Matematická ekonomie

Jan Paseka

15. prosince 2010

Úvod

Matematickou ekonomii bychom mohli definovat jakožto oblast vědy, která *obsahuje různé aplikace matematických pojmů a technik pro ekonomii, zejména pak pro ekonomické teorie.* Alternativní přístup pak je, že provedeme výčet všech součástí matematické ekonomie.

V tomto úvodu je historie matematické ekonomie rozdělena do tří širokých a částečně se překrývajících období: období marginalistů (1837-1947), období množinově-teoretických/lineárních modelů (1948-1960) a současné období integrace (1961-nyní).

1. Období marginalistů: 1838-1947

Počáteční období matematické ekonomie bylo to, ve kterém si ekonomie vypůjčila metodologii přírodních věd a nástroje matematiky, aby vyvinula formální teorii založenou na matematické analýze. Za předpokladu dostatečně hladkých funkcí (např. funkce užitečnosti a výrobní funkce) a maximalizujícího chování účastníků byla vyvinuta dostatečně úplná teorie chování mikroekonomických agentů a teorie obecné rovnováhy.

Základním prostředkem byl kalkulus - tj. diferenciální a integrální počet, zejména použití totální a parciální derivace a metody Lagrangeových multiplikátorů pro charakterizaci maxim. Zároveň byly v tomto období vyvinuty moderní teorie spotřeby, výroby, oligopolu a obecné rovnováhy.

Původní prací, kterou můžeme považovat za počáteční bod matematické ekonomiky, byla Cournotova práce z roku 1883. Cournotův přínos lze rozdělit na dva hlavní směry: teorie podniků - firem a interakce firem a spotřebitelů v jednoduché tržní ekonomice. Cournotova základní hypotéza byla, že firmy si vybírají tak, aby maximalizovaly svůj zisk. Cournot studoval a přesně definoval případy dokonalé soutěže a monopolu. Zároveň zavedl rovnost mezi nabídkou a poptávkou v jednoduché tržní ekonomice a studoval problém oligopolu, kde je omezena soutěživost prodávajících. Cournotovo řešení oligopolu zůstalo standardním přístupem a jeho vhodné zobecnění hraje důležitou roli v teorii her.

Teorie firmy: Cournotova maximalizační hypotéza byla rozšířena v rámci zkoumání výrobní funkce v poslední čtvrtině 19. století tak, že mohla vzniknout úplná teorie poptávky po vstupech a nabídky výstupů. Vývoj byl sdílen mnoha autory jako jsou např. Walras (1874), Wicksteed (1894), Wicksell (1893) a J.B. Clark (1889).

Teorie spotřebitele: Rozvoj teorie spotřebitele závisející na maximalizaci funkce užitečnosti při omezeném rozpočtu spotřeby byl započat v roce 1854 Gossenem a dále studován Jevonsem (1871), Walrasem (1874) a dále dopracován Marshallem (1890). Úplné odvození vlastností funkce užitečnosti bylo provedeno Slutským (1915) a dále studováno Hicksem a Allenem (1934) aj. Základy teorie užitečnosti byly prohloubeny několika způsoby: nahrazení kardinální užitečností ordinální přináleží Fisherovi (1892) a Paretovi (1909); axiomatizace kardinální užitečnosti je dílem Frische (1926, 1932) a Alta (1936); přístup pomocí preferencí byl započat Samuelsonem (1938) a dále rozvíjen Houthakkerem (1950) a Uzawou (1960).

Obecná rovnováha: Základní pojetí, že trhy jsou ve vzájemném vztahu a že proto je rovnovážný stav ekonomie charakterizován současně existující rovností mezi nabídkou a poptávkou na všech trzích, přináleží Walrasovi (1874). Toto pojetí bylo dále rozvinuto a vyloženo Paretem (1896, 1909). To, že rovnovážný stav může být dosažen, bylo dokázáno tím, že počet rovnic byl rovný počtu neznámých (viz Marshall (1890)). Optimalita konkurenční rovnováhy byla diskutována jak Walrasem tak Paretem.

Stabilita rovnováhy: V případě rovnováhy jednoduchého trhu byly podmínky stability diskutovány Cournotem (1838) a Marshallem (1890). Otázky stability obecné rovnováhy byly diskutovány rozsáhle Walrasem (1874). První diskuse z přesného pohledu se objevila v Hicksovi (1939a) a Samuelsonem (1941). Z posledních prací jmenujme práce Arrowa, Hahna, Hurwicze aj.

Optimální alokace zdrojů: První systematický výpočet užitků a nákladů přináleží Dupuitovi (1844). Jasná definice optimality v případě mnoha účastníků byla podána Paretem (1909). Charakterizace optimálních a částečně optimálních stavů je nyní známa jakožto tzv. ekonomie blahobytu, tuto syntézu provedli Hotelling, Bergson a Hicks. Speciální problém optimalizace v čase byl poprvé studován Ramseyem (1928) a následovně Hotellingem (1931).

Zobecněné vyjednávání: Edgeworth (1881) jakožto první studoval výstupy ekonomie, ve které mohly být realizovány všechny druhy dohod o zboží, nikoliv toliko ty možné v cenovém systému. Množina možných výstupů se nazývala *smluvní křivka*. Obecná verze tohoto pojmu, nyní známá jakožto *jádro*, byla dále studována v plné obecnosti v teorii her.

Vyvrcholení školy marginalistů založené na kalkulu, které zkombinovalo mnoho předcházejících výsledků s novějším vývojem, lze najít ve dvou klasických knihách, které jsou stále velmi důležité: Hicks (1946) a Samuelson (1947).

2. Období množinově teoretického/lineárního modelu: 1948-1960

Období množinově teoretického/lineárního modelu bylo období po 2. světové válce, ve kterém byl dřívější kalkul matematické analýzy nahrazen množinově-teoretickými základy a lineárními modely. Použití teorie množin znamená větší obecnost v tom, že klasické předpoklady hladkosti funkcí mohly být nahrazeny podstatně obecnějšími funkcemi. Použití lineárního modelu znamená zacházení s pojmy, které nešlo vyjádřit pomocí hladkých funkcí, tj. např. vrcholy polyedrů.

Tento nový přístup byl ve skutečnosti započat důležitým článkem von Neumanna (1937) v období ekonomického růstu. Přitom v tomto članku je metodologie podstatně důležitější než jeho obsah. Jiná práce, která hrála důležitou roli v rozvoji množinově-teoretického přístupu byla Arrowova kniha o axiomatizaci teorie sociálního výběru a individuálním ohodnocení (1951). Byly v ní použity množinově-teoretické metody, které umožnily vytvoření systému pro studium problémů obecné teorie rovnováhy.

Dva z velmi důležitých článků pro rozvoj teorie obecné rovnováhy byly Wald (1933-34), který provedl první přesnou analýzu obecné rovnováhy, a Arrow s Debreuem (1954), kteří pomocí množinově-teoretických prostředků formulovali problém existence konkurenční rovnováhy a dokázali její existenci za patřičných podmínek. Problém existence byl dále analyzován McKenziem, Galem, Nikaidou a Debreuem. Důležitým nástrojem byla Kakutaniho věta o pevném bodě (1941) – zobecnění Brouwerovy věty o pevném bodě.

V rámci teorie spotřebitele byly pro další axiomatický rozvoj důležité články Debreua a Radera. Aplikace množinově-teoretických pojmů kulminovala pak v klasické Debreuově knize (1959) a jejíž úloha je srovnatelná s pracemi Samuelsona a Hickse pro klasické období.

Lineární model pro meziodvětvové vztahy byl vyvinut Leontievem (1941, 1966). Další příbuzné aktivity na tomto poli patří Koopmansovi, Morgensternovi a Kantorovičovi. Dále byl studován von Neumannův mnohaodvětvový model růstu. Tento model hrál důležitou roli jak v obecné teorii rovnováhy tak v teorii růstu. Zároveň bylo v tomto období vyvinuto lineární programování, vycházející z prací Dantziga. Tento přístup kulminoval v pracích Dorfmana, Samuelsona, Solowa a Galeho. Tyto práce přitom neobsahovaly pouze lineární programování, nýbrž lineární modely obecné rovnováhy a lineární růstové modely. Jedním z nejdůležitějších modelů je pak Malinvaudův model akumulace kapitálu.

Teorie her byla rovněž založena na analýze lineárních modelů. Její počátky se datují k von Neumannovi (1928), ale základní vývoj se objevil v práci von Neumanna s Morgensternem (1947) a Nashe (1950).

3. Současné období integrace: 1961-nyní

Současné období je období integrace, ve kterém moderní matematická ekonomie kombinuje prvky kalkulu, teorie množin a lineárních modelů. Je zároveň obdobím, ve kterém byly matematické idee rozšířeny potencionálně do všech oblastí ekonomie. V současné době jsou mnohé odvětví matematické ekonomie ve vývoji a tento vývoj se ukazuje být nanejvýš přínosným. Zmiňme mj. 11 důležitých témat ve vývoji v této etapě.

(1) Nejistota a informace: Toto téma sestává z teorie averze k riskování (viz práce Pratta a Arrowa); rovnovážný stav při nejistotě (viz práce Diamonda a Radnera); mikroekonomické aplikace (viz práce McCalla); pojištění dle Borche aj.

(2) Globální analýza: Toto téma obsahuje matematické metody, které kombinují kalkulus a topologii, a jsou použity ke studiu vlastností ekonomických rovnovážných stavů a jejich změně v dané ekonomii. Debreu (1970) byl průkopníkem v tomto studiu za podmínek, že máme pouze konečný počet rovnovážných stavů.

(3) Teorie duality: Tato teorie používá a kombinuje množinově-teoretické metody a metody kalkulu, zejména v mikroekonomice. Připomeňme mj. práce Hotellinga, Roye, McKenzieho, Shepharda, Samuelsona a Diewerta.

(4) Agregovaná funkce poptávky: Teorie spotřebitele ukazuje, že funkce poptávky jednotlivců maximalizujích užitek musí splňovat jisté omezující podmínky. Sonnenschein (1973) jako první podal argument, že agregované funkce poptávky nejsou omezeny podmínkou, že individuální funkce poptávky vznikají z maximalizace užitku. Dále zmiňme práce Mantela (1974) a Debreua (1974).

(5) Jádro ekonomie a trhy s kontinuem obchodníků: Intuitivní pojem velkého počtu obchodníků spolu s předpokladem dokonalé soutěže vedl k tomu, že počet obchodníků konverguje k nekonečnu nebo že máme kontinuum obchodníků. Připomeňme práce Shubika (1959), Scarfa a Debreua (1962) aj.

(6) Dočasná rovnováha: Pojem dočasné rovnováhy byl zaveden Hicksem (1939). V takovéto rovnováze se obchod uskutečňuje sekvencionálně tak, že každý účastník předpovídá svůj budoucí zisk na základě současného a minulého stavu ekonomie. Rovnováha může obsahovat všechny ceny pohybující se dostatečně rychle k vyprodání všech trhů, nebo jinak řečeno dovolí přídělový systém.

(7) Výpočet rovnovážných cen: To je speciální případ výpočtu pevných bodů zobrazení, pro která je pevný bod interpretován jako rovnovážný cenový vektor, přičemž získané rozdělení je přijatelné, pokud se vyprodají všechny trhy. Hlavní práce jsou Scarf (1967, 1973).

(8) Teorie sociálního výběru: Teorie sociálního výběru se zabývá agregací preferencí jednotlivců do sociálního výběru. Základy byly položeny Arrowem (1951), v této knize jsou položeny základní kameny teorie a dokázány věty o možnosti resp. nemožnosti takovéhoto výběru.

(9) Optimální zdanění: První práce z této oblasti patří Ramseyovi (1937) a Hotellingovi (1938), nejdůležitější články pak Boiteuxovi (1956), Mirrleesovi (1971) a Diamondovi s Mirrleesem (1971).

(10) Teorie optimálního růstu: Toto téma bylo studováno zejména Samuelsonem se Solowem (1956), Samuelsonem (1965), Koopmansem, Galem a dalšími. Původně byl tento problém formulován jakožto problém optimálních úspor Ramseyem (1928). Tento problém byl pak zobecněn a zkombinován s meziodvětvovým modelem růstu. Matematické základy jsou založeny na teorii dynamických systémů a teorii řízení.

(11) Teorie organizování: Tato oblast obsahuje teorii týmové práce, decentralizace, plánování a problém stimulace. Z novějších prací připomeňme práce Marschaka a Hurwicze.

Tento učební text si neklade žádné nároky na úplnost či původnost. Případné komentáře či kritické připomínky k textu očekávám nejlépe na e-mailové adrese

`paseka@math.muni.cz`

či jinou formou. Text je průběžně doplňován a měněn a je umístěn k volnému použití na ftp serveru oboru matematika PřF MU. Části textu jsou tvořeny referáty zpracovanými studenty Pavel Janík ml., Monika Ryndová, Libuše Tománková v rámci stejnomenné přednášky na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. Veškerá zodpovědnost za styl a obsah je na autorovi.

Obsah

Kapitola 1

MATEMATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ S APLIKACEMI V EKONOMII

1 Úvod a přehled

Matematické programování se vztahuje k základnímu matematickému problému maximalizace funkce *. Podstata tohoto problému a způsoby jeho řešení jsou diskutovány v části 2. Historicky má tento problém kořeny v rozvoji početních metod. Odtud tedy jeho první využití bylo ve zpracování nejednodušího typu matematického programování, a sice hledání nevázaného extrému (maximalizace), což je probrano v části 3. Základní motivací pro další rozvoj početních metod byla snaha vyřešit obecnější úlohu mat. programování. To se často nazývá úloha *klasického programování*, ve které se hledá maximum funkce při omezení množinou rovnic. Některé úlohy matematického programování, které byly ovlivněny studiem ekonomických problémů se však nepodařilo vyřešit ani ve 20. století. Mezi tyto úlohy například patří *úlohy nelinearního matematického*

*Úlohy jsou zde řešeny jako maximalizace funkce. Pokud chceme funkci minimalizovat, stačí pouze změnit znaménko funkce a jinak postupovat stejně.

programování kde se hledá maximum funkce při omezení množinou nerovnic, viz část 5. Specialní případ, důležitý sám o sobě, a který měl značný vliv na rozvoj teorie matematického programování, je *úloha linearního programování* tj. maximalizace linearní funkce při omezení množinou linearních nerovnic, viz část 6.

Aplikace matematického programování má širší uplatnění, např. v ekonomii našla řadu uplatnění. Vedla také k různým srovnávacím analýzám stability, které sloužily k porovnávání jeji účinnosti. Matematické programování vedlo zejména k hlubšímu náhledu do oblasti *mikroekonomie* , jak je dále diskutováno v části 7. Aplikace matematickéh programování jsou rozděleny do dvou úseků, na *neoklasickou teorii domácností* v části 8 a *neoklasickou teorii firmy* v části 9.

Kromě použití v základní matematické teorii (část 2 - 6) a aplikacích v ekonomii (část 7 - 8), má také matematické programování využití v jiných oblastech (např. fyzika, chemie, aj.). O těch se zde však nebudeme zmiňovat, odkaz na ně je možné najít v literatuře citované na konci. Také opomineme různá specifika matematického programování, jako je celočíselné programování, vícekriterialní programování, odkaz je opět uveden v literatuře.

2 Úloha matematického programování a způsoby jejího řešení

Obecná forma *úlohy matematického programování* může být zapsaná ve tvaru:

$$\max_{\mathbf{x}\in X} F(\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

kde $\mathbf{x}$ je sloupcový vektor n vybraných proměnných,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)', \tag{2.2}$$

$F(\mathbf{x})$ je funkce reálných proměnných,

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{2.3}$$

a X je podmnožina n-rozměrného euklidovského prostoru,

$$X \subseteq E^n. \tag{2.4}$$

Obecně budeme předpokládat, že X je neprázdná, tj., že existuje *přípustný* vektor $\mathbf{x}$, kde $\mathbf{x}$ je přípustný právě tehdy, když $\mathbf{x} \in X$. V ekonomii se vektor $\mathbf{x}$ často nazývá *vektor nástrojů* , funkce $F(\mathbf{x})$ *účelová funkce* a množina X *množina příležitostí.*

Základní ekonomický problém alokace vzácných zdrojů mezi navzájem si konkurujícími potřebami může být interpretován jako problém matematického programování, kde jednotlivá alokace zdroje je reprezentována příslušným výběrem vektoru nástrojů; vzácnost zdrojů je reprezentována množinou příležitostí, odrážející omezenost nástrojů. Potřeby jsou reprezentovány účelovou funkcí, jejichž výsledky jsou hodnoty příslušné ke každé alternativní alokaci. Funkce 2.1 může být tudiž interpretována v ekonomickém jazyku, jako výběr nástroje v rámci množiny příležitostí, tedy jako maximalizace účelové funkce. Existuje více způsobů řešení problému 2.1. *Globální maximum* funkce F je vektor $\mathbf{x}^*$ takový, že

$$\mathbf{x}^* \in X \quad \text{a} \quad F(\mathbf{x}^*) \geq F(\mathbf{x}) \,\forall\, \mathbf{x} \in X \tag{2.5}$$

Řešení je tedy vektor nástrojů, získaný jako hodnota účelové funkce, která je větší nebo rovna než hodnota v libovolném jiném vektoru nástrojů. *Ostré globální maximum* je vektor $\mathbf{x}^*$, který splňuje:

$$\mathbf{x}^* \in X \quad \text{a} \quad F(\mathbf{x}^*) > F(\mathbf{x}) \,\forall\, \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*. \tag{2.6}$$

2.1 Weierstrassova věta

Věta 2.1 Weierstrassova věta

Je-li funkce $F(\mathbf{x})$ spojitá a množina X je uzavřená a ohraničená tj. kompaktní a navíc neprázdná, pak existuje globální maximum.

Důkaz. Důkaz této věty je založen na faktu, že *obraz* X v zobrazení F je definován jako

$$F(X) = \{F(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\}, \tag{2.7}$$

což je uzavřená a ohraničená množina na reálné ose, a tedy musí obsahovat i maximální prvek, což je $F(\mathbf{x}^*)$. Měli by jsme však dát pozor na to, že podmínky věty jsou dostatečné, ale ne nutné pro existenci maxima. Maximum tedy může existovat, aniž jsou tyto podmínky splněny. (Např. maximalizace x^2 na intervalu $0 < x \leq 2$ má řešení). Weirstrassova věta může být zesílena za předpokladu, že $F(\mathbf{x})$ bude shora polospojitá. ∎

2.2 Věta o lokálním a globálním maximu

Lokální maximum je vektor $\mathbf{x}^* \in X$ takový, že existuje nějaké $\varepsilon > 0$, přičemž

$$F(\mathbf{x}^*) \geq F(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in X \cap N_\varepsilon(\mathbf{x}^*). \tag{2.8}$$

Zde $N_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ je nějaké ε-okolí bodu $\mathbf{x}^*$. Maximum je lokální, poněvadž vektor nástrojů získaný jako hodnota účelové funkce není menší než hodnota v jakémkoliv jiném bodě náležejícím X a dostatečně blízko (tj. v $N_\varepsilon(x^*)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$). Ostré lokální maximum je vektor $\mathbf{x}^* \in X$, který splňuje pro nějaké $\varepsilon > 0$

$$F(\mathbf{x}^*) > F(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in X \cap N_\varepsilon(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*. \tag{2.9}$$

Zřejmě, globální maximum je zároveň lokální (což však neplatí obráceně). Ostré (globální, resp. lokální) maximum je také (globální resp. lokální) maximum, opět to neplatí obráceně. Ostré lokální maximum je jednoznačně určeno.

Věta 2.2 Věta o lokálním a globálním maximu *Je-li účelová funkce $F(\mathbf{x})$ konkávní funkce a množina příležitostí X konvexní množina, pak každé lokální maximum je i zároveň globální a množina všech takovýchto řešení je konvexní. Je-li navíc $F(\mathbf{x})$ ostře konkávní funkce, pak řešení je jediné. Je-li $F(\mathbf{x})$ ostře* *kvazikonkávní, je lokální maximum jediné a zároveň globální* [†].

Věta 2.2 je velice důležitá, neboť prakticky všechny metody řešící úlohu matematického programování spíše identifikují lokální než globální maximum. S použitím této věty je možné usuzovat na základě vlastností konkávnosti a konvexity, že lokální optimum je také globální.

3 Úloha bez omezení

Úloha maximalizace bez omezení je ta, že vybereme hodnoty z n proměnných tak, že maximalizujeme funkci F těchto proměnných:

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) \tag{3.1}$$

V tomto případě je množina příležitostí X (z 2.1) celý prostor E^n (nebo otevřená podmnožina E^n).

3.1 Věta o podmínkách prvního řádu

Věta 3.1 Věta o podmínkách prvního řádu *Je-li $F(\mathbf{x})$ diferencovatelná funkce, pak nutné podmínky prvního řádu proto, aby bod $\mathbf{x}^*$ byl bodem lokálního maxima funkce $F(\mathbf{x})$ jsou, že $\mathbf{x}^*$ je* stacionární bod *funkce $F(\mathbf{x})$, ve kterém jsou všechny první parcialní derivace nulové.*

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*), \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \right) = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

[†] Funkce $F(\mathbf{x})$ je *kvazikonkávní funkce* právě tehdy, když pro $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$, kde $F(\mathbf{x}^1) \geq F(\mathbf{x}^2)$ platí $F(\alpha\mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2) \geq F(\mathbf{x}^2)$ pro všechna α, $0 \leq \alpha \leq 1$. Funkce F je *ostře kvazikonkávní* právě tehdy, když pro $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X, \mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$, kde $F(\mathbf{x}^1) > F(\mathbf{x}^2)$ platí stejná nerovnost jako pro kvazikonkávní funkci, ale ostrá, pro všechna $\alpha, 0 < \alpha < 1$. Všimněme si, že konkávní funkce je kvazikonkávní, ale kvazikonkávní funkce nemusí být konkávní.

$(\partial F/\partial \mathbf{x})(\mathbf{x}^*)$ *je* vektor gradientů *tj.,* $(1 \times n)$ *řádkový vektor všech 1. parcialních derivací* $F(\mathbf{x})$ *a* $\mathbf{0}$ *je* $(1 \times n)$*-rozměrný vektor nul. Tedy, je-li* $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ *lokální maximum, pak*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*,) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Důkaz. Důkaz této věty může být proveden pomocí Taylorova rozvoje pro hodnotu funkce kolem x^*. ■

3.2 Věta o podmínkách 2. řádu

Věta 3.2 Věta o podmínkách 2. řádu *Je-li* $F(\mathbf{x})$ *spojitě diferencovatelná do 2. řádu, pak podmínka nutná proto, aby* $\mathbf{x}^*$ *byl bodem lokálníha maxima funkce* $F(\mathbf{x})$*, je, že příslušná Hessova matice typu* $(n \times n)$ *a tvaru*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

je v bodě x^* *negativně semidefinitní.*

Důkaz. Důkaz může být opět proveden pomocí Taylorova rozvoje. ■

3.3 Věta o postačujících podmínkách

Věta 3.3 *Je-li funkce* $F(\mathbf{x})$ *spojitě diferencovatelná do 2. řádu a podmínky 1. řádu jsou splněny pro vektor gradientů 3.2 a navíc platí zesílené podmínky 2. řádu tj. 3.4 je negativně definitní, pak* $\mathbf{x}^*$ *je (ostré) lokální maximum pro* $F(\mathbf{x}^*)$*.*

Důkaz. V důkazu opět využijeme Taylorovu větu. ▌

■

Tyto tři podmínky uvedené pro úlohu bez omezení jsou analogické pro úlohu s omezením, která je diskutována v části 4 a 5.

3.4 Příklad : Kvadratické účelové funkce

Jako příklad úlohy bez omezení si uvedeme maximalizaci *kvadratické účelové funkce*

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{Qx} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_i x_j, \tag{3.5}$$

kde $\mathbf{c}$ je n-rozměrný vektor a Q je symetrická matice řádu $(n \times n)$. První část účelové funkce je linearní $\mathbf{cx}$, druhá část je kvadratická $\mathbf{x}'\mathbf{Qx}$ (vydělená dvěma pro pozdější snadnější úpravy). Z nutné podmínky 2. řádu pro existenci lokálního maxima 3.2 dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c} + \mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{3.6}$$

Z nutných podmínek 2. řádu 3.4 dostáváme, že $\mathbf{Q}$ je negativně semidefinitní. Z věty o postačujících podmínkách víme, že je-li $\mathbf{Q}$ negativně definitní, pak $\mathbf{x}^*$ je ostré lokální maximum. Tedy $\mathbf{Q}$ je negativně definitní, pak $F(\mathbf{x})$ je ostře konkávní a $\mathbf{x}^*$ je globální maximum. Mimo to, je-li $\mathbf{Q}$ regulární, pak pro x^* dostáváme

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}'. \tag{3.7}$$

Maximum účelové funkce potom je

$$F(\mathbf{x}^*) = -\mathbf{cQ}^{-1}\mathbf{c}' + \frac{1}{2}(\mathbf{cQ}^{-1})\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}') = -\frac{1}{2}\mathbf{cQ}^{-1}\mathbf{c}' > 0, \tag{3.8}$$

protože Q je negativně definitní.

4 Klasické programování: Lagrangeovy multiplikátory

Úloha klasického programování je ta, že vybereme hodnoty z n proměnných tak, že maximalizujeme funkci těchto proměnných na množině stejných omezení.

$$\max_x F(\mathbf{x}) \quad \text{pro} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \tag{4.1}$$

Tento vektor nástrojů $\mathbf{x}$ a hlavní (cílová, účelová) funkce $F(\mathbf{x})$ jsou stejné, jako v 2.1, kde $F(\mathbf{x})$ je reálná funkce definována na E^n. Vektor reálných funkcí $g(\mathbf{x})$ je zobrazení z E^n do E^m, znázorňující m-omezené fce a sloupcový vektor $\mathbf{b}$ je $m \times 1$ rozměrný vektor omezujících konstant,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

V termínech primárního (základního) problému 2.1 klasický problém matematického programování koresponduje s případem, ve kterém množina příležitostí může být zapsána jako

$$\begin{aligned} X &= \{\mathbf{x} \in E^n | \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\} \\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)' |\, g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1 Věta o Lagrangeových multiplikátorech

Popis řešení klasického problému programování, který je analogický s Větou o podmínkách 1. řádu pro neomezené úlohy, je získán pomocí Věty o Lagrangeových multiplikátorech. Pro tuto větu zavedeme řádkový vektor m-dodatečných nových proměnných nazývaných Lagrangeovy multiplikátory,

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m), \tag{4.4}$$

a to jeden pro každé dané omezení, *Lagrangeova funkce* je pak definována jako následující reálná funkce n-původních a m-přidaných proměnných,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= F(\mathbf{x}) + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ &= F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \textstyle\sum_{i=1}^{m} y_i(b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde poslední výraz je skalárním součinem řádkového vektoru Lagrangeových multiplikátorů a sloupcového vektoru složeného z rozdílu omezujících konstant a omezujících funkcí. Potom, v souladu s větou o Lagrangeových multiplikátorech, předpokládáme, že $n > m$ (kde $n - m$ je stupeň volnosti), $F(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ je $m + 1$ funkcí se spojitými prvními parciálními derivacemi a omezující podmínky jsou lineárně nezávislé v řešení, tj. jestliže $\mathbf{x}^*$ je lokální maximum úlohy,

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\right) = \rho\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix} = m, \tag{4.6}$$

(tj. Jacobiho matice složená z 1. parciálních derivací omezujících funkcí rozměru $m \times n$ má plnou řádkovou hodnost), nutné podmínky 1. řádu tvoří pak $m+n$ nulovacích podmínek prvních parciálních derivací Lagrangeovy funkce $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (\, n \text{ podmínek}\,), \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \qquad (\, m \text{ podmínek}\,), \tag{4.8}$$

kde posledních m podmínek vyžaduje, aby omezení bylo nalezeno právě v $\mathbf{x}^*$.

Věta 4.1 Věta o Lagrangeových multiplikátorech *Je-li* $\mathbf{x}^*$ *bod lokálního maxima (extrému), pak existuje* m*-rozměrný vektor Lagrangeových multiplikátorů* $\mathbf{y}^*$ *takový, že dle 4.7 je gradient* $F(\mathbf{x})$ *v* $\mathbf{x}^*$ *je lineární* *kombinací gradientů funkcí $g_i(\mathbf{x})$ v tomto bodě, přičemž Lagrangeovy multiplikátory budou koeficienty této lineární kombinace, a to*

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*), \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.9}$$

Důkaz. Tato věta je obvykle dokazována užitím věty o implicitní funkci. ▌

■

Těchto n podmínek je analogických s podmínkami 1. řádu 3.2 nulování vektoru gradientu. Ve skutečnosti proto věta redukuje na Větu o podmínkách 1. řádu v případě, že $m = 0$, což je právě neomezený případ.

Druhá část věty o Lagrangeových multiplikátorech nám dává interpretaci těchto m dodatečných proměnných. Nezahrnuje jednu úlohu klasického programování, ale celou množinu takových úloh, které jsou charakterizovány omezujícími konstantami $\mathbf{b}$. Jestliže se některá z těchto konstant změní, změní se i hodnota maximalizující účelové funkce. Maximální hodnotu dostaneme jako

$$F^* = F(\mathbf{x}^*) = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*), \tag{4.10}$$

kde druhá rovnost vychází z faktu, že omezení vyhovují řešení 4.8. Lagrangeovy multiplikátory v jejich optimálních hodnotách $\mathbf{y}^*$ měří stupeň přírůstku maximalizované hodnoty F^*, podle toho, jak se příslušné omezující konstanty mění,

$$\mathbf{y}^* = \partial F^* / \partial b \; i.e. \; y_i^* = \partial F^* / \partial b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.11}$$

Tedy každý Lagrangeův multiplikátor měří citlivost maximalizované hodnoty účelové funkce na změny příslušných omezujících konstant, přičemž celá další část úlohy zůstává stejná. V ekonomických úlohách, ve kterých F má rozměr hodnoty (cena x množství) zisku či důchodu a $\mathbf{b}$ má rozměr množství jako vstup či výstup, Lagrangeovy multiplikátory $\mathbf{b}^*$ interpretujeme jako cena, nazýváme ji *stínová cena*, z toho důvodu, abychom ji odlišili od tržní ceny. Měří přitom přírůstek hodnoty v případě změny omezení.

Geometrickou interpretaci a charakter řešení můžeme pro klasické programování získat přes Lagrangeovy multiplikátory. Rovnost omezení definuje množinu příležitostí X v 4.3, které za předpokladu 4.6 má rozměr $n - m$. Nezávislost předpokladu v 4.6 implikuje, že v řešení $\mathbf{x}^*$, každá směrnice d$\mathbf{x}$ vyhovující

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\, d\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ tj. } \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)\, d\, x_j = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.12}$$

leží v tečném nadrovině k X v bodě $\mathbf{x}^*$. Gradienty vektorů omezujících funkcí $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*)$ jsou ortogonální k této tečnému nadrovině v bodě x^*. Podmínky 1. řádu 4.9 znamenají geometricky, že gradient vektoru účelové funkce $(\partial F/\partial x)(x^*)$, pro kterou funkční hodnoty bodů $F(\mathbf{x})$ ve směru gradientu zvětší směrem k x^*, je vážená kombinací gradientů vektorů omezujících funkcí, váhy jsou Lagrangeovy multiplikátory $\mathbf{y}^*$. Tedy $(\partial F/\partial x)(x^*)$ je také ortogonální k tečné nadrovině k X v bodě $\mathbf{x}^*$ a to ve směru d$\mathbf{x}$ v tečné nadrovině,

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\, d\, \mathbf{x} = \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\, d\, \mathbf{x} = 0. \tag{4.13}$$

4.2 Věta o ohraničené Hessově matici

Analogií v případě klasického programování k větě o podmínkách 2.řádu pro neomezené problémy je věta o ohraničené Hessově matici. Podle této věty Hessova matice druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

musí být negativně semidefinitní na množině vektorů d$\mathbf{x}$ určené splněním m podmínek

$$d\mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\, \mathrm{d}\, \mathbf{x} = 0, \tag{4.15}$$

kde (x^*, y^*) je bod lokálního maxima.

4.3 Věta o postačujících podmínkách pro klasické programování

Poslední analogií je věta o postačujících podmínkách. Podle věty o postačujících podmínkách pro klasické programování, jestliže je splněno $n+m$ podmínek 1.řádu 4.7 a 4.8 pro bod $\mathbf{x}^*$, potom zesílené podmínky ohraničené Hessovy matice, které zaručí, že Hessova matice v 4.14 je negativně definitní na množině určené 4.15, nám zajistí, že $\mathbf{x}^*$ je bod lokálního maxima pro funkci $F(\mathbf{x})$ s m omezujícími podmínkami.

Ekvivalentně, podmínky vyžadují aby ohraničená Hessova matice, definovaná jako Hessova matice funkce $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ na všech proměnných

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}'}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 \ldots 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \cdots \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

kde $\partial g / \partial \mathbf{x}$ je Jacobiho matice z 4.6, splní $n-m$ podmínek tak, že v posledních $n-m$ hlavních minorech se střídají znaménka, přičemž znaménko prvního bude $(-1)^{m+1}$. Poznamenejme, že obě tyto věty, tato i předcházející, se redukují na odpovídající věty pro neomezený případ, kdy $m = 0$.

