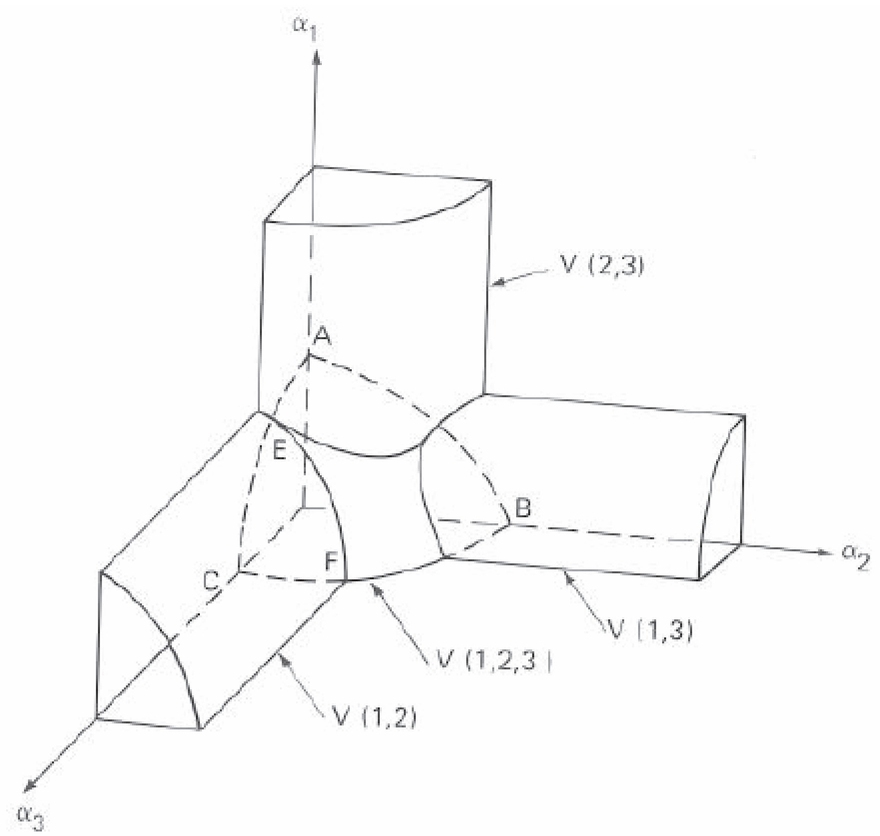
Zde je charakteristická funkce dána jako:

$$v(\emptyset)=0,\; v(\bar{1})=0,\; v(\bar{2})=5,\; v(\overline{12})=15.$$

Na první pohled může situace vypadat poněkud zvláštně, když je Hráč 2 zobrazován jako nejvíce protěžovaný. Paradox je skryt v působení hrozeb. Výpočet charakteristické funkce Hráče 1 nebere v potaz vysokou cenu, kterou by musel zaplatit Hráč 2, kdyby zvolil strategii 2. Podrobnější diskuzi o hrozbách při vyčíslování charakteristické funkce podává Shapley a Shubik (1971-74).

Jestliže nejsou povolena srovnání užitku ani mimovyrovnání, možnosti kooperace nezanikají, ale mění se. Můžeme definovat zobecněnou charakteristickou funkci nebo spíše „charakterizující funkci" $V(S)$, která každé množině hráčů S přiřazuje množinu optimálních dosažitelných výsledků, což je v přímém protikladu s jediným číslem pro $v(S)$.

Způsob definování zobecněné charakteristické funkce je zobrazen v Grafu 1.6, který znázorňuje příklad se třemi osobami. Na osách α_1, α_2 a α_3 jsou zachyceny výplaty jednotlivcům 1, 2 a 3. S každou $V(S)$ zacházíme, jako by se jednalo o válec, ze kterého odřízneme část povrchu představujícího Pareto-optimální stav hry o n-osobách jako celku. Např. koalice $\overline{12}$ může získat alespoň tolik, kolik jim nabízí jakýkoli bod Pareto-optimální množiny *ABC* vymezené částí *EFC*.



Graf 1.6

Z výchozí hry ve strategické formě existují dva způsoby určení efektivity koalice ve hře bez mimovyrovnání. Můžeme ji stanovit jako efektivitu, které je koalice schopna dosáhnout, nebo jako efektivitu, jejímuž dosažení nelze zabránit. Shapley a Shubik (1971-74) uvádí rozlišení obou na jednoduchém příkladu Jentsche (1964) a Aumanna a Pelega (1960).

Poměrně intuitivním omezením charakteristické funkce s mimovyrovnáním je *superaditivita*, tzn.

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T),\ S \cap T = \emptyset$$

a pro případ bez mimovyrovnání

$$V(S \cup T) \supset V(S) \cap V(T).$$

Argument této podmínky je středem ekonomického modelování i modelování společenského chování. Je postaven na předpokladu, že obchod, směna a sociální interakce vznikají, pokud bude mít každá strana ze vzájemné spolupráce užitek oproti volbě, že spolupracovat nebudou.

Pokud by se někdo snažil o více procesně zaměřený pohled na vzájemnou kooperaci, než nabízí charakteristická funkce, rozhodně by tento předpoklad nebyl nejpřirozenější. Náklady na organizaci mají zjevně zásadní vliv na utváření koalicí, seskupení a institucí. Metody používané v teorii her samy o sobě neposkytují vhodný způsob, jak je lze do modelů zakomponovat.

I přes značné potíže a omezení při sestavování charakteristické funkce, hra vyjádřená v této formě dokáže odpovědět na spoustu zajímavých otázek týkajících se síly jednotlivců i koalicí, metod spravedlivého rozdělování a vzorových modelů společenské rovnováhy.

V posledních letech zkoumání her v koaliční formě zaznamenalo růst. Významným přínosem v této oblasti je dílo Shubika (1975).

1.5 Spojitost strategií, času, hráčů a zboží

Teorie her se zpočátku zaměřovala na rozbor situací s fixním počtem hráčů, kteří si vybírají z konečných množin v rámci konečných her. Na základě těchto podmínek jsme schopni modelovat většinu událostí v lidském životě s uspokojivou aproximací. Nicméně jak z důvodu získání lepších aproximací, tak i kvůli možnosti využití hlubších a vhodnějších matematických metod se využívají i další předpoklady.

Souvisejí zejména s existencí mnoha her, ve kterých je potřeba předpokládat spojité strategie a čas. Již zmíněný Cournotův model duopolu je příkladem, kde i v případech hromadné výroby vedoucí k celkovému výstupu lze díky předpokladu spojitých a diferencovatelných produkčních funkcí sestavit modely, se kterými se dá lépe matematicky pracovat.

Příkladem her, ve kterých je třeba nahlížet na události ve spojitém čase, jsou souboje nebo stíhací závody. Existuje velké množství literatury zabývající se hrami na jednotkovém čtverci, souboji, stíhacími závody nebo diferenciálními hrami obecně. Ovšem na ekonomické problémy jich bylo aplikováno relativně málo.

Pravděpodobně nejdůležitějším zjednodušením aplikace teorie her v ekonomii se stal rozvoj her o spojitých hráčích. Jedním z klíčových výchozích předpokladů zkoumání hospodárnosti, řádu a společenských vztahů masového trhu je myšlenka, že i když má jedinec volnost výběru, v mnoha situacích je jeho vliv na hospodářství a společnost jako celek zanedbatelný.

Mnoho nejparadoxnějších rysů chápání vztahu mezi mikro- a makroekonomií spočívá v mylné představě jejich obsahu, která rozlišuje mezi individuálním a masovým chováním. První pokusy o matematizování vztahu mezi vlivem jedince a vlivem několika jedinců na trhu provedli Cournot (1838) a Edgeworth (1881). V podstatě vysvětlili krok po kroku metodu replikace hráčů. V kontextu teorie her aplikované v ekonomii Shubik (1955, 1959), Shapley

(1954-60) a Debreu a Scarf (1963) formulovali a rozvinuli metodu replikace, Hildenbrand (1974) a další tento přístup poté zobecnili.

Aumann (1964) jako první považoval množinu obchodníků v uzavřené ekonomice za spojitou s jednotlivými bezatomovými obchodníky, čímž nabídl přímý matematický přístup pro zkoumání malých obchodníků na trhu. Milnor a Shapley (1961) a Shapley (1962) již dříve aplikovali koncept spojitostí hráčů na volební systém, když se zabývali oceánskými hrami.

Většina aplikací teorie her v ekonomii doposud využívala k popisu obchodu a produkce konečnou množinu komodit. Klasifikace a systematika komodit je poněkud libovolná. Pro některé účely mohou být dvě věci považovány jako dokonalé substituty, kdežto pro jiné se mohou lišit. Z toho je zřejmé, že jakýkoli závěr ekonomické teorie, který se zdá být rozhodujícím způsobem závislý na relativním počtu komodit a obchodníků, musí být pochybný. I když se tento problém v žádném případě neomezuje pouze na aplikaci teorie her v ekonomii, má přesto svůj význam v pochopení monopolistické konkurence.

2 Modely oligopolních struktur a trhu práce

Jelikož je počet firem na oligopolním trhu omezen, musí každá z nich jednat strategicky. Každá firma si je vědoma toho, že její zisk závisí nejenom na tom kolik vyrobí, ale rovněž na rozsahu výroby svých konkurentů. Při svém rozhodování o produkci by každá firma měla zvážit, jak její rozhodování může ovlivnit rozhodování ostatních firem.

V této části uvedeme celkem čtyři modely, jež nám odhalí dopady těchto tržních struktur zejména na alokační efektivnost trhů. Začneme tím nejjednodušším Cournotovým modelem, kde se firmy zaobírají hledáním optimálního množství výroby. Zde si ukážeme vliv počtu výrobců vyrábějících daný statek na celkovou produkci, tržní cenu a zisk výrobců. Pak si ukážeme jiný možný náhled na tento problém, Bertrandův model, jež vychází z toho, že hlavním cílem firem není stanovit objem výroby, ale cenu výrobku. Poslední model se bude týkat trhu práce a uvedeme si Farberův model arbitráže.

2.1 Cournotův model duopolu, monopolu a oligopolu

Cournotův model duopolu patří k těm nejzákladnějším modelům teorie her, jež byl Cournotem formulován více jak 100 let před počátkem samotné teorie her. Jeho model se snaží nalézt optimální množství výrobků, jež firmy budou ochotny na trh dodávat.

Předpoklady modelu

- poptávková funkce je lineární tvaru $P(Q) = M - Q$, kde Q je celkové množství dodávané na trh (pro $Q \geq M$ je $P(Q) = 0$)
- postavení obou firem je rovnocenné a jejich produkt je homogenní; $Q = q_1 + q_2$, kde q_i značí produkci jednotlivé firmy
- mezní náklady c jsou konstantní => nákladová funkce $C(q_i) = cq_i$; $c < M$
- výstup je libovolně dělitelný, prostor strategií tak můžeme označit $S_i = [0, \infty)$

Zbývá nám už jen specifikovat výplatní funkci, která v tomto případě představuje ziskovou funkci firem, kterou můžeme zapsat následovně:

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i\,[P(q_1 + q_2) - c] = q_i[M - (q_1 + q_2) - c],\ \text{kde } i=1,2$$

Abychom našli Nashovu rovnováhu tohoto problému, dle definice každý musí řešit optimalizační problém

$$\max_{q_i} \pi_i(q_1, q_2) = \max_{q_i} q_i(M - q_1 - q_2 - c)$$

Naším úkolem je tedy najít maximum kvadratické funkce v proměnné q_i. Po vyřešení podmínek prvního řádu dostáváme

$$q_i = \frac{1}{2}(M - q_j - c)$$

kde $i \neq j = 1,2$

Tedy, aby uspořádaná dvojice (q_1^*, q_2^*) byl Nashovou rovnováhou, musí splňovat následující rovnice:

$$q_1^* = \frac{1}{2}(M - q_2^* - c)$$

$$q_2^* = \frac{1}{2}(M - q_1^* - c)$$

Vyřešením této soustavy dostaneme:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{M - c}{3}$$

Po dosazení do poptávkové / ziskové funkce pak obdržíme výslednou cenu výrobku / zisk firmy:

$$P(Q) = M - 2\frac{M - c}{3} = \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}c$$

$$\pi(q_1^*) = \pi(q_2^*) = [\ \frac{1}{3}(M - c)\ ]\wedge^2$$

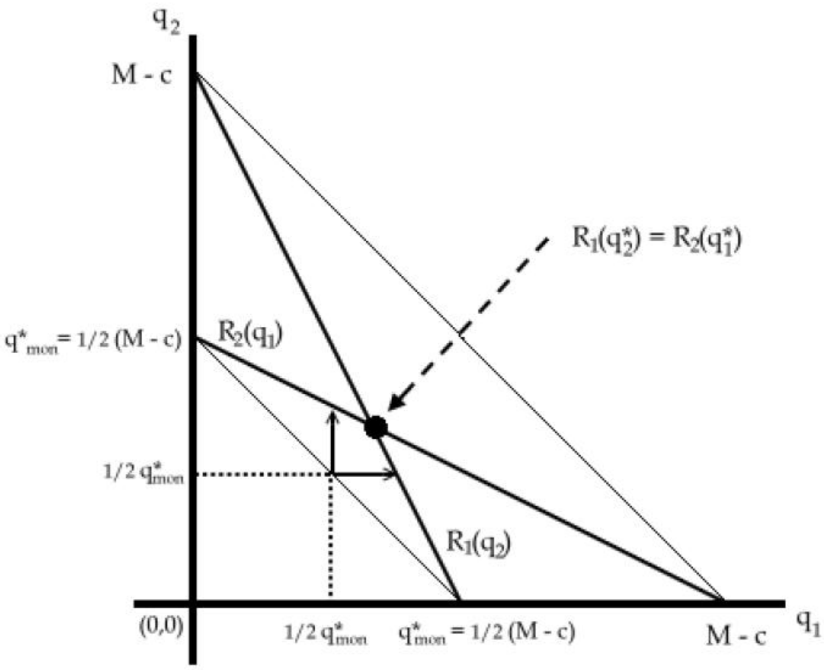
Nyní se podívejme na skutečnost, jak by situace vypadala v případě, že na trhu je pouze jeden výrobce. Ten by vyráběl takové množství q_i, které by maximalizovalo zisk, tedy $q_m = M - c/2$ a jemu odpovídající zisk monopolu $\pi(q_m, 0) = (M - c)^2/4$.