4.4 Příklad: Kvadraticko-lineární úloha

Příklad klasického programování, který vychází z oddílu 3.4, je kvadraticko-lineární úloha:

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} \quad \text{pro} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{4.17}$$

Zde je účelová funkce stejná jako v 3.5, a omezení je m lineárních rovnic,

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b}\; i.e. \;\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.18}$$

určených maticí A typu $m \times n$ a sloupcovým vektorem $\mathbf{b}$ typu $m \times 1$. Lagrangeova funkce je pak

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}), \tag{4.19}$$

kde $\mathbf{y}$ je vektor Lagrangeových multiplikátorů. Použitím $n + m$ podmínek 1.řádu 4.7, 4.8,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c} + \mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{Q} - \mathbf{y}^{*}\mathbf{A} = \mathbf{0}, \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{*} = \mathbf{0}. \tag{4.21}$$

Těchto $n + m$ podmínek vyžaduje, aby platilo

$$\mathbf{x}^{*} \;=\; -\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{c}' - \mathbf{A}'\mathbf{y}^{*\prime}). \tag{4.22}$$

Lagrangeův multiplikátor může být získán vynásobením maticí A a užitím omezení

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}^{*} \;=\; -\mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}' + (\mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')\mathbf{y}^{*\prime} = \mathbf{b}. \tag{4.23}$$

Najděme tedy řešení pro vektor Lagrangeových multiplikátorů

$$\mathbf{y}^{*} = (\mathbf{b}' + \mathbf{c}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')(\mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}, \tag{4.24}$$

a dosazením tohoto řešení do 4.22 obdržíme

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{c}' - \mathbf{A}'(\mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{b}' + \mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}')]. \tag{4.25}$$

Označíme-li $\overline{\mathbf{x}}^*$ řešení úlohy bez omezení v 3.1 dané 3.7, řešení omezeného problému může být psát jako

$$\mathbf{x}^* = \overline{\mathbf{x}}^* + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{b}' - \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}^*). \tag{4.26}$$

Tedy, jestliže $\overline{\mathbf{x}}^*$ odpovídá omezujícím podmínkám, potom to je také řešení úlohy s omezením. Mimo to rozdíl mezi řešením úlohy s omezením a bez omezení, $\mathbf{x}^* - \overline{\mathbf{x}}^*$ je lineární funkcí množství, pro která řešení úlohy bez omezení nevyhovuje omezující podmínce $\mathbf{b} - A\overline{\mathbf{x}}^*$.

5 Nelineární programování - Kuhn-Tuckerovy podmínky

Úloha nelineárního programování spočívá ve volbě nezáporných hodnot n proměnných tak, aby maximalizovaly funkci těchto n proměnných, které splňují m nerovností,

$$\max_x F(\mathbf{x}) \quad \text{pro} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{5.1}$$

Zde *vektor nástrojů* $\mathbf{x}$ a *účelová funkce* $F(\mathbf{x})$ jsou stejné jako v 2.1, kde $F(\mathbf{x})$ je reálná spojitě diferencovatelná funkce definovaná na E^n. Hodnoty vektorové *omezující funkce* $g(\mathbf{x})$ a *vektor omezení* $\mathbf{b}$ jsou stejné jako v 3.1, kde $g(\mathbf{x})$ je spojité diferencovatelné zobrazení z E^n do E^m. Z hlediska základního problému 2.1, úloha nelineárního programování koresponduje s případem, ve které množina příležitostí může být zapsaná jako:

$$\begin{aligned} X &= \{\mathbf{x} \in E^n \,|\, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)' | g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ &\quad\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Tato úloha je zevšeobecnění úlohy klasického programování 4.1, protože rovnosti jsou specialním případem nerovností.

5.1 Věta o Kuhn-Tuckerových podmínkách

Charakteristika řešení úlohy nelineárního programování, která je analogická jak s Větou o podmínkách 1.řádu pro úlohy bez omezení a s Větou o Lagrangeových multiplikátorech pro klasické programování, je zajištěna Větou o Kuhn-Tuckerových podmínách. Stejně jako v případě klasického programování zavedeme řádkový vektor m dodatečných nových proměnných, nazývaných Lagrangeovy multiplikátory,

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m), \tag{5.3}$$

a to pro každé omezení. Lagrangeova funkce může být definována jako následující reálná funkce o n původních a m přidaných proměnných:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= F(\mathbf{x}) + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ &= F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \textstyle\sum_{i=1}^{m} y_i(b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots x_n)), \end{aligned} \tag{5.4}$$

stejně jako v 4.5. *Kuhn-Tuckerovy podmínky* jsou potom definovány v bodech $\mathbf{x}^*$,$\mathbf{y}^*$, jako $2n + 2m$ nerovností a 2 rovnosti:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq \mathbf{0}, & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \geq \mathbf{0} & (n + m \text{ podmínek}), \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\mathbf{x}^* = \mathbf{0}, & \mathbf{y}^* \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \mathbf{0} & (2 \text{ podmínky}), \\ \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0} & \mathbf{y}^* \geq \mathbf{0} & (n + m \text{ podmínek}). \end{array} \tag{5.5}$$

Z toho $n + m$ nerovností reprezentuje omezení původního problému:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0} \qquad (m \text{ podmínek}), \tag{5.6}$$

$$\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0} \qquad (n \text{ podmínek}), \tag{5.7}$$

zatímco přidaných $n + m$ nerovností vyžaduje

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}^* \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0} \qquad (n \text{ podmínek}), \tag{5.8}$$

$$\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0} \qquad (m \text{ podmínek}), \tag{5.9}$$

Přitom n podmínek v 5.8 je napsáno raději jako nerovnosti než rovnosti ve 4.7, kvůli nezáporným omezením na $\mathbf{x}$ v 5.7, nebo, více všeobecně, protože hraniční řešení jsou přípustné. Dalších m podmínek v 5.9 vyžaduje nezápornost Lagrangeova multiplikátoru, je to z toho důvodu, že omezení v 5.6 jsou psaná raději jako nerovnosti než rovnosti: jestliže omezení je rovnost, potom příslušný element $\mathbf{y}^*$ je neomezený stejně jako v klasickém případu programování.

Dvě podmínky rovnosti Kuhna-Tuckera:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) \right) x_j^* = 0, \tag{5.10}$$

$$\mathbf{y}^* \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \sum_{i=1}^{m} y_i^* (b_i - g_i(\mathbf{x}^*)) = 0, \tag{5.11}$$

dohromady s ostatními podmínkami, je vyžadováno, aby všechny výrazy v obou těchto sumách byly nulové. Tedy jestliže jedna z nerovností vyhovuje řešení i v případě, že je ostrá, potom je odpovídající (duální) proměnná rovna nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) < 0 \quad \text{implikuje} \quad x_j^* = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.12}$$

$$g_i(\mathbf{x}^*) < b_i \quad \text{implikuje} \quad y_i^* = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.13}$$

Tyto podmínky jsou známé jako *slabé doplňující podmínky nelineárního programování*. Podmínka 5.11 také implikuje, že pro řešení je hodnota Lagrangiánu zároveň maximalní hodnota účelové funkce.

$$L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = F(\mathbf{x}^*) = F^*. \tag{5.14}$$

Podle podmínek Věty Kuhna-Tuckera platí, že jestliže je splněno vhodné silné omezení, pak Kuhn-Tuckerovy podmínky jsou nutné podmínky pro úlohy nelineárního programování, takže když $\mathbf{x}^*$ je řešením 5.1, pak zde existuje vektor Lagrangeových multiplikátorů $\mathbf{y}^*$ splňující 5.5.

Stejně jako v případě klasického programování, řešení metodou Lagrangeových multiplikátoru interpretujeme jako citlivosti maximalizované hodnoty účelové funkce na změny omezujících konstant,

$$\mathbf{y}^* = \frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{b}} \quad i.e. \quad y_i^* = \frac{\partial F^*}{\partial b_i}, \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.15}$$

kde F^* je definována jako

$$F^* = F(\mathbf{x}^*) = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*). \tag{5.16}$$

Přesněji, z doplňujících podmínek 5.13 vyplýva, že když v řešení je ostrá nerovnost, pak příslušný Lagrangeův multiplikátor je roven nule a tedy růst omezující konstanty o vhodně malou hodnotu nezmění maximalizovanou hodnotu účelové funkce.

5.2 Věta Kuhn-Tuckera o sedlovém bodě

Věta, která je analogická Větě o postačujících podmínkách pro úlohy bez omezení a Větě o postačujících podmínkách úlohy klasického programování, je reprezentována Kuhn-Tuckerovou větou o sedlovém bodu. Vezmeme-li Lagrangeovu funkci definovanou v 5.4, pak sedlový bod je definován jako:

$$\max_x \min_y L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad pro \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{5.17}$$

Tudíž $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ řeší úlohu o sedlovém bodě právě tehdy, když pro všechna $\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{y} \geq 0$ platí,

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \tag{5.18}$$

Podle Kuhna-Tuckerovy věty o sedlovém bodu, postačující podmínka pro $\mathbf{x}^*$, řešící úlohu nelineárního programování 5.1 je, když existuje $\mathbf{y}^*$ takové, že $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ splňuje podmínku 5.17. Tedy jestliže $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ splňuje podmínky sedlového bodu v 5.18, potom $\mathbf{x}^*$ řeší úlohu nelineárního programování. Zatímco tato část věty nevyžaduje žádnou konvexnost nebo omezující předpoklady, obrácení věty takové předpoklady vyžaduje.

Podle druhé části věty platí, že když $\mathbf{x}^*$ řeší úlohu nelineárního programování a předpokládá se, že podmínka vhodné kvalifikace omezení je splněna a že se jedná o *úlohu konkávního programování*, ve které $F(\mathbf{x})$ je konkávní funkce a každá omezující funkce $g_i(\mathbf{x})$ je konvexní funkce, potom zde existuje nenulový vektor $\mathbf{y}^*$ takový, že $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ je řešením problému nalezení sedlového bodu.

Tudíž za těchto předpokladů jsou obě úlohy shodné. Měli bychom dávat pozor na to, že žádná část věty o sedlovém bodě nevyžaduje předpoklad diferencovatelnosti $F(\mathbf{x})$ nebo $g(\mathbf{x})$.

Bude-li diferencovatelná, pak se jedná o úlohu konkávního programování, Kuhn-Tuckerovy podmínky jsou dostačujícími podmínkami tak, že když $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ vyhovují 5.5, pak $\mathbf{x}^*$ je řešení 5.1.

Tudíž, pro úlohu konkávního programování, ve kterém vhodná omezující podmínka je splněna, Kuhn-Tuckerovy podmínky jsou nutné a postačující pro $\mathbf{x}^*$ řešící úlohu nelineárního programování.

Například je-li úloha úlohou konkávního programování, potom za předpokladu, že $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ splňuje Kuhn-Tuckerovy podmínky, $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ také řeší úlohu o sedlovém bodě a $\mathbf{x}^*$ řeší úlohu nelineárního programování. Když je navíc splněna vhodná omezující podmínka, potom všechny tři úlohy jsou shodné.

Jako v případě klasického programování, geometrická interpretace může být dána pro úlohu nelineárního programování a jeho řešení pomocí dvou vět Kuhna-Tuckera.

Z podmínek Kuhna-Tuckera 5.8 a 5.9, ve vnitřním řešení, kde všechna $\mathbf{x}^* > 0$ (nebo když nezápornost $\mathbf{x}$ není částí úlohy), podmínky 5.8 a 5.9, když všechna $\mathbf{x}^* > 0$ (nebo když nezápornost $\mathbf{x}$ není část problému).

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}. \tag{5.19}$$

Tudíž gradient účelové funkce musí být v řešení nezáporná vážená kombinace gradientů omezující funkce.

Vektor gradientu účelové funkce musí proto ležet v kuželu generovaném normálami k množině příležitostí v bodě $\mathbf{x}^*$.

5.3 Příklad: Úloha kvadratického programování

Příkladem úlohy nelineárního programování je úloha kvadratického programování (jako v 4.17, kde omezení jsou ve formě množiny nerovností)

(5.20)

$$\max_x F(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{Qx} \quad pro \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{5.20}$$

Zde $\mathbf{c}$ je daný $1 \times n$ řádkový vektor, Q je daná $n \times n$ negativně semidefinitní symetrická matice, A je daná $m \times n$ matice a $\mathbf{b}$ je daný $m \times 1$ sloupcový vektor. Lagrangián (Lagrangeho polynom) je daný v 4.19 a Kuhn - Tuckerovy podmínky jsou

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c} + \mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{Q} - \mathbf{y}^*\mathbf{A} \leq \mathbf{0}, & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{Qx}^* \geq \mathbf{0}, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^* = (\mathbf{c} + \mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{Q} - \mathbf{y}^*\mathbf{A})\mathbf{x}^* = \mathbf{0}, & \mathbf{y}^*\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{y}^*(\mathbf{b} - \mathbf{Qx}^*) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}, & \mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{5.21}$$

Tyto podmínky charakterizují řešení úlohy. Protože Q je negativně semidefinitní, účelová funkce $F(\mathbf{x})$ je konkávní a lineární transformace $A\mathbf{x}$ je konvexní. Mimoto jsou splněny omezující kvalifikované podmínky. Úloha je jedna z úloh konkávního programování, ve které Kuhn - Tuckerovy podmínky 5.21 jsou obě nutné a dostačující. Vektor $\mathbf{x}^*$ tak řeší úlohu kvadratického programování 5.20 právě tehdy, když $\mathbf{y}^*$ je takové, že $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ vyhovují Kuhn - Tuckerovým podmínkám 5.21.

6 Lineární programování

Úloha lineárního programování je to, že vybereme nezáporné hodnoty n proměnných tak, že maximalizujeme lineární tvar těchto proměnných, za podmínek omezení m lineárními nerovnicemi.

$$\max_x \mathbf{cx} \quad \text{pro} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{6.1}$$

$\mathbf{x}$ je vektor nástrojů stejně jako v 2.1, 3.1 a 4.1; A je daná $m \times n$ matice (a_{ij}); $\mathbf{b}$ je daný sloupcový vektor s m prvky jako v 4.1 a 5.1; a $\mathbf{c}$ je daný řádkový n-rozměrný vektor. Z pohledu úlohy nelineárního programování 5.1 lineární úloha odpovídá případu, ve kterém je účelová funkce v lineárním tvaru.

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{6.2}$$

a každá z omezujících funkcí je rovněž v lineárním tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} \quad \text{tj.} \quad g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{6.3}$$

Úloha je tedy speciálním případem úlohy nelineárního programování a je dvojnásobně lineární proto, že je lineární jak v účelové funkci, tak i v omezujících podmínkách. Poněvadž lineární tvar je jak konkávní, tak i konvexní, úloha, uvažovaná jako speciální případ úlohy nelineárního programování, je ekvivalentní s úlohou sedlového bodu

$$\max_x \min_y L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{cx} + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) \quad \text{pro} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{6.4}$$

S každou úlohou lineárního programování souvisí duální úloha. Jestliže primární úloha je daná jako v 6.1, pak duální úloha je

$$\min_y \mathbf{yb} \quad \text{pro} \quad \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{6.5}$$

Tato úloha je rovněž hledáním extrémů lineární formy s omezujícími podmínkami množiny lineárních nerovností omezené výběrem nezáporných hodnot proměnných. Proměnné duální úlohy, y, jsou Lagrangeovými multiplikátory primární úlohy. Duální úloha duální úlohy je primární úloha, duální úlohou minimalizační úlohy je maximalizační úloha, v duální úloze omezující konstanty se stávají koeficienty účelové funkce, zatímco koeficienty účelové funkce se stávají omezujícími konstantami.

Úloha sedlového bodu pro duální úlohu je

$$\min_y \max_x L(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{yb} + (\mathbf{c} - \mathbf{yA})\mathbf{x} \quad \textit{pro} \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{6.6}$$

a tedy Lagrangeova funkce je stejná jak pro primární, tak pro duální úlohu

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{cx} + \mathbf{yb} - \mathbf{yAx}. \tag{6.7}$$

Kuhn - Tuckerovy podmínky, které jsou stejné jak pro primární, tak pro duální úlohu, jsou

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c} - \mathbf{y}^*\mathbf{A} \leq \mathbf{0}, & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^* = (\mathbf{c} - \mathbf{y}^*\mathbf{A})\mathbf{x}^* = \mathbf{0}, & \mathbf{y}^*\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{y}^*(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}, & \mathbf{y}^* \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{6.8}$$

Tři hlavní věty lineárního programování - *věta o existenci*, *věta o dualitě* a *slabá doplňující věta* – mohou být dokázány na základě těchto Kuhn-Tuckerových podmínek.

6.1 Věta o existenci

Podle věty o existenci platí, že když přípustné body existují jak pro primární, tak pro duální úlohu, pak optimální řešení existují pro obě úlohy. Tedy jestliže existují $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$ takové, že

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{\mathbf{0}} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x}^{\mathbf{0}} \geq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{y}^{\mathbf{0}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c},\ \mathbf{y}^{\mathbf{0}} \geq \mathbf{0}, \tag{6.9}$$

pak existují $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ řešící jak primární, tak i duální úlohu.

6.2 Věta o dualitě

Z věty o dualitě vyplývá že, pro každé přípustné vektory $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$ jak pro primární, tak duální úlohu platí

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^{\mathbf{0}} \leq \mathbf{y}^{\mathbf{0}}\mathbf{b}. \tag{6.10}$$

Mimoto přípustné vektory, které vyhovují těmto nerovnostem a rovnostem, poskytují řešení $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ duální úlohy, kde

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}. \tag{6.11}$$

6.3 Slabá doplňující věta

Podle této věty $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$, které jsou přípustnými vektory duální úlohy, jsou řešením této úlohu tehdy a jen tehdy, když vyhovují dvěma podmínkám rovnosti Kuhn - Tuckerových podmínek 6.8, dané jako

$$(\mathbf{c} - \mathbf{y}^*\mathbf{A})\mathbf{x}^* = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{y}^*(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \tag{6.12}$$

Z těchto podmínek optimalizované hodnoty duální účelové funkce jsou si rovny navzájem a rovněž hodnotám obou Lagrangeových funkcí v tomto řešení

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b} = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = L(\mathbf{y}^*, \mathbf{x}^*). \tag{6.13}$$

Spolu s ostatními Kuhn - Tuckerovými podmínkami podmínky v 6.12 znamenají, že když jedna z omezujících nerovností je vyhovující v řešení jako ostrá nerovnost, pak odpovídající duální proměnné jsou nulové, tj.

$$\begin{array}{lll} (c_j - \sum y_i^* a_{ij}) < 0 & \text{implikuje} & x_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ (b_i - \sum a_{ij} x_j^*) > 0 & \text{implikuje} & y_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{array} \tag{6.14}$$

Tyto podmínky jsou známé jako slabé doplňující podmínky lineárního programování.

Stejně jako v posledních dvou sekcích, můžeme úlohu lineárního programování a její řešení interpretovat i geometricky. Množina příležitostí je polyedr - uzavřená konvexní množina, poněvadž to je průsečík $m + n$ poloprostorů definovaný m nerovnostmi a n nezápornými omezeními. Vrstevnice účelové funkce jsou nadroviny a problém je řešen nejvyšší nadrovinou uvnitř polyedru. Toto řešení nemůže být ve vnitřním bodě. Řešení se musí nacházet ve vrcholu (v tomto případě je jednoznačné) nebo podél hraniční plochy (v tom případě je nejednoznačné).

7 Mikroekonomie: matematické programování a teorie srovnávací stability

Mikroekonomické úlohy jsou typicky formulované pro ekonomické subjekty (jako jsou např. domácnosti, firmy), které se pokoušejí maximalizovat účelovou funkci při jistých omezeních. Proto jsou formulované jako úlohy matematického programování. Teorie matematického programování je pak používána pro analýzu těchto problémů - tj., specificky charakterizovat rovnovážné řešení a určit jak se řešení mění při změně parametrů úlohy. Posledně zmíněné vymezení - tj., jak změny v parametrech ovlivňují řešení - je nazýváno srovnávací stabilita, protože porovnává dvě rovnovážné situace - počáteční rovnováhu a rovnováhu po jedné nebo více změnách v parametrech.

Charakteristika řešení je obyčejně založena na podmínkách 1. řádu úlohy matematického programování a analýza srovnávací statistikyje založena na rozdílu podmínek 1. řádu. Výsledek kvalitativního nebo kvantitativního určení o tom, jak parametry ovlivňují řešení, dává jisté omezení v řešení.

7.1 Věta srovnávací stability

Předpokládaná úloha jistého ekonomického subjektu může být charakterizována jako výběr jistých proměnných $\mathbf{x}$ stejně jako v úloze klasického programování 4.1 s jednoduchým omezením. Účelová funkce a omezení mohou záviset na q-rozměrném sloupcovém vektoru parametrů $\mathbf{a}$, a tedy úloha může být vyjádřena jako

$$\max_x F(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \quad \text{pro} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = b. \tag{7.1}$$

Řešení této úlohy je charakterizováno podmínkami 1. řádu 4.7 a 4.8, které zde jsou ve tvaru

$$b - g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0, \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - y\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}, \tag{7.3}$$

kde y je jednoduchý Lagrangeův multiplikátor odpovídající jednoduchému omezení. Řešení $\mathbf{x}^*$, y^* závisejí celkově na $q+1$ parametrech úlohy $(\mathbf{a}, b)$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{a}, b), \tag{7.4}$$

$$y^* = y^*(\mathbf{a}, b). \tag{7.5}$$

Vložením tohoto řešení do podmínek 1. řádu dostáváme $n+1$ identit

$$b - g(\mathbf{x}(\mathbf{a}, b), \mathbf{a}) \equiv 0, \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(\mathbf{a},b),\mathbf{a}) - y(\mathbf{a},b)\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(\mathbf{a},b),\mathbf{a}) \equiv 0. \tag{7.7}$$

Předpokládané funkce $F(\mathbf{x})$ a g(x) jsou spojitě diferencovatelné, identity 7.6 a 7.7 můžeme diferencovat do tvaru

$$\mathrm{d}\, b - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\mathrm{d}\,\mathbf{x} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}}\mathrm{d}\,\mathbf{a} = 0, \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^2}\mathrm{d}\,\mathbf{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{a}}\mathrm{d}\,\mathbf{a} - \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right)'\mathrm{d}\,y - y\frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x}^2}\mathrm{d}\,\mathbf{x} - y\frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{a}}\mathrm{d}\,\mathbf{a} = \mathbf{0}, \tag{7.9}$$

kde

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial g}{\partial a_1}, \frac{\partial g}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial a_q}\right), \tag{7.10}$$

$$\mathrm{d}\,\mathbf{x} = (\mathrm{d}\,x_1, \mathrm{d}\,x_2, \ldots, \mathrm{d}\,x_n)', \tag{7.11}$$

$$\mathrm{d}\,\mathbf{a} = (\mathrm{d}\,a_1, \mathrm{d}\,a_2, \ldots, \mathrm{d}\,a_n)', \tag{7.12}$$

Řešení pro d$\mathbf{x}$ a dy dává, v maticovém zápisu,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}\,y \\ \mathrm{d}\,x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right) \\ -\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right)' & \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}} d\,\mathbf{a} - d\,\mathbf{b} \\ -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{a}}\right) d\,\mathbf{a} \end{pmatrix}, \tag{7.13}$$

kde předpokládáme, že ohraničená Hessova matice je regulární.

S užitím tohoto výsledku a s předpoklady, že $F(\mathbf{x})$ a g($\mathbf{x}$) jsou spojitě diferencovatelné, je zde přípustný bod a ohraničená Hessova matice je regulární, srovnávací statická věta udává, že existuje téměř vždy zobecněná Slutského rovnice ve formě

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}}\right)_{comp} + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}}\right). \tag{7.14}$$

Zde "comp" značí, že je kompenzována parciální derivace podle a b tak, že F je konstantní. Tuto zobecněnou rovnici lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b}\frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}}\right)_{comp} + \frac{1}{y}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} = S(\mathbf{a}, b). \tag{7.15}$$

Zde jsou výrazy vlevo "pozorovatelné", derivace vybraných proměných podle $q+1$ parametrů, derivace podle b, vážená derivací g dle $\mathbf{a}$. Výrazy vpravo jsou "nepozorovatelné", první je matice kompenzované parciální derivace a druhá je nepozorovatelná, když je účelová funkce jedinečná pouze na monotóní transformaci. Matice $n \times q$ vpravo, $S(a, b)$, je *zobecněná matice substitučního efektu.* Druhá část věty dává, že pokud $q = n$, tedy $S(\mathbf{a}, b)$ je čtvercová, potom je symetrická tehdy a jen tehdy, když obě funkce, účelová funkce $F(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ a omezující funkce $g(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ mohou být zapsány jako

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = A_F \mathbf{a}'\mathbf{x} + \beta_F(\mathbf{x}) + \gamma_F(\mathbf{x}), \tag{7.16}$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = A_g \mathbf{a}'\mathbf{x} + \beta_g(\mathbf{x}) + \gamma_g(\mathbf{x}), \tag{7.17}$$

kde A_F a A_g jsou konstanty. Konečně, kvadratická forma $S(a, b)$ je negativně semidefinitní, pokud platí

$$A_F - yA_g \geq 0 \tag{7.18}$$

8 Neoklasická teorie domácnosti

Domácnost a firma jsou dva velmi důležité mikroekonomické subjekty. Stejně jako u ekonomického subjektu, je u domácnosti předpokládáno chování vedoucí k maximalizaci užitečnosti podřízené rozpočtovému omezení. Předpokládejme n dostupných druhů zboží (a služeb), označme $\mathbf{x}$ sloupcový vektor množství zboží nakupovaného a spotřebovávaného domácností

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'; \tag{8.1}$$

$U(x)$ označme funkci užitečnosti pro domácnost,

$$U(\mathbf{x}) = U(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{8.2}$$

udávající užitečnost jako funkci spotřebovaného množství; $\mathbf{p}$ buď řádkový vektor (kladných) daných cen zboží,

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n); \tag{8.3}$$

a I buď (kladný) daný dostupný příjem domácnosti. Problém domácnosti pak lze zapsat

$$\max_x U(\mathbf{x}) \quad pro \quad \mathbf{px} \leq I, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{8.4}$$

Domácnost vybírá nezáporná množství zboží $\mathbf{x}$ tak, aby maximalizovala funkci užitečnosti při respektování rozpočtového omezení

$$\mathbf{px} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq I \tag{8.5}$$

což říká, že celkové výdaje na n druhů zboží nemohou překročit příjem domácnosti. Jde o úlohu nelineárního programování, která vede k zavedení Lagrangeova multiplikátoru y a definuje Lagrangian jako

$$L(\mathbf{x}, y) = U(\mathbf{x}) + y(I - \mathbf{px}). \tag{8.6}$$

Kuhn-Tuckerovy podmínky dávají pro řešení $\mathbf{x}^*$ a y^*

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - y\mathbf{p} \leq \mathbf{0}, & \frac{\partial L}{\partial y} = I - \mathbf{px} \geq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - y\mathbf{p}\right)\mathbf{x} = 0, & y\frac{\partial L}{\partial y} = y(I - \mathbf{px}) = 0 \end{array} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{8.7}$$

Navíc y^* má interpretaci marginální užitečnosti peněz (nebo marginální užitečnosti příjmu), MU_m,

$$y^* = \partial U^*/\partial I = MU_m, \tag{8.8}$$

kde U^* je maximalizovaná hodnota užitečnosti

$$U^* = U(\mathbf{x}^*). \tag{8.9}$$

Totiž při konstantním y^* máme z předchozího vztahu 8.7 $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^*(I) = y^*I$. Derivujeme-li dle I, obdržíme pak $\partial U^*/\partial I = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{I})}{\partial I} = y^*$.

Jsou-li ceny a příjem kladné a užitečnost je monotóně rostoucí ve všech spotřebních úrovních

$$\partial U/\partial x_j = MU_j > 0, \tag{8.10}$$

kde MU_j je (kladná) marginální užitečnost zboží j, můžeme pak odvodit, že růst příjmu umožní domácnosti nakoupit více zboží a tak zvýšit užitek. Takže y^*, marginální užitečnost zvýšení příjmu, je kladná a, ze slabé doplňující podmínky

$$\mathbf{px}^* = I \tag{8.11}$$

plyne, že celý příjem je utracen.

Z Kuhn-Tuckerových podmínek plyne, že produkt marginální užitečnosti příjmu a cena zboží určují horní hranici pro marginální užitečnost každého zboží

$$MU_j \leq y^*p_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.12}$$

Ze slabé doplňující podmínky plyne, že pokud je zboží nakupováno ($x_j^* > 0$), podmínka 8.12 přechází v rovnost. Takže je-li j-té zboží nakupováno

$$MU_j/p_j = y^* = MU_m, \tag{8.13}$$

takže poměr marginální užitečnosti k ceně je tentýž pro všechny druhy zboží, které jsou aktuálně nakupovány, tento poměr nazveme marginální užitečností peněz. Pokud 8.12 dává ostrou nerovnost, pak dle komplementární podmínky není dané zboží nakupováno ($x_j^* = 0$).

8.1 Věta o poptávce

V souladu s větou o poptávce zde existuje řešení pro požadované nakupované zboží $\mathbf{x}^*$ a marginální užitečnost peněz y^*, jež mohou být považovány za funkci $n+1$ parametrů, jmenovitě n cen a příjmů, $\mathbf{p}$ a I,

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I), \tag{8.14}$$

$$y^* = y^*(\mathbf{p}, I), \tag{8.15}$$

předpokládáme $\mathbf{x}^* > 0$, $U(x)$ spojitě diferencovatelná do druhého řádu včetně v nejbližším okolí $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{px}^* = I$ (nenasycení) a Hessova matice

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \right) \tag{8.16}$$

je regulární. Funkce 8.14 je poptávková funkce pro n druhů zboží, její existence plyne z teori implicitní funkce. Omezíme-li pozornost na zboží, které je aktuálně poptáváno, podmínka prvního řádu, užívaje řešení, může být zapsána jako $n+1$ identit

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)) \equiv y^*(\mathbf{p}, I)\mathbf{p}, \tag{8.17}$$

$$\mathbf{p}\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I) \equiv I. \tag{8.18}$$

(Omezení pozornosti na zboží, které je aktuálně poptáváno, nepřipouští situaci, ve které při změně parametru zboží, jež není poptáváno, může toto již být poptáváno). V souladu s teorii, podmínky charakterizují rovnovážný stav domácnosti. Pokud poptávková funkce $U(x)$ je ostře konkávní, jsou obě nutnými a dostačujícími podmínkami pro rovnováhu. Dále podle teorie je n poptávkových funkcí v 8.14 pozitivně homogenních stupně nula v cenách a příjmu,

$$\mathbf{x}^*(\lambda\mathbf{p}, \lambda I) = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I), \quad \forall\ \lambda, \quad \lambda > 0 \tag{8.19}$$

jestliže změna p, I na $\lambda \cdot p$, $\lambda \cdot I$ nezmění úlohu pokud $\lambda > 0$. (Pouze donucení je ovlivněno, a $\lambda \cdot p \cdot x \leq \lambda \cdot I$ je ekvivalentní k $\mathbf{p} \cdot x \leq I$ při $\lambda > 0$.) Zvolíme-li $\lambda = 1/I$, poptávková funkce může být psána

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*\left(\frac{1}{I}\mathbf{p}\right) = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}^*), \tag{8.20}$$

kde $\mathbf{p}^*$ je vektor cen relativně vztažených k důchodu,

$$\mathbf{p}^* = (p_1/I, p_2/I, \ldots, p_n/I) \tag{8.21}$$

Zde poptávka závisí pouze na cenách relativně vztažených k důchodu. Teorie poptávky potom charakterizuje poptávkové funkce, určuje jejich homogenitu a indikuje jejich závislost na relativních cenách.