Z těchto výsledků můžeme vypozorovat následující důsledky: monopolista dodává na trh menší množství výrobků než duopolisté a prodává ho tak i za vyšší cenu, a tak dosahuje vyššího zisku na jednotku produkce.

Proč ale duopolisté nevyrábí $q_i = q_m/2$? Odpověď nám pomůže objasnit obr. (2.1), kde $R_i(q_j)$ je tzv. reakční křivka, která udává optimální množství výroby firmy *i* s ohledem na vyráběné množství q_j firmy *j*. Z něj je patrné, že kdyby obě firmy se dohodly a vyráběly $q_i = q_m/2$, tak by každá z nich musela odolávat pokušení vyrábět více, z čehož by získala výhodu (pokud by druhá firmy udržovala produkci na $q_i = q_m/2$).

Nakonec se pokusme tento model zobecnit na případ, kdy na trhu je *n* firem, kde každá z nich přispívá nezanedbatelnou částí k celkové produkci výrobku q. Výplatní funkce jednotlivých firem získáme analogicky:

$$\pi_1 (q_1, q_2, \ldots, q_n) = (p - c)q_1 = (M - c - q_1 - q_2 - \ldots - q_n)q_1$$
$$\pi_2 (q_1, q_2, \ldots, q_n) = (p - c)q_2 = (M - c - q_1 - q_2 - \ldots - q_n)q_2$$
$$\vdots$$
$$\pi_n (q_1, q_2, \ldots, q_n) = (p - c)q_n = (M - c - q_1 - q_2 - \ldots - q_n)q_n$$



Obrázek 2.1: Rovnováha duopolu

Opět najdeme Nohovu rovnováhu tak, že položíme parciální derivace ∂ui/∂qi rovny nule. Dospějeme tak k soustavě:

$$
\begin{gathered}
2q_1 + q_2 + \ldots + q_n = M - c \\
q_1 + 2q_2 + \ldots + q_n = M - c \\
\vdots \\
q_1 + q_2 + \ldots + 2q_n = M - c
\end{gathered}
$$

Jejímž řešením jsou hodnoty

$$q_1^* = q_2^* = \ldots = q_n^* = \frac{M-c}{n+1}$$

Limitním případem oligopolu je pro n → ∞ dokonalá konkurence, jež na trh dodává celkové množství při němž firmy dosahují nulového zisku.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}(M-c) = M-c$$

Nyní námi získané výsledky ohledně Cournotova modelu shrňme do následující tabulky.

	celkové množství q^*	cena za kus p^*	celkový zisk u^*
monopol	$\frac{1}{2}(M-c)$	$\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}c$	$\frac{1}{4}(M-c)^2$
duopol	$\frac{2}{3}(M-c)$	$\frac{1}{3}M+\frac{2}{3}c$	$\frac{2}{9}(M-c)^2$
oligopol	$\frac{n}{n+1}(M-c)$	$\frac{1}{n+1}M+\frac{n}{n+1}c$	$\frac{n}{(n+1)^2}(M-c)^2$
dok. konkurence	$M-c$	c	0

Tabulka 2.1: Výsledky Cournotova modelu

S využitím obr. (2.1) a výsledků z tabulky, můžeme říci, že čím více je firem vyrábějící daný produkt q na trhu, tím více se bod rovnováhy každých dvou firem posouvá směrem doprava nahoru a limitně se blíží spojnici spojující M – c, jež představuje přímku alokační efektivnosti. Můžeme tedy konstatovat, že čím více je trh zatížen monopolními silami[1], tím více je výroba omezována a zdražována.

2.2 Bertrandův model duopolu

Bertrandův model duopolu se objevuje jako kritika Cournotova modelu, kde je jako hlavní nedostatek spatřováno to, že Cournotův model opomíjí schopnost firem udržovat cenu – v případě Cournotovy rovnovážně ceny by se výrobci vyplatilo lehce snížit cenu a přilákat tak všechny spotřebitele[2]. Právě stanovení rovnovážné ceny je cílem tohoto modelu. Předpoklady modelu jsou podobné těm Cournotovým, takže uvedeme pouze odlišnosti:

- poptávková funkce po výrobku firmy *i* je funkcí cen, můžeme ji zapsat následovně $q_i(p_1, p_2) = M - p_1 + bp_2$, kde $b \in (0,1)$ a značí jakou je výrobek firmy *1* náhražkou za výrobek firmy *2* => produkty jsou heterogenní
- prostor strategií je tvořen možnými cenami výrobků; $S_i = [0, \infty)$

Výplatní funkci budeme rovněž chápat jako ziskovou v následujícím tvaru:

$$\pi_i(p_1, p_2) = q_i\,(p_1, p_2)\,[p_i - c] = q_i[M - p_1 + bp_2]\,[p_i - c]$$

Dvojice cen p_1^*, p_2^* bude Nashovou rovnováhou, pokud bude pro každou firmu *i* p_i^* řešením maximalizační úlohy:

[1]monopolními silami je zde pouze myšlen počet výrobců vyrábějících daný produkt, ne to, jak je tento pojem chápán soudobou ekonomií

[2]samozřejmě toto platí v případě naprosté homogenity produktů a prodejních služeb, kdy nedochází k upřednostnění jedné značky před druhou

$$\max_{p_i} \pi_i(p_1, p_2) = \max_{p_i}(p_i - c)(M - p_1 + bp_2)$$

Z derivace snadno dostáváme řešení

$$p_i^* = \frac{1}{2}(M + bp_j^* + c)$$

Tedy dvojice bude Nashova rovnováha, pokud bude platit:

$$p_1^* = \frac{1}{2}(M + bp_2^* + c)$$

$$p_2^* = \frac{1}{2}(M + bp_1^* + c)$$

Vyřešením této soustavy dostáváme

$$p_1^* = p_2^* = \frac{M + c}{2 - b}$$

Odtud můžeme vysledovat zajímavý závěr, že čím bližšími substituty jsou si výrobky, tím poroste jejich cena. Rovnovážné vyráběné množství by pak odpovídalo:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{M + c(b-1)}{2 - b}$$

2.3 Stackelbergův model duopolu

Stackelbergův model duopolu se s předpoklady modelu shoduje s modelem Cournotovým (dal by se obdobným způsobem aplikovat i na model Bertrandův), avšak s jedním podstatným rozdílem, a to, že je zasazen do dynamického rámce. V ekonomické interpretaci to znamená, že jedna firma má dominantní postavení a druhá se jí tedy musí podřídit. Průběh hry pak vypadá následovně:

1. První firma, jež je cenovým tvůrcem, si zvolí optimální množství výroby $q_1 \geq 0$.

2. Druhá firma pozoruje q_1, na jehož základě zvolí množství $q_2 \geq 0$.

3. Výplatní funkce firem jsou dány ziskovou funkcí $\pi_i(q_1, q_2) = q_i\,[P(Q) - c]$, přičemž všechno značení je totožné se značením u Cournotova modelu.

Úlohu vyřešíme pomocí zpětné indukce. Tedy nejprve nalezneme optimální reakci druhé firmy na možná rozhodnutí firmy první. Řešíme:

$$\max_{q_2} \pi_2(q_1, q_2) = \max_{q_2} q_2(M - q_1 - q_2 - c)$$

což vede k:

$$R_2(q_1) = \frac{M - q_1 - c}{2}$$

První firma zná reakci druhé firmy, a proto ji zakomponuje do svého rozhodování. Řeší pak následující problém:

$$\max_{q_1} \pi_1(q_1, R_2(q_1)) = \max_{q_1} q_1[M - q_1 - R_2(q_1) - c] = \max_{q_1} q_1 \frac{M - q_1 - c}{2}$$

který vede k následujícímu řešení:

$$q_1^* = \frac{M - c}{2} \quad \text{a} \quad R_2(q_1^*) = \frac{M - c}{4}$$

Když porovnáme výskedjy s Cournotovým modelem, zjistíme, že v tomto případě je na trh dodáváno větší množství výrobků 3(M – c)/4 oproti 2(M – c)/3 v případě firem s rovnocenným postavením. Můžeme konstatovat, že má-li jedna z firem dominantní postavení, pak je trh alokačně efektivnější (je na trh dodáváno více a za nižší cenu), nežli v případě rovnocenného postavení firem.

Podíváme-li se do tabulky (2.1), můžeme vysledovat jednak to, že dominantní firma na trh dodává stejné množství, jako kdyby na trhu byla sama (nicméně její zisk je nižší v důsledku produkce druhé firmy, která tak snižuje cenu na trhu), ale také to, že je na trh dodáváno stejné množství produkce jako v Cournotově případě oligopolu tří firem, přičemž si dominantní firma jakoby přisvojuje produkci i zisk odpovídající dvou firmám. Pokud bychom srovnávali zisky firmy, pak dominantní firma na svém postavení vydělá 12,5%, zatímco druhá firma bude mít zisk téměř o 44% nižší než kdyby byla rovnocenným konkurentem.

Ještě než opustíme tento model, zamysleme se nad možným prohloubením naší úvahy. První firma by mohla předjímat, že druhá firma bude vyrábět množství q_2 = (M – c)/4, pak by pro ni ovšem bylo výhodné vyrábět nikoli množství (M – c)/2 nýbrž 3(M – c)/8. Tuto úvahu první firmy by druhá firma mohla rovněž očekávat, takže by vyráběla množství q_2 = 5(M – c)/16. Tímto prohlubováním úvahy bychom nakonec dospěli k Nashově rovnováze, při které by každá firma vyráběla q_i = (M – c)/3.

2.4 Trh práce, Farberův model „final – offer“ arbitráže

Tento model patří k těm nejjednodušším zabývajícím se mzdovou problematikou. Jeho cílem je najít optimální požadovanou výši mzdy jak ze strany pracovníků, tak zaměstnavatelů, přičemž dosáhnutí požadované výše mzdy lze dosáhnout pouze jednáním (arbitráží). Tento model je ještě sevřen do statického rámce, i když časový posun je zaznamenán rolí arbitra. Časování hry je následující:

- odbory i firmy zvolí požadovanou výši mzdy w_o a w_f, kde se předpokládá, že $w_o > w_f$

- arbitr má svou představu o výši mzdy *x*, kterou nikdo kromě něj nezná, přičemž konečná mzda bude vybrána ta, která je blíže *x*; matematicky zapsáno: bude vybrána w_f jestliže $x < (w_o + w_f)/2$ a vybrána w_o jestliže $x > (w_o + w_f)/2$ (pokud $x = (w_o + w_f)/2$, pak se arbitr náhodně rozhodne)

- obě strany pokládají *x* za náhodnou veličinu určenou distribuční funkcí F(*x*) a hustotou f(*x*)

Pravděpodobnost, že bude vybrána mzda w_f můžeme zapsat takto:

$$P\left\{x < \frac{w_o + w_f}{2}\right\} = F\left(\frac{w_o + w_f}{2}\right)$$

a w_o

$$P\left\{x > \frac{w_o + w_f}{2}\right\} = 1 - F\left(\frac{w_o + w_f}{2}\right)$$

Potom očekávaná výše mzdové dohody je:

$$w_f \cdot F\left(\frac{w_o + w_f}{2}\right) + w_o \cdot \left[1 - F\left(\frac{w_o + w_f}{2}\right)\right]$$

Předpokládá se, že firmy chtějí minimalizovat očekávanou mzdu a naopak odbory maximalizovat. Proto aby dvojice (w_f^*, w_o^*) byla Nashova rovnováha hry, firmy a odbory musí řešit tento optimalizační problém:

$$\begin{array}{l} \min\limits_{w_f} w_f \cdot F\left(\frac{w_f + w_o^*}{2}\right) + w_o^* \cdot \left[1 - F\left(\frac{w_f + w_o^*}{2}\right)\right] \\ \max\limits_{w_o} w_f^* \cdot F\left(\frac{w_f^* + w_o}{2}\right) + w_o \cdot \left[1 - F\left(\frac{w_f^* + w_o}{2}\right)\right] \end{array}$$

Tedy rovnovážná dvojice nabízených mezd musí splňovat podmínky prvního řádu (derivace podle příslušné proměnné položíme rovny nule). Dospějeme pak k této soustavě rovnic:

$$\begin{array}{rcl} (w_o^* - w_f^*) \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{w_f^* + w_o^*}{2}\right) & = & F\left(\frac{w_f^* + w_o^*}{2}\right) \\ (w_o^* - w_f^*) \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{w_f^* + w_o^*}{2}\right) & = & \left[1 - F\left(\frac{w_f^* + w_o^*}{2}\right)\right] \end{array}$$

Jelikož jsou levé strany rovnic stejné, jednoduše dostáváme následující řešení porovnáním pravých stran:

$$F\left(\frac{w_f^* + w_o^*}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Tedy průměrná mzdová nabídka odpovídá mediánu arbitrem preferované mzdy. Po dosazení tohoto výsledku do jedné z rovnic podmínek prvního řádu snadno dospějeme k tomuto výrazu:

$$w_o^* - w_f^* = \frac{1}{f\left(\frac{w_f^* + w_o^*}{2}\right)}$$

Neboli rozdíl v nabízených mzdách je roven převrácené hodnotě pravděpodobnosti, že arbitr preferuje právě medián z možně preferovaných mezd. Což můžeme interpretovat tak, že čím větší je nejistota ohledně arbitrem preferované mzdy, tím vyhraněnější budou nabídky firem a odborů. Naopak bude-li panovat určité přesvědčení o preferované mzdě, pak se nabídky hráčů budou jen málo od této hladiny odchylovat ze strachu, že by jinak jejich nabídka mohla být vyloučena.