8.2 Slutského věta

Slutského věta sumarizuje porovnávací statiku domácnosti, obdrženou jako diferenciaci podmínek 8.17 a 8.18 podle cen a důchodu. Dle kapitoly 7 dostáváme *základní maticovou rovnici teorie domácnosti*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^*}{\partial I} & \frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} & \left(\frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{comp} \\ \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} & \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} & \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{comp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{p} \\ -\mathbf{p}' & \mathbf{H} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{x}^{*\prime} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & y^*\mathbf{I_n} & y^*\mathbf{I_n} \end{pmatrix}, \tag{8.22}$$

kde výsledky porovnávací stability jsou sumarizovány dle změn v řešení y^*, $\mathbf{x}^*$ jako parametrů změn I a p,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^*}{\partial I} &= \frac{\partial^2 U^*}{\partial I^2}, \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} &= \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial I}, \frac{\partial x_2^*}{\partial I}, \ldots, \frac{\partial x_n^*}{\partial I}\right), \\ \frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} &= \left(\frac{\partial y^*}{\partial p_1}, \frac{\partial y^*}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial y^*}{\partial p_n}\right), \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{8.23}$$

a všechny proměnné a derivace jsou počítány pro hodnoty řešení y^*, $\mathbf{x}^*$. Zde "comp" značí, že je kompenzována parciální derivace podle cen, kde důchod je kompenzován tak, že poptávka je konstantní; H je Hessova matice dle 8.16, u níž je předpokládána negativní definitnost a invertibilita, hraniční Hessova matice je regulární a I_n je identická matice typu $n \times n$. Řešení základní rovnosti, při invertování rozložených matic, dává Slutského rovnost,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I}\right)\mathbf{x}^* \quad \text{tj.} \\ \frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} &= \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_k}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial I}\right) x_k^* \quad \forall\, j,k, \end{aligned} \tag{8.24}$$

vyjadřující, že celkový efekt změny ceny na poptávku je součtem substitučního efektu kompenzované změny na poptávku a důchodového efektu změny důchodu na poptávku, kde důchodový efekt postihuje vážené $-\mathbf{x}^*$. Tato rovnice je první částí Slutského věty. Druhá část teorie uvádí, že matice substitučního efektu je symetrická a negativně semidefinitní,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{comp} \text{ je symetrická} \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} + \frac{\partial x_j^*}{\partial I} x_k^* = \frac{\partial x_k^*}{\partial p_j} + \frac{\partial x_k^*}{\partial I} x_j^* \quad \forall\, j,k, \tag{8.25}$$

$$\mathbf{z}\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{comp} \mathbf{z}' \le 0 \quad \text{a} \quad = 0 \text{ pro } \mathbf{z} = \alpha \mathbf{p}. \tag{8.26}$$

Poslední část věty je *Engelova podmínka agregace*

$$\mathbf{p}\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I}\right) = 1 \quad \text{tj.} \quad \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial I} = 1; \tag{8.27}$$

Cournotova podmínka agregace

$$\mathbf{p}\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right) + \mathbf{x}^{*\prime} = \mathbf{0} \quad \text{tj.} \quad \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right) + x_l^* = 0, \quad \forall l; \tag{8.28}$$

a *podmínka homogenity*

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{p}' + \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I}I = \mathbf{0} \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j^*}{\partial p_k}p_k + \frac{\partial x_j^*}{\partial I}I = 0, \quad \forall j. \tag{8.29}$$

9 Neoklasická teorie firmy

O firmě jako ekonomickém subjektu předpokládáme, že se chová tak, aby maximalizovala zisk za předpokladu technologických omezení produkční funkce. Za předpokladu, že firma používá n vstupů na produkci jediného výstupu, nechť $\mathbf{x}$ je sloupcový vektor vstupů

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'; \tag{9.1}$$

q je výstup, $f(\mathbf{x})$ je produkční funkce firmy

$$q = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{9.2}$$

kde výstup je funkcí vstupů. $\mathbf{w}$ je řádkový vektor kladných vah vstupů

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n); \tag{9.3}$$

a p je kladná cena výstupu. Problém konkurenční firmy je pak

$$\max_{q,\, x} \pi = pq - \mathbf{wx} \quad \text{pro} \quad q = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{9.4}$$

Firma zvolí odpovídající hodnotu vstupů a výstupu tak, aby maximalizovala zisk π, uvedený ve vztahu 9.4 jako rozdíl mezi příjmy pq a náklady, které jsou dané jako celkové výdaje za všechny vstupy

$$\mathbf{wx} = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j. \tag{9.5}$$

Produkční funkce může být dosazena přímo do účelové funkce, takže problém může být zapsán

$$\max_x \pi(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}) - \mathbf{wx} \quad pro \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{9.6}$$

Kuhn - Tuckerovy podmínky pak vyjadřují řešení x^*

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial \pi}{\partial \mathbf{x}} = p\tfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{w} \leq \mathbf{0}, \\ &\tfrac{\partial \pi}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x} = \left(p\tfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{w}\right)\mathbf{x} = 0, \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Pak poměr vstupní hodnoty k výstupní udává horní limit marginální (mezní) produkce každého vstupu

$$MP_j \equiv \partial f / \partial x_j \leq w_j / p, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.8}$$

Ze slabé doplňkové podmínky vyplývá, že pokud je vstup j nakoupen (tj. $x_j > 0$), podmínka 9.8 se stává rovností, tedy je-li vstup j nakoupen, platí

$$MP_j = w_j / p, \tag{9.9}$$

a tedy poměr marginální produkce k bohatství (hodnota vstupu) je stejný pro všechny aktuálně nakoupené vstupy, běžný poměr bývá převrácená hodnota výstupní hodnoty (ceny).

9.1 Věta o nabídce

Podle věty o nabídce existuje řešení pro nakoupené vstupy x^*, které mohou obsahovat funkce z $n + 1$ parametrů, tedy n vah $\mathbf{w}$ a výstupní cena p

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{w}, p), \tag{9.10}$$

za předpokladu $\mathbf{x}^* > 0$, $f(\mathbf{x})$ je dvojnásobně spojitě diferencovatelná funkce v okolí $\mathbf{x}^*$ a Hessova matice

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right) \tag{9.11}$$

je regulární. Funkce v 9.10 jsou vstupní poptávkové funkce, jejichž existence je zaručena. Výstupní nabídková funkce je pak

$$q^* = q^*(\mathbf{w}, p) = f(\mathbf{x}^*). \tag{9.12}$$

Omezeníme-li pozornost na vstupy, které jsou aktuálně nakoupeny, podmínky 1. řádu, použité při řešení, jsou identity

$$p\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(\mathbf{w}, p)) \equiv \mathbf{w}, \tag{9.13}$$

$$q^*(\mathbf{w}, p) \equiv f(\mathbf{x}^*(\mathbf{w}, p)). \tag{9.14}$$

(Je to podobné jako u domácnosti. Omezená pozornost vstupů, které jsou aktuálně nakoupeny, vyloučí případ, ve kterém díky změně parametrů vstup, který nebyl nakoupen, může být nakoupen.)

Podle věty o nabídce tyto podmínky charakterizují rovnováhu firmy. Jestli produkční funkce $f(\mathbf{x})$ je ostře konkávní, jsou obě podmínky nutné a postačující pro rovnováhu. Navíc podle teorie n vstupní poptávková funkce 9.10 a výstupní nabídková funkce 9.12 jsou positivní homogenní stupně 0 pro všechny hodnoty vstupu a výstupní ceny

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x}^*(\lambda\mathbf{w}, \lambda p) = \mathbf{x}^*(\mathbf{w}, p), \\ q^*(\lambda\mathbf{w}, \lambda p) = q^*(\mathbf{w}, p), \end{array}\right. \quad \forall \quad \lambda > 0, \tag{9.15}$$

protože změna $\mathbf{w}, p$ na $\lambda\mathbf{w}$, λp změní pouze π ve vztahu 9.4 a maximalizací $\lambda\pi$ dostáváme stejné řešení jako maximalizací π za předpokladu $\lambda > 0$. Výběrem $\lambda = 1/p$ pak vstupní poptávkové funkce a výstupní nabídková funkce mohou být zapsány

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}^*\left(\tfrac{1}{p}\mathbf{w}\right) = \mathbf{x}^*(\mathbf{w}^*), \\ q^* &= q^*\left(\tfrac{1}{p}\mathbf{w}\right) = q^*(\mathbf{w}^*), \end{aligned} \tag{9.16}$$

kde $\mathbf{w}^*$ je vektor reálných hodnot vstupu (bohatství), tj. relativní hodnoty k výstupní ceně

$$\mathbf{w}^* = (w_1/p, w_2/p, \ldots, w_n/p). \tag{9.17}$$

Pak vstupní poptávka závisí pouze na n reálných vahách. Věta o nabídce proto charakterizuje jak vstupní poptávkovou tak i výstupní nabídkovou funkci, udává jejich homogenitu a ukazuje jejich závislost na reálných vahách.

9.2 Teorie srovnávací stability firmy

Teorie srovnávací stability firmy je získaná pomocí rozdílů podmínek první nabídky 9.13 a 9.14 s ohledem na vstupní ceny $\mathbf{w}$ a výstupní cenu p. Sledujíce přístup z odstavce 7 obdržíme *základní maticovou rovnici teorie firmy*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q^*}{\partial p} & \left(\frac{\partial q^*}{\partial \mathbf{w}}\right)' \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial p} & \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{0} & p\mathbf{H} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)' & \mathbf{I_n} \end{pmatrix}, \tag{9.18}$$

kde srovnávací stabilita řešení je shrnuta pomocí změny na řešení q^*, $\mathbf{x}^*$ taktéž s parametry p a $\mathbf{w}$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial q^*}{\partial p} \\
&\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial p} = \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p}, \frac{\partial x_2^*}{\partial p}, \dots, \frac{\partial x_n^*}{\partial p}\right)', \\
&\frac{\partial q^*}{\partial \mathbf{w}} = \left(\frac{\partial q^*}{\partial w_1}, \frac{\partial q^*}{\partial w_2}, \dots, \frac{\partial q^*}{\partial w_n}\right)', \\
&\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_n} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{9.19}
$$

a všechny proměnné a derivace jsou vypočteny v hodnotách řešení q^*, $\mathbf{x}^*$. Derivací $\partial f/\partial \mathbf{x}$ je zde vektor marginálních produktů, $\mathbf{H}$ je Hessova matice 9.11, o které předpokládáme, že je negativně definitní a $\mathbf{I}_n$ je identická matice typu $n \times n$. Řešení základní rovnice vede na vztah

$$q^*/\partial \mathbf{w} = -\partial \mathbf{x}^*/\partial p \quad \text{tj.} \quad \partial q^*/\partial w_j = -\partial x_j^*/\partial p, \quad \forall j, \tag{9.20}$$

což nám říká, že efekt jakékoliv hodnoty na výstupu je identický, ale s opačným znaménkem než efekt výstupu ceny na stejný vstup. Tato rovnice je první částí věty. Druhá část věty uvádí, že matice efektů vah vstupních poptávek je symetrická a negativně definitní

$$\partial \mathbf{x}^*/\partial \mathbf{w} \quad \text{je symetrická} \quad \text{t.j. } \partial x_j^*/\partial w_k = \partial x_k^*/\partial w_j, \quad \forall j,\, k, \tag{9.21}$$

$$\mathbf{z}(\partial \mathbf{x}^*/\partial \mathbf{w})\mathbf{z}' \leq 0 \quad \text{a} \quad = 0 \;\; \mathit{pro} \;\; \mathbf{z} = \alpha \mathbf{w}. \tag{9.22}$$

Poslední část věty tvrdí, že vzrůst výstupní ceny bude zvyšovat nabídku výstupu

$$\partial q^*/\partial p > 0. \tag{9.23}$$

Firma může použít teorii lineárního programování. V takovém případě firma produkuje n výstupů $x_1, \ldots, x_n$ s využitím m vstupů $b_1, \ldots, b_m$. Produkce jedné jednotky výstupu j požaduje a_{ij} jednotek na vstupu i. Předpokládejme, že krátkodobě všechny vstupy jsou fixní, potom výběr firmy pouze je rozhodnout, jaký mix výstupů produkce je dán těmito vstupy. Úloha je pak úloha klasického lineární programování

$$\max_x \mathbf{cx} \quad pro \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \tag{9.24}$$

jako v 6.1. Účelová funkce maximalizace je celkový příjem, daný vztahem

$$\mathbf{cx} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, \tag{9.25}$$

kde c_j je daná cena a x_j je vybraná úroveň výstupu j. Pak m omezení je ve formě

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{9.26}$$

což nám říká, že celkové množství vstupu i použité k produkci výstupového vektoru x nemůže přesáhnout úroveň dostupného vstupu i, což je b_i. Úloha je pak vyběr nezáporných výstupů tak, aby maximalizoval zisk, v dané technologií a dostupnými vstupy.

Duální úloha je

$$\min_y \mathbf{yb} \quad pro \quad \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \tag{9.27}$$

jako v 6.5. Tato úloha může být interpretován jako výběr nezáporných hodnot (*stínové ceny*) pro vstupy $y_1, y_2, \ldots y_m$ tak, aby minimalizoval náklady vstupů

$$\mathbf{yb} = y_1b_1 + y_2b_2 + \cdots + y_mb_m, \tag{9.28}$$

kde y_i je vybraná hodnota a b_i je daná úroveň vstupu i. Pak n omezení je ve tvaru

$$y_1 a_{1j} + y_2 a_{2j} + \cdots + y_m a_{mj} \geq c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9.29}$$

který nám říká, že jednotkové náklady na zboží j, získáné sečtením nákladů produkce jedné jednotky ze všech vstupů, není menší než cena tohoto zboží. Duální problém k problému rozdělení, primární úloha 9.24 je proto problém ohodnocení, duální úloha k 9.27. Podle doplňující podmínky 6.14, jestliže pro nějaký výstup j je nerovnost 9.29 ostrou nerovností, tak nákladová jednotka překročí cenu (výstup je produkován se ztrátou), pak tento výstup není produkován ($x_j^* = 0$). Podobně, jestliže pro nějaký vstup i je nerovnost 9.26 ostrá nerovnost, tak není celý vstup využit (přeroste nám nabídka), pak tento vstup je zboží zdarma ($y_i^* = 0$). A navíc z 6.13

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}, \tag{9.30}$$

pak při řešení duální úlohy celkové příjmy z výstupu se rovnají celkovým nákladům vstupů, tj. firma vyrábí s nulovým ziskem.

10 Závěry

Z tohoto shrnutí matematického programování s aplikací na ekonomii nám vyjdou dva závěry.

1. Různé problémy matematického programování, které zde jsou zpracována - úloha bez omezení, klasické programování, nelineární programování a lineární programování - všechny jsou vzájemně uzavřeny, s analogickými teoriemi ve všech případech.

2. Stejné problémy matematického programování jsou důležité při aplikaci v ekonomii, zvláště v mikroekonomické teorii domácností a firem. Řešení matematického programování vede u obou k charakteristice rovnováhy každého z těchto subjektů a analýza jejich srovnávací statistiky odpovídá změně parametrů, jako jsou ceny a důchod.

Kapitola 2

Teorie spotřebitele

Hlavním účelem teorie spotřebitele je určení vlivu pozorovatelných komoditních požadavků při alternativních předpokladech na cíle a pravidla chování uživatele a na omezení, která přijímá při tvorbě rozhodnutí. Tradiční model spotřebitele je založen na preferencích při možných výběrech, které popisují cíle spotřebitele. Přitom jeho pravidla chování jsou určena maximalizací těchto preferencí při omezení danými rozpočtem, která určují směnné možnosti. Hlavní výsledek naší teorie sestává z kvalitativních aspektů pozorovaných požadavků při změně jejich parametrů, které určují rozhodnutí spotřebitele.

Historický vývoj teorie spotřebitele vyjadřuje dlouhou tradici zájmu ekonomů v tomto předmětu zkoumání, který prošel podstatnými koncepčními změnami až do jeho současné podoby.

1 Komodity a ceny

Komodity lze rozdělit na zboží a služby. Každá komodita je zcela popsána svými fyzikálními charakteristikami, svým umístěním a časem, ve kterém je dostupná. V případě, že uvažujeme chování komodit při jistém stupni nejasnosti, lze pak přidat ještě dodatečné upřesnění. Tradiční teorie obvykle předpokládá, že existuje

l komodit, přičemž pro zkoumaný problém stačí konečný počet fyzikálních charakteristik, umístění atd. *Komoditní svazek* je posloupnost reálných čísel $(x_h), h = 1, \ldots, l$ vyjadřujích množství každé komodity, lze jej tedy popsat jako l-dimenzionální vektor $x = (x_1, \ldots, x_l)$, tj. jako bod l-dimenzionálního euklidovského prostoru R^l, tzv. *komoditního prostoru*. Za předpokladu dokonalé dělitelnosti všech komodit je možné vzít každé reálné číslo jako množství každé komodity, tj. každý bod komoditního prostoru R^l je možným komoditním svazkem. Konečná specifikace počtu komodit přitom vylučuje aplikaci situací, ve kterých se charakteristika může měnit spojitě. Přitom takovéto situace vznikají přirozeným způsobem v kontextu výběru komodit na základě kvality resp. v teorii umístění, kdy je vhodným kritériem skutečná vzdálenost na povrchu. *Cena* p_h komodity h, $h = 1, \ldots, l$ je reálné číslo, které nám vyjadřuje množství placené při výměně jedné jednotky této komodity. Lze tedy cenový systém (cenový vektor) $p = (p_1, \ldots, p_l)$ reprezentovat jako bod v euklidovském prostoru R^l. *Hodnota* komoditního svazku x při daném cenovém vektoru p je pak $p \cdot x = \sum_{h=1}^{l} p_h x_h$.

2 Spotřebitelé

Některé svazky komodit jsou spotřebitelem vyloučeny na základě fyzikálních nebo logických omezeních. Množina všech možný spotřebních svazků, které jsou možné, se nazývá *spotřební množina*. To je pak neprázdná podmnožina komoditního prostoru, kterou budeme označovat jako X. Obvykle jsou vstupy spotřeby popsány pozitivními množstvími a výstupy negativními. To pak zejména implikuje, že všechny složky práce spotřebního svazku x jsou nekladné. Obvykle budeme předpokládat, že spotřební množin X je uzavřená, konvexní a omezená zdola. Přitom omezení zdola je odůvodněno konečnými omezeními na množství práce, kterou je spotřebitel schopen vykonat. Spotřebitel si musí vybrat svazek ze své spotřební množiny, aby si zajistil existenci.

Je-li dán cenový vektor p, hodnota $p \cdot x$ pro $x \in X$ nám označuje *čisté náklady*, tj. příjmy spojené se svazkem x odečtené od příslušných výdajů. Protože navíc spotřebitel obchoduje na trhu, jsou jeho možné výběry omezeny požadavkem, že hodnota jeho spotřeby by neměla převýšit jeho počáteční bohatství (příjem). To lze zadat ve tvaru pevného nezáporného čísla w. Navíc může mít spotřebitel k dispozici pevný vektor $\omega \in R^l$ počátečních zdrojů. Nutně pak $w = p \cdot \omega$. Množina možných spotřebních svazků, jejichž hodnota nepřevýší počáteční bohatství spotřebitele se nazývá *rozpočtová množina* a je určena vztahem

$$\beta(p,w) = \{x \in X : p \cdot x \leq w\}. \tag{2.1}$$

Konečné rozhodnutí spotřebitele pro výběr svazku ze spotřební množiny závisí na jeho zálibách a přáních. Ty jsou pak reprezentovány jeho *relací preference* $\succeq$, což je binární relace na X . Pro každé dva svazky x a y, $x, y \in X$, $x \succeq y$ znamená, že x je alespoň tak dobré jako y. Vzhledem k těmto preferncím si spotřebitel vybere nejvíce preferovaný svazek v rozpočtové množině jako svůj *požadavek* (poptávku). Ten je pak definován jako

$$\varphi(p,w) = \{x \in \beta(p,w) : x' \in \beta(p,w) \implies (x \succeq x' \text{ nebo neplatí } x' \succeq x)\}. \tag{2.2}$$

Větší část teorie spotřebitele je založena spíše na popisu chování spotřebitele pomocí maximalizace funkcí užitečnosti než maximalizací preferencí. Přitom pojem relace preference je základnější pojem v teorii spotřebitele a je tedy brán jako výchozí bod každé analýzy chování spotřebitele. Vztah mezi relací preference a funkcí užitečnosti je hlavní kámen základů teorie spotřebitele. Následující analýza je proto založena na dvou částech. V první části se budeme věnovat axiomatickým základům teorie preferencí a teorie užitku spolu se základním poznatky o spotřebitelových požadavcích. V následující části se budeme spíše věnovat klasičtějším výsledkům v kontextu diferencovatelnosti funkcí požadavků.

3 Preference

Mezi alternativními svazky komodit ze spotřební množiny máme vztah určený relací preference $\succeq$ na X. Pro dva svazky x a y z X budeme číst výrok $x \succeq y$ jako svazek komodit x je alespoň tak dobrý jako svazek komodit y. Obvykle předpokládáme tři základní axiomy vložené na relaci preference, které často považujeme za definici racionálního spotřebitele.

Axiom 1 (Reflexivita)
Pro všechna $x \in X$ platí $x \succeq x$, tj. každý svazek je alespoň tak dobrý jako on sám.

Axiom 2 (Tranzitivita)
Pro každé tři svazky $x, y, z \in X$ takové, že $x \succeq y$, $y \succeq z$ platí $x \succeq z$.

Axiom 3 (Úplnost)
Pro každé dva svazky $x, y \in X$ platí buď $x \succeq y$ nebo $y \succeq x$.

Relace preference $\succeq$, která splňuje výše uvedené tři axiomy, se nazývá *úplné předuspořádání* a my budeme mluvit o *preferenčním uspořádání*. Přitom lze z preferenčního uspořádání odvodit dva jiné vztahy – relaci silné preference $\succ$ a relaci indiference $\sim$.

Definice. Svazek x je ostře preferován před svazkem y, tj. $x \succ y$ právě tehdy, když $x \succeq y$ a neplatí $y \succeq x$. Svazek x je indiferentní se svazkem y, tj. $x \sim y$ právě tehdy, když $x \succeq y$ a $y \succeq x$.

Protože je preferenční uspořádání reflexivní a tranzitivní, je nutně relace *ostré preference* ireflexivní a tranzitivní. Budeme dále předpokládat, že existují alespoň dva svazky x' a x'' tak, že $x' \succ x''$. Relace *indiference* definuje na X relaci ekvivalence, tj. je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Platnost těchto tří axiómů není zpochybňována ve většině teorií spotřebitele. Tyto axiomy nám představují předpoklady, které většinou odpovídají empirickým pozorováním. Občas ale některé chování spotřebitele vykazuje nekonzistenci zejména s tranzitiviou a úplností. Totiž, někteří ekonomové argumentují tím, že je příliš moc požadovat po spotřebiteli porovnat všechny možné svazky, když jeho skutečná rozhodnutí budou realizována pouze na jisté podmnožině spotřební množiny. Empirická pozorování nebo experimentální výsledky často indikují netranzitivitu výběru. To může nastat v důsledku jednoduchých chyb, které jednotlivci dělají v reálném životě. Z druhé strany, tranzitivita může být narušena jako důsledek jistých teoretických příčin. Například, jestliže množina spotřebitelů tvoří domácnost, kde se rozhoduje podle pravidla většiny, relace preference může být netranzitivní. Přitom lze místo tranzitivity použít slabší axiomy, abychom dostali smysluplnou teorii.

Možnost definování ostré preference $\succ$ ze slabšího preferenčního uspořádání a obráceně, indikuje v principu možný alternativní přístup vyjití z relace ostré preference a odvození $\succeq$ a $\sim$. To lze považovat za vhodný přístup v některých situacích, který je o něco obecnější, protože axiom úplnosti nemá takovou roli jako pro preferenční uspořádání. Přitom však odvozená relace indiference nemusí být tranzitivní. Z empirického pohledu je však pojem preferenčního uspořádání přirozenější. Pozorovaný výběr svazku x před svazkem y lze interpretovat ve smyslu preferenčního uspořádání a ne ve smyslu ostré preference.

Axiomy 1-3 popisují vlastnosti uspořádání relace preference, které mají intuitivní význam v teorii výběru. Přitom je nutno předpokládat jisté topologické vlastnosti relace $\succeq$.

Nejvíce používáný je následující:

Axiom 4 (Spojitost)
Pro všechna $x \in X$ jsou množiny $\uparrow(x) = \{y \in X : y \succeq x\}$ a $\downarrow(x) = \{y \in X : x \succeq y\}$ uzavřené vzhledem k množině X.

Množina $\uparrow(x)$ se nazývá hlavní filtr a množina $\downarrow(x)$ se nazývá hlavní ideál. Intuitivně axiom 4 požaduje, aby se spotřebitel choval konzistentně v malém okolí tj. je-li dána nějaká posloupnost $y_n \to y$, $y_n \in \downarrow(x)$ pro všechna n, je i $y \in \downarrow(x)$. Podobně i duálně. Zároveň dostáváme, že pro preferenční uspořádání $\succeq$ je průnik hlavního filtru a hlavního ideálu *třída indiference* $I(x) = \{y \in X : y \sim x\}$ uzavřená množina na základě axiomu 4. Alternativní svazky indiferentní s x tvoří známé *křivky indiference* pro případ, kdy $X \subseteq R^2$. Mimo to okamžitě z axiómů 1-4 dostáváme, že množiny $\uparrow_s(x) = \{y \in X : y \succ x\}$ a $\downarrow_s(x) = \{y \in X : x \succ y\}$ jsou otevřené vzhledem k množině X. Mluvíme pak o ostrém hlavním filtru a ostrém hlavním ideálu.

Připomeňme, že mnoho známých relací preference nemá vlastnost spojitosti. Nejznámějším příkladem je lexikografické uspořádání, což je ve skutečnosti relace ostré preference, jejíž třídy indiference jsou jednoprvkové.

Definice. Buďte $x = (x_1, \ldots, x_l)$, $y = (y_1, \ldots, y_l) \in R^l$. Pak říkáme, že x *je lexikograficky větší* než y a píšeme $x\mathrm{Lex}y$, jestliže existuje k, $1 \le k \le l$ tak, že
$$\begin{array}{ll} x_j = y_j & \text{pro } j < k \\ x_k > y_k. & \end{array}$$

Snadno se pak ověří, že filtr $\uparrow(x)$ není ani uzavřený ani otevřený.

Věta 3.1 [Schmeidler (1971)] *Buď $\succeq$ tranzitivní binární relace na souvislém topologickém prostoru X. Definujme sdruženou relace ostré preference $\succ$ předpisem $x \succ y$ právě tehdy, když $x \succeq y$ a neplatí $y \succeq x$. Zároveň předpokládejme, že relace ostré preference je neprázdná tj. existuje alespoň jedna dvojice $\overline{x}$, $\overline{y}$ tak, že $\overline{x} \succ \overline{y}$. Jsou-li navíc všechny hlavní filtry a hlavní ideály uzavřené a všechny ostré hlavní filtry a ostré hlavní ideály otevřené, je relace $\succeq$ úplná.*

Důkaz. Důkaz zásadně využívá tu skutečnost, že jediná neprázdná obojetná množina (tj. zároveň uzavřená i otevřená) je celý topologický prostor X. Ukažme tedy nejprve, že máme-li dva prvky x a y tak, že $x \succ y$, je nutně

$$X = \{z : z \succ y\} \cup \{z : x \succ z\}.$$

Evidentně,

$$\{z : z \succ y\} \cup \{z : x \succ z\} \subseteq \{z : z \succeq y\} \cup \{z : x \succeq z\}.$$

Zejména pak levá strana inkluze je otevřená množina a pravá strana je uzavřená množina. Stačí tedy dokázat jejich rovnost. Předpokládejme, že prvek $u \in \uparrow(y)$, $u \notin \uparrow_s(y)$. Tedy nutně $y \sim u$ tj. $y \succeq u$. Protože $x \succ y$, je i $x \succ u$ tj. $u \in \downarrow_s(x)$. Analogicky, nechť prvek $u \in \downarrow(x)$, $u \notin \downarrow_s(x)$ tj. $u \succeq x$. Pak i $u \succ y$ tj. $u \in \uparrow_s(y)$.

Předpokládejme nyní, že existují dva nesrovnatelné prvky v X, řekněme v a w. Protože existuje alespoň jedna dvojice prvků $\overline{x}$, $\overline{y}$ tak, že $\overline{x} \succ \overline{y}$, je nutně

$$X = \{z : z \succ \overline{y}\} \cup \{z : \overline{x} \succ z\}.$$

Nutně tedy buď $v \succ \overline{y}$ nebo $\overline{x} \succ v$. Předpokládejme nejprve, že $v \succ \overline{y}$. Odtud pak

$$X = \{z : z \succ \overline{y}\} \cup \{z : v \succ z\}.$$

Protože v a w nejsou srovnatelné, je $w \succ \overline{y}$ a $v \succ \overline{y}$. Přitom množiny $\downarrow_s(v)$ a $\downarrow_s(w)$ jso otevřené, tedy i jejich průnik je otevřená množina. Protože $\overline{y} \in \downarrow_s(v) \cap \downarrow_s(w)$, je průnik neprázdný a protože v a w jsou nesrovnatelné, nemohou oba prvky ležet v průniku.

Ukažme, že

$$\{z : v \succ z\} \cap \{z : w \succ z\} = \{z : v \succeq z\} \cup \{z : w \succeq z\}.$$

Nechť $v \succ z$, $w \succ z$ a z neleží v průniku tj. např. neleží v $\{s : v \succ s\}$. Tedy $z \succeq v$. Z tranzitivity pak $w \succeq v$, což je spor. Podobně, neleží-li zv $\{s : w \succ s\}$, je $z \succeq w$ a tedy $v \succeq w$, což je opět spor. Celkem je pak $\{z : v \succ z\} \cap \{z : w \succ z\}$ uzavřená, neprázdná. Je tedy rovna X, což je opět spor. Jsou tedy v a w srovnatelné. ▮

4 Funkce užitečnosti

Problém reprezentace relace preference pomocí číselné funkce byl vyřešen v publikacích Eilenberga (1941), Debreua (1954, 1959 a 1964), Radera (1963) a Bowena (1968). Z historického pohledu pojem funkce užitečnosti je základní pojem pro míru spotřebitelovy spokojenosti. Pareto (1896) byl první, který rozpoznal, že libovolná rostoucí transformace dané funkce užitečnosti zajistí identické maximalizační chování spotřebitele. Jejich důležitost a metodologické důsledky rozpoznali Slutsky (1915) a Wold (1943-1944), kteří provedli první vážnou studii problému reprezentace.

Definice. Buď X množina a $\succeq$ binární relace na X. Pak funkce $u : X \to R$ je *reprezentace* relace $\succeq$ tj. *funkce užitečnosti* pro preferenční relaci $\succeq$, jestliže pro všechny prvky $x, y \in X$ platí:

$$u(x) \geq u(y) \quad \text{právě tehdy, když} \quad x \succeq y.$$

Je jasné, že pro každou funkci užitečnosti u a každou rostoucí transformaci $f : R \to R$ je složení $v = f \circ u$ také funkce užitečnosti pro tutéž relaci preference $\succeq$. Poznamenejme pro úplnost, že v literatuře byly zavedeny zobecnění výše uvedené definice. Jejich použití v teorii spotřebitele se však neukázalo užitečné.

Základní požadavek na funkci užitečnosti pro aplikace v teorii spotřebitele je, že funkce užitečnosti má být spojitá. Snadno je pak vidět, že axiomy 1-4 jsou nutné podmínky pro existenci spojité funkce užitku.

Totiž axiomy 1-3 přímo plynou z definice reprezentace. Abychom dokázali nutnost axiomu 4 o spojitosti funkce u, stačí pozorovat, že pro každý bod $x \in X$ platí

$$\uparrow x = \{z \in X : u(z) \geq u(x)\} \text{ a } \downarrow x = \{z \in X : u(z) \leq u(x)\},$$

což jsou uzavřené množiny ze spojitosti funkce u.

Základní výsledek teorie užitečnosti je, že axiom 4 kombinovaný s nějakými slabými předpoklady na množinu X je dostatečnou podmínkou pro spojitost funkce u.

Přitom platí následující tvrzení dokázané Debreuem (1964). Připomeňme, že *dírou* množiny $S \subseteq [-\infty, \infty]$ je maximální nedegenerovaný interval obsažený v doplňku množiny S, který má horní a dolní závoru obsažené v množině S.

Věta 4.1 *Je-li $S \subseteq [-\infty, \infty]$, pak existuje rostoucí funkce $g : S \to [-\infty, \infty]$ tak, že všechny díry množiny $g(S)$ jsou otevřené.*

Věta 4.2 *Buď X topologický prostor se spočetnou bazí (resp. souvislý nebo separabilní topologický prostor). Dále buď $\succeq$ spojité preferenční uspořádání definované na X. Pak existuje spojitá funkce užitečnosti pro relaci $\succeq$.*

Důkaz. Dokažme tvrzení pro případ, kdy X má spočetnou bázi. Nejprve najděme vhodnou funkci užitečnosti. Nechť tedy $O_1, O_2, \ldots$ jsou otevřené množiny obsažené ve spočetné bázi. Pro každé x uvažme množinu $N(x) = \{n : x \succ z \text{ pro všechna} z \in O_n\}$ a definujme

$$v(x) = \sum_{n \in N(x)} \frac{1}{2^n}.$$

Je-li $y \succeq x$, pak je i $N(x) \subseteq N(y)$ a tedy i $v(x) \leq v(y)$. Obráceně, je -li $y \succ x$, pak existuje $n \in N(y)$ tak, že $x \in O_n$, ale neplatí $n \in N(x)$. Proto je i $N(x) \nsubseteq N(y)$. Je tedy v funkce užitečnosti.

Definujme nyní novou funkci $u = g \circ v$, kde g je funkce z věty 4.1. Pak jsou dle této věty všechny díry množiny $u(X) = g(v(X))$ otevřené.

Abychom ověřili spojitost funkce u, stačí ukázat, že pro všechna $t \in [-\infty, \infty]$ jsou množiny $u^{-1}([t, \infty])$ a $u^{-1}([-\infty, t])$ uzavřené.

Je-li $t \in u(X)$, pak existuje $y \in X$ tak, že $u(y) = t$. Pak zejména $u^{-1}([t, \infty]) = \{x \in X : x \succeq y\}$ a $u^{-1}([-\infty, t]) = \{x \in X : y \succeq x\}$. Obě tyto množiny jsou uzavřené na základě spojitosti relace $\succeq$.

Pokud $t \notin u(X)$ a není-li t obsaženo v nějaké díře, nutně platí

(a) $t \leq inf\{u(x) : x \in X\}$, nebo

(b) $t \geq sup\{u(x) : x \in X\}$, nebo

(c) $[t, \infty] = \bigcap\{[\alpha, \infty] : \alpha \in u(X), \alpha < \infty\}$

$[-\infty, t] = \bigcap\{[-\infty, \alpha] : \alpha \in u(X), \alpha < \infty\}$.