3 Aukce a nabídky

Aukce se datují už nejméně z dob Říma. Ve finančních a komoditních trzích hrají stále důležitou roli. Zapečetěné nabídky jsou využívány na kontrakty velkých společností a při prodeji státních nemovitostí. Jejich historie jakožto ekonomických tržních mechanismů je zajímavá sama o sobě, mimo jiné proto, že aukce nebo nabídkový proces jsou obvykle docela dobře definované soubory formálních pravidel, což přirozeně vede k formálnímu matematickému modelování.

Matematické modely aukcí a nabídek se dělí na dvě základní skupiny: na ty matematické modely, ve kterých je soutěž modelována za předpokladu Bayesovského principu, a na ty, ve kterých je model řešen jako strategická hra užitím konceptu řešení nekooperativní rovnováhy nebo případně užitím jiného řešení.

Teorie her je pro aukce a nabídky užitečná dvěma způsoby: popisným a analytickým. Pečlivé specifikace matematických modelů nutily klást důraz na pochopení skutečných mechanismů, včetně neformálních pravidel a zvyklostí. Pokusy o řešení ukázaly, že modely jsou velmi citlivé na *informace o podmínkách* a že mnoho důležitých vlastností aukcí zahrnuje schopnost jedince posoudit: kolik ho objekt stojí a za kolik ho mají ostatní. Na rozdíl od ekonomických modelů, kde se předpokládá, že každý zná priority všech ostatních.

3.1 Obecný úvod k aukcím

Aukci je možno definovat jako tržní mechanismus, který vyrovnává poptávku a nabídku. Další tržní mechanismy zahrnují například prodej s pevnou cenou nebo cenové vyjednávání.

U aukcí je charakteristické, že proces vytváření ceny je explicitní. Pravidla, podle kterých se utváří konečná cena, jsou dobře známa, chápana všemi účastníky.

Aukce jsou pružnější než prodej s pevnou cenou a méně časově náročné, než je cenové vyjednávání. Jejich využití se pohybuje od prodeje uměleckých předmětů, přes prodej květin, alokace radiového spektra, prodej elektřiny, či povolenek znečištění až po státní nákupy nebo prodeje.

Aukce mohou být klasifikovány podle řady kriterii, například podle:

(1) způsobu podávání nabídek *(otevřené, uzavřené)*
(2) mechanismu změny ceny *(s rostoucí cenou, s klesající cenou)*
(3) počtu typů dražených objektů *(s jedním typem objektů, s více typy objektů)*
(4) typu hodnoty objektů *(soukromé, všeobecné, sdružené)*
(5) počtu prodávajících a kupujících *(standardní, reverzní)*
(6) požadavků na aukci *(maximalizace příjmu, efektivnost aukce)*

Rozlišují se aukce *otevřené* a *uzavřené*. U otevřených aukcí jsou všechny nabídky viditelné, zatímco u uzavřených aukcí nejsou nabídky vidět, jsou například podávány v zalepených obálkách (tzv. obálková metoda).

Dále se rozlišují *aukce s rostoucí cenou* a *aukce s klesající cenou*. U prvního typu se postupně zvyšuje cena až do okamžiku, kdy zůstane jedná nabídka. U druhého typu se cena zmenšuje až do okamžiku, kdy se objeví první nabídka.

Uvažují se *aukce s jedním typem objektů* a také *aukce s více typy objektů*. Aukce s více typy objektů mohou být sekvenční, kdy se objekty prodávají postupně, nebo simultánní, kdy se prodávají kombinace objektů (takovéto aukce se nazývají *kombinatorické*).

Podle typu hodnot objektů se většinou uvažují tři případy. V případě *soukromé hodnoty* má dražený objekt pro každého potencionálního kupujícího určitou hodnotu, která není ovlivněna takovýmito hodnotami ostatních kupujících. Takový model je vhodný pro objekty krátkodobé spotřeby bez možnosti dalšího prodeje. V případě *všeobecné hodnoty* draženého objektu je tato hodnota stejná pro každého potencionálního kupujícího, ale v době aukce není skutečná hodnota známa. Kupující však mohou mít určité různé informace o neznámé skutečné hodnotě. Příkladem jsou ropné vrty, kdy jejich hodnota závisí na neznámém množství ropy pod zemí. Kupující však mají různé geologické signály o tomto množství. Obecný model se *sdruženými hodnotami* zahrnuje předchozí situace jako speciální případy. Sdružené hodnoty zahrnují jak složku soukromého hodnocení, tak i hodnocení objektů dalšími jedinci. Při koupi domu má jeho hodnocení jak privátní složku, tak i složku hodnocení ostatními potencionálními kupujícími pro případ budoucího možného prodeje domu.

Standardní aukce jsou orientovány na prodej, mají jednoho prodávajícího a větší počet kupujících. *Reverzní aukce* jsou orientovány na nákup, mají naopak jednoho kupujícího a větší počet prodávajících. *Dvojité aukce* kombinují předcházející dva typy a zprostředkovávají výměnu mezi větším počtem prodávajících a větším počtem kupujících.

Požadavkem na aukci může být *maximalizace příjmu prodávajícího* nebo *efektivnost aukce*, která zajistí, že objekt skončí v rukách toho, pro nějž má objekt největší hodnotu. Parametry mohou být *transparentnosti pravidel* a potenciál pro vytváření *koluzí účastníků*.

Dále se budeme zabývat jen aukcemi s jedním typem objektů a uvedeme si čtyři nejznámější typy:

1. **Anglická aukce** je otevřená aukce s rostoucí cenou. Prodávající začíná aukci s nízkou cenou, kterou postupně zvyšuje. Aukce končí, když žádný z kupujících není ochoten zvýšit nabídku. Aukci vyhrává kupující s nejvyšší nabídkou a za objekt zaplatí tuto nejvyšší nabídku. Anglické aukce jsou typické při prodeji uměleckých předmětů, domů, ojetých aut atd.
2. **Holandská aukce** je otevřená aukce s klesající cenou. Prodávající začíná aukci s vysokou cenou, kterou postupně snižuje. Aukce končí, když některý z kupujících je ochoten zaplatit průběžnou cenu. Aukci vyhrává kupující, který zastavil dražbu a za objekt zaplatí tuto průběžnou cenu. Holandské aukce jsou typické při prodeji květin v Nizozemí, kdy cenu automaticky mění hodiny a vyhrává kupující, který tyto hodiny zastavil. Podobným způsobem jsou prodávány ryby v Izraeli a tabák v Kanadě.
3. **Aukce první ceny** je uzavřená (obálková) aukce, kdy účastník aukce zašle svoji nabídku bez znalosti nabídek ostatních účastníků. Vítězem aukce je účastník s nejvyšší nabídkou a zaplatí tuto nejvyšší nabídku. Tato metoda je používána například v elektronickém obchodování. Používá se rovněž u reverzních aukcí, kdy větší počet prodávajících nabízí jednomu kupujícímu, v tomto případě vyhrává prodávající s nejnižší nabízenou cenou.
4. **Aukce druhé ceny** (**Vickreyova aukce**) je uzavřená (obálková) aukce, kdy účastník aukce zašle svoji nabídku bez znalosti nabídek ostatních účastníků. Vítězem aukce je účastník s nejvyšší nabídkou a zaplatí druhou nejvyšší nabídku. Tato aukce byla zavedena zejména pro teoretické analýzy, v současnosti je však používána například v obchodování B2B (Business-to-business).

3.2 Řešené příklady aukcí: „Tajná“ (obálková) aukce

Budeme uvažovat jednokolovou aukci, kde jsou dva kupující označeni jako i = 1,2. Každý z kupujících má své subjektivní ohodnocení nabízeného předmětu ν_i. Protože pojetí hodnoty předmětu je subjektivní, hodnota ν_i druhého kupujícího bude považována za nezávislou s první, rovnoměrně spojitě rozloženou náhodnou veličinu na intervalu [0,1]. Tento typ aukce probíhá tak, že nejprve kupující napíší na lísteček svoji nabídku b_i a ten, kdo nabídne víc, získá dražený předmět (v případě, že se nabídky shodují, je o budoucím majiteli rozhodnuto hodem koruny). Dále se předpokládá, že kupující jsou rizikově neutrální a že jejich nabídky jsou nezáporné. Abychom daný problém mohli formulovat jako statickou Bayesovskou hru, je třeba zadefinovat prostory akcí, prostory typu hráčů a jejich výplatní funkce

Prostory akcí jsou zde možné nabídky kupujících, tedy $B_i = [0, \infty)$.

Prostorem typů hráče budeme rozumět možné ocenění nabízeného předmětu $V_i = [0,1]$.

Výplatní funkcí pak bude rozdíl mezi oceněním a konečnou cenou předmětu, tedy

$$u_i(b_1, b_2; \nu_1, \nu_2) = \nu_i - b_i, \qquad \text{když } b_i > b_j,$$
$$u_i(b_1, b_2; \nu_1, \nu_2) = \frac{\nu_i - b_i}{2}, \qquad \text{když } b_i = b_j,$$
$$u_i(b_1, b_2; \nu_1, \nu_2) = 0, \qquad \text{když } b_i < b_j.$$

Strategií pro každého hráče bude funkce $b_i(\nu_i)$ udávající výši nabídky vzhledem k danému ocenění. Dvojice $(b_1(\nu_1), b_2(\nu_2))$ bude splňovat podmínky Bayesovské Nashovy rovnováhy, jestliže pro každé $\nu_i, b_i(\nu_i)$ je řešením:

$$\max_{b_i} (\nu_i - b_i) P\{b_i > b_j(\nu_j)\} + \frac{1}{2}(\nu_i - b_i) P\{b_i = b_j(\nu_j)\}.$$

Vzhledem k tomu, že ν_i je rovnoměrně spojitě rozložená náhodná veličina, tak množinu strategií můžeme omezit na lineární funkci, pak $b_1(\nu_1) = a_1 + c_1\nu_1$ a stejně tak $b_2(\nu_2) = a_2 + c_2\nu_2$. Následně se nám maximalizační problém redukuje na:

$$\max_{b_i} (\nu_i - b_i) P\{b_i > a_j + c_j\nu_j\},$$

neboť $P\{b_i = a_j + c_j\nu_j\} = 0$. Dále se dá předpokládat, že kupující nebude nabízet méně/více, než je minimální/maximální možná nabídka druhého hráče, tedy $a_j \le b_i \le a_j + c_j$. Potom

$$P\{b_i > a_j + c_j\nu_j\} = P\{\nu_j < \frac{b_i - a_j}{c_j}\} = \frac{b_i - a_j}{c_j}.$$

Řešení maximalizační úlohy vede k nalezení následující nejlepší odpovědi:

$$b_i(\nu_i) = \frac{\nu_i + a_j}{2}, \qquad \text{když } \nu_i \geq a_j,$$
$$b_i(\nu_i) = a_j, \qquad \text{když } \nu_i < a_j.$$

Jestliže $0 < a_j < 1$, pak existují nějaké hodnoty ν_i, pro které $\nu_i < a_j$. V tomto případě by pak strategie $b_i(\nu_i)$ nebyla lineární (nejdříve konstantní na úrovni a_j a od $\nu_i = a_j$ teprve rostoucí). Můžeme se tak zaměřit pouze na možnosti, že $a_j \geq 1$ nebo $a_j \leq 0$. První situace však také nastat nemůže, kdyby nastala, tak z racionálního hlediska musí platit $c_j \geq 0$ a pak by $b_j(\nu_j) \geq \nu_j$, což by nemohlo být optimální řešení. Tedy musí platit $a_j \leq 0$, kdy pak $b_i(\nu_i) = (\nu_i + a_j)/2$, a tak $a_i = a_j/2$ a $c_i = 1/2$.

Stejný postup se stejnými výsledky bychom mohli aplikovat i u druhého kupujícího. Dáme-li dohromady oba výsledky, dospějeme tak k nalezení Bayesovské Nashovy rovnováhy, ve které $a_i = a_j = 0$ a $c_i = c_j = 1/2$, což vede k $b_i(\nu_i) = \nu_i/2$.

Každý z kupujících tedy na lísteček napíše částku odpovídající polovině hodnoty, na kterou daný předmět oceňuje. Tento výsledek lze interpretovat tak, že oba kupující při rozhodování čelí dvěma tlakům, jednak touze maximalizovat užitek z nákupu, ale také touze získat daný předmět.