Platí-li (a), je nutně $u^{-1}([t, \infty]) = X$ a $u^{-1}([-\infty, t]) = \emptyset$. Platí-li (b), je zřejmě $u^{-1}([t, \infty]) = \emptyset$ a $u^{-1}([-\infty, t]) = X$. Přitom jak X tak $\emptyset$ jsou uzavřené množiny. Platí-li (c), je

$u^{-1}([t, \infty]) = \bigcap u^{-1}(\{[\alpha, \infty] : \alpha \in u($

$u^{-1}([-\infty, t]) = \bigcap u^{-1}(\{[-\infty, \alpha] : \alpha \in$

Přitom množiny na pravé straně jsou evidentně uzavřené, je tedy uzavřený i jejich průnik.

Nechť tedy t leží v otevřené díře, tj. $t \in]a, b[$, kde $a, b \in u(X)$. Pak

$u^{-1}([t, \infty]) = u^{-1}([b, \infty])$

$u^{-1}([-\infty, t]) = u^{-1}([-\infty, a])$.

Opětovně, množiny na pravé straně jsou nutně uzavřené. ▮

5 Vlastností preferencí a funkcí užitečnosti

V aplikacích se často přidávají dodatečné předpoklady na relace preference a funkce užitečnosti. Budeme v dalším diskutovat ty nejvíce rozšířené.

5.1 Monotonie, nenasycenost a konvexnost

Definice. Relace preference $\succeq$ na R^l se nazývá *monotonní*, jestliže $x \geq y$ a $x \neq y$ implikuje $x \succ y$.

Tato vlastnost vyjadřuje, že je preferované vice zboží před méně zbožím tj. všechna zboží jsou žádaná. Sdružená funkce užitečnosti monotonního preferenčního uspořádání je rostoucí funkce na R^l.

Definice. Bod $x \in X$ se nazývá *bod nasycenosti* pro preferenční uspořádání $\succeq$, jestliže $x \succeq y$ pro všechna $y \in X$.

Je tedy bod nasycenosti maximální prvek vzhledem k relaci preference. Větší díl teorie spotřebitele se věnuje situacím, ve kterých takováto globální maxima neexistují nebo alespoň diskusím o problémech poptávky, pokud zlepšení situace spotřebitele může být dosaženo změnou jeho spotřebitelského svazku. Jinak řečeno, situace, které budou diskutovány, budou nenasycené body.

Můžeme-li pro jistý bod x najít v jeho blízkém okolí zlepšení situace spotřebitele, řekneme, že spotřebitel je lokálně neuspokojený v bodě x. Přesněji:

Definice. Řekneme, že spotřebitel je *lokálně neuspokojený* v bodě $x \in X$, jestliže pro každé okolí V bodu x existuje bod $z \in V$ tak, že $z \succ x$.

Z této vlastnosti vyplývá, že je vyloučena existence třídy indiference bodu x s neprázdným vnitřkem a že je tedy funkce užitečnosti nekonstantní v okolí bodu x.

Definice. Relace preference $\succeq$ na množině $X \subseteq R^l$ se nazývá *konvexní*, jestliže je množina $\{y \in X : y \succeq x\}$ konvexní pro všechny body $x \in X$.

Připomeňme, že funkce $u : X \to R$ se nazývá *kvazikonkávní*, jestliže platí $\min\{u(x), u(y)\} \leq u(\lambda x + (1-\lambda)y)$ pro všechna $x, y \in X$ a všechna $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$. Evidentně pak je funkce užitečnosti u pro preferenční uspořádání $\succeq$ kvazikonkávní právě tehdy, když je preferenční uspořádání konvexní. Je tedy kvazikonkávnost vlastnost přímo spojená s uspořádáním a je zachovávána při rostoucích transformacích. O takovýchto vlastnostech funkce užitečnosti mluvíme jako o *ordinálních vlastnostech* na rozdíl od *kardinálních vlastností*, které jsou spojené s určitou reprezentací u. Konkávnost je pak takováto kardinální vlastnost.

Definice. Relace prefernce se nazývá *ostře konvexní*, jestliže pro všechna $x, x' \in X$, $x \neq x'$, $x \succeq x'$, $0 < \lambda < 1$ implikuje $\lambda x + (1-\lambda)x' > x'$. Přidružená funkce užitečnosti ostře konvexní relace preference je vždy ostře kvazikonkávní. Přitom ostrá konvexnost nám zaručuje neexistenci takových relací preference, pro které příslušná relace preference a třída indiference nemá vnitřní body.

Je lehce vidět, že hlavní filtry kvazikonkávní funkce jsou konvexní. Je proto funkce užitečnosti pro preferenční uspořádání $\succeq$ kvazikonkávní právě tehdy, když je preferenční uspořádání konvexní. Je proto kvazikonkávnost zachovávána při rostoucích transformací. Takové vlastnosti jako kvazikonkávnost jsou nazývány *ordinální* na rozdíl od kardinálních vlastností, které jsou vztaženy ke specifické funkci užitečnosti u. Takovou vlastností je například konkávnost.

Definice. Preferenční uspořádání se nazývá *ostře konvexní*, jestliže pro každé dva svazky x a x', $x \neq x'$, $x \succeq x'$ a pro $0 < \lambda < 1$, $\lambda x + (1-\lambda)x' \succ x'$.

5.2 Separabilita

Buď $N = \{N_j\}_{j=1}^k$ rozklad množiny $\{1, \ldots, l\}$ a předpokládejme, že spotřební množina X má tvar $X = \Pi_{j=1}^k X_j$. Takovéto rozklady vznikají přirozeným způsobem, pokud uvažujeme spotřebu vzhledem k různé době, místě apod. Řečeno jednoduše, separabilita pak implikuje, že preference pro svazky v každém členu rozkladu (tj. pro každou dobu, místo apod.) jdou nezávislé na spotřebních úrovních mimo tento člen rozkladu.

Buď $J = \{1, \ldots, k\}$ a pro všechna $j \in J$, $x \in X$ definujme

$$x_{\hat{j}} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k).$$

Pro každé pevné $x_{\hat{j}}^0$ preferenční uspořádání $\succeq$ na X indukuje preferenční uspořádání $\succeq_{x_{\hat{j}}^0}$ tak, že $x_j \succeq_{x_{\hat{j}}^0} x'_j$ právě tehdy, když $(x_{\hat{j}}^0, x_j) \succeq (x_{\hat{j}}^0, x'_j)$ pro všechna $x_j, x'_j \in S_j$.

Přitom takovéto indukované uspořádání bude záviset na speciálním výběru $x_{\hat{j}}$. První pojem separability tvrdí, že tato uspořádání pro pevně zvolený index j nezávisí na výběru $x_{\hat{j}}$.

Definice. Preferenční uspořádání $\succeq$ na množině $X = \Pi_{j=1}^k X_j$ se nazývá *slabě separabilní*, jestliže pro všechna $j \in J$, $x_{\hat{j}}^0, y_{\hat{j}}^0 \in X = \Pi_{i \neq j} X_i$, $\succeq_{x_{\hat{j}}^0} = \succeq_{y_{\hat{j}}^0}$. Indukované uspořádání budeme značit jako $\succeq_j$.

Podobně, funkce užitečnosti $u : \Pi_{j=1}^k X_j \to R$ se nazývá *slabě separabilní*, jestliže existují spojité funkce $v_j : S_j \to R$, $j \in J$ a $V : R^k \to R$ tak, že $u(x) = V(v_1(x_1), \ldots, v_k(x_k))$.

Věta 5.1 *Buď $\succeq$ spojité uspořádání preference. Pak je $\succeq$ slabě separabilní právě tehdy, když je každá spojitá reprezentace $\succeq$ slabě separabilní.*

Definice. Funkce užitečnosti $u : \Pi_{j=1}^k X_j \to R$ se nazývá *silně separabilní*, jestliže existují spojité funkce $v_j : S_j \to R$, $j \in J$ a $V : R \to R$, V rostoucí tak, že $u(x) = V\left(\sum_{j \in J} v_j(x_j)\right)$.

Protože je funkce V rostoucí a spojitá, je funkce $V^{-1} \circ u$ aditivní a reprezentuje stejnou relaci preference. Je tedy problém nalezení podmínek na relaci preference, aby byla silně separabilní, ekvivalentní k nalezení podmínek, za nichž existuje aditivní reprezentace.

Nechť tedy $u(x) = \sum_{j \in J} v_j(x_j)$ označuje aditivní funkci užitečnosti vzhledem k rozkladu N. Uvažujme nějakou neprázdnou vlastní podmnožinu $I \subseteq J$ a dva svazky x a x' takové, že všechny jejich komponenty x_j a x'_j mají stejnou hodnotu x_j^0 pro $j \in J - I$. Můžeme proto psát $x = (x_I, x_{J-I}^0)$ a $x' = (x'_I, x_{J-I}^0)$. Je-li u aditivní, je bezprostředně zřejmé, že indukovaná funkce na součinu $\Pi_{j \in I} S_j$ je nezávislá na speciálním výběru hodnot x_{J-I}^0 a tedy je indukované preferenční uspořádání nezávislé na výběru x_{J-I}^0. Tato vlastnost evidentně platí pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu $I \subseteq J$ a je zároveň motivujícím prvkem pro definici silně separabilní relace uspořádání.

Definice. Preferenční uspořádání $\succeq$ na množině $X = \Pi_{j=1}^k X_j$ se nazývá *silně separabilní*, jestliže je slabě separabilní vzhledem ke všem vlastním rozkladů všech možných sjednocení množin $N_1, \ldots, N_k$. To je ekvivalentní s tím, že preferenční uspořádání je silně separabilní, jestliže pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu $I \subseteq J$ je indukované preferenční uspořádání nezávislé na zvláštním výběru hodnot x_{J-I}^0.

Věta 5.2 *Buď $\succeq$ spojité uspořádání preference. Pak je $\succeq$ silně separabilní právě tehdy, když je každá spojitá reprezentace $\succeq$ silně separabilní.*

5.3 Spojitá poptávka

Je-li dán cenový vektor $p \neq 0$ a počáteční bohatství w, spotřebitel si vybírá nejlepší svazek ze své rozpočtové množiny jako svou poptávku. Pro preferenční uspořádání splňující axiomy 1-3 evidentně každý maximální prvek vzhledem k relaci preference zároveň maximalizuje odpovídající funkci užitečnosti a obráceně, každý bod maxima funkce užitečnosti maximalizuje relaci preference. Zejména tedy oba přístupy vedou ke stejným svazkům poptávky. Budeme nyní studovat závislost poptávky na dvou vnějších parametrech, ceně a bohatství.

Rozpočtová množina spotřebitele byla definována jakožto $\beta(p,w) = \{x \in X : p \cdot x \leq w\}$. Nechť $S \subseteq R^{l+1}$ označuje množinu dvojic cena-bohatství, pro které je příslušná rozpočtová množina neprázdná. Pak β popisuje korespondenci z S do R^l (tj. množinovou funkci z S do $\mathcal{P}(R^l)$).

Definice. Korespondence ψ z S do T, kde T je kompaktní podmnožina z R^l, se nazývá *horní hemispojitá* v bodě $y \in S$, jestliže pro všechny posloupnosti $z_n \to z$, $y_n \to y$ takové, že $z_n \in \psi(y_n)$ platí, že $z \in \psi(y)$.

Výše uvedená definice je ekvivalentní s tím, že funkce ψ má uzavřený graf. Přitom evidentně každá horní hemispojitá korespondence ψ taková, že $\psi(y)$ je jednoprvková množina, je ve skutečnosti spojitá funkce.

Definice. Korespondence ψ z S do T, kde T je podmnožina z R^l, se nazývá *dolní hemispojitá* v bodě $y \in S$, jestliže pro každý bod $z_0 \in \psi(y)$ a pro každou posloupnost $y_n \to y$ existuje posloupnost $z_n \to z_0$ tak, že $z_n \in \psi(y_n)$ pro všechna n.

Korespondence se nazývá *spojitá*, je-li jak horní hemispojitá tak dolní hemispojitá. Snadno lze přitom dokázat následující dvě lemmata.

Lemma 5.3 *Korespondence rozpočtové množiny $\beta : S \to \mathcal{P}(X)$ má uzavřený graf a její dolní hemispojitá v každém bodě (p, w), pro který platí $\min\{p \cdot x : x \in X\} < w$.*

Přitom podmínka $\min\{p \cdot x : x \in X\} < w$ se obvykle nazývá *podmínka minimálního bohatství.*

Již dříve bylo poznamenáno, že maximalizace pomocí preferenční relace či funkce užitečnosti vedou ke stejné množině poptávkových svazků, je-li preferenční relace reflexivní, tranzitivní a úplná. Je-li tedy $u : X \to R$ funkce užitečnosti, lze definovat *poptávku* uživatele jako

$$\varphi(p, w) = \{x \in \beta(p, w) : u(x) \geq u(x'), x' \in \beta(p, w)\}, \tag{5.1}$$

což je ekvivalentní definici 2.2. Pokud navíc bude funkce užitečnosti spojitá a rozpočtová množina $\beta(p, w)$ kompaktní, bude poptávková množina $\varphi(p, w)$ neprázdná. Pak, aplikujeme-li Bergeho větu, obdržíme následující lemma.

Lemma 5.4 *Pro každou spojitou funkci užitečnosti $u : X \to R$ je poptávková korespondence $\varphi : S \to \mathcal{P}(X)$ tak, že $\varphi(p, w) \neq \emptyset$ a ϕ je horní hemispojitá v každém bodě $(p, w) \in S$ takovém, že $\beta(p, w)$ je kompaktní a $\min\{p \cdot x : x \in X\} < w$.*

Z definice rozpočtové a poptávkové korespondence bezprostředně plyne, že $\varphi(\lambda p, \lambda w) = \varphi(p, w)$ pro každé $\lambda > 0$ a pro každou dvojici cena-bohatství (p, w). Totiž, $x \in \beta(p, w) \Longleftrightarrow p \cdot x \leq w \Longleftrightarrow (\lambda p) \cdot x \leq (\lambda w)$ $\Longleftrightarrow x \in \beta(\lambda p, \lambda w)$. Podobně, $x \in \varphi(p, w) \Longleftrightarrow x \in \beta(p, w)$ a zároveň $u(x) \geq u(x')$ pro všechna $'x \in \beta(p, w)$ $\Longleftrightarrow x \in \beta(\lambda p, \lambda w)$ a zároveň $u(x) \geq u(x')$ pro všechna $'x \in \beta(\lambda p, \lambda w) \Longleftrightarrow x \in \varphi(\lambda p, \lambda w)$.

Pro konvexní preferenční uspořádání bude korespondence poptávky bude pak $\varphi(p, w)$ konvexní množina, což je vlastnost, která hraje podstatnou roli v existenčních důkazech rovnovážného stavu. Je-li navíc preferenční uspořádání ostře konvexní, je pak korespondence poptávky $\varphi(p, w)$ jednoprvková množina tj. získáme funkci poptávky. Horní hemispojitost pak implikuje obvyklou spojitost.

Lemma 5.5 *Buď $\succeq$ ostře konvexní a spojité preferenční uspořádání. Pak je korespondence poptávky $\varphi : S \to \mathcal{P}(X)$ spojitá funkce v každém bodě $(p, w) \in S$, pro který je množina $\beta(p, w)$ kompaktní a platí $\min\{p \cdot x : x \in X\} < w$. Navíc, pro všechna $\lambda > 0$, platí $\varphi(\lambda p, \lambda w) = \varphi(p, w)$ tj. φ je homogenní funkce stupně nula.*

Pro zbývající část tohoto přehledu budeme značit jako f funkci poptávky.

5.4 Poptávka bez tranzitivity

Empirické studie chování poptávky často prokázaly, že ne vždy se spotřebitelé chovají v souladu s požadavkem tranzitivity. Tato skutečnost byla často používána jakožto argument proti obecnému předpokladu, že zkoumání maximalizace preferencí je vhodný způsob pro studium teorie poptávky.

Sonnenschein (1971) ukázal, že axiom tranzitivity není nutný pro důkaz existence a spojitosti poptávkové koresponence. Podobnou situaci studoval i Katzner (1971), kde jsou preference definovány lokálně a tedy jsou získány *lokální výsledky* pro funkci poptávky.

Definice. Korespondence poptávky $\varphi : S \to \mathcal{P}(X)$ je definována jako $\varphi(p, w) = \{x \in \beta(p, w) : x \succeq x' \text{ pro všechna } x' \in \beta(p, w)\}$.

Věta 5.6 *(Sonnenschein) Nechť $\varphi(p, w) \neq \emptyset$ pro všechna $(p, w) \in S$ a předpokládejme, že korespondence β je spojitá v bodě $(p_0, w_0) \in S$. Je-li relace prefernce spojitá, je i korespondence poptávky φ horní hemispojitá v bodě (p_0, w_0).*

Předpoklad, že množina $\varphi(p, w) \neq \emptyset$ pro všechna $(p, w) \in S$, je implikován jistými modifikovanými předpoklady na ostrou relaci preference, jak plyne z následující věty.

Věta 5.7 *(Sonnenschein) Nechť $\succeq$ označuje spojitou relaci preference na množině X tak, že množina $\{x' : x' \succ x\}$ je konvexní pro všechna $x \in X$. Jestliže navíc $\beta(p, w) \neq \emptyset$, pak i $\varphi(p, w) \neq \emptyset$.*

Z výše uvedených dvou Sonnenscheinových výsledků plyne, že můžeme získat spojitou funkci poptávky, pokud nahradíme tranzitivitu relace preference její konvexitou.

Další výsledky v teorii netranzitivního spotřebitele byly získány Shaferem (1974). Tento přístup formuluje chování spotřebitele jakožto maximalizace spojité číselné funkce vzhledem k rozpočtovým omezením. Tato funkce, jejíž existence a spojitost nezávisí na tranzitivitě, může být považována za alternativní přístup k reprezentaci relace preference.

Věta 5.8 *(Shafer (1974)) Nechť $\succeq$ označuje spojitou, úplnou a ostře konvexní relaci preference na R^l_+. Pak existuje spojitá funkce $k : R^l_+ \times R^l_+ \to R$ tak, že*

1. $k(x,y) > 0 \iff x \in \uparrow_s(y)$,
2. $k(x,y) < 0 \iff x \in \downarrow_s(y)$,
3. $k(x,y) = 0 \iff x \succeq y$ *a* $y \succeq x$,
4. $k(x,y) = -k(y,x)$.

Předpoklady věty jsou obvyklé až na to, že je vynechán axiom tranzitivity. Za jeho předpokladu pak existuje funkce užitku a funkce k může být definována, že $k(x,y) = u(x) - u(y)$.

Stejně jako předtím, nechť $\beta(p,w)$ označuje rozpočtovou množinu spotřebitele. Pak poptávka spotřebitele sestává ze všech bodů v rozpočtové množině, která maximalizují funkci k. Přesněji, poptávka je definována jako

$$\varphi(p,w) = \{x \in \beta(p,w) : k(x,y) \geq 0 \text{ pro všechna } y \in \beta(p,w)\}$$

nebo ekvivalentně

$$\varphi(p,w) = \{x \in \beta(p,w) : x \succeq y \text{ pro všechna } y \in \beta(p,w)\}.$$

Předpoklad ostré konvexity garantuje, že existuje jediný maximální prvek. Následující věta precizuje maximalizační argument.

Věta 5.9 (Shafer) *Za předpokladů věty 5.7 a pro každý kladný cenový vektor p a kladné bohatství w je poptávka $x = f(p,w) = \{x \in \beta(p,w) : k(x,y) \geq 0$ pro všechna $y \in \beta(p,w)\}$ a tato funkce f je spojitá v bodě (p,w).*

5.5 Poptávka za předpokladů separability

Separabilita preferenčního uspořádání a funkce užitku, ať už slabá nebo silná, má důležité důsledky pro funkci poptávky. Za použití označení a definic z odstavce 5.2 a za předpokladu separability funkce užitku můžeme psát

$$u(x) = V(v_1(x_1), \ldots, v_k(x_k)), \tag{5.2}$$

kde x_j, $j = 1, \ldots, k$ jsou vektory množství komodit v S_j a $X = S_1 \times \cdots \times S_k$. Pak $v_j(x_j)$ jsou funkce užitku definované na S_j. Budeme používat vektor p_j pro ceny komodit v třídě rozkladu N_j.

Definice. Pro všechny $w_j \in R^l_+$ definujme podrozpočtovou množinu

$$\beta^j(p_j, w_j) \equiv \{x_j \in S_j : p_j \cdot x_j \le w_j\}. \tag{5.3}$$

Nyní můžeme zavést pojem podmíněné poptávky $f^j_j(p_j, w_j)$ jakožto to x_j, které maximalizuje funkci $v_j(x_j)$ přes podrozpočtovou množinu $\beta^j(p_j, w_j)$.

Definice. *Podmíněná funkce poptávky* je definována jako

$$f^j_j(p_j, w_j) \equiv \{x_j \in \beta^j(p_j, w_j) : v_j(x_j) > v_j(x^0_j), x^0_j \ne x_j, x^0_j \in \beta^j(p_j, w_j)\}. \tag{5.4}$$

Tyto podmíněné funkce poptávky sdílí všechny vlastnosti obvyklých funkcí poptávky až na to, že jejich definiční obor a obor hodnot jsou omezeny proměnnými p_j, w_j a S_j. Jsou-li dány $v_j(x_j)$, p_j a w_j, je i poptávka x_j známa. Přitom proměnná w_j není dána vnějšně, ale jakožto část obecného optimalizačního problému. Buď dále $f_j(p, w)$ j-podvektor funkce poptávky $f(p, w)$. Pak je w_j dáno jakožto

$$w^*_j(p, w) = p_j \cdot f_j(p, w). \tag{5.5}$$

Poznamenejme, že v obecnosti je potřeba celého cenového vektoru, abychom určili w^*_j. Když používáme w^*_j vzniklé pomocí $w_j(p, w)$, lze očekávat že z podmíněných funkcí poptávky získáme tentýž vektor poptávky jako $f_j(p, w)$.

Věta 5.10 *Za předpokladu separability funkce užitku platí*

$$f_j(p,w) = f_j^j(p_j, w_j^*(p,w)) \text{ pro všechna } j. \tag{5.6}$$

Důkaz. Uvažme libovolně, ale pevně vektor (p_0, w_0). Nechť $x_j^* = f_j^j(p_{0_j}, w_j^*(p_0, w_0))$ pro jisté j a nechť $x_0 = f(p_0, w_0)$. Evidentně, $x_{0_j} \in \beta_j(p_{0_j}, w_j^*(p_0, w_0))$. Předpokládejme, že $x_j^* \neq x_{0_j}$. Pak $v_j(x_j^*) > v_j(x_{0_j})$ a

$$\begin{aligned} u(x_0) &= V(v_1(x_{0_1}), \ldots, v_j(x_{0_j}), \ldots, v_k(x_{0_k})) \\ &< V(v_1(x_{0_1}), \ldots, v_j(x_j^*), \ldots, v_k(x_{0_k})), \end{aligned} \tag{5.7}$$

protože je funkce V monotoně rostoucí v proměnné $v_j(x_j)$. Evidentně je prvek $(x_{0_{\hat{j}}}, x_j^*)$ v rozpočtové množině $\beta(p,w)$ a tedy předpoklad $v_j(x_j^*) > v_j(x_{0_j})$ neplatí. Tedy nutně $v_j(x_j^*) = v_j(x_{0_j})$ tj. $x_j^* = x_{0_j}$, protože x_j je jediný vektor maximalizující $v_j(x_j)$ přes všechna $x_j \in \beta_j(p_{0_j}, w_j^*(p_0, w_0))$. Proto podmínka 5.6 platí pro (p_0, w_0). Protože (p_0, w_0) bylo vybráno libovolně, platí pro všechny přípustné (p,w) a věta je tímto dokázána. ∎

Význam věty 5.10 je dvojí. Nejprve je zřejmé, že ostatní ceny ovlivňují poptávku pro x_j pouze pomocí skalární funkce $w_j^*(p,w)$, což je podstatné omezení na p_j. Dále, pokud je možné pozorovat a určit bohatství w_j empirickou cestou, můžeme se koncentrovat na podmíněnou funkci poptávky, pro kterou pouze potřebujeme znát pouze cenu p_j. Jako příklad lze uvážit chování poptávky v jistém časovém období, řekněme jednom roce. Za obvyklého (implicitního) předpokladu separability během různých časových období je pak pouze nutné znát úplné náklady pro tuto periodu (w_j) a odpovídající cenový vektor (p_j). V tomto kontextu můžeme uvažovat (5.5) jako spotřební funkci spjatou s celkovými spotřebními náklady vzhledem k celkovému bohatství a cenami pro všechny periody.

6 Funkce nákladů a nepřímé funkce užitku

Alternativní přístup v analýze poptávky byl proveden Samuelsonem v roce 1947. V současnosti mluvíme o tzv. dualitě v analýze poptávky. V jistých případech dosáhneme tímto způsobem přímější analýzy senzitivity cen a dovoluje nám kratší a transparentnější přehled jistých klasických vlastností funkce poptávky. Popišme v krátkosti základní vlastnosti a výsledky pro podstatně omezenější situace než byly výše uvedené. Tato omezení budou použita v následujících paragrafech.

Od doposud budeme předpokládat, že spotřební množina X bude kladný ortant R^l_+ a že všechny ceny a bohatství jsou kladné. Toto implikuje, že rozpočtová množina je kompaktní a že podmínka minimálního bohatství je splněna. Zejména je pro spojitou funkci užitku korespondence poptávky φ horní hemi-spojitá. Dále budeme předpokladát nenasycenost buď relace preference nebo funkce užitku. To pak implikuje, že spotřebitel použije všechno své bohatství za maximalizace preferencí.

Je-li dána dosažitelná úroveň funkce užitku $v = u(x), x \in X$, je *nákladová funkce* minimální množství nutné k získání úrovně užitku alespoň takové jako v pro danou cenu p. Je tudíž nákladová funkce $E : R^l_+ \times R \to R$ definovaná jako

$$E(p, v) = \min\{p \cdot x : u(x) \geq v\}. \tag{6.1}$$

Přitom lze snadno dokázat následující vlastnosti nákladové funkce.

Lemma 6.1 *Pokud spojitá funkce užitku splňuje axiom lokální nenasycenosti, je pak nákladová funkce:*

1. *rostoucí a spojitá v proměnné v pro každý cenový vektor p,*

2. *neklesající, pozitivně lineárně homogenní a konkávní v proměnné p pro každou úroveň užitku v.*

Nechť nyní $y = E(p, v)$ označuje minimální úroveň nákladů. Protože je funkce E rostoucí a spojitá v proměnné v, existuje její inverzní funkce $v = g(p, y)$, která vyjádří užitek v jakožto funkci nákladů a cen, která se nazývá *nepřímou funkcí užitku.* Je snadné vidět, že

$$g(p, y) = \max\{u(x) : p \cdot x = y\}. \tag{6.2}$$

Vzhledem k vlastnostem nákladové funkce je nutně nepřímá funkce užitku

1. rostoucí a spojitá v proměnné y pro každý cenový vektor p,

2. neklesající v cenách a homogenní stupně 0 v příjmech a cenách.

Zejména tedy z definice E a g obdržíme následující identity:

$$v \equiv g(p, E(p, v)) \text{ a } y \equiv E(p, g(p, y)). \tag{6.3}$$

Je-li dán cenový vektor p a úroveň užitku v, je nákladové minimum $E(p, v)$ získáno na jisté podmnožině určené $E(p, v)$ a p. Jsou-li preference ostře konvexní, existuje jediný bod $x \in X$ minimalizující náklady a označme minimalizační funkci jako $x = h(p, v)$.

Nutně pak z definice

$$E(p, v) = p \cdot h(p, v). \tag{6.4}$$

Funkce h se nazývá *Hicksova funkce poptávky kompenzovaná příjmem*, h je spojitá v obou argumentech a homogenní stupně nula v cenách.

Uvažme nyní náš původní problém maximalizace funkce užitku vzhledem k rozpočtovým omezením $p \cdot x \leq w$. Pak náš předpoklad lokální nenasycenosti a ostré konvexity implikuje existenci spojité maximalizační funkce $f(p, w)$. Tato funkce se nazývá *Marshallova tržní funkce poptávky* a splňuje vlastnost

$$p \cdot f(p, w) = w. \tag{6.5}$$

Z těchto definic získáme druhou dvojici identit, které popisují základní vztah mezi Hicksovou funkcí poptávky kompenzované příjmem a Marshallovou tržní funkcí poptávky:

$$\begin{aligned} f(p, w) &= h(p, g(p, w)) \\ h(p, w) &= f(p, E(p, w)). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Jednu z důležitých vlastností Hicksovy funkce poptávky lze obdržet bezprostředně. Pro pevnou úroveň užitku v, uvažujme dva cenové vektory p a p', dále asociacované vektory poptávky $x = h(p, v)$ a $x' = h(p', v)$. Z toho, že x a x' minimalizují náklady, obdržíme

$$(p - p') \cdot (x - x') \leq 0. \tag{6.7}$$

Pro změnu $\Delta p_k = p_k - p'_k$ ceny jednotlivé komodity k tak, že všechny ostatní ceny zůstanou konstantní tj. $\Delta p_h = p_h - p'_h = 0$, $h \neq k$ implikuje

$$\Delta p_k \cdot \Delta x_k \leq 0. \tag{6.8}$$

Jinak řečeno, nárůst ceny jedné komodity nezpůsobí nárůst poptávky pro tuto komoditu. Hicksova funkce poptávky není tedy rostoucí funkcí ceny. Tato vlastnost se občas nazývá jako *nekladnost vlastního substitučního efektu*. Detailní diskuse pro diferencovatelné funkce bude provedena v dalších paragrafech.

7 Vlastnosti diferencovatelné funkce užitku

Následující paragrafy se věnují funkcím užitku a poptávky za předpokladu diferencovatelnosti, kteý je standardním předpoklad v teorii spotřebitelské poptávky.

Buď tedy $u : X \to R$ funkce užitku, která je třídy C^2 bez kritických bodů * reprezentující úplnou a spojitou relaci preference třídy C^2 na X, která je monotonní a ostře konvexní. Pak je tato funkce

1. spojitá,
2. rostoucí tj. $u(x) > u(y)$ pro $x \geq y$, $x \neq y$,
3. ostře kvazikonkávní tj. $u(\alpha x + (1-\alpha)y) > u(y)$ pro $\alpha \in (0,1)$, $x \neq y$ a $u(x) \geq u(y)$.
4. dvojnásobně spojitě diferencovatelná tj. její druhé parciální derivace existují a jsou spojitými funkcemi v proměnné x.

---

*Pro prvek $x \in U$ je derivace $\mathrm{D}f(x)$ v bodě x lineární zobrazení z R^k do R^n (tj. matice parciálních derivací). Pak říkáme, že x se nazývá *singulární (kritický) bod zobrazení f*, pokud tato derivace není surjektivní zobrazení. Poznamenejme, že pokud $k < n$, jsou všechny prvky z U singulární. *Singulární hodnoty* jsou jednoduše obrazy vzhledem k f všech singulárních bodů; prvek $y \in R^n$ se nazývá *regulární hodnota*, pokud není singulární hodnota.

Dále budeme předpokládat, že derivace prvního řádu, tj. $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, l$, jsou kladné. Mluvíme o tzv. *marginálních (mezních) užitcích.* Speciálně pak vektor délky l marginálních užitků budem označovat u_x. Protože derivace druhého řádu jsou spojité funkce jejich argumentů, máme nutně

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = u_{ji}.$$

Buď tedy U_{xx} Hessova matice řádu l funkce užitku u tj. matice druhých parciálních derivací funkce u s prvky u_{ij}. Ze symetrie druhých parciálních derivací pak máme, že U_{xx} je symetrická matice tj. $U_{xx} = U_{xx}^T$.

Vlastnost ostré kvazikonkávnosti, kterou má funkce užitku, pak implikuje další omezení na první a druhé derivace funkce užitku.

Věta 7.1 *Buď u ostře kvazikonkávní funkce užitku. Pak pro všechny prvky $x \in X$ platí*

$$z^T U_{xx} z \leq 0 \textit{ pro všechna } z \in \{y \in R^l : u_x \cdot y = 0\}. \tag{7.1}$$

Důkaz. Buď $x \in X$ libovolný. Nechť $z \in R^l : u_x \cdot z = 0$. Pak z Taylorova vzorce máme

$$u(y) = u(x) + \alpha \frac{u_x \cdot z}{1} + \alpha^2 \frac{z^T U_{xx} z}{2} + \varrho(y), \tag{7.2}$$

kde $y = x + \alpha z$ a ϱ je reálná funkce spojitá v okolí x tak, že $\lim_{y \to x} \dfrac{\varrho(y)}{||y - x||^2} = 0$. Tedy $u(y) = u(x) + \alpha^2 \dfrac{z^T U_{xx} z}{2} + \varrho(y)$. Předpokládejme, že $\dfrac{z^T U_{xx} z}{2} > 0$. Nutně pak existuje $\alpha_0 > 0$ tak, že pro všechna $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)$ platí $f(\alpha) = f(0) + \frac{1}{2}\alpha^2 f''(0) + \sigma(\alpha)$, kde $f(\alpha) = u(x + \alpha z)$, $f'(\alpha) = u_{x+\alpha z} \cdot z$, $f''(\alpha) = z^T U_{x+\alpha z, x+\alpha z} z > 0$, $\sigma(\alpha) = \dfrac{\varrho(x + \alpha z)}{||z||^2}$. Přitom $\lim_{\alpha \to 0} \dfrac{\sigma(\alpha)}{\alpha^2} = 0$. Předpokládejme, že $\alpha > 0$. Pak z ostré kvazikonkávnosti $\min\{f(-\alpha), f(\alpha)\} < f(0)$ a z předchozího $f(\alpha) - f(0) > 0$ a $f(-\alpha) - f(0) > 0$, což je spor. Tedy $\dfrac{z^T U_{xx} z}{2} \leq 0$. ▮

Vlastnost ostré kvazikonkávnosti funkce užitku není dostatečná, abychom obdrželi všude diferencovatelnou funkci poptávky. Proto zavedeme následující pojem.

Definice. Ostře kvazikonkávní funkce užitku se nazývá *silně kvazikonkávní*, jestliže

$$z^T U_{xx} z < 0 \text{ pro všechna } z \in \{y \in R^l : u_x \cdot y = 0, y \neq 0\}. \tag{7.3}$$

Tato dodatečná vlastnost je ekvivalentní regularitě tzv. *hraniční Hessova matice*

$$H = \begin{bmatrix} U_{xx} & u_x \\ u_x^T & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.4}$$

Věta 7.2 *Hraniční Hessova matice H ostře kvazikonkávní monotonní rostoucí funkce užitku u je regulární právě tehdy, když je funkce užitku silně kvazikonkávní.*

Důkaz. Dokažme nejprve dostatečnost. Předpokládejme tedy, že matice H je singulární. Pak existuje l-rozměrný vektor z a skalár r tak, že platí

$$U_{xx}z + u_x r = 0; \quad u_x \cdot z = 0; \quad (z^T, r) \neq 0. \tag{7.5}$$

Nechť $z = 0$. Pak $r \neq 0$. Tedy nutně z $u_x r = 0$ vyplývá, že $u_x = 0$, ale to je spor s monotonií funkce užitku. Nechť tedy $z \neq 0$. Pak $0 = z^T 0 = z^T U_{xx} z + z^T u_x r = z^T U_{xx} z < 0$, spor se silnou kvazikonkávností. Odtud pak dostáváme, že nemůžeme najít nenulový vektor (z^T, r) tak, že $(z^T, r)H = 0$ a tedy je H regulární.

Dokažme nyní nutnost. Budeme postupovat ve třech krocích. Nejprve ukážeme, že je-li H regulární, můžeme najít reálné číslo α^* tak, že je pro všechna $\alpha < \alpha^*$ matice $A(\alpha) = U_{xx} + \alpha u_x^T \cdot u_x$ regulární. Dále ukážeme, že za předpokladu ostré kvazikonkávnosti existuje reálné číslo β^* tak, že matice $A(\beta)$ je negativně semidefinitní matice. Poslední krok je kombinací těchto dvou kroků.

Krok 1. Regularita matice H znamená, že pro všechny nenulové l-rozměrné vektory c_1 takové, že $u_x \cdot c_1 = 0$, $A(\alpha)c_1 \neq 0$ pro všechna α. Uvažme dále všechny vektory c_2 tak, že $u_x^T c_2 \neq 0$ a normalizujme c_2 tak, že

$u_x^T c_2 = 1$. $A(\alpha)c_2 = 0$ znamená, že $\alpha = -c_2^T U_{xx} c_2$. Nechť $\alpha^* = \min\{-c_2^T U_{xx} c_2 : u_x^T c_2 = 1\}$. Pro $\alpha < \alpha^*$, $A(\alpha)c_2 \neq 0$ a $A(\alpha)$ je tedy regulární.
Krok 2. Je-li $A(\beta)$ negativně semidefinitní matice pro nějaké β tj. $c^T A(\beta)c \leq 0$ pro všechna c. Odtud pak pro všechna β platí $z^T U_{xx} z \leq 0$ pro všechna z taková, že $u_x^T z = 0$. Speciálně, $c^T A(\beta)c \leq 0$ pro všechna β a pro všechna z taková, že $u_x^T z = 0$. Uvažme dále všechny takové vektory c, že $u_x^T c \neq 0$ a normujme je tak, že $u_x^T c = 1$. Pokud pak $c^T A(\beta)c \leq 0$, je nutně $\beta \leq -c^T U_{xx} c$. Položme proto $\beta^* = \min\{c^T U_{xx} c : c^T u_x = 1\}$. Proto je pak $A(\beta)$ negativně semidefinitní, jestliže $\beta \leq \beta^*$.
Krok 3. Z kroků 1-2 plyne, že existuje reálné číslo γ tak, že $A(\beta)$ je regulární a negativně semidefinitní pro všechna $\beta \leq \gamma$, přitom $\gamma \leq \min\{\alpha^*, \beta^*\}$. Přitom z lineární algebry víme, že negativně semidefinitní matice, která je regulární, je nutně negativně definitní. Je proto $z^T A(\gamma) z = z^T U_{xx} z < 0$ pro všechna nenulová z taková, že $u_x^T z = 0$ tj. u je silně kvazikonkávní. ▌

To, co bylo řečeno o vlastnosti derivací funkce užitku u, platí i pro každou diferencovatelnou rostoucí transformaci funkce u. To je zřejmé v případě, že kladné znaménko marginálních užitků a důsledky silné kvazikonkávnosti jsou založeny přímo na vlastnostech preferenčního uspořádání tj. na monotonii a konvexitě.

Popišme explicitně důsledky takovýchto transformací pro derivace. Buď tedy F dvakrát spojitě diferencovatelná rostoucí transformace $F : R \to R$ tj. $F' > 0$ (F' a F'' jsou skaláry) a F'' je spojitá. Položme $v(x) = F(u(x))$. Pak mezi prvními a druhými derivacemi funkcí $u(x)$ a $v(x)$ platí následující vztahy:

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial x_i} = F' \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{neboli} \quad v_x = F' u_x, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = F' \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F'' \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \quad \text{tj.} \quad V_{xx} = F' U_{xx} + F'' u_x u_x^T. \end{gathered} \tag{7.6}$$

Protože je F' kladné, má v_x stejné znaménko jako u_x. Naproti tomu prvky matice V_{xx} nemusí mít stejné znaménka jako prvky matice U_{xx}. Máme však, že $z^T U_{xx} z < 0$ pro každý vektor $z \in \{y \in R^l : u_x \cdot y = 0, y \neq 0\}$ implikuje $z^T V_{xx} z < 0$ pro každý vektor $z \in \{y \in R^l : v_x \cdot y = 0, y \neq 0\}$. Skutečně, $v_x^T z = F' u_x^T z = 0$ a tedy $z^T V_{xx} z = z^T F' U_{xx} z + z^T F'' u_x u_x^T z = F' z^T U_{xx} z + F'' z^T u_x u_x^T z = F' z^T U_{xx} z$ tj. oba výrazy $z^T U_{xx} z$ a $z^T V_{xx} z$

mají stejné znaménko z kladnosti F'. Poznamenejme, že se nejedná o nový výsledek ale jiný způsob důkazu, že ostrá a silná kvazikonkávnost odrážejí vlastnosti relace preference.

Protože ale marginální (mezní) užitky $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ nejsou invariantní vzhledem monotonním rostoucím transformacím, budou nás zajímat poměry dvojic marginálních užitků, např.

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial x_j}} = \frac{u_i}{u_j}. \tag{7.7}$$

Nutně pak je výraz 7.7 invariantní vzhledem k monotonním rostoucím transformacím (F', které je jak ve jmenovateli tak čitateli, se pokrátí.). Zachováme-li nyní úroveň funkce užitku konstantní a měníme-li pouze proměnné x_i a x_j, obdržíme lokálně:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}x_i^* + \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \mathrm{d}x_j^* = 0. \tag{7.8}$$

Tedy máme

$$R_{ij} = \frac{u_i}{u_j} = -\frac{\mathrm{d}x_j^*}{\mathrm{d}x_i^*}. \tag{7.9}$$

R_{ij} se nazývá *marginální (mezní) míra substituce* i-té komodity za j-tou komoditu. Přitom R_{ij} reprezentuje množství komodity j věnované na výměnu za zvýšení komodity i, přičemž míra užitku zůstává konstantní.

O R_{ij} budeme předpokládat, že je klesající funkcí x_i tj. při stejné míře užitku bude množství komodity x_j menší věnované na výměnu za zvýšení komodity při větším x_i než když je x_i menší. Předpoklad o *DMRS* pro každou dvojici (i, j) plyne ze silné kvazikonkávnosti funkce užitku.

Klesající marginální míra substituce znamená, že

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i} - R_{ij} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} < 0, \tag{7.10}$$

což nám dává

$$\frac{1}{u_j}\left(u_{ii}u_j^2 - 2u_iu_ju_{ij} + u_{jj}u_i^2\right) < 0. \tag{7.11}$$

Výraz v závorkách je roven $z^TU_{xx}z$ pro $z_k = 0$, $k \neq i, j$ a $z_i = -u_j$ a $z_j = u_i$. Protože je výraz $u_j > 0$ a $u_x^T = 0$, máme ze silné kvazikonkávnosti, že výraz 7.10 je záporný. Přitom obrácená implikace plyne při jistých dodatečných předpokladech.

Pojem marginální míry substituce byl tradičně používán ve spojitosti se slabou a silnou separabilitou.

Než se budeme této spojitosti věnovat, bude pro nás užitečné si všimnout důsledků diferencovatelnosti funkce $u(x)$ v případě (slabé) separability. Za předpokladu separability víme, že

$$u(x) = V(v_1(x_1), \ldots, v_k(x_k)). \tag{7.12}$$

Z diferencovatelnosti pro všechna $i \in N_j$, $1 \leq j \leq k$ dostaneme, že

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial v_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tag{7.13}$$

existuje a tedy existují i $\frac{\partial V}{\partial v_j}$ a $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$. Protože $v_j(x_j)$ má všechny vlastnosti funkce užitku, je nutně $\frac{\partial v_j}{\partial x_i} > 0$. Je tedy i $\frac{\partial V}{\partial v_j} > 0$, protože $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$.

Nechť nyní $i, k \in N_j$. Pak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial V}{\partial v_j}\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial V^2}{\partial v_j^2}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \tag{7.14}$$

a pro všechna $i \in N_j$, $k \in N_g$, $j \neq g$ máme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial V^2}{\partial v_j \partial v_g}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_g}{\partial x_k}. \tag{7.15}$$

Zejména odtud obdržíme, že existence a symetrie matice U_{xx} implikuje existenci a symetrii Hessovy matice V_{vv}. V případě silné separability je $\frac{\partial V}{\partial v_j} = V'$ tj. stejná pro všechna j. Nutně tedy

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = V' \frac{\partial v_j(x_j)}{\partial x_i}, \tag{7.16}$$

přičemž Hessova matice V_{vv} má všechny prvky stejné.

Věta 7.3 *Marginální míra substituce mezi dvěma komoditami i a k ležícími v množině N_j je nezávislá na úrovni spotřeby vně množiny N_j tehdy a jen tehdy, když je funkce užitku slabě separabilní.*

To znamená, že pro všechna $i \in N_j$ je $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ součinem společného faktoru $\alpha_j(x)$ a specifického faktoru $\beta_{ji}(x_j)$ tj.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha_j(x)\beta_{ji}(x_j). \tag{7.17}$$

To ale odpovídá tomu (viz 7.13), že $\alpha_j(x) = \frac{\partial V}{\partial v_j}$ a $\beta_{ji}(x_j) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$.

Věta 7.4 *Marginální míra substituce mezi dvěma komoditami i a k ležícími po řadě v množině N_j a v množině N_g, $g \neq j$ lze psát jako podíl dvou funkcí $\beta_{ji}(x_l)$ a $\beta_{gf}(x_g)$ právě tehdy, když funkce $u(x)$ užitku je silně separabilní. nezávislá na úrovni spotřeby vně množiny N_j tehdy a jen tehdy, když je funkce užitku slabě separabilní.*

7.1 Diferencovatelná poptávka

V lemmatu 5.5 jsou vysloveny podmínky pro zajištění existence spojité funkce poptávky $f(p, w)$, která je navíc homogenní stupně 0 jak v cenách tak i v bohatství. V této části se budeme věnovat důsledkům předpokladů diferencovatelnosti funkce užitečnosti pro funkci poptávky. Zejména bude studována diferencovatelnost funkce poptávky.

Omezíme se přitom na ten případ, kdy bude spotřební množina X otevřený kladný kužel $P \subseteq R^l$. Abychom obdrželi poptávkové svazky v P, budeme dále předpokládat, že preferenční uspořádání je monotonní a třídy C^2 a že uzávěry křivek indiference jsou celé obsaženy v P. Pak je za předpokladu pozitivních cen a pozitivního bohatství poptávková funkce korektně definována a její obor hodnot je podmnožinou otevřeného kladného kužele $P \subseteq R^l$. Navíc předpokládejme, že spotřebitel využije zcela své maximalizační preference. Lze tedy jeho výběr omezit na ty svazky $x \in P$, pro které platí $p^T x = w$.

Je-li funkce užitku spojitě diferencovatelná 2. stupně, je pak funkce poptávky $x = f(p, w)$ definovaná v 2.2 nebo v 5.1 určená jakožto řešení maximalizačního problému: maximalizujme funkci $u(x)$ za omezujících podmínek $p^T x = w$. Stačí pak utvořit Lagrangián

$$L(x, \lambda, p, w) = u(x) - \lambda(p^T x - w), \tag{7.18}$$

kde λ je *Lagrangeův multiplikátor*.

Podmínky prvního stupně pro nalezení stacionárních bodů funkce $u(x)$ nám pak dávají

$$\frac{\partial L}{\partial x} = u_x - \lambda p = 0, \tag{7.19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w - p^T x = 0. \tag{7.20}$$

Stejně jako v předchozím paragrafu budeme předpokládat, že parciální derivace $u_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Jsou tedy nutně jak u_x tak i p kladné vektory tj. prvky P, zejména tedy z 7.19 dostáváme, že Lagrangeův multiplikátor λ je kladné reálné číslo.

Nutná podmínka druhého řádu pro nabývání maxima je pak

$$z^T L_{xx} z \leq 0 \text{ pro všechna } z \in R^l \text{ taková, že } p^T z = 0. \tag{7.21}$$

Přitom $L_{xx} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x'}$ vyčísleno v bodě řešení systému 7.19 a 7.20. Za předpokladu ostré kvazikonkávnosti funkce užitku (viz 7.1) je tato podmínka splněna, protože $L_{xx} = U_{xx}$ a dále $p^T z = 0$ implikuje $u_x^T z = 0$ na základě 7.19 a kladnosti λ.

Systém 7.19 a 7.20 je systém $l+1$ rovnic v $2(l+1)$ proměnných – vektory $x, p \in R^l$ a skaláry λ a w. Pro náš účel budeme p a w považovat za libovolné, pevné a x a λ budou *neznámé* proměnné. Lemma 5.5 nám zaručuje existenci jediného řešení $x = f(p, w)$. Zejména tedy existuje jediné řešení pro λ, totiž $\lambda w = \lambda p^T x = u_x^T x = u_x^T f(p, w)$ tj. $\lambda = \Theta(p, w) = \frac{u_x^T f(p,w)}{w}$.

Snadno se ověří, že řešení systému 7.19 a 7.20 je v proměnné x invariantní vzhledem k monotonním rostoucím transformacím funkce $u(x)$, ale proměnná λ už ne. Pro takovouto transformaci F jsou podmínky 7.19 a 7.20 převedeny na

$$F' u_x - \lambda^* p = 0, \tag{7.22}$$

a

$$w - p^T x = 0. \tag{7.23}$$

Podělíme-li 7.22 výrazem $F' > 0$ a položíme-li $\lambda = \frac{\lambda^*}{F'}$, obdržíme rovnici 7.19. Evidentně je tedy řešení pro x invariantní, zatímco λ^* je Lagrangeův multiplikátor pro transformovaný problém.

Věnujme se nyní diferencovatelnosti funkcí $f(p, w)$ a $\Theta(p, w)$ v bodě (x^0, λ^0, p, w), kde $x^0 = f(p, w)$, $\lambda^0 = \Theta(p, w)$. Máme

$$\mathrm{d}p = \mathrm{d}\frac{u_x}{\lambda} = \frac{(U_{xx}\mathrm{d}x)\lambda - u_x \mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}(p, w) \tag{7.24}$$

tj.

$$U_{xx}^0 \mathrm{d}x - p\mathrm{d}\lambda - \lambda^0 \mathrm{d}p = 0. \tag{7.25}$$

Podobně,

$$\mathrm{d}w = \mathrm{d}(p^T x) = p^T \mathrm{d}x + x^T \mathrm{d}p(p, w), \tag{7.26}$$

tj.

$$\mathrm{d}w - p^T \mathrm{d}x - x^{0T} \mathrm{d}p = 0. \tag{7.27}$$

Přitom $U_{xx}^0 = U_{xx}(x^0)$ Po snadné úpravě pak obdržíme tzv. *základní maticovou rovnici poptávky spotřebitele*:

$$\begin{bmatrix} U_{xx}^0 & p \\ p^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ -\mathrm{d}\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^0 E & 0 \\ -x^{0T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}w \end{bmatrix}, \tag{7.28}$$

kde E je identická matice typu $l \times l$. Můžeme přitom formálně psát

Kapitola 3

Teorie ekonomické rovnováhy

Tato kapitola je podstatným způsobem založena na článku S. Smalea [27] a monografii G. Debreua [7] ve zpracování v rámci diplomové práce Jiřího Novotného [20].

1 Základní pojmy

1.1 Prostor komodit

Prostor komodit je základním pojmem, na kterém stojí i celý matematický aparát. Jeho podstatou je, že v ekonomice je daný počet komodit (komoditou nerozumíme jen zboží či služby, ale cokoliv, co lze použít ke směně, včetně práce, komodita je určena svými fyzickými vlastnostmi, datem a místem, kdy a kde je dostupná). Nechť je těchto komodit l, $l \in N$. Akci jednotlivého ekonomického subjektu (v našem případě i-tého spotřebitele nebo výrobce) můžeme zapsat jako komoditní vektor v komoditním prostoru R^l.

$$x_i = (x^1, ..., x^l), \quad x^h \in R \quad h = 1, ..., l$$

Pomocí tohoto vyjádření akce jednoho subjektu nyní můžeme popsat celou ekonomiku. Pokud je účastníků daný počet, např. m, pak budou všechny akce v ekonomice popsány vektorem komoditních vektorů z prostoru, $z \in R^{lm}$. Tedy

$$z = (x_1, ..., x_m), \quad x_i \in R^l \quad i = 1, ..., m.$$

1.2 Cenový prostor

Cenový prostor lze považovat za duální koncept ke konceptu prostoru komoditního. Jako nejlepší k ohodnocení komodit se hodí právě ceny. Tzn. že ke komoditnímu prostoru přiřadíme cenový vektor, přičemž jednotlivé složky si odpovídají (i-tá složka cenového vektoru značí cenu i-té komodity). Aby cenový prostor odpovídal nejlépe reálné situaci budeme uvažovat pouze nezáporné ceny - tuto množinu budeme značit $R_+ = [0, \infty)$. * Tedy

$$p = (p^1, ..., p^l), \quad p^h \in R_+ \quad h = 1, ..., l$$

je cenový vektor. Další podmínkou je, že cenový vektor je pro všechny účastníky stejný, takže vlastně reprezentuje cenový systém. Hodnotu komoditního vektoru v daném cenovém systému vyjádříme jako skalární součin obou vektorů.

$$w = p \cdot x = \sum_{h=1}^{l} p^h x^h$$

1.3 Agenti

Místo dřívějších, poněkud kostrbatých pojmů "účastník trhu, účastník ekonomiky", nyní zavedeme pojem "agent". Z ekonomického hlediska agentem rozumíme jak spotřebitele, tak výrobce. Pro odlišení těchto pojmů v matematickém konceptu zavedeme následující znaménkovou konvenci pro rozlišení vstupů a výstupů: pro spotřebitele budou vstupy kladné, výstupy záporné, pro výrobce naopak vstupy záporné a výstupy

*Komodity s nulovou cenou se v ekonomické teorii nazývají *volné*.

kladné. Díky této konvenci v matematickém vyjádření nemusíme rozlišovat mezi pojmy spotřebitel a výrobce vystačíme pouze s pojmem agent. Je zároveň ošetřena možnost, že agent je současně výrobcem i spotřebitelem.

1.4 Existence rovnováhy

Celková nabídka $S(p)$ a celková poptávka $D(p)$ jsou zobrazení z cenového do komoditního prostoru, tedy

$$S, D : R^l_+ - \{0\} \to R^l.$$

Předpokládáme, že poptávka i nabídka jsou homogenní, tj. platí

$$D(p) = D(\lambda p), \quad S(p) = S(\lambda p) \ \text{ pro } \lambda \in (0, \infty).$$

Ekonomika je v rovnováze právě tehdy, když žádný z agentů nechce změnit její stav. Veškeré vyrobené zboží je také poptáváno a spotřebitelé plně uspokojují své potřeby.

$$D(p) = S(p),$$

poptávka se rovná nabídce. Hledáme tedy vektor $p^* \in R^l_+ - \{0\}$, který splňuje

$$D(p^*) = S(p^*).$$

Označíme-li $Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l$, $Z(p) = D(p) - S(p)$ jako *převis poptávky*, pak hledáme takový vektor p^*, pro který

$$Z(p^*) = 0.$$

Zobrazení Z je spojité a homogenní, neboli

$$Z(\lambda p) = Z(p), \quad \text{pro všechna } \lambda > 0.$$

1.5 Walrasův zákon

Walrasův zákon říká, že celková hodnota poptávky je rovna celkové hodnotě nabídky. Hodnotu nabídky lze interpretovat jako rozpočtové omezení celé ekonomiky a hodnota převisu poptávky je nulová:

$$p \cdot Z(p) = 0 \quad \text{čili} \quad \sum_{h=1}^{l} p^h Z^h(p) = 0$$

Nechť je $S_+^{l-1} = \{p \in R_+^l; \|p\|^2 = \sum_{i=1}^{l} (p^i)^2 = 1\}$ prostor normalizovaných cenových systémů. Homogenita Z nám dovoluje zúžit definiční obor Z na $S_+^{l-1} \in R$. Podle Walrasova zákona je $Z(p)$ tečna S_+^{l-1} v bodě p, neboť vektor $Z(p)$ je kolmý k p.
Slabý Walrasův zákon říká, že pro každý cenový vektor $p \in R_+^l$ platí:

$$p \cdot Z(p) \leq 0.$$

Definice 1.1
Nechť $a \in R$ a $v \in R^l$, pak zápis $v < a$ znamená, že

$$v^h < a, \quad \text{pro } h = 1, ..., l.$$

Nechť $b \in R^l$ a $v \in R^l$, pak zápis $v < b$ znamená, že

$$v^h < b^h, \quad \text{pro } h = 1, ..., l.$$

Podobně i pro $=, \leq, >, \geq$.

Věta 1.1 (Debreu-Gale-Nikaidô)
Nechť je $Z : R_+^l - \{0\} \to R^l$ spojité a splňuje slabý Walrasův zákon. Pak existuje $p^* \in R_+^l - \{0\}$ takové, že

$Z(p^*) \leq 0$.
Důkaz viz [27, strana 338-339].

Poznámka 1.1
Pokud $Z : R^l_+ - \{0\} \to R_+$ splňuje Walrasův zákon a pro nějaké p^* platí $Z(p^*) \leq 0$, pak buď $Z^h(p^*) = 0$ nebo $p^{*h} = 0$.

1.6 Aproximace vícehodnotových zobrazení

$S(T)$ značí množinu konvexních podmnožin množiny $T \subseteq R^l$.

Definice 1.2
Nechť je $K \subseteq R^l$ kompaktní, $T \subseteq R^l$ kompaktní a konvexní. Pak zobrazení $\varphi : K \to S(T)$ nazýváme *korespondence* z K do T.
Graf korespondence φ je množina

$$\Gamma_\varphi = \{[x, y] \in K \times T;\ y \in \varphi(x)\}.$$

ε-okolí grafu Γ_φ definujeme takto:

$$B_\varepsilon(\Gamma_\varphi) = \{y \in K \times T;\ \mathrm{dist}(y, \Gamma_\varphi) \leq \varepsilon\}.$$

Věta 1.2
Jestliže je φ korespondence z K do T s kompaktním grafem Γ_φ, potom pro dané $\varepsilon > 0$ existuje spojité zobrazení $f : K \to T$ takové, že $\Gamma_f \subset B_\varepsilon(\Gamma_\varphi)$.
Důkaz viz [6].

1.7 Vlastnosti konvexních množin a obalů

Lemma 1.3
Součet dvou konvexních množin R^l je konvexní množina.

Důkaz:
Nechť $a_1, a_2 \in A$ a $b_1, b_2 \in B$, kde A a B jsou konvexní množiny. Pak platí

$$t(a_1 + b_1) + (1 - t)(a_2 + b_2) = (ta_1 + (1 - t)a_2) + (tb_1 + (1 - t)b_2) \in A + B.$$

■

Lemma 1.4
Nechť $\widetilde{Y_j}$ značí konvexní obal množiny Y_j v R^l, pak

$$\sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y_j} = \widetilde{\sum_{j=1}^{m} Y_j}.$$

Důkaz:
Stačí dokázat, že $\widetilde{A} + \widetilde{B} = \widetilde{A + B}$. Tvrzení pro více množin se pak již jednoduše dokáže pomocí indukce.
Podle lemmatu 1.3 je $\widetilde{A} + \widetilde{B}$ konvexní množina. Protože $\widetilde{A + B}$ je nejmenší konvexní množina obsahující $A + B$, platí

$$\widetilde{A} + \widetilde{B} \supseteq \widetilde{A + B}.$$

Důkaz opačné inkluze je složitější.
Pro množinu $X \subseteq R^l$ definujeme

$$X_n = \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i;\ x_i \in X,\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\},$$

tedy množina X_n je množinou všech konvexních kombinací n prvků z množiny X. Nechť $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$ a $t, s \in R$ takové, že $t, s \in (0, 1)$.
Platí

$$\begin{aligned} &ta_1 + (1-t)a_2 + sb_1 + (1-s)b_2 = \\ &\qquad ta_1 + tb_1 + (s-t)b_1 + (1-s)b_2 + (1-s)a_2 + (s-t)a_2 = \\ &\qquad\qquad t(a_1 + b_1) + (s-t)(a_2 + b_1) + (1-s)(a_2 + b_2). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dále dostáváme

$$\widetilde{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_{2^r}.$$

Z platnosti vztahu (1.1) vyplývá, že

$$A_2 + B_2 \subseteq (A+B)_3 \subseteq \widetilde{A+B}. \tag{1.2}$$

Dále platí

$$X_{2^{k+1}} = (X_{2^k})_2 \tag{1.3}$$

Inkluze $X_{2^{k+1}} \supseteq (X_{2^k})$ je zřejmá. Obráceně:
Nechť $x \in X_{2^{k+1}}$. Pak

$$x = \sum_{i=1}^{2^{k+1}} t_i x_i; \text{ kde } \sum_{i=1}^{2^{k+1}} t_i = 1, \ t_i \geq 0.$$

Pokud $0 < \sum\limits_{i=1}^{2^k} t_i < 1$, pak

$$x = \left(\sum_{i=1}^{2^k} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2^k} \frac{t_i}{\sum\limits_{i=1}^{2^k} t_i} x_i\right) + \left(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} t_i\right)\left(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{t_i}{\sum\limits_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} t_i} x_i\right) \in (X_{2^k})_2 .$$

Pokud $\sum_{i=1}^{2^k} t_i = 0$, pak

$$x = 0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k} x_i \right) + 1 \cdot \left(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} t_i x_i \right) \in (X_{2^k})_2 \,.$$

Analogicky pro $\sum_{i=1}^{2^k} t_i = 1$.
Nyní indukcí dokážeme, že

$$A_{2^k} + B_{2^k} \subseteq \widetilde{A+B}.$$

Pro $k = 1$ to plyne z (1.2).
Dále pokračujeme indukcí. Předpokládáme, že inkluze platí pro k. Pro $k+1$ pomocí vztahů (1.2) a (1.3) dostaneme

$$\begin{aligned} A_{2^{k+1}} + B_{2^{k+1}} &= (A_{2^k})_2 + (B_{2^k})_2 \subseteq (A_{2^k} + B_{2^k})_3 \subseteq \\ &\subseteq (\widetilde{A+B})_3 = \widetilde{A+B} \end{aligned}$$

Tedy platí

$$\begin{aligned} \widetilde{A} + \widetilde{B} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2^k} + \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2^k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{2^k} + B_{2^k}) \subseteq \\ &\subseteq \widetilde{A+B}. \end{aligned}$$

Rovnost $\widetilde{A} + \widetilde{B} = \widetilde{A+B}$ tedy platí a lemma 1.4 je dokázáno.

■

Lemma 1.5
Nechť $\overline{A}$ značí uzávěr množiny A. Pak platí

$$\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A+B}.$$

Důkaz:
Nechť $a \in \overline{A}$ a $b \in \overline{B}$ a pro $a_n \in A$, resp. $b_n \in B$ platí $a_n \to a$, resp. $b_n \to b$. Pak platí, že

$$a_n + b_n \in A + B$$

a zároveň

$$a_n + b_n \to a + b,$$

z čehož vyplývá

$$a + b \in \overline{A + B}.$$

■

2 Výrobce

2.1 Úvod

Nyní se budeme zabývat výrobní stranou ekonomiky. Hlavní rolí výrobce je sestavit a uskutečnit svůj výrobní plán. Pro každého z $n, j = 1, \ldots, n$ výrobců to znamená určit množství všech svých vstupů a výstupů. Bod $y_j \in R^l$ se nazývá *produkce* a označuje všechny dosažitelné i nedosažitelné produkce daného výrobce, množina dosažitelných produkcí se značí Y_j a nazývá se *produkční množina*. *Celková produkční množina* a *celková dosažitelná produkční množina* vzniknou sečtením dílčích množin, tedy:

$$y = \sum_{j=1}^{n} y_j \quad \text{a} \quad Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$$

Jelikož tímto sečtením dojde k odstranění přesunů komodit mezi výrobci, představuje y čistý výstup ekonomiky.

2.2 Vlastnosti produkčních množin

O produkčních množinách předpokládáme (na některých místech výkladu) následující:

(a) Y_j je uzavřená.
Nechť je y_j^q posloupnost produkcí dostupných j-tému výrobci a pokud $y_j^q \to y_j^0$, pak je i y_j^0 dostupná j-tému výrobci.

(a') Y je uzavřená.

(b) $0 \in Y_j$ (možnost žádné produkce)
Výrobce má možnost nedělat nic.

(b') $0 \in Y$.

(c) $Y \cap (-Y) = \{0\}$ (podmínka nenávratnosti)
Tato podmínka říká, že výroba je "jednosměrný proces", kdy výstup již nelze znovu "rozložit" zpět na původní vstupy.

(d) Y_j je konvexní.
Pokud jsou y_j^1 a y_j^2 dosažitelné produkce, je dosažitelný i jejich vážený průměr $ty_j^1 + (1-t)y_j^2$ pro libovolné $t \in (0,1)$.

(d') Y je konvexní.

(e) $Y \supset (-R_+^l)$ (podmínka volného použití)
Celková produkce s nulovými výstupy je dosažitelná. Tzn. že výrobci používají všechny vyprodukované komodity jako vstupy.

(f) $Y - R_+^l \subset Y$
Tato vlastnost je důsledkem vlastností (a'), (d') a (e) pro Y, viz [7], strana 42.

Z těchto uvedených podmínek vychází Arrowova-Debreuova věta uvedená v následující kapitole. Produkční množiny mají několik dalších vlastností.

(g) Nejprve nechť $R^l_+ = \{x \in R^l; x \geq 0\}$ a $Y \subset R^l$, pak platí:
$Y \cap R^l_+ \subset \{0\}$ (nemožnost volné produkce)
Výstupy dosažitelné celkové produkce s nulovými vstupy jsou nulové.

(h) $(Y_j + Y_j) \subset Y_j$ (aditivita)
Pokud jsou dva výrobní plány dosažitelné samostatně, pak jsou dosažitelné i společně.

(i) Y_j je kužel s vrcholem v bodě 0. (konstantní výnosy z rozsahu)
Tzn. $y_j \in Y_j \Rightarrow ty_j \in Y_j, t > 0$. Poměry vstupů a výstupů ve výrobě jsou stejné, ale rozsah může být libovolně měněn.

2.3 Maximalizace zisku

Každý racionálně uvažující a jednající výrobce (dále budeme uvažovat pouze tyto) se snaží maximalizovat zisk z prodeje svých výstupů. V daném cenovém systému p a při produkci y_j se tedy snaží maximalizovat *ziskovou funkci* $\pi_j(p, y_j) : Y_j \to R$ definovanou

$$\pi_j(p, y_j) = p \cdot y_j.$$

Pro tuto funkci platí

$$\pi_j(tp, y_j) = t\pi_j(p, y_j).$$

Celkový zisk všech výrobců je $p \cdot y$. Výrobce si vybírá takovou produkci z produkční množiny Y_j, která maximalizuje jeho zisk, tato se pak nazývá *rovnovážná produkce*. Pokud $p \neq 0$ a y_j je produkce maximalizující zisk, pak množina Y_j leží v uzavřeném poloprostoru pod nadrovinou $H = \{y \in R^l, p \cdot y = p \cdot y_j\}$ určenou normálovým vektorem p. Množina maxim je dána průnikem Y_j a H.