Ještě se ale zamysleme nad případem, kdy proti sobě stojí obecně n poptávajících. Všechny předpoklady necháme zachovány. Výplatní funkce jednotlivých hráčů $i = 1, \ldots, n$ pak vypadají následovně:

$$u_i(b_1,\ldots,b_n;\nu_1,\ldots,\nu_n) = \nu_i - b_i, \qquad \text{když } b_i > \max b_j, \qquad \text{pro } i \neq j,$$
$$u_i(b_1,\ldots,b_n;\nu_1,\ldots,\nu_n) = 0, \qquad \text{když } b_i < \max b_j, \qquad \text{pro } i \neq j.$$

Přitom jsme zanedbali možnost, kdy by se nejvyšší nabídky vyrovnávaly, tedy $(\nu_i - b_i)/k$, když $b_i = \ldots = b_k \wedge (b_i = \max b_j, i \neq j)$ pro její prakticky nulovou pravděpodobnost. n-tice $(b_1(\nu_1),\ldots,b_n(\nu_n))$ bude splňovat podmínky Bayesovské Nashovy rovnováhy, jestliže pro každé $\nu_i, b_i(\nu_i)$ je řešením:

$$\max_{b_i} (\nu_i - b_i) \prod_{j=1}^{n-1} P\{b_i > b_j(\nu_j)\} \text{ pro } i \neq j.$$

Pro jednoduchost a vzhledem k výše uvedeným úvahám předpokládejme množinu strategií ve tvaru funkce $b_i(\nu_i) = c_i \nu_i$. Odtud maximalizační problém nabývá této podoby:

$$\max_{b_i} (\nu_i - b_i) \prod_{j=1}^{n-1} \frac{b_i}{c_j} \text{ pro } i \neq j.$$

Podmínky prvního řádu pro každé i dostáváme v následující podobě:

$$(\nu_i - b_i) \frac{(n-1) b_i^{(n-2)}}{\prod_{j=1}^{n-1} c_j} - \frac{b_i^{(n-1)}}{\prod_{j=1}^{n-1} c_j} = 0,$$

které po úpravách vedou přímo k řešení

$$b_i = \frac{n-1}{n} \nu_i.$$

Tedy můžeme říci, že se zvyšujícím se počtem poptávajících roste výše jejich nabídek a to tak, že v limitním případě, kdy se aukce účastní nekonečně mnoho osob, by se nabízená cena rovnala subjektivnímu ocenění pro daný předmět.

3.3 Řešené příklady aukcí: Dvojitá aukce

U tohoto typu aukce bude do konečné ceny zasahovat sám prodávající. Náš model bude popisovat aukci, kde proti sobě bude stát jeden kupující a jeden prodávající, kde každý oznámí svou požadovanou cenu p_s a p_b, na jejichž základě bude stanovena výsledná cena jako aritmetický průměr těchto cen, čili $p = (p_s + p_b)/2$ (za předpokladu, že $p_b \geq p_s$). Obdobně jako v předchozím případě: každý má své subjektivní ohodnocení pro dražený předmět a o výši ohodnocení druhého předpokládá, že je to rovnoměrně spojitě rozložená náhodná veličina na intervalu [0,1].

Strategie pro poptávajícího bude $p_b(\nu_b)$ udávající požadovanou cenu pro jednotlivá možná ohodnocení předmětu, obdobně formulujeme strategii prodávajícího jako $p_s(\nu_s)$. Výplatní funkcí pak pro kupujícího bude $\nu_b - p$, naopak pro prodávajícího $p - v_s$, jestliže se však obchod neuskuteční výplata obou hráčů bude rovna nule.

Nyní zformulujme úlohu tak, aby dvojice strategií $\{p_b(\nu_b), p_s(v_s)\}$ tvořila Bayesovskou Nashovu rovnováhu. Pro každé $\nu_b \in [0,1]$, $p_b(\nu_b)$ je řešením:

$$\max_{p_b} [\nu_b - \frac{p_b + E[p_s(\nu_s); p_b \geq p_s(\nu_s)]}{2}] P\{p_b \geq p_s(\nu_s)\}, \qquad (1)$$

kde $E[p_s(\nu_s); p_b \geq p_s(\nu_s)]$ je očekávaná cena, která bude nabídnuta prodávajícím za podmínky, že bude nižší než cena nabídnutá kupujícím. Dále pro každé $\nu_s \in [0,1]$, $p_s(v_s)$ musí být řešením:

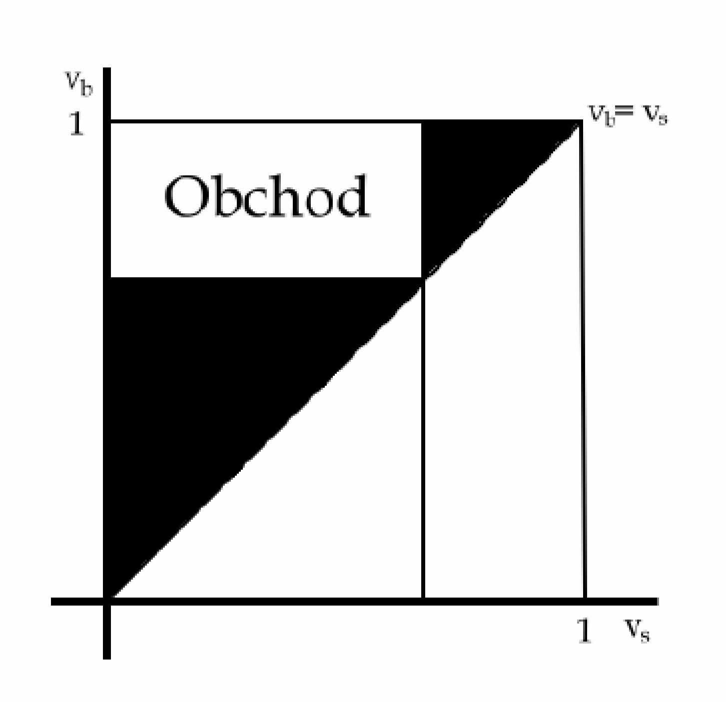
$$\max_{p_s} [\frac{p_s + E[p_b(\nu_b); p_b(\nu_b) \geq p_s]}{2} - \nu_s] P\{p_b(\nu_b) \geq p_s\}, \qquad (2)$$

kde $E[p_b(\nu_b); p_b(\nu_b) \geq p_s]$ je rovněž očekávaná cena, která bude nabídnuta kupujícím, podmíněná tím, že bude vyšší než cena nabídnutá prodejcem.

Existují mnohé Bayesovské rovnováhy této hry. Pro začátek uvažujme situaci, kdy se obchod uskuteční za jednotnou cenu, pokud k němu vůbec dojde. Pro libovolnou hodnotu $x \in [0,1]$ uvažujme následující strategie hráčů:

1. Kupující nabídne x, jestliže $\nu_b \geq x$ jinak nabídne 0.
2. Obdobně prodávající nabídne x, pokud $\nu_s \leq x$ jinak nabídne 0.