Nabídkou j-tého výrobce rozumíme korespondenci $S_j : R^l - \{0\} \rightarrow Y_j$. Výsledkem je množina všech dosažitelných produkcí, které maximalizují výrobcův zisk, tedy

$$S_j(p) = \{\overline{y} \in Y_j;\ p \cdot \overline{y} = \max_{y \in Y_j} p \cdot y\}.$$

Celková nabídka je korespondence $S : R^l - \{0\} \rightarrow Y$ definována takto:

$$S(p) = \sum_{j=1}^{n} S_j(p).$$

Celková produkce y maximalizuje zisk na Y tehdy a jen tehdy maximalizuje--li zisk každé y_j na Y_j.

3 Spotřebitel

3.1 Úvod

Spotřebitel je v ekonomice charakterizován svými preferencemi a svým rozpočtovým omezením. Jeho hlavní charakteristiky nám podávají *spotřební množina* X_i a jeho preference. Spotřební množina X_i je množina všech dosažitelných spotřeb, spotřebu určuje bod x_i komoditního prostoru. Spotřebitelovou rolí v ekonomice je vybrat si a uskutečnit spotřební plán pro budoucnost, tzn. určit množství vstupů a výstupů.

3.2 Vlastnosti spotřebních množin

Uvažujme m spotřebitelů. Spotřební množinu i-tého spotřebitele ($i = 1, 2, ...,$ m) označme X_i. Platí pro ni následující podmínky:

(a) X_i je uzavřená množina.

(b) X_i je zdola ohraničená.
To znamená, že existuje takové $d_i \in R^l$, že $X_i \subset \{x \in R^l \mid x \geq d_i\}$, což zapisujeme také $X_i \geq d_i$.

(c) X_i je konvexní.
Tzn., pokud x_i^1 a x_i^2 jsou dvě možné spotřeby i-tého spotřebitele, je jeho možnou spotřebou i jejich vážený průměr $tx_i^1 + (1-t)x_i^2,\ t \in (0,1)$.

3.3 Preference spotřebitele

Základem zkoumání chování spotřebitele při výběru optimálního spotřebního koše jsou spotřebitelovy preference. Na jejich základě spotřebitel rozhoduje, která ze spotřeb je pro něj "lepší" nebo "horší". Preference zahrnují faktory biologické, psychologické, kulturní, společenské a další. Tyto preference popisuje úplná preferenční relace "$\preceq$". Výraz $x_i^1 \preceq x_i^2$ znamená, že spotřeba x_i^1 je pro spotřebitele "nejvýše tak dobrá" jako spotřeba x_i^2. Tato relace je reflexivní a tranzitivní.
Pro každé $\overline{x_i} \in X_i$ jsou množiny $\{x_i \in X_i; x_i \preceq_i \overline{x_i}\}$ a $\{x_i \in X_i; x_i \succeq_i \overline{x_i}\}$ uzavřené v X_i (podmínka spojitosti). Výraz $x_i^1 \sim x_i^2$ znamená, že spotřebitel je k oběma výběrům indiferentní, tedy že nemůže říci, který je "lepší" a který "horší". Tato relace je navíc i symetrická. Pro spotřebitelovy koše x_i^1 a x_i^2 platí $x_i^1 \sim x_i^2$ právě tehdy, když

$$x_i^1 \preceq x_i^2 \ \text{ a } \ x_i^1 \succeq x_i^2.$$

Bod $x_i \in X_i$ se nazývá *nasycení*, pokud neexistuje lepší dostupná spotřeba.

3.4 Užitková funkce

Spotřebitelovy preference reprezentuje *užitková funkce*† $u_i : X_i \to R$. Tato funkce je rostoucí a platí pro ni následující podmínka:

$$(x \preceq y) \Leftrightarrow (u(x) \leq u(y))$$

Užitková funkce má následující vlastnosti:

(a) u_i nemá maximum (podmínka nenasycenosti). $\forall x_i \in X_i, \exists \overline{x_i} \in X_i : x_i \preceq_i \overline{x_i}$.

(b) u_i splňuje podmínku konvexity: pokud $x, x' \in X_i$ a $u_i(x) > u_i(x')$, potom $u_i(tx + (1-t)x') > u_i(x')$ pro každé $t \in (0, 1)$.

Poznámka 2.1
Funkce u_i je konkávní a přitom splňuje podmínku konvexity (platí zákon klesájícího mezního užitku), naopak konvexní funkce podmínku konvexity splňovat nemusí.

Důležitým pojmem pro studium chování spotřebitele je *indiferenční plocha*, kterou definujeme jako vrstevnici funkce u_i, $\{x \in R^l, u_i(x) = c\}$. V dvourozměrném případě mluvíme o indiferenční křivce, ta vyjadřuje všechny kombinace daných dvou komodit, které mají pro daného spotřebitele stejný užitek.

3.5 Rozpočtové omezení

Spotřebitel samozřejmě nemůže spotřebovávat do nekonečna, je ohraničen svým *rozpočtovým omezením*. Hodnota w_i těchto prostředků spotřebitele omezuje při výběru kombinací komodit z komoditního prostoru, a to tak, že nemůže tuto hodnotu překročit. Spotřebiteli jsou tedy dostupné pouze ty komoditní vektory,

---

†Nutnou a postačující podmínkou existence spojité funkce užitku je, aby množina $A = \{(x, y) \in R^l \times R^l; x \preceq y\}$ byla vzhledem k $R^l \times R^l$ uzavřená.

jejichž hodnota je menší nebo rovna hodnotě jeho prostředků w_i. V daném cenovém systému pak rozpočtové omezení definujeme jako skalární součin

$$p \cdot x = \sum_{h=1}^{l} p^h \cdot x_i^h = w_i; \quad p^h, x_i^h \in R, \quad w_i \in R,$$

přičemž p^h jsou složky cenového vektoru a x_i^h složky komoditního vektoru.

Nadrovina $\{a \in R^l; \sum_{h=1}^{l} p^h \cdot a^h = w_i\}$ se nazývá *rozpočtová nadrovina*. Nerovnost $p \cdot x_i \leq w_i$ říká, že x_i leží v poloprostoru pod rozpočtovou nadrovinou.

Každý spotřebitel disponuje majetkem $e_i \in X_i$, přičemž existuje takové $x_i \in X_i$, že platí $e_i > x_i$. Pokud uvažujeme ekonomiku se soukromými vlastníky, potom θ_{ij} značí podíl i-tého agenta v j-té firmě s výrobou $y_j \in R^l$. Je zřejmé, že $0 \leq \theta_{ij} \leq 1$ a $\sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} = 1$. Pro daný cenový systém p je bohatství i-tého agenta

$$w_i = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} p \cdot y_j.$$

Vektor $w \in R^m$ se nazývá *rozložení bohatství* a jeho složkami jsou hodnoty bohatství jednotlivých spotřebitelů (w_i).

3.6 Rovnováha spotřebitele

Spotřebitel dosahuje optima, pokud si vybere takový spotřební koš x_i, který mu v preferenčním uspořádání "$\preceq$" přináší největší užitek, a zároveň platí, že výdaje $p \cdot x_i$ na tento spotřební koš jsou nejvýše rovny jeho bohatství w_i. Námi uvažovaný racionálně jednající spotřebitel si samozřejmě takový koš vybere a bude jej na trhu poptávat.

Spotřebitelovou *poptávkou* rozumíme korespondenci $D_i(p) : R^l - \{0\} \to X_i$ definovanou jako množinu všech dosažitelných spotřeb $x_i \in X_i$, v nichž užitková funkce $u_i(x_i)$ nabývá svého maxima na rozpočtové množině $B_i = \{\overline{x} \in X_i;\ p \cdot \overline{x} \leq w_i\}$, tedy

$$D_i(p) = \{\overline{x} \in B_i;\ u_i(\overline{x}) = \max_{x \in B_i} u_i(x)\}.$$

Všechny body z množiny $D_i(p)$ jsou navzájem indiferentní a pro všechny $x'_i \in D_i(p)$ a $x_i \in B_i$ platí nerovnost $x_i \preceq_i x'_i$. Pro poptávku samozřejmě platí:

$$D_i(tp) = D_i(p),\ \text{pro libovolné } t > 0.$$

Celková poptávka je korespondence $D(p) : R^l - \{0\} \to \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ definovaná takto:

$$D(p) = \sum_{i=1}^{n} D_i(p).$$

4 Rovnováha ekonomiky

4.1 Definice rovnováhy

Rovnováha ekonomiky je její stav (x, y, p), kde $x \in \prod_{i=1}^{m} X_i,\ y \in \prod_{j=1}^{n} Y_j,\ p \in S_+^{l-1} = \{p \in R_+^l; \|p\|^2 = \sum_{i=1}^{l} (p_i)^2 = 1\}$, který splňuje následující podmínky:

(A) Dosažitelnost, neboli $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} e_i$.

(B) Každý spotřebitel se snaží maximalizovat svůj užitek, neboli x_i je spotřeba, při níž u_i dosahuje maxima na rozpočtové množině $B_i = \{\overline{x} \in X_i; p \cdot \overline{x} \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p \cdot y_j\}$.

(C) Každý výrobce se snaží maximalizovat svůj zisk, neboli y_j je výroba, při níž je $\pi_j(p, y_j) = p \cdot y_j$ maximální na Y_j.

4.2 Arrowova-Debreuova věta

Arrowova-Debreuova věta:
Pro ekonomiku splňující podmínky 2.2 (a'), (b'), (c), (d'), (e), (f) a 3.2 (a), (b), (c), 3.4 (a), (b) vždy existuje rovnovážný stav.
Než dokážeme Arrowovu-Debreuovu větu, uvedeme a dokážeme větu 4.1 a větu 4.6, které splňují silnější předpoklady.

Definice 4.1:
Konvexní množina K se nazývá *striktně konvexní*, jestliže pro všechna $x, y \in K$, $x \neq y$ a $t \in (0,1)$ je $tx + (1-t)y \in K^\circ$, kde K° je vnitřek K.

Věta 4.1:
Předpokládejme nyní, že ekonomika popsaná výše splňuje kromě předpokladů Arrowovy-Debreuovy věty tyto dodatečné podmínky:

(1) Každá Y_j je uzavřená a striktně konvexní.

(2) Každá u_i splňuje podmínku *ostré konvexity* tj., pokud $u_i(x) \geq c$, $u_i(x') \geq c$, $x \neq x'$ a $0 < t < 1$, potom $u(tx + (1-t)x') > c$.

Potom existuje rovnovážný stav.

Poznámka 4.1
Podmínka (2) z věty 4.1 neznamená, že u_i je striktně konvexní. Dále si uvědomme, že podmínka ostré kon-

vexity je ekvivalentní s tím, že funkce je ostře kvazikonkávní (viz str. 73).

K důkazu věty 4.1 budeme potřebovat několik lemmat.

Lemma 4.2: (základní odhad)
Nechť je Y uzavřená konvexní podmnožina R^l s vlastnostmi $Y \cap (-Y) = \{0\}$ a $Y \supset -R^l_+$. Pak pro dané $b \in R_l$ a n přirozené existuje konstanta c taková, že pokud $y_1, ..., y_n \in Y$ a $\sum_{j=1}^{n} y_j \geq b$, potom $\| y_j \| < c$ pro všechna j.

K důkazu tohoto lemmatu použijeme následující tři tvrzení. V nich označme $K = \{y \in Y; \|y\| = 1\}$.

Tvrzení 4.1:
Počátek 0 prostoru R^l neleží v konvexním obalu množiny K.

Důkaz:
Předpokládejme, že $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r = 0$ pro $x_i \in K, 0 < \alpha_i < 1,\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$. Pak

$$-\alpha_1 x_1 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r$$

Protože $0, x_2, \ldots, x_r \in Y$ a Y je konvexní, leží výraz na pravé straně v Y. Výraz $-\alpha_1 x_1$ lze rozepsat takto:

$$-\alpha_1 x_1 = -(\alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1) \cdot 0)$$

Tedy $-\alpha_1 x_1$ leží rovněž v $-Y$. Z toho vyplývá, že $\alpha_1 x_1 \in Y \cap (-Y) = \{0\}$. Zároveň $\|x_1\| = 1$, tedy $\alpha_1 = 0$, což je spor s předpoklady. 0 tedy nepatří do konvexního obalu množiny K.

■

Tvrzení 4.2:
Existuje $q = (q^1, q^2, \ldots, q^l) \in R^l,\ q^h > 0$ pro všechna h, takové, že pro všechna $x \in K$ platí $q \cdot x < 0$.

Důkaz:
Jestliže $A \subseteq R^l$ je kompaktní konvexní množina a bod $b \in R^l$ neleží v A, pak lze A od b oddělit nadrovinou $q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_l x_l = c$. Nechť je nyní konkretně A konvexním obalem množiny K, pak dle tvrzení 1 platí $0 \notin A$. Existuje tedy nadrovina, která odděluje A a 0. Tato nadrovina má rovnici $q \cdot x = c$. Pro všechna $x \in A$ platí následující nerovnosti:

$$\begin{aligned} q \cdot x &< c \\ 0 = q \cdot 0 &> c \end{aligned}$$

Tedy pro všechna $x \in K \subseteq A$ platí $q \cdot x < 0$.
Navíc pro všechny vektory v^h standardní báze v R^l platí

$$-v^h \in K \quad \text{a} \quad -q^h = q \cdot (-v^h) < 0.$$

Tedy $q^h > 0$, pro všechna h.

■

Tvrzení 4.3:
Existují konstanty $\varepsilon > 0$ a $\beta > 0$ tak, že pro všechna $x \in Y$, platí

$$q \cdot x \leq \beta + \varepsilon - \varepsilon \|x\|.$$

Důkaz:
Nechť $q \in R^l$ je vektor z tvrzení 4.2. Nejprve definujme:

$$\begin{aligned} \beta &= \max\{q \cdot x; \|x\| \leq 1\} \\ -\varepsilon &= \max\{q \cdot x; x \in K\} \end{aligned}$$

Nyní rozlišíme dvě možnosti:
(1) Nechť $\|x\| \leq 1$. Potom

$$q \cdot x \leq \beta \leq \beta + \varepsilon - \varepsilon\|x\|,$$

neboť $\varepsilon - \varepsilon\|x\| \geq 0$.
(2) Nechť $\|x\| > 1$, pak $\frac{x}{\|x\|} \in K$ a platí:

$$-\varepsilon \geq q \cdot \frac{x}{\|x\|}.$$

Tedy

$$-\varepsilon\|x\| \geq q \cdot x$$

a odtud

$$q \cdot x \leq -\varepsilon\|x\| < -\varepsilon\|x\| + \beta + \varepsilon,$$

neboť

$$\beta + \varepsilon > 0.$$

Uvedená nerovnost tedy platí.

■

Důkaz lemmatu 4.2:
Nechť $q \in R^l$ je vektor z tvrzení 4.2.
Předpokládejme, že $\sum_{j=1}^{n} y_j \geq b$ pro $y_j \in Y$ Potom platí:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)^h \geq b^h.$$

Nerovnost vynásobíme číslem $q^h > 0$ a dostaneme

$$\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)^h q^h \geq b^h q^h.$$

Nyní vše sečteme podle h a výsledkem je nerovnost

$$\sum_{j=1}^{n} y_j q \geq b \cdot q.$$

Odtud dostáváme:

$$b \cdot q \leq \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot q \leq \sum_{j=1}^{n} ((\beta + \varepsilon) - \varepsilon \|y_j\|) = n(\beta + \varepsilon) - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \|y_j\|$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \sum_{j=1}^{n} \|y_j\| + b \cdot q &\leq n(\beta + \varepsilon) \\
\sum_{j=1}^{n} \|y_j\| &\leq \tfrac{n(\beta+\varepsilon) - q \cdot b}{\varepsilon} \\
\|y_j\| &\leq \tfrac{n(\beta+\varepsilon) - q \cdot b}{\varepsilon} = c
\end{aligned}$$

■

Lemma 4.3:
Nechť $i = 1, ..., m$ a nechť $X_i \geq d_i$. Pro dané $c_1 \in R^l$ existuje $a > 0$ tak, že pro všechna $x_i \in X_i$ taková, že

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq c_1,$$

platí $\| x_i \| < a$, pro všechna i.

Důkaz:
Platí následující nerovnost:

$$\begin{aligned}(d_i)^h &\leq (x_i)^h = (x_1 + \ldots + x_m)^h - (x_1)^h - \ldots - (x_{i-1})^h - (x_{i+1})^h - \ldots \\ &\ldots - (x_m)^h \leq (c_1)^h - (d_1)^h - \ldots - (d_{i-1})^h - (d_{i+1})^h - \ldots - (d_m)^h\end{aligned}$$

Tedy pro $|(x_i)^h|$ platí následující:

$$\begin{aligned}|(x_i)^h| &\leq \max(|(d_1)^h|, \ldots, |(d_{i-1})^h|, |(d_{i+1})^h|, \ldots, |(d_m)^h|, \\ &|(c_1)^h - \sum_{k=1}^{m}(d_k)^h + (d_1)^h|, |(c_1)^h - \sum_{k=1}^{m}(d_k)^h + (d_2)^h|, \ldots, \\ &|(c_1)^h - \sum_{k=1}^{m}(d_k)^h + (d_m)^h|) = a^h\end{aligned}$$

Tedy $|(x_i)^h| \leq a^h$. Definujme $a = \sqrt{\sum_{k=1}^{l}(a^h)^2 + 1}$. Z toho dostáváme

$$\|x_i\|^2 \leq \sum_{h=1}^{l}(x_i^h)^2 = \sum_{h=1}^{l}(a^h)^2 < \sum_{h=1}^{l}(a^h)^2 + 1 = a^2.$$

■

Nabídka firmy j je definována jako $S_j(p) = \{\overline{y} \in Y_j;\ p \cdot \overline{y} = \max_{y \in Y_j} p \cdot y\}$. Nyní nechť $b = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i$ a zvolme c stejně jako v Lemmatu 4.2 tak, že když $\sum_{j=1}^{m} y_j \geq b$, potom $\| y_j \| < c$, pro všechna j. Nechť $\widehat{Y}_j = Y_j \cap D_c$, kde $D_c = \{y \in D^l; \| y \| \leq c\}$. Pro $p \in R^l_+ - \{0\}$, je $\widehat{S}_j(p) = \overline{y} \in \widehat{Y}_j$ takové, že funkce

$\pi(p, y) = p \cdot y$, má na $\widehat{Y}_j$ maximum v $\overline{y}$. Potom se $\widehat{S}_j$ nazývá *falešná nabídka* firmy j.

Lemma 4.4:
Funkce $\pi(p, y) = p \cdot y$ nabývá na $\widehat{Y}_j$ svého maxima právě v jednom bodě. Tedy funkce $\widehat{S}_j : R^l_+ - \{0\} \to \widehat{Y}_j$ je dobře definována. Dále je spojitá a platí pro ni:

(1) $\widehat{S}_j(\lambda p) = \widehat{S}_j(p)$ pro $\lambda > 0$.

(2) Jestliže $\|\widehat{S}_j(p)\| < c$, pak $\pi(p, y) = p \cdot y$ nabývá svého maxima na Y_j rovněž v bodě $\widehat{S}_j(p)$.

Důkaz lemmatu 4.4:
Sporem dokážeme, že funkce $\pi(p, y) = p \cdot y$ nabývá na $\widehat{Y}_j$ svého maxima právě v jednom bodě.
Nechť $\pi(p, y) = p \cdot y$ nabývá svého maxima v bodech $\overline{y}$ a $\widetilde{y}$. Musíme dokázat, že $\overline{y}$ a $\widetilde{y}$ leží na hranici. Kdyby $\overline{y} \in \widehat{Y}_j^\circ$, pak by pro všechna $t > 0$ bylo

$$(\overline{y} + tp) \cdot p = \overline{y}p + t\|p\|^2 > \overline{y}p$$

$\overline{y}$ a $\widetilde{y}$ musí tedy ležet na hranici a platí

$$p\overline{y} = p\widetilde{y} = q.$$

Předpokládejme, že $\overline{y} \neq \widetilde{y}$. Potom funkce $p \cdot y$ nabývá svého maxima ve všech bodech úsečky $\overline{y}\widetilde{y}$.
Platí tedy

$$p(t\overline{y} + (1-t)\widetilde{y}) = tp\overline{y} + (1-t)p\widetilde{y} = tq + (1-t)q = q.$$

Body $t\overline{y} + (1-t)\widetilde{y}$ musí tedy ležet na hranici, což je ovšem spor se striktní konvexitou množiny $Y_j \cap D_c$.
Důkaz spojitosti funkce $\widehat{S}_j : R^l_+ - \{0\} \to \widehat{Y}_j$ vynecháme.
(1) Funkce $\pi(p, y) = py$ a $\pi(\lambda p, y) = \lambda py$ nabývají svého maxima ve stejných bodech množiny $\widehat{Y}_j$. Tedy $\widehat{S}_j(\lambda p) = \widehat{S}_j(p)$.
(2) Předpokládejme, že existuje $\overline{y} \in Y_j \backslash \widehat{Y}_j$ takové, že $p\overline{y} > p\widehat{S}_j(p)$.

Uvažujme úsečku $\overline{y}\ \ \widehat{S}_j(p)$. Tato úsečka leží celá v Y_j, neboť Y_j je konvexní. Navíc existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro $t \in (0, \varepsilon)$ je

$$\overline{\overline{y}} = (1-t)\widehat{S}_j(p) + t\overline{y} \in \widehat{Y}_j,$$

neboť $\|\widehat{S}_j(p)\| < c$.
Potom

$$\pi(p, \overline{\overline{y}}) = p\overline{\overline{y}} = (1-t)p \cdot \widehat{S}_j(p) + tp\overline{y} > (1-t)p \cdot \widehat{S}_j(p) + tp \cdot \widehat{S}_j(p) = p \cdot \widehat{S}_j(p),$$

což je spor s tím, že $\widehat{S}_j(p)$ je maximum $\pi(p, y)$ na $\widehat{Y}_j$.

■

Poptávkou i-tého spotřebitele rozumíme $D_i(p) = \{\overline{x} \in X_i;\ u_i(\overline{x}) = \max_{x \in X_i} u_i(x)$ a zároveň $p \cdot \overline{x} \le w_i\}$. Definujme $\widehat{w}_i : R^l_+ - \{0\} \to R$ jako *falešný příjem* spotřebitele i rovností $\widehat{w}_i(p) = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p \cdot \widehat{S}_j(p)$. Funkce $\widehat{w}_i$ je spojitá. Nechť jsou $b = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i$, c jako v lemmatu 4.2 a e *počáteční obdaření agenta*, vyberme $c_1 \in R^l$ tak, že $\sum_{j=1}^{n} y_j + e \le c_1$, pokud $\|y_j\| < c$ pro všechna j. Vyberme a podle Lemmatu 4.3 a nechť $\widehat{X}_i = X_i \cap D_a$.

Falešná poptávka $\widehat{D}_i : R^l_+ - \{0\} \to \widehat{X}_i$ je takové $\overline{x}$, že $u_i(\overline{x}) = \max\{u(x); x \in \widehat{X}_i, p \cdot x \le \widehat{w}_i(p)\}$ a $\widehat{B}_p = \{x \in X_i; p \cdot x \le \widehat{w}_i(p)\}$.

Lemma 4.5:
(1) Funkce u_i nabývá na $\widehat{B}_p$ svého maxima právě v jednom bodě, tedy funkce
$\widehat{D}_i(p) : R^l_+ - \{0\} \to \widehat{X}_i$ je dobře definovaná.
(2) $\widehat{D}_i(p)$ je spojitá.

(3) $\widehat{D}_i(\lambda p) = \widehat{D}_i(p)$.
(4) Je-li $\|\widehat{D}_i(p)\| < a$, pak $\widehat{D}_i(p)$ je bodem, kde u_i nabývá svého maxima na množině

$$B_p = \{x \in X_i; p \cdot x \leq \widehat{w}_i(p)\}$$

a $p \cdot D_i(p) = \widehat{w}_i(p)$.

Důkaz:
(1) $\widehat{B}_p$ je kompaktní, proto u_i nabývá na $\widehat{B}_p$ svého maxima. Předpokládejme, že u_i nabývá svého maxima v bodech $\overline{x}$ a $\widehat{x}$, $u_i(\overline{x}) = u_i(\widehat{x})$. Jelikož je $\widehat{B}_p$ konvexní, pak úsečka $t\overline{x} + (1-t)\widehat{x},\ t \in (0,1)$ leží v $\widehat{B}_p$. Z podmínky striktní konvexity pro u_i plyne

$$u(t\overline{x} + (1-t)\widehat{x}) > u(\overline{x}) = u(\widehat{x}), \text{ pro } t \in (0,1),$$

což je spor s tím, že u_i nabývá v bodech $\overline{x}$ a $\widehat{x}$ svého maxima.
(2) Důkaz vynecháme.
(3) $\widehat{D}_i(\lambda p)$ nabývá maxima na množině $\widehat{B}_{\lambda p}$, pro niž platí

$$\begin{aligned}\widehat{B}_{\lambda p} &= \{x \in \widehat{X}_i; \lambda px \leq \widehat{w}_i(\lambda p) = \lambda pe_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\lambda p\widehat{S}_j(p)\} \\ &= \{x \in \widehat{X}_i; px \leq \widehat{w}_i(p) = pe_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}p\widehat{S}_j(p)\} = \widehat{B}_p\end{aligned}$$

Hledáme tedy bod maxima stejné funkce na stejné množině.
(4) Nechť $\overline{x} \in X_i \cap D_a \cap \{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\}$ s normou $\|\overline{x}\| < a$, navíc je to bod, kde u_i nabývá maxima na $\widehat{B}_p$. Dále mějme bod $\widehat{x} \in X_i \cap \{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\}$. Předpokládejme, že $u_i(\widehat{x}) > u_i(\overline{x})$. Pak úsečka $\overline{x}\ \widehat{x}$ leží celá v $\{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\}$, celá v X_i a její část v D_a. Tedy existuje $t > 0,\ t \in (0,1)$ takové, že

$$(1-t)\overline{x} + t\widehat{x} \in X_i \cap \{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\} \cap D_a = \widehat{B}_p$$

Z podmínky striktní konvexity na u_i vyplývá, že

$$u_i((1-t)\overline{x} + t\widehat{x}) > u(\overline{x}),$$

což je spor.

■

Důkaz věty 4.1:
Nejprve si zvolíme konstanty.

$$b = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i$$

a c zvolme podle Lemmatu 4.2. Dále nechť

$$c_1 = (mc + e^1, mc + e^2, \ldots, mc + e^l),$$

kde $(e^1, e^2, \ldots, e^l) = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Podle Lemmatu 4.3 zvolme a. Pro tato c a a dostaneme $\widehat{Y}_j$ a $\widehat{X}_i$ a z nich falešnou nabídku a falešnou poptávku.
Dále definujme funkce $\widehat{S}, \widehat{D}, \widehat{Z} : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ takto:

$$\widehat{S} = \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_j + \sum_{i=1}^{n} e_i,\ \ \widehat{D} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_i,\ \ \widehat{Z} = \widehat{D} - \widehat{S}.$$

$\widehat{Z}$ má následující vlastnosti :
(1) Je homogenní, neboť:

$$\begin{aligned}
\widehat{Z}(\lambda p) &= \widehat{D}(\lambda p) - \widehat{S}(\lambda p) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_i(\lambda p) - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_j(\lambda p) - \sum_{i=1}^{n} e_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_i(p) - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_j(p) - \sum_{i=1}^{n} e_i = \widehat{D}(p) - \widehat{S}(p) = \widehat{Z}(p)
\end{aligned}$$

(2) $\widehat{Z}$ je spojitá.
(3) Splňuje slabý Walrasův zákon: Pro všechna p je

$$p \cdot \widehat{Z}(p) \leq 0.$$

Platí totiž

$$\begin{aligned} p \cdot \widehat{Z}(p) &= p \cdot \widehat{D}(p) - p \cdot \widehat{S}(p) = \sum_{i=1}^{n} p \cdot \widehat{D}_i(p) - \sum_{j=1}^{m} p \cdot \widehat{S}_j(p) - \sum_{i=1}^{n} p \cdot e_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} p \cdot \widehat{D}_i(p) - \sum_{i=1}^{n} \widehat{w}_i(p) = \sum_{i=1}^{n} [p \cdot \widehat{D}_i(p) - \widehat{w}(p)] \leq 0, \end{aligned}$$

neboť

$$\widehat{D}_i(p) \in \widehat{B}^i(p).$$

Podle věty 1.1 existuje $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že $\widehat{Z}(p^*) \leq 0$.
Definujme $y^*_j = \widehat{S}_j(p^*)$, $x^*_j = \widehat{D}_j(p^*)$. Protože $\widehat{Z}(p^*) \leq 0$ dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} x^*_i - \sum_{j=1}^{m} y^*_j - \sum_{i=1}^{n} e_i \leq 0 \ \text{ a tedy } \ \sum_{i=1}^{n} x^*_i \leq \sum_{j=1}^{m} y^*_j + \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

Dále platí

$$\sum_{j=1}^{m} y^*_j \geq \sum_{i=1}^{n} x^*_i - \sum_{i=1}^{n} e_i \geq \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i = b$$

a tedy podle Lemmatu 4.2 $\|y^*_j\| < c$. Podle Lemmatu 4.4 je y^*_j bodem maxima funkce $\pi(p^*, y)$ na Y_j. Takže je splněna podmínka (C) z definice rovnováhy.
Platí následující nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} x^*_i \leq \sum_{j=1}^{m} y^*_j + \sum_{i=1}^{n} e_i \leq n(c, c, \ldots, c) + \sum_{i=1}^{n} e_i = (mc + e_1, mc + e_2, \ldots, mc + e_l) = c_1.$$

Podle Lemmatu 4.3

$$\|x_i^*\| < a.$$

Dle Lemmatu 4.5 je x_i^* bodem, kde u_i nabývá svého maxima na B_p^i. Tedy platí podmínka (B), podle níž spotřebitel maximalizuje svůj užitek na své rozpočtové množině.
Nyní dokážeme zbývající podmínku (A). Nechť

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i - z, \; z \in R_+^l.$$

Skalárně vynásobíme s p^* a dostaneme

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^* p^* - \sum_{j=1}^{m} y_j^* p^* - \sum_{i=1}^{n} e_i p^* = z p^*,$$

přičemž všechny složky z a p^* jsou větší nebo rovny nule. Odtud plyne

$$z \cdot p^* = 0.$$

Podle vlastnosti 2.2(e) produkčních množin,

$$Y - R_+^l \subset Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j,$$

platí, že

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^* - z \in Y.$$

Tedy existují $y_j \in Y_j$ tak, že
$$\sum_{j=1}^{m} y_j = \sum_{j=1}^{m} y_j^* - z.$$
Potom
$$p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j) = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^* - z) = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^*) - p^* z = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^*),$$
protože $p^* \cdot z = 0$ a tedy $\sum_{j=1}^{m} p^* y_j = \sum_{j=1}^{m} p^* y_j^*$.
y_j^* je maximum π_j na Y_j, tedy
$$\pi_j(p, y_j) = p y_j \leq p y_j^* = \pi_j(p, y_j^*)$$
Jelikož $\sum_{j=1}^{m} p y_j = \sum_{j=1}^{m} p y_j^*$ musí být
$$p y_j = p y_j^*.$$
Tedy pro (p^*, x^*, y) platí (C). Navíc
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i - z = \sum_{j=1}^{m} y_j + \sum_{i=1}^{n} e_i,$$
tedy (p^*, x^*, y) splňuje podmínku (A) dosažitelnosti stavu ekonomiky.
Protože platí podmínky (A), (B) a (C), je stav (p^*, x^*, y) rovnovážným stavem ekonomiky a Věta 4.1 je tím dokázána.

■

Zobecněním věty 4.1 a dalším krokem k důkazu Arrowovy-Debreuovy věty je následující věta 4.6.

Věta 4.6
Nechť jsou splněny předpoklady Arrow-Debreuovy věty a nechť navíc každá Y_j je uzavřená a konvexní. Potom existuje rovnovážný stav.

K jejímu důkazu budeme potřebovat definice falešné nabídky $\widehat{S}_j$ a falešné poptávky $\widehat{D}_i$ jako korespondence. Definujme korespondenci $\widehat{S}_j(p) : S_+^{l-1} \to \widehat{Y}_j$ takto:

$$\widehat{S}_j(p) = \{\overline{y} \in \widehat{Y}_j = Y_j \cap D_c;\ p \cdot \overline{y} = \max_{y \in \widehat{Y}_j} p \cdot y\}.$$

Lemma 4.7 (vlastnosti $\widehat{S}_j$)
Korespondence $\widehat{S}_j$ má tyto vlastnosti:
(1) $\widehat{S}_j(p)$ je konvexní uzavřená množina.
(2) Graf $\Gamma_{\widehat{S}_j} = \{(p, y) \in S_+^{l+1} \times \widehat{Y}_j,\ y \in \widehat{S}_j(p)\}$ je kompaktní.
(3) Jestliže $y_j \in \widehat{S}_j(p)$ a $\|y_j\| < c$, pak $y_j \in S_j(p)$.

Důkaz:
(1) Nechť $y_1, y_2 \in \widehat{S}_j(p)$ jsou různé a libovolné. Potom $\pi(y_1) = \pi(y_2)$. Nechť $y_3 = ty_1 + (1-t)y_2$ pro nějaké $t \in (0, 1)$.
Platí

$$\begin{aligned} \pi(y_3) &= py_3 = pty_1 + p(1-t)y_2 = tpy_1 + (1-t)py_2 = \\ &= t\pi(y_1) + (1-t)\pi(y_2) = \pi(y_1). \end{aligned}$$

Tedy y_3 je prvkem množiny $\widehat{S}_j(p)$.
(2) Důkaz vynecháme.
(3) Důkaz se provádí stejně jako v Lemmatu 4.4 (2).

$\blacksquare$

Funkce $\widehat{w}_i : S_+^{l-1} \to R$ definovaná takto:

$$\widehat{w}_i(p) = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \cdot p \cdot \widehat{S}_j(p)$$

je dobře definovaná a spojitá.
Falešnou poptávku definujeme jako korespondenci $\widehat{D}_i : S_+^{l+1} \to \widehat{X}_i$ určenou vztahem

$$\begin{aligned} \widehat{D}_i(p) \quad = \quad & \{\overline{x} \in X_i \cap D_c; \text{funkce } u_i(x) \text{ nabývá maxima v } \overline{x} \\ & \text{na } \widehat{B}_p = \{x \in X_i; p \cdot x \leq \widehat{w}_i\}\}. \end{aligned}$$

Lemma 4.8 (Vlastnosti $\widehat{D}_i$)
Pro korespondenci $\widehat{D}_i$ platí:
(1) $\widehat{D}_i(p)$ je konvexní a uzavřená množina.
(2) Graf $\Gamma_{\widehat{D}_i} = \{(p, x) \in S_+^{l+1} \times \widehat{X}_i,\ x \in \widehat{D}_i(p)\}$ je kompaktní.
(3) $\widehat{D}_i(\lambda p) = \widehat{D}_i(p)$.
(4) Jestliže $x_i \in \widehat{D}_i(p)$ a $\|x_i\| < a$, pak $x_i \in \widehat{D}_i(p)$.

Důkaz:
(1) Nejprve ukáži, že $\widehat{D}_i(p)$ je uzavřená. Pro $\overline{x}_n \in \widehat{D}_i(p)$ platí, že $u_i(\overline{x}_n)$ je bodem maxima funkce $u_i(x)$ na množině $\widehat{B}(p)$. Nechť $\overline{x}_n \to x' \in \widehat{B}_p$, jelikož je $u_i(x)$ spojitá, platí

$$u_i(x') = \lim u_i(\overline{x}_n) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x),$$

tedy $x \in \widehat{D}_i(p)$ a $\widehat{D}_i(p)$ je uzavřená.
Nyní ukáži, že $\widehat{D}_i(p)$ je konvexní. Pro body $z, y \in \widehat{X}_i$ splňující $u_i(z) = u_i(y) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x)$ platí

$$\begin{aligned} p(tz + (1-t)y) &= tpz + (1-t)py \leq \\ &\leq t \cdot \widehat{w}_i(p) + (1-t) \cdot \widehat{w}_i(p) = \widehat{w}_i(p). \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že $tz + (1-t)y \in \widehat{B}_p$.
Podle vlastnosti (2.4b)

$$u_i(tz + (1-t)y) \geq u_i(x) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x).$$

Tudíž $u_i(tz + (1-t)y) = \max\limits_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x)$ a z toho vyplývá, že $tz + (1-t)y \in \widehat{D}_i(p)$. $\widehat{D}_i(p)$ je tedy konvexní.
(2) Důkaz vynecháme.
(3) $\widehat{D}_i(\lambda p)$ nabývá maxima na množině $\widehat{B}_{\lambda p}$, pro niž platí

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{\lambda p} &= \{x \in \widehat{X}_i; \lambda px \leq \widehat{w}_i(\lambda p) = \lambda pe_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \lambda p \widehat{S}_j(p)\} \\ &= \{x \in \widehat{X}_i; px \leq \widehat{w}_i(p) = pe_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} p \widehat{S}_j(p)\} = \widehat{B}_p \end{aligned}$$

Hledáme tedy bod maxima stejné funkce na stejné množině.
(4) Důkaz se provádí stejně jako v Lemmatu 4.5 (4).

■

Důkaz věty 4.6
Nejprve si opět zvolíme konstanty.

$$b = \sum_{i=1}^n d_i - \sum_{i=1}^n e_i$$

a c zvolme podle Lemmatu 4.2. Dále nechť

$$c_1 = (mc + e^1, mc + e^2, \ldots, mc + e^l).$$

Podle Lemmatu 4.3 zvolme a. Pro tato c a a dostaneme $\widehat{Y}_j$ a $\widehat{X}_i$ a z nich falešnou nabídku $\widehat{S}_j(p)$ s vlastnostmi v Lemmatu 4.7 a falešnou poptávku $\widehat{D}_j(p)$ s vlastnostmi v Lemmatu 4.8.
Vezmeme $\varepsilon > 0$. Podle věty 1.2 existuje spojitá funkce $\widehat{S}_{j\varepsilon} : S_+^{l-1} \to \widehat{Y}_j$ tak, že

$$\Gamma_{\widehat{S}_{j\varepsilon}} \subset B_\varepsilon(\Gamma_{\widehat{S}_j}).$$

Stejně pro $\widehat{D}_i$ dostaneme spojité zobrazení $\widehat{D}_{i\varepsilon} : S_+^{l-1} \to \widehat{X}_i$ s vlastností

$$\Gamma_{\widehat{D}_{i\varepsilon}} \subset B_\varepsilon(\Gamma_{\widehat{D}_i}),$$

pro které navíc na S_+^{l-1} platí

$$\begin{aligned} p \cdot \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) - \widehat{w}_i(p) &< \varepsilon \\ p \cdot \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) &< \widehat{w}_i(p) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Definujme $Z_\varepsilon : S_+^{l-1} \to R^l$ a $\widehat{Z}_\varepsilon : S_+^{l-1} \to R^l$ takto

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(p) &= \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) - \sum_{i=1}^{n} e_i \\ \widehat{Z}_\varepsilon(p) &= Z_\varepsilon(p) - (p \cdot Z_\varepsilon(p)) \cdot p. \end{aligned}$$

Pak platí

$$\begin{aligned} p \cdot \widehat{Z}_\varepsilon(p) &= p \cdot Z_\varepsilon(p) - (p \cdot Z_\varepsilon(p))(p \cdot p) = \\ &= p \cdot Z_\varepsilon(p) - p \cdot Z_\varepsilon(p) = 0. \end{aligned}$$

Dále platí

$$
\begin{aligned}
p \cdot Z_\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot p = \\
= \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot p - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j}(p) \cdot p + \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j}(p) \cdot p \\
= \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j}(p) \cdot p - \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot p + \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p \\
\leq \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \widehat{w}_i(p) + \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p < 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

$\widehat{Z}_\varepsilon$ splňuje Walrasův zákon. Podle věty 1.1 existuje $p_\varepsilon \in S_+^{l-1}$ tak, že

$$\widehat{Z}_\varepsilon(p_\varepsilon) \leq 0.$$

Podle poznámky 1.1 je buď

$$\widehat{Z}_\varepsilon^h(p_\varepsilon) = 0 \quad \text{nebo} \quad p_\varepsilon^h = 0. \tag{4.1}$$

Z (4.1) a z nerovnosti pro $p \cdot Z_\varepsilon(p)$ plyne

$$Z_\varepsilon^h(p_\varepsilon) = (p_\varepsilon \cdot Z_\varepsilon(p_\varepsilon))p_\varepsilon^h < 2\varepsilon \cdot p_\varepsilon^h \leq 2\varepsilon,$$

pokud $p_\varepsilon^h \neq 0$ nebo

$$Z_\varepsilon^h(p_\varepsilon) \leq 0,$$

pokud $p_\varepsilon^h = 0$. Tedy

$$Z_\varepsilon^h(p_\varepsilon) \leq 2\varepsilon \quad \text{pro všechna } h.$$

Nechť jsou $y_{j\varepsilon} = \widehat{S}_{j\varepsilon}(p_\varepsilon)$ a $x_{i\varepsilon} = \widehat{D}_{i\varepsilon}(p_\varepsilon)$. Dále máme posloupnost $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k 0. Z ní lze vybrat podposloupnost tak, že

$$p_{\varepsilon_k} \to p^* \in S_+^{l-1}, \quad y_{j\varepsilon_k} \to y_j^* \in \widehat{S}_j(p), \quad x_{i\varepsilon_k} \to x_i^* \in \widehat{D}_i(p).$$

Stejně jako v důkazu věty 4.1 se ukáže, že když

$$y_j^* \in \widehat{S}_j(p^*) \ \text{ a } \ \|y_j^*\| < c,$$

potom $y_j^* \in S_j(p^*)$, což je podmínka (C) z definice rovnováhy, a že když

$$x_i^* \in \widehat{D}_i(p^*) \ \text{ a } \ \|x_i^*\| < a,$$

potom $x_i^* \in D_i(p^*)$, což je podmínka (B) z definice rovnováhy.
Nyní již zbývá pouze dokázat podmínku A z definice rovnováhy.
Z definice Z_ε^h plyne, že

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i\varepsilon}^h - \sum_{j=1}^{m} y_{j\varepsilon}^h - \sum_{i=1}^{n} e_i^h \leq 2\varepsilon.$$

Limitním přechodem dostaneme nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{*h} - \sum_{j=1}^{m} y_j^{*h} - \sum_{i=1}^{n} e_i^h \leq 0.$$

Tudíž platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* - \sum_{j=1}^{m} y_j^* - \sum_{i=1}^{n} e_i \leq 0.$$

Nyní budeme postupovat stejně jako v důkazu věty 4.1.
Položme

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i - z, \ \ z \in R_+^l.$$

Skalárně vynásobíme s p^* a dostaneme

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^* p^* - \sum_{j=1}^{m} y_j^* p^* - \sum_{i=1}^{n} e_i p^* = z p^*,$$

přičemž všechny složky z a p^* jsou větší nebo rovny nule. Odtud plyne

$$z \cdot p^* = 0.$$

Podle vlastnosti 2.2(e) produkčních množin,

$$Y - R_+^l \subset Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j,$$

platí, že

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^* - z \in Y.$$

Tedy existují $y_j \in Y_j$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = \sum_{j=1}^{m} y_j^* - z.$$

Potom

$$p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j) = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^* - z) = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^*) - p^* z = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^*),$$

protože $p^* \cdot z = 0$ a tedy $\sum\limits_{j=1}^{m} p^* y_j = \sum\limits_{j=1}^{m} p^* y_j^*$.
y_j^* je maximum π_j na Y_j, tedy

$$\pi_j(p, y_j) = p y_j \le p y_j^* = \pi_j(p, y_j^*)$$

Jelikož $\sum\limits_{j=1}^{m} p y_j = \sum\limits_{j=1}^{m} p y_j^*$ musí být $p y_j = p y_j^*$.
Tedy pro (p^*, x^*, y) platí (C). Navíc

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i - z = \sum_{j=1}^{m} y_j + \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

tedy (p^*, x^*, y) splňuje podmínku (A) dosažitelnosti stavu ekonomiky.
Protože platí podmínky (A), (B) a (C), je stav (p^*, x^*, y) rovnovážným stavem ekonomiky a Věta 4.8 je tím dokázána.

■

Než začnu dokazovat vlastní Arrowovu-Debreuovu větu musím ještě ukázat lemma o vlastnostech množin Y_j a Y.

Lemma 4.9
Nechť Y_j^* značí uzávěr konvexního obalu množiny Y_j, neboli $Y_j^* = \overline{\widetilde{Y_j}}$. Za předpokladu, že $\sum\limits_{j=1}^{m} Y_j = Y$ je konvexní a uzavřená, platí

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j^* = Y.$$

Důkaz:
"$\supseteq$"

Podle lemmatu 1.4 je

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j^* \supseteq \sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y}_j = \widetilde{\sum_{j=1}^{m} Y_j} = \widetilde{Y} = Y.$$

"$\subseteq$"
Podle lemmatu 1.5 platí, že

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j^* = \sum_{j=1}^{m} \overline{\widetilde{Y}_j} \subseteq \overline{\sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y}_j}.$$

Pro výraz $\overline{\sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y}_j}$ platí

$$\overline{\sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y}_j} = \overline{\widetilde{\sum_{j=1}^{m} Y_j}} = \overline{\widetilde{Y}} = \overline{Y} = Y$$

a lemma 4.9 je tedy dokázáno.

■

Důkaz Arrowovy-Debreuovy věty
Rozdíl mezi Arrowovou-Debreuovou větou a větou 4.6 spočívá v podmínkách kladených na množiny Y_j. Y_j obecně nejsou ani konvexní ani uzavřené, pouze o $\sum_{j=1}^{m} Y_j$ se předpokládá, že je uzavřená a konvexní.

Nyní místo Y_j uvažujme $Y_j^* = \overline{\widetilde{Y}_j}$. Platí

$$Y_j \subset Y_j^* \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{m} Y_j = Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j^*.$$

Aplikujeme-li větu 4.6 na množiny Y_j^*, obdržíme rovnovážný stav (x_i^*, y_j^*, p). Podle lemmatu 4.9 pro $y_j^* \in Y_j^*$ platí, že

$$\sum_{j=1}^m y_j^* \in \sum_{j=1}^m Y_j^* = Y.$$

Tedy existují $y_j \in Y_j$ takové, že

$$\sum_{j=1}^m y_j^* = \sum_{j=1}^m y_j \tag{$*$}$$

Dokážeme, že platí rovněž

$$p \cdot y_j = p \cdot y_j^*. \tag{$**$}$$

Vynásobením výrazu $(*)$ cenovým vektorem p dostaneme

$$p \cdot (\sum_{j=1}^m y_j^*) = p \cdot (\sum_{j=1}^m y_j). \tag{$+$}$$

$p \cdot y_j^*$ je maximum funkce $p \cdot y_j$ na množině $Y_j^* \supseteq Y_j$, pro všechna j. Platí tedy

$$p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j.$$

Aby platila rovnost $(+)$, musí být splněna i rovnost $(**)$.
Nyní ověříme, že stav (x_i^*, y_j, p) splňuje podmínky rovnováhy, víme-li, že (x_i^*, y_j^*, p) je rovnovážný stav a že $p \cdot y_j^* = p \cdot y_j$ a $\sum_{j=1}^m y_j^* = \sum_{j=1}^m y_j$.

(A) $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{j=1}^{m} y_j + \sum_{i=1}^{n} e_i.$

(B) x_i^* maximalizuje u_i na množině

$$\begin{aligned} B_i &= \{\overline{x} \in X_i;\ p \cdot \overline{x} \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \cdot p \cdot y_j^*\} = \\ &= \{\overline{x} \in X_i;\ p \cdot \overline{x} \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \cdot p \cdot y_j\}. \end{aligned}$$

(C) y_j maximalizuje funkci $p \cdot y$ na Y_j, neboť y_j^* maximalizuje $p \cdot y$ na Y_j^* a platí $p \cdot y_j = p \cdot y_j^*$ a $Y_j^* \supseteq Y_j$.

Arrowova-Debreuova věta je tedy dokázána.

$\blacksquare$

Kapitola 4

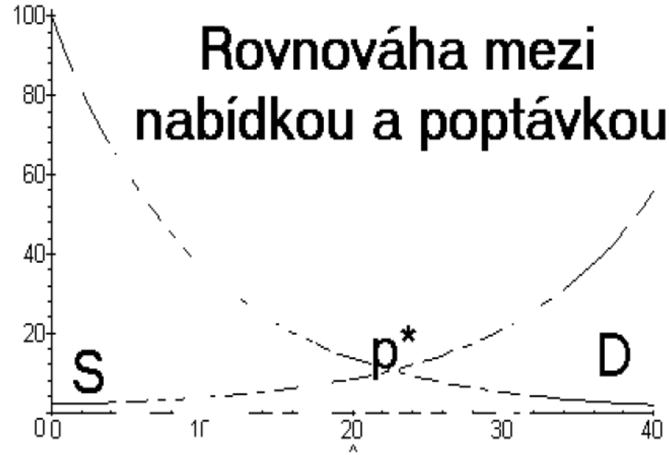
Globální analýza a ekonomie

V této části ukážeme, že existence rovnovážných stavů může být dokázána pomocí Sardovy věty. Přitom důkaz bude v jistém smyslu konstruktivní. Zároveň jsou dokázány optimizační věty pro ekonomii blahobytu.

1 Existence rovnovážného stavu

Základní idea rovnovážného stavu je studium řešení rovnosti mezi poptávkou a nabídkou: $S(p) = D(p)$. Pro jednoduchý případ jednoho trhu, kde jsou ceny hodnoceny v termínech nějakého tržního standardu, podává následující graf 4.1 oprávnění pro existenci rovnovážné ceny p^*.

Teorie obecné rovnováhy se tímto problémem zabývá pro vícero trhů. Přesněji: předpokládejme ekonomiku s l druhy zboží. Pak poloprostor $R^l_+ = \{(x^1, \ldots, x^l) : (\forall i)(x^i \geq 0)\}$ bude pro nás hrát dvojí roli: nejprve jakožto tzv. *komoditní prostor*, přičemž komodita je produkt nebo služba určená k výměně; prvek $x \in R^l_+$ se nazývá *komoditní svazek*. Tedy x je l-tice $(x^1, \ldots, x^l)$ tak, že první souřadnice měří množství komodity číslo jedna, atd. Ale zároveň je R^l_+ bez počátku prostor *cenových systémů*; reprezentuje-li tedy $p \in R^l_+ - \{0\}, p = (p^1, \ldots, p^l)$ množinu *cen* l komodit, je p^1 cena jednotky první komodity, atd.



Obrázek 4.1: Rovnovážný stav

Předpokládejme, že studovaná ekonomika má (axiomaticky) zavedené *funkce poptávky a nabídky* $D, S : R^l_+ - \{0\} \to R^l_+$ z množiny cenových systémů do prostoru komodit. Pak $D(p)$ je komoditní svazek požadovaný ekonomikou (nebo jejími účastníky celkově) za ceny p. Jinak řečeno, za ceny $p = (p^1, \ldots, p^l)$ lze koupit komodity v množství $D(p)$. Problém nalezení *rovnovážného stavu* je nalezení a studium (za vhodných podmínek na D, S) cenového systému $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že $D(p^*) = S(p^*)$.

Položme $Z(p) = D(p) - S(p)$. Pak $Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ se nazývá *nadbytek poptávky* a budeme tedy hledat řešení $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že

$$Z(p^*) = 0. \tag{1.1}$$

V této části vložíme na Z podmínky, které jsou přiměřené z hlediska ekonomie a pak ukážeme existenci řešení rovnice 1.1 pomocí konstruktivního postupu aparátem diferenciálního počtu. To vše provedeme, aniž bychom přešli k mikroekonomickým základům nadbytku poptávky. V další části podáme klasický mikroekonomický přístup k nadbytku poptávky pomocí agregace poptávkových funkcí individuálních účastníků ekonomiky pro případ ekonomiky úplné směny.

Podmínky na funkci nadbytku poptávky jsou

$$Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l \text{ je spojitá funkce,} \tag{1.2}$$

$$Z(\lambda p) = Z(p) \text{ pro všechna } \lambda > 0. \tag{1.3}$$

Tedy Z je homogenní funkce; jestliže se ceny každé komodity úměrně zvětšují či zmenšují, funkce nadbytku poptávky se nemění. To ovšem předpokládá, že se pohybujeme uvnitř úplné nebo uzavřené ekonomiky tak, že ceny komodit nejsou závislé na komoditě ležící mimo systém.

$$p \cdot Z(p) = 0 \text{ tj. } \sum_{i=1}^{l} p^i Z^i(p) = 0. \tag{1.4}$$

Výše uvedená rovnost tvrdí, že hodnota funkce nadbytku poptávky je nula a rovnost 1.4 se nazývá *Walrasův zákon*. Tuto rovnost můžeme chápat tak, že poptávka v naší ekonomice je v souladu se zdroji ekonomiky. Jedná se o omezený rozpočet spotřeby. Celková hodnota poptávky je rovna celkové hodnotě nabídky účastníky ekonomiky. Bezpochyby je Walrasův zákon nejpropracovanější ze všech podmínek, které jsme vložili na funkci Z. Mikroekonomické opodstatnění podáme později.

Než zavedeme naší poslední podmínku na funkci nadbytku poptávky, podáme geometrickou interpretaci předchozích podmínek. Buď $S^{l-1}_+ = \{p \in R^l_+ : ||p||^2 = \sum_{i=1}^l (p^i)^2 = 1\}$ prostor normalizovaných cenových systémů. Na základě homogenity funkce Z se stačí omezit na její restrikci na množinu S^{l-1}_+. Podle Walrasova zákona je funkce Z *kolmá* k prostoru S^{l-1}_+ v každém bodě; jinak řečeno $p \cdot Z(p) = 0$ neříká nic jiného, než že vektor p je kolmý k vektoru $Z(p)$. Můžeme tedy považovat Z za pole tečných vektorů na množině S^{l-1}_+. Dále definujeme $S^{l-1} = \{p \in R^l : ||p||^2 = \sum_{i=1}^l (p^i)^2 = 1\}$

Poslední podmínka na funkci nadbytku poptávky je hraniční podmínka:

$$Z^i \geq 0, \text{ jestliže } p^i = 0. \tag{1.5}$$

Připomeňme, že $Z(p) = (Z^1(p), \ldots, Z^l(p))$ a $p = (p^1, \ldots, p^l)$. Podmínka 1.5 můžeme být jednoduše interpretována následovně: je-li i-tá komodita volná (je volně k dispozici, protože její cena je nulová), pak zaručeně pro ni bude funkce nadbytku poptávky nezáporná. V našem modelu mají komodity pozitivní hodnotu.

Věta 1.1 *Jestliže je funkce nadbytku poptávky $Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ spojitá, homogenní, splňuje Walrasův zákon a hraniční podmínku tj. podmínky 1.2, 1.3, 1.4 a 1.5, pak existuje cenový systém $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že $Z(p^*) = 0$. Nalezení cenového systému p^* bude provedeno konstruktivně.*

Důkaz věty 1.1 bude proveden pomocí vět 1.2 a 1.7.

Věta 1.2 *Buď $f : D^l \to R^l$ spojité zobrazení splňující následující hraniční podmínku*

(B_D) *Pokud je $x \in \delta D^l$, pak $f(x)$ není ve tvaru μx pro žádné $\mu > 0$.*

Pak existuje prvek $x^* \in D^l$ tak, že platí $f(x^*) = 0$. Přitom $D^l = \{x \in R^l : ||x||^2 = \sum_{i=1}^l (x^i)^2 \leq 1\}$ a $\delta D^l = S^{l-1} = \{x \in R^l : ||x||^2 = \sum_{i=1}^l (x^i)^2 = 1\}$.

Obecně pak $D^l_r = \{x \in R^l : ||x||^2 = \sum_{i=1}^l (x^i)^2 \leq r^2\}$ a $\delta D^l_r = \{x \in R^l : ||x||^2 = \sum_{i=1}^l (x^i)^2 = r^2\}$ pro všechna r kladná. Přitom speciálně máme hladké zobrazení $j_{l-1} : S^{l-1} \to D^{l-1} \subseteq R^{l-1}$ definované předpisem $j_{l-1}(x_1, \ldots, x_l) = (x_1, \ldots, x_{l-1})$.

Pro důkaz věty 1.2 použijeme dva hlavní výsledky globální analýzy a jejich aplikace pro ekonomii – tj. Sardovu věta a věta o implicitní funkci (věta o inverzním zobrazení). Abychom mohli vyslovit tyto věty, je nutno využít ideu singulárního bodu (kritického bodu) diferenciovatelného zobrazení $f : U \to R^n$, kde U je otevřená podmnožina kartézského prostoru R^k. Řekneme, že f je třídy C^r, jestliže všechny derivace do řádu

r včetně existují a jsou spojité. Pro prvek $x \in U$ je derivace $\mathrm{D}f(x)$ v bodě x lineární zobrazení z R^k do R^n (tj. matice parciálních derivací). Pak říkáme, že x se nazývá *singulární (kritický) bod zobrazení* f, , pokud tato derivace není surjektivní zobrazení. Poznamenejme, že pokud $k < n$, jsou všechny prvky z U singulární. *Singulární hodnoty* jsou jednoduše obrazy vzhledem k f všech singulárních bodů; prvek $y \in R^n$ se nazývá *regulární hodnota*, pokud není singulární hodnota.

Věta 1.3 Věta o implicitní funkci. *Je-li $y \in R^n$ regulární hodnota zobrazení $f : U \to R^n$, které je třídy C^1, U otevřená v R^k, pak buď $f^{-1}(y)$ je prázdná množina nebo $f^{-1}(y) = V$, V je podvarieta U dimenze $k - n$.*

Přitom V je podvarieta U dimenze $k-n$, pokud pro každé $x \in V$ můžeme najít diferencovatelné zobrazení $h : N(x) \to O$ s následujícími vlastnostmi:

1. h má diferencovatelnou inverzi,
2. $N(x)$ je otevřené okolí bodu $x \in U$,
3. O je otevřená množina obsahující bod $0 \in R^k$,
4. $h(N(x) \cap V) = O \cap C$, kde C je systém souřadnic v R^k dimenze m.

Věta 1.4 Věta o inverzní funkci. *Nechť $G_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$, $i = 1, \ldots, k$ jsou funkce třídy C^r, $r \geq 1$, definované na okolí W bodu $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k) \in R^{n+k}$, které splňují $G_i(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k) = 0$ a*

$$\det \left(\frac{\delta G_i}{\delta y_j}(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k) \right)_{1 \leq i,j \leq k} \neq 0. \tag{1.6}$$

Pak existují okolí U bodu $(a_1, \ldots, a_n) \in R^n$ a okolí V bodu $(b_1, \ldots, b_k) \in R^k$ tak, že $U \times V \subseteq W$ a ke každému bodu $(x_1, \ldots, x_n) \in U$ existuje právě jeden bod $(y_1, \ldots, y_k) \in V$, pro nějž platí $G_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = 0$. Takto určené funkce $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ jsou rovněž třídy C^r. Občas o nich mluvíme jakožto o řešeních soustavy rovnic $G_i = 0$.

Věta 1.5 Sardova věta. *Je-li zobrazení $f : U \to R^n$, U otevřená v R^k, dostatečně diferencovatelné (třídy C^r, $r > 0$ a $r > k - n$), pak množina singulárních hodnot má míru nula.*

Připomínáme, že množina $S \subseteq R^n$ má (Lebesgueovu) míru nula, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje taková posloupnost krychlí Z_i, $i = 1, 2, \dots$, že $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$ a pro objemy volZ_i těchto krychlí platí $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol} Z_i \leq \varepsilon$. Sjednocení spočetně mnoha množin míry nula má opět míru nula.

Poznamenejme, že Sardova věta má sice jednotnou formulaci, ale z obsahového hlediska se dělí na tři významově odlišné případy. Při $k < n$ celá množina $f(U)$ sestává z kritických hodnot – zde vkládáme prostor menší dimenze do prostoru větší dimenze a pak má elementárně $f(U)$ míru nula. I pro $k = n$ jde o jednoduché tvrzení, které lze snadno dokázat přímo. Teprve případ $n < k$ představuje obtížnou část Sardovy věty. Přitom o množině kritických hodnot hladkého zobrazení nelze tvrdit více, než že má míru nula. Tato množina může být například hustá v R^n. Důkaz Sardovy věty lze najít například v monografii [17]. Má-li množina singulárních hodnot míru nula, řekneme, že množina regulárních bodů *má plnou míru*. Obě z výše uvedených vět lze přímo aplikovat na případ $f : U \to C$, kde U je podvarieta dimenze k prostoru R^m a V je podvarieta dimenze n prostoru R^q. V tomto případě je derivace $\mathrm{D}f(x) : T_x(U) \to T_{f(x)}(V)$ lineární zobrazení na tečném prostoru.

Pro důkaz věty 1.2 uvažme funkci $h : D^l \to R^l$ třídy C^2, která splňuje následující hraniční podmínku:

(SB) $f(x) = -x$ pro všechna $x \in \delta D^l$.

Problém je pak najít $x^* \in D^l$ tak, že platí $h(x^*) = 0$. Abychom jej vyřešili, definujme pomocné zobrazení $g : D^l - E \to S^{l-1}$ předpisem $g(x) = \frac{h(x)}{||h(x)||}$, kde $E = \{x \in D^l : h(x) = 0\}$ je množina řešení naší rovnosti. Evidentně, g je třídy C^2 a tedy dle Sardovy věty dostáváme, že množina regulárních hodnot má plnou míru v S^{l-1}. Buď nyní $y \in S^{l-1} = \delta D^l$ taková regulární hodnota tak, že $g^{-1}(y)$ je neprázdná množina (jinak by totiž měla množina $g(D^l - E) = S^{l-1}$ míru nula, což je nemožné). Pak dle věty o implicitní funkci dostáváme, že $g^{-1}(y)$ je 1-dimenzionální podvarieta, která musí obsahovat $-y$ podle hraniční podmínky (SB). Buď nyní V komponenta $g^{-1}(y)$ obsahující prvek $-y$ (totiž $y \in \delta D^l$ implikuje $-y \in \delta D^l$, $g(-y) = \frac{h(-y)}{||h(-y)||} = \frac{y}{||y||} = y$). Zejména tedy musí V být regulární křivka začínající v bodě $-y$ a otevřenou v opačném konci. Připomeňme, že křivka e se nazývá regulární křivka třídy C^s, jestliže ke každému bodu této křivky existuje na této křivce okolí, které je obloukem třídy C^s.

Zároveň je průnik $V \cap \delta D^l = \{-y\}$ z hraniční podmínky (SB) a nutně je bod $-y$ obsažen ve V pouze jednou jakožto počáteční bod, protože je V regulární v bodě $-y$. Speciálně je V uzavřená podmnožina $D^l - E$ a tedy všechny její limitní body leží v E. Zejména tedy je množina E neprázdná a pokud začneme z bodu $-y$, musíme jednou dokonvergovat k E. Tím jsme podali geometrický konstruktivní důkaz existence bodu $x^* \in D^l$ tak, že platí $h(x^*) = 0$.

Poznamenejme, že pro přiblížení si konstruktivní povahy výše uvedeného řešení můžeme ukázat, že V je řešící křivka *globální Newtonovy* obyčejné rovnice $\mathrm{D}h(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\lambda h(x)$, kde $\lambda = \pm 1$ je vybráno tak, že má stejné znaménko jako $\mathrm{D}h(x)$ a závisí na x. Je-li totiž derivace $\mathrm{D}h(x)$ regulární, pak Eulerova metoda diskrétní aproximace nám dává

$$x_n = x_{n-1} \mp (\mathrm{D}h(x_{n-1}))^{-1} h(x_{n-1}),$$

což není nic jiného, než Newtonova metoda pro řešení rovnice $h(x) = 0$.

Nyní předpokládejme, že funkce $h : D^l \to R^l$ je pouze spojitá a stále splňuje $h(x) = -x$ pro všechna $x \in \delta D^l$. Definujme nové spojité zobrazení $h_0 : D_2^l \to R^l$ předpisem

$$\begin{array}{rclll} h_0(x) & = & h(x) & \text{pro} & ||x|| \leq 1, \\ h_0(x) & = & -x & \text{pro} & ||x|| \geq 1. \end{array}$$

Buď dále $\varepsilon_i, i = 1, 2, \ldots, \infty$ posloupnost reálných čísel konvergující k nule. Pro každé i přirozené zkonstruujeme hladkou tj. C^∞ aproximaci h_i funkce h_0 tak, že $||h_i(x) - h_0(x)|| < \varepsilon_i$. Buď dále φ_r hladká funkce na R^l tak, že $\int \varphi_r = 1$ a nosič funkce φ_r je obsažen v disku D_r^l o poloměru $r > 0$. Ukažme konkrétní konstrukci funkce φ_r. Zaveďme nejprve pomocnou funkci

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{pro} \quad x > 0. \end{cases}$$

Tato funkce je hladká. Pak fukce $\varphi(x+r)\varphi(r-x)$ je třídy C^∞, je kladná v intervalu $(-r,r)$ a rovná nule mimo tento interval. Funkce

$$\psi(x_1,\ldots,x_l)=\prod_{i=1}^{l}\varphi(x_i+r)\varphi(r-x_i)$$

je třídy C^∞, je kladná v intervalu $(-r,r)^l$ a rovná nule mimo tento interval. Funkce $\varphi_r=\frac{\psi}{\int_{-\infty}^{\infty}\psi}$ má tedy všechny požadované vlastnosti. Navíc platí, že

$$\varphi_r(x_1,\ldots,x_l)=\varphi_r(-x_1,\ldots,x_l)=\cdots=\varphi_r(x_1,\ldots,-x_l).$$

Speciálně lze tedy spočítat, že

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi_r(x)=0.$$

Připomeňme, že nosičem funkce $\varphi:U\to R$ rozumíme uzávěr množiny bodů, v nichž má φ nenulovou hodnotu.

Definujme pak funkci $h_i(y)=\int h_0(y-x)\varphi_{r_i}(x)\mathrm{d}x=\int h_0(x)\varphi_{r_i}(y-x)\mathrm{d}x$ tak, aby bylo r_i dostatečně malé vzhledem k ε_i a vždy bylo $r_i<\frac{1}{2}$.

Pak h_i aproximuje stejnoměrně h_0 (viz [26], VIII, 7, 2.) v každém intervalu a $h_i(x)=-x$ pro $x\in\delta D_2^l$ (totiž $h_i(x)=\int h_0(x-z)\varphi_{r_i}(z)\mathrm{d}z=\int(z-x)\varphi_{r_i}(z)\mathrm{d}z=\int -x\varphi_{r_i}(z)\mathrm{d}z+\int z\varphi_{r_i}(z)\mathrm{d}z=-x\int\varphi_{r_i}(z)\mathrm{d}z=-x$). Připomeňme, že posloupnost h_i konverguje stejnoměrně k h_0 v intervalu A, existuje-li pro každé číslo $\varepsilon>0$ takové přirozené číslo i_0, že $||h_i(x)-h_0(x)||<\varepsilon$ pro každé $x\in A$ a pro každé číslo $i>i_0$.

Můžeme pak aplikovat výše uvedený výsledek na h_i a pak tedy existuje $x_i\in\delta D_2^l$ tak, že $h_i(x_i)=0$. Evidentně, $x_i\in\delta D^l$ a zároveň $x_i\to\{x\in D^l:h_0(x)=0\}$ (lze se omezit na vybranou podposloupnost) tj. existuje $x\in\delta D^l$ tak, že $h(x)=0$. Totiž, pro všechna $\delta>0$ existuje i_δ tak, že $||h_0(x_i)-0||=||(h_0(x_i)-h_i(x_i))+(h_i(x_i)-0)||<\delta$ pro všechna $i>i_\delta$ tj. $||h_0(x)||=0$.

Dokažme nyní větu 1.2 v plné obecnosti. Buď tedy funkce $f:D^l\to R^l$ pouze spojitá a nechť splňuje podmínku (B_D). Definujme nové spojité zobrazení $\widehat{f_0}:D_2^l\to R^l$ takové, že $\widehat{f}(x)=-x$ pro $x\in\delta D_2^l$

předpisem

$$\begin{array}{rcll} \widehat{f}(x) & = & f(x) & \text{pro} \quad ||x|| \le 1, \\ \widehat{f}(x) & = & (2-||x||)f(x/||x||) + (||x||-1)(-x) & \text{pro} \quad ||x|| \ge 1. \end{array}$$

Z předcházejících výsledků pak víme, že existuje $x^* \in \delta D_2^l$ tak , že $\widehat{f}(x) = 0$. Nutně pak $||x^*|| \le 1$. Jinak by totiž nastal spor s hraniční podmínkou (B_D). Tedy existuje $x^* \in \delta D^l$ tak , že $f(x) = 0$, čímž je důkaz věty 1.2 ukončen.

Abychom mohli získat hlavní výsledek – větu 1.1, bude nutno modifikovat větu 1.2 z koulí na simplexy. Definujme

$$\begin{array}{rcl} \Delta_1 & = & \{p \in R_+^l : \sum_{i=1}^l p^i = 1\} \qquad \delta\Delta_1 \;=\; \{p \in \Delta_1 : (\exists i)(p^i = 0)\} \\ \Delta_0 & = & \{z \in R^l : \sum_{i=1}^l p^i = 0\} \end{array}$$

a

$$p_c = (1/l, \ldots, 1/l) \in \Delta_1, \qquad p_c \text{ je střed simplexu } \Delta_1.$$

V dalším budeme pracovat se spojitými zobrazeními $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_0$, která budou splňovat následující hraniční podmínku:

(B) Pokud je $p \in \delta\Delta_1$, pak $\varphi(p)$ není ve tvaru $\mu(p - p_c)$ pro žádné $\mu > 0$.

To neříká nic jiného, než že pro hraniční bod p neleží $\varphi(p)$ na polopřímce se směrnicí $p - p_c$.

Lemma 1.6 *Nechť $D = D^l \cap \Delta_0$. Pak mezi množinami $D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}}$ a $\eta_D(D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}}) = D \cap D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}} \times R$ existuje vzájemně jednoznačná korespondence pomocí zobrazení projekce $\pi_D : D \to D^{l-1}_{\sqrt{l}}$ a zobrazení $\eta_D : D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}} \to D$; přitom $\eta_D(x_1, \ldots, x_{l-1}) = (x_1, \ldots, x_{l-1}, \sum_{i=1}^{l-1} x_i)$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že obě zobrazení jsou korektně definovaná tj. že platí $\pi_D(x_1,\dots,x_l)\in D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}}$ pro $(x_1,\dots,x_l)\in\eta_D(D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}})$ a $\eta_D(x_1,\dots,x_{l-1})\in\eta_D(D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}})$ pro $(x_1,\dots,x_{l-1})\in D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}}$. K tomu stačí ověřit, že $||\pi_D(x_1,\dots,x_l)||\le\frac{1}{\sqrt{l}}$ a $||\eta_D(x_1,\dots,x_{l-1})||\le 1$. To ale vede na maximalizační úlohy

$$\begin{array}{l}\max\sum_{i=1}^{l-1}x_i^2\\ \text{za podmínek}\\ \sum_{i=1}^{l}x_i^2\le 1\\ \sum_{i=1}^{l-1}x_i^2\le\frac{1}{l}\\ \sum_{i=1}^{l}x_i=0\end{array}\qquad (\mathrm{P}_\pi)$$

a

$$\begin{array}{l}\max\sum_{i=1}^{l-1}x_i^2+(\sum_{i=1}^{l-1}x_i)^2\\ \text{za podmínky}\\ \sum_{i=1}^{l-1}x_i^2\le\frac{1}{l}.\end{array}\qquad (\mathrm{P}_\eta)$$

První je pak triviálně splněna a druhá je ekvivalentní s maximalizačními úlohou

$$\begin{array}{l}\max\sum_{i=1}^{l-1}x_i^2+(\sum_{i=1}^{l-1}x_i)^2\\ \text{za podmínky}\\ \sum_{i=1}^{l-1}x_i^2=\frac{1}{l}.\end{array}\qquad (\mathrm{P'}_\eta)$$

Pomocí variačního počtu pak snadno ověříme, že maximum úlohy $(\mathrm{P'}_\eta)$ nastává např. v bodu $x_1=x_2=\dots=x_{l-1}=\frac{1}{\sqrt{l(l-1)}}$ a má hodnotu 1.

Přitom je vidět, že složení obou těchto zobrazení nám dává identitu jak na $D^{l-1}_{\sqrt{l}}$ tak na $\eta_D(D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}})$. Navíc jsou tato dvě zobrazení lineární izomorfizmy mezi Σ_0 a R^{l-1}.▮

Věta 1.7 *Buď* $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_0$ *spojité zobrazení splňující následující hraniční podmínku* (B). *Pak existuje prvek* $p^* \in \Delta_1$ *tak, že platí* $\varphi(p^*) = 0$.

Abychom dokázali větu 1.7 pomocí věty 1.2, budeme konstruovat homeomorfismus zachovávající *paprsky*. Definujme tedy zobrazení $h : \Delta_1 \to \Delta_0$ předpisem $h(p) = p - p_c$; dále buď $\lambda : \Delta_0 - \{0\} \to R^+$ zobrazení definované předpisem $\lambda(p) = -\frac{1}{l} \cdot \frac{1}{\min_i p_i}$. Položme pak $\psi : D \to h(\Delta_1)$ jakožto $\psi(p) = \lambda(\frac{p}{||p||})p$. Evidentně, ψ je zobrazení zachovávající paprsky.

Uvažujme nyní kompozici $\alpha : D \to \Delta_0$,

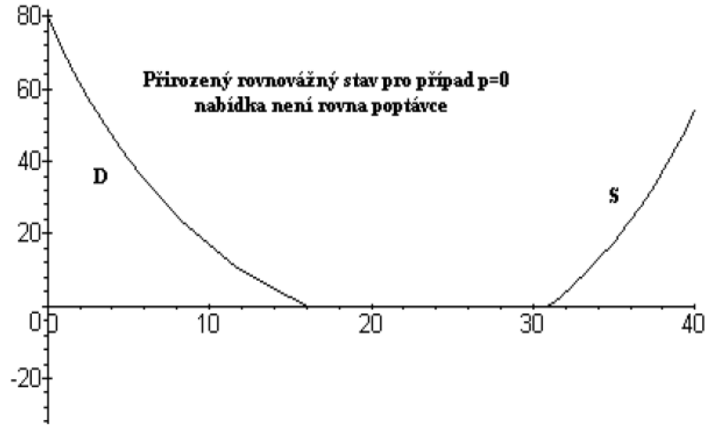
$$D \xrightarrow{\psi} h(\Delta_1) \xrightarrow{h^{-1}} \Delta_1 \xrightarrow{\varphi} \Delta_0.$$

Tvrdíme pak, že α splňuje hraniční podmínku (B_D) věty 1.2. Buď tedy $q \in \delta D$ a nechť $p = \psi(q) + p_c = h^{-1}(\psi(q))$. Ale dle podmínky (B) neexistuje žádné kladné μ tak, že $\varphi(p) = \mu(p - p_c)$ neboli ekvivalentně $\alpha(q) = \mu(p - p_c)$. To je rovnocenné s tím, že neexistuje žádné kladné μ tak, že $\alpha(q) = \mu\psi(q)$ a protože ψ zachovává paprsky, máme, že neexistuje žádné kladné μ tak, že $\alpha(q) = \mu(q)$, což je přesně naše tvrzení. Okamžitě pak z věty 1.2 dostáváme, že existuje prvek $q^* \in D$ tak, že platí $\alpha(q^*) = 0$. Položíme-li pak $p^* = \psi(q^*) + p_c$, obdržíme $\varphi(p^*) = 0$ a věta 1.7 je dokázána.

Abychom dokázali 1.1, definujme pomocí funkce nadbytku poptávky $Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ novou funkci $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_0$ předpisem $\varphi(p) = Z(p) - \left(\sum_{i=1}^l Z^i(p)\right) p$. Poznamenejme, že $\sum_{i=1}^l \varphi^i(p) = \sum_{i=1}^l Z^i(p) - \sum_{i=1}^l Z^i(p) \sum_{i=1}^l p^i = 0$. Je tedy φ korektně definované a je zřejmě spojité, jakožto složení spojitých funkcí. Zároveň pokud $p \in \delta\Delta_1$, je nutně $p^i = 0$ pro jistý index i a tedy $\varphi^i(p) = Z^i(p) \geq 0$ dle podmínky 1.5. Je tedy podmínka (B) věty 1.7 splněna pro zobrazení φ. Existuje tedy $p^* \in \Delta_1$ tak, že $\varphi(p^*) = 0$. Tedy $Z(p^*) = \sum_{i=1}^l Z^i(p^*)p^*$. Uvažme nyní skalární součin obou stran rovnosti s vektorem $Z(p^*)$. Pak $||Z(p^*)||^2 = Z(p^*) \cdot Z(p^*) = \sum_{i=1}^l Z^i(p^*)\,(p^* \cdot Z(p^*)) = 0$ dle 1.4. Tedy i $Z(p^*) = 0$ tj. věta 1.1 platí.

Je však vhodné připomenout, že přirozený rovnovážný stav může nastat i v případě, že $D(p^*) \neq S(p^*)$. Uveďme následující graf 4.2 jednoho trhu pro cenu $p = 0$.

Tedy pro přebytek poptávky je někdy cenový vektor $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ s vlastností $Z(p^*) \leq 0$ nazýván



Obrázek 4.2: Přirozený rovnovážný stav

rovnovážným stavem. Jinak můžeme o takovémto $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ uvažovat jakožto o *rovnováze k volnému použití*, pro pozdější se zbavení přebytku nabídky pak máme rovnovážný stav $Z(p) = 0$.

Tvrzení 1.8 *Pokud funkce $Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ splňuje Walrasův zákon 1.4 a zároveň $Z(p^*) \leq 0$, pak pro všechna i buď $Z^i(p^*) = 0$ nebo $p^{*i} = 0$.*

Totiž jinak by existoval index i tak , že $Z^i(p^*) < 0$ a $p^{*i} > 0$. Zároveň pro všechna i máme $Z^i(p^*)p^{*i} \leq 0$ a tedy $\sum_{i=1}^{l} Z^i(p^*)p^{*i} < 0$, což je spor s Walrasovým zákonem.

Věta 1.9 (Debreu-Gale-Nikaidô) *Buď funkce $Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ spojitá funkce splňující slabý tvar Walrasova zákona*

$$p \cdot Z(p) \leq 0. \tag{1.7}$$

Pak existuje cenový systém $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že $Z(p^*) \leq 0$.

Poznamenejme, že věta 1.9 implikuje větu 1.1. Totiž, splňuje-li funkce Z předpoklady věty 1.1, pak dle věty 1.9 existuje cenový systém $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že $Z(p^*) \leq 0$. Podle tvrzení 1.8 pro všechna i buď $Z^i(p^*) = 0$ nebo $p^{*i} = 0$. Ale dle hraniční podmínky 1.5 je pro $p^{*i} = 0$ nutně $Z^i(p^*) \geq 0$ tj. $Z^i(p^*) = 0$ a tedy celkem $Z(p^*) = 0$.

Abychom mohli dokázat větu 1.9, zavedeme funkci $\beta : R \to R$ předpisem $\beta(t) = 0$ pro $t \leq 0$ a $\beta(t) = t$ pro $t \geq 0$. Definujme dále funkci $\overline{Z} : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ následovně: $\overline{Z}^i(p) = \beta(Z^i(p))$ pro všechny indexy i a cenové vektory p. Podobně jako v důkazu věty 1.1 definujme zobrazení $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_0$ předpisem $\varphi(p) = \overline{Z}(p) - \left(\sum_{i=1}^l \overline{Z}^i(p)\right) p$. Pak φ splňuje předpoklady věty 1.7. Existuje tedy vektor $p^* \in \Delta_1$ tak, že $\varphi(p^*) = 0$. Tedy $\overline{Z}(p^*) = \sum_{i=1}^l \overline{Z}^i(p^*)p^*$. Uvažme nyní skalární součin obou stran rovnosti s vektorem $Z(p^*)$. Pak $\overline{Z}(p^*) \cdot Z(p^*) = \sum_{i=1}^l \overline{Z}^i(p^*)\,(p^* \cdot Z(p^*)) \leq 0$ dle 1.7. Tedy $\sum_{i=1}^l \beta(Z^i(p^*)) \cdot Z^i(p^*) \leq 0$. Ale zřejmě $\beta(t)t > 0$ pro $t > 0$ a $\beta(t)t = 0$ pro $t \leq 0$. Nutně tedy $Z^i(p^*) \leq 0$ pro všechna i tj. $Z(p^*) \leq 0$ tj. věta 1.9 platí.

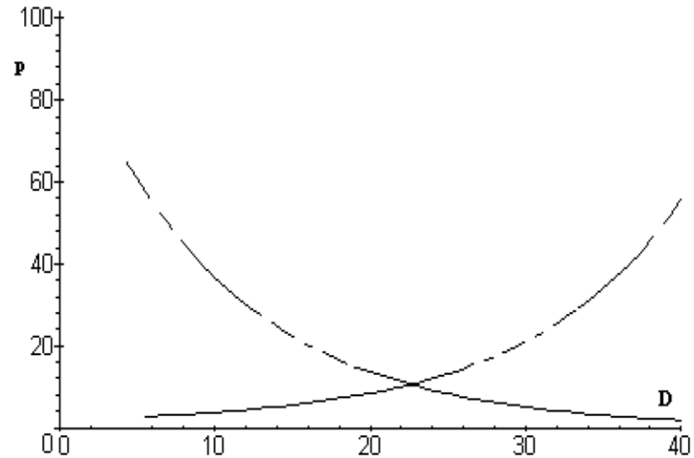
Jiné přirozené zobecnění vět 1.1 a 1.9 bude pro případ, že $p^i \to 0$ implikuje $Z^i(p) \to \infty$ (viz 4.3). Tato věta 1.10 je přirozeným zobecněním Arrow-Hahnovy věty.

Předpokládejme nyní, že funkce přebytku poptávky Z je definována pouze na jisté podmnožině $\mathcal{D}$ množiny $R^l_+ - \{0\}$ tak, že $\mathcal{D}$ je podmnožiny množiny $\mathrm{int}(R^l_+ - \{0\})$ a pokud $p \in \mathcal{D}$, pak $\lambda p \in \mathcal{D}$ pro všechna λ kladná. Uvažme funkci Z s následujícími vlastnostmi:

$$Z : \mathcal{D} \to R^l \text{ je spojitá funkce,} \tag{1.8}$$

$$Z(\lambda p) = Z(p) \text{ pro všechna } \lambda > 0 \text{ a pro všechna } p \in \mathcal{D}, \tag{1.9}$$

$$p \cdot Z(p) \leq 0 \text{ pro všechna } p \in \mathcal{D}, \tag{1.10}$$



Obrázek 4.3: Přirozený rovnovážný stav

$$p_k \to \overline{p} \notin \mathcal{D} \text{ implikuje} \sum_{i=1}^{l} Z^i(p_k) \to \infty. \tag{1.11}$$

Věta 1.10 *Buď funkce $Z : \mathcal{D} \to R^l$ funkce splňující 1.8, 1.9, 1.10 a 1.11. Pak existuje cenový systém $p^* \in \mathcal{D}$ tak, že $Z(p^*) \leq 0$.*

Uvažme funkci $\beta : R \to R$ stejně jako v důkazu věty 1.9. Definujme pak novou funkci $\alpha : R \to R$ v závislosti na pevně zvoleném kladném číslu c předpisem

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \leq 0, \\ 1 & \text{pro } t \geq c, \\ \frac{t}{c} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definujme pomocnou funkci $\overline{Z} : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ následovně:

$$\overline{Z}^i(p) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } p \notin \mathcal{D}, \\ \left(1 - \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p)\right)\right)\beta(Z^i(p)) + \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p)\right) & \text{jinak} \end{cases}$$

pro všechny indexy i a cenové vektory p.

Podobně jako v důkazu věty 1.1 a 1.9 definujme zobrazení $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_0$ předpisem $\varphi(p) = \overline{Z}(p) - \left(\sum_{i=1}^l \overline{Z}^i(p)\right) p$. Pak φ splňuje předpoklady věty 1.7. Existuje tedy vektor $p^* \in \Delta_1$ tak, že $\varphi(p^*) = 0$. Tedy $\overline{Z}(p^*) = \sum_{i=1}^l \overline{Z}^i(p^*)p^*$. Nejdříve předpokládejme, že $p^* \in \mathcal{D}$. Uvažme nyní skalární součin obou stran rovnosti s vektorem $Z(p^*)$. Pak stejně jako v důkazu 1.9 dle 1.10 dostaneme $\overline{Z}(p^*) \cdot Z(p^*) \leq 0$. Tedy

$$\sum_{i=1}^l \left(1 - \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p^*)\right)\right)\beta(Z^i(p^*))Z^i(p^*) + \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p^*)\right)\sum_{i=1}^l Z^i(p^*) \leq 0.$$

Protože pro všechna reálná t platí $t\alpha(t) \geq 0$, nutně pak

$$\sum_{i=1}^l \left(1 - \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p^*)\right)\right)\beta(Z^i(p^*))Z^i(p^*) \leq 0.$$

Tedy

$$\left(1 - \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p^*)\right)\right)\sum_{i=1}^l \beta(Z^i(p^*))Z^i(p^*) \leq 0.$$

Zároveň pro všechna reálná t platí $(1-\alpha(t)) \geq 0$ tj. $\sum_{i=1}^{l} \beta(Z^i(p^*)) \cdot Z^i(p^*) \leq 0$.

Ale zřejmě $\beta(t)t > 0$ pro $t > 0$ a $\beta(t)t = 0$ pro $t \leq 0$. Nutně tedy $Z^i(p^*) \leq 0$ pro všechna i tj. $Z(p^*) \leq 0$.

Nechť $p^* \notin \mathcal{D}$. Pak $\overline{Z}(p^*) = (1, \ldots, 1)$ tj. $lp^* = \overline{Z}(p^*) = (1, \ldots, 1)$ tj. $p^* = p_c \in \mathcal{D}$, spor. Tedy věta 1.9 platí.

2 Ekonomika úplné směny: existence rovnovážného stavu

Tento odstavec se skládá ze dvou částí; v první z nich budeme uvažovat silnější předpoklady s důrazem na diferenciovatelnost, přičemž v druhém budeme pracovat v obecnějším rámci. Existenční tvrzení jsou speciálními případy Arrow-Debreuovy věty.

Uvažme nejprve jednoho účastníka s prostorem komodit $P = \{x \in R^l : x = (x^1, \ldots, x^l), (\forall i)(x^i > 0)\} \subseteq R^l_+$. Tedy prvek $x \in P$ bude reprezentovat svazek komodit spojených s tímto ekonomickým agentem. Budeme předpokládat, že preferenční relace na P je reprezentována funkcí užitečnosti $u : P \to R$ tak, že účastník preferuje prvek $x \in P$ před prvkem $y \in P$ přesně tehdy, když $u(x) > u(y)$. Podmnožiny $u^{-1}(c)$ pro $c \in R$ (vrstevnice funkce u) nazýváme indiferentními křivkami (pro preferenční relaci). V dalším budeme předpokládat silný předpoklad klasického typu:

$$\text{Funkce } u : P \to R \text{ je třídy } C^2. \tag{2.1}$$

Buď nyní $g(x)$ orientovaný jednotkový normálový vektor k indiferentní křivce $u^{-1}(c)$ pro $c \in R$ tak, že $c = u(x)$. Můžeme pak vyjádřit $g(x)$ jakožto $\frac{\mathrm{grad} u(x)}{||\mathrm{grad} u(x)||}$, kde $\mathrm{grad} u = \left(\frac{\delta u}{\delta x^1}, \ldots, \frac{\delta u}{\delta x^l}\right)$. Pak je $g : P \to S^{l-1}$ zobrazení třídy C^1. Toto zobrazení hraje základní roli v analýze preferencí spotřebitele a teorie poptávky.

Náš další předpoklad je monotonie neboli *více je lépe* tj.

$$g(x) \in P \cap S^{l-1} = \mathrm{int}(S^{l-1}_+) \text{ pro všechna } x \in P. \tag{2.2}$$

Tedy 2.2 znamená, že všechny parciální derivace $\frac{\delta u}{\delta x^i}$ jsou kladné.

Naše třetí hypotéza je konvexnost a to opět v silném a diferencovatelném tvaru. Pro $x \in P$ je derivace $\mathrm{D}g(x)$ lineární zobrazení z R^l do kolmé nadroviny $g(x)^{\perp}$ k vektoru $g(x)$. Můžeme pak uvažovat o $g(x)^{\perp}$ jakožto o tečném prostoru $T_{g(x)}(S^{l-1})$ nebo o tečné rovině k indiferentní křivce. Pak restrikce $\mathrm{D}g(x)$ z nadroviny $g(x)^{\perp}$ do sebe je symetrické lineární zobrazení.

$$\text{Restrikce } \mathrm{D}g(x) \text{ z nadroviny } g(x)^{\perp} \text{ do sebe má záporné vlastní hodnoty.} \tag{2.3}$$

Ekvivalentní podmínka k 2.3 je

Druhá derivace $\mathrm{D}^2u(x)$ jakožto symetrická bilineární forma omezená na tečnou nadrovinu $g(x)^{\perp}$ k indiferentní křivce v bodě x je negativně definitní. (2.4)

Ekvivalenci mezi 2.3 a 2.4 lze ukázat následovně: buď $\mathrm{D}u(x) : R^l \to R$ buď první derivace funkce u v bodě x s jádrem označeným $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{D}u(x))$. Pak máme $v \cdot g(x) = \frac{\mathrm{D}u(x)(v)}{||\mathrm{grad}u(x)||}$. Dále $v \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{D}u(x))$ právě tehdy, když $v \cdot \mathrm{grad}u(x) = 0$ tj. $v \cdot g(x) = 0$ tj. $v \in g(x)^{\perp}$. Nechť $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{D}u(x))$. Pak $v_1 \cdot g(x) = \frac{\mathrm{D}u(x)(v_1)}{||\mathrm{grad}u(x)||}$. Derivujeme-li obě strany podle x, máme

$$v_1 \cdot \mathrm{D}g(x) = \frac{\mathrm{D}^2u(x)(v_1)||\mathrm{grad}u(x)|| - \overbrace{\mathrm{D}u(x)(v_1)\mathrm{D}\left(||\mathrm{grad}u(x)||\right)}^{=0}}{||\mathrm{grad}u(x)||^2}.$$

Tedy $v_1 \cdot \mathrm{D}g(x) = \frac{\mathrm{D}^2u(x)(v_1)}{||\mathrm{grad}u(x)||}$.

Připomeňme následující dvě tvrzení z lineární algebry ([5]).

Tvrzení 2.1 *Buď A matice nad tělesem T, majících n vlastních hodnot (ne nutně navzájem různých). Pak matice A je podobná Jordanově matici.*

Tvrzení 2.2 *Buď f_2 regulární kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru V_n a buď A její matice vzhledem k bázi M prostoru V_n. Označme $D_i, i = 1, \ldots, n$ determinant dílčí submatice matice A, která vznikne z matice A vynecháním posledních $n - i$ řádků a posledních $n - i$ sloupců. Pak f_2 je pozitivně definitní, právě když $D_i > 0, i = 1, \ldots, n$.*

Dále je vhodné si uvědomit, že forma f_2 je pozitivně definitní, právě když $-f_2$ je negativně definitní.

Nyní můžeme dokončit důkaz ekvivalence podmínek 2.3 a 2.4. Totiž, má-li matice $\mathrm{D}g(x)$ všechny vlastní hodnoty záporné, má v odpovídající bázi Jordanův (trojúhelníkový) tvar B tak, že na diagonále jsou záporná čísla. Položme $A := -B$. Pak A má na diagonále pouze kladná čísla a dle 2.2 je odpovídající forma k A pozitivně definitní, tj. odpovídající forma k $\mathrm{D}g(x)$ negativně definitní. Obráceně, buď forma $\frac{\mathrm{D}^2 u(x)}{||\mathrm{grad} u(x)||}$ negativně definitní, λ vlastní číslo matice $\mathrm{D}g(x)$ a v příslušný nenulový vlastní vektor. Pak

$$\lambda(v \cdot v) = v \cdot (\lambda v) = v \cdot (\mathrm{D}g(x)v) = \frac{\mathrm{D}^2 u(x)(v, v)}{||\mathrm{grad} u(x)||} < 0.$$

Tedy $\lambda < 0$, což se mělo dokázat. Ukažme následující tvrzení.

Tvrzení 2.3 *Pokud funkce užitečnosti $u : P \to R$ splňuje 2.3, je nutně $u^{-1}([c, \infty))$* ostře *konvexní pro všechna $c \in R$.*

Ukážeme, že minimum funkce u na každém intervalu nemůže nastat ve vnitřku tohoto intervalu. Přesněji, nechť $x, x' \in P$ tak, že $u(x) \geq c$, $u(x') \geq c$. Nechť dále $S = \{y : y = \lambda x + (1-\lambda)x', 0 < \lambda < 1\}$ je odpovídající interval s krajními body $x, x' \in P$. Nechť dále $x^* = \lambda^* x + (1 - \lambda^*)x', 0 < \lambda^* < 1$ je bod minima pro funkci u na S. Pak $x^* = x' - \lambda^*(x' - x)$. Navíc $\mathrm{D}u(x^*)(v) = 0$ pro $v = x' - x$. Protože x^* je bod minima, nutně $\mathrm{D}^2 u(x^*)(v, v) \geq 0$. To je však spor 2.4, že $\mathrm{D}^2 u(x^*) < 0$ na $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{D}u(x^*))$. Je proto u větší než c na S.

Závěrečná podmínka na funkci u je hraniční podmínka a jejím důsledkem je zbavení se případných problémů spojených s hranicí podprostoru R^l_+:

$$\text{Indiferentní křivka } u^{-1}(c) \text{ je uzavřená v } R^l \text{ pro všechna } c. \tag{2.5}$$

To lze interpretovat jakožto podmínku, že účastník si přeje vlastnit od každé komodity alespoň něco. Je například použita v práci [7] (1959).

Odvoďme si nyní funkci *poptávky* od *funkce užitečnosti* účastníka. Předpokládejme proto, že máme dán *cenový systém* $p \in \mathrm{int} R^l_+ = P$ a vektor *bohatství* $w \in R_+$. Tato definice R_+ je vhodná ačkoliv ne zcela důsledná. Uvažujme dále *rozpočtovou množinu* $B_{p,w} = \{x \in P : p \cdot x = w\}$. Můžeme pak za $B_{p,w}$ považovat za množinu komodit, které získáme za ceny p pro bohatství w. Poptávka $f(p,w)$ je komoditní svazek maximalizující užitečnost na množině $B_{p,w}$. Poznamenejme, že $B_{p,w}$ je ohraničená a neprázdná a tedy funkce u omezená na $B_{p,w}$ má kompaktní indiferentní křivky. Zejména tedy má funkce u na $B_{p,w}$ maximum, které je jediné dle předpokladu konvexity 2.3 a dle 2.3.

Je tedy $x = f(p,w)$ *poptávka* našeho účastníka při cenách p a bohatství w. Přitom je vidět, že poptávka je spojité zobrazení $f : \mathrm{int} R^l_+ \to R^+ \to P$. Tedy $x = f(p,w)$ je maximum funkce u na $B_{p,w}$, derivace $\mathrm{D}u(x)$ omezená na $B_{p,w}$ je nulová neboli platí $g(x) = \frac{p}{||p||}$. Z definice $p \cdot f(p,w) = w$ a $f(\lambda p, \lambda w) = f(p,w)$ pro všechna $\lambda > 0$. Celkem pak:

Tvrzení 2.4 *Individuální poptávka je spojité zobrazení $f : \mathrm{int} R^l_+ \to R^+ \to P$ a splňuje*

1. $g(f(p,w)) = \frac{p}{||p||}$,
2. $p \cdot f(p,w) = w$,
3. $f(\lambda p, \lambda w) = f(p,w)$ *pro všechna* $\lambda > 0$.

Dále ukážeme následující známou skutečnost [8].

Tvrzení 2.5 *Funkce poptávky je třídy C^1. Obecně, funkce poptávky je stejné třídy C^r jakožto funkce g.*

Poznamenejme nejprve, že z tvrzení 2.4 máme zobrazení

$$\varphi : P \to (\mathrm{int} S^{l-1}_+) \times R_+, \quad \varphi(x) = (g(x), x \cdot g(x)),$$

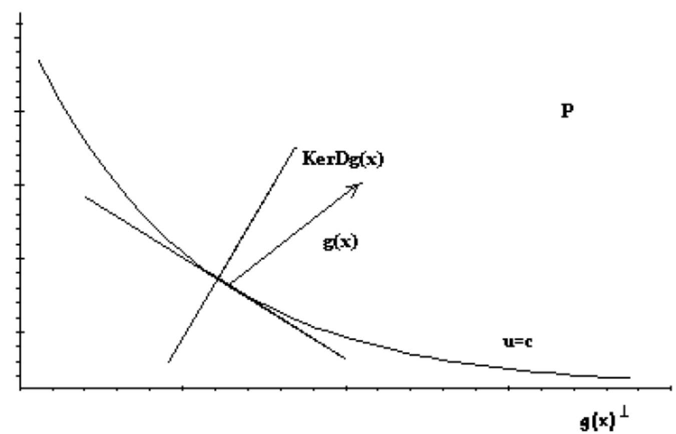
což je inverzní zobrazení k restrikci f na množinu $(\mathrm{int}S_+^{l-1}) \times R_+$. Protože φ je třídy C^1, bude f třídy C^1 dle věty o implicitní funkci 1.4, pokud derivace $\mathrm{D}\varphi(x)$ je regulární pro všechna $x \in P$.

Abychom ukázali, že $\mathrm{D}\varphi(x)$ je regulární, stačí ověřit, že $\mathrm{D}\varphi(x)(\eta) = 0$ implikuje $\eta = 0$. Nechť tedy $\eta \in R^l$. Pak

$$\mathrm{D}\varphi(x)(\eta) = (\mathrm{D}g(x)(\eta), \eta \cdot g(x) + x \cdot \mathrm{D}g(x)(\eta)) \,.$$

Je-li tedy $\mathrm{D}\varphi(x)(\eta) = 0$, pak $\mathrm{D}g(x)(\eta) = 0$ tj. $\eta \in \mathrm{KerD}g(x)$. Ale i $\eta \cdot g(x) = 0$ tj. $\eta \in g(x)^\perp$. Zároveň víme z 2.3 že restrikce $\mathrm{D}g(x)$ z nadroviny $g(x)^\perp$ je regulární tj. $\mathrm{KerD}g(x) \cap g(x)^\perp = \{0\}$. Tedy $\eta = 0$.

Z výše uvedeného okamžitě plyne, že můžeme psát $R^l = \mathrm{KerD}g(x) \oplus g(x)^\perp$ tj. každý vektor z R^l lze jednoznačně zapsat jakožto $\eta = \eta_1 + \eta_2$, $\eta_1 \cdot g(x) = 0$, $\mathrm{D}g(x)(\eta_2) = 0$.



Obrázek 4.4: Funkce užitku a poptávka

Můžeme pak orientovat přímku $\mathrm{KerD}g(x)$ tak, že řekneme, že vektor $\eta \in \mathrm{KerD}g(x)$ je pozitivní, pokud $\eta \cdot g(x) > 0$. Zároveň máme: protože $\mathrm{D}g(x)$ je vždy regulární, je i křivka $g^{-1}(p)$ s $p = g