Vzhledem ke strategii kupujícího prodávající má možnost zvolit, jestli prodat či nikoli. Typ prodávajícího, který preferuje prodej, prodá, a typ, pro něhož je prodej nevýhodný, neprodá. Stejně tak můžeme uvažovat o kupujícím vzhledem ke strategii prodávajícího. Tedy skutečně se jedná o Bayesovskou Nashovu rovnováhu. V této rovnováze obchod proběhne pro takové dvojice typů hráčů (ν_s, ν_b), kde $\nu_b \geq \nu_s$ vyznačených na obrázku 1, naopak v černě vybarvených polích k obchodu nedojde.



Obrázek 1: Rovnováha při jednotné ceně

Nyní odvodíme lineární Bayesovskou Nashovu rovnováhu této hry. Strategii prodejce vyjádříme obecně ve tvaru $p_s(\nu_s) = a_s + c_s\nu_s$. Pak p_s je rovnoměrně rozložena na intervalu $[a_s, a_s + c_s]$, odtud optimalizační problém kupujícího z rovnice (1) dostává tuto podobu:

$$\max_{p_b}[\nu_b - \frac{1}{2}(p_b + \frac{a_s + p_b}{2})]\frac{p_b - a_s}{c_s}.$$

Po jeho vyřešení dospějeme k následujícímu výsledku:

$$p_b = \frac{2}{3}\nu_b + \frac{1}{3}a_s. \qquad (3)$$

Stejně tak strategii kupujícího zavedeme jako $p_b = a_b + c_b\nu_b$. Pak p_b je rovnoměrně rozložena na $[a_b, a_b + c_b]$, odkud nejlepší odpověď prodejce dostaneme z rovnice (2):

$$\max_{p_b}[\frac{1}{2}(p_s + \frac{p_s + a_b + c_b}{2}) - \nu_s]\frac{a_b + c_b - p_s}{c_b}.$$

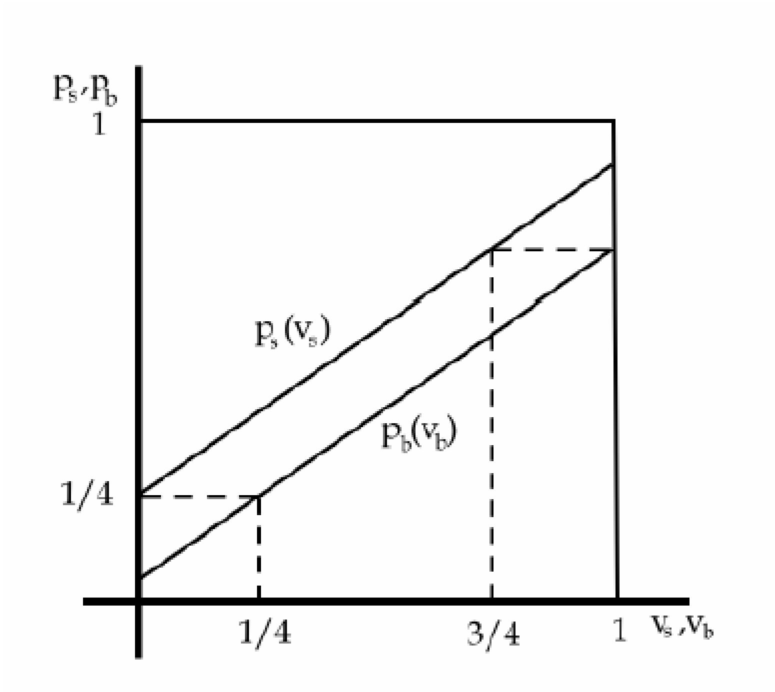
Vyřešením dostáváme následující řešení:

$$p_s = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{3}(a_b + c_b). \qquad (4)$$

Tedy na lineární strategii je nejlepší odpověď také lineární. Aby tyto odpovědi byly nejlepší jedna na druhou, pak (3) implikuje, že $c_b = 2/3$ a $a_b = a_s/3$ a (4) vede k $c_s = 2/3$ a $a_s = (a_b + c_b)/3$. Odtud lineární rovnovážná strategie je:

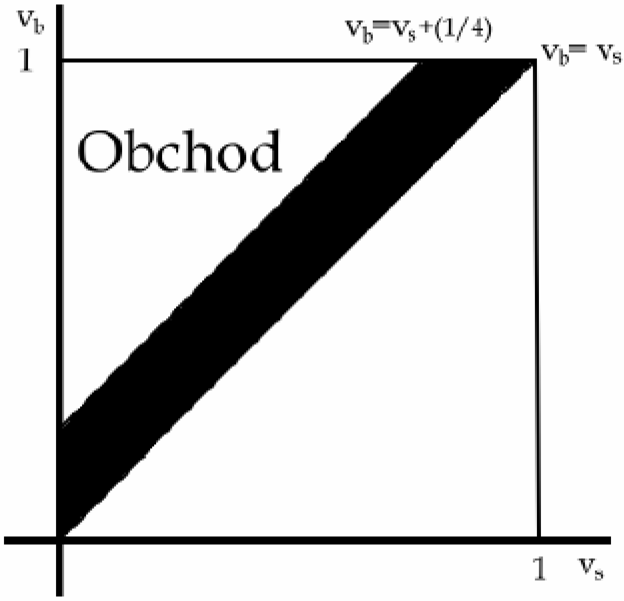
$$p_b(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12} \qquad (5)$$
$$p_s(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4} \qquad (6)$$

jak je znázorněno na obrázku 2.



Obrázek 2: Lineární rovnovážné strategie kupce a prodejce

Připomeňme, ze obchod proběhne v této aukci za předpokladu, že $p_b \geq p_s$. Po dosazení rovnic (5) a (6) do této nerovnosti dostáváme podmínku pro lineární rovnováhu za předpokladu, že $v_b \geq v_s + 1/4$, jak je znázorněno na obrázku 3. Z obrázku 2 dále můžeme vypozorovat, že nabídka prodejce, jehož typ je větší než $3/4$, s určitostí přesáhne poptávku kupujícího, stejně tak poptávka kupcujícího, jehož ocenění je nižší než $1/4$, nikdy nedosáhne nabídky.



Obrázek 3: Lineární rovnováha modelu

Srovnejme ještě obrázky (1) a (3). V obou případech dojde k nejhodnotnějšímu obchodu (kdy $\nu_s = 0$ a $\nu_b = 1$), ale rovnováha jednotné ceny vylučuje určité hodnotné obchody (takové, že $\nu_s = 0$ a $\nu_b = x - \varepsilon$, kde ε je malé). Na druhou stranu však umožňuje obchody s výplatami blížícími se nule (kde $\nu_s = x - \varepsilon$ a $\nu_b = x + \varepsilon$), které jsou při lineárních strategiích zavrženy. Tyto závěry můžeme interpretovat tak, že lineární rovnováha s ohledem na výši očekávaných zisků může dominovat rovnováhu jednotné ceny, ale rovněž zvyšuje pravděpodobnost, že by hráči mohli udělat lépe, pokud by zvolili jinou rovnováhu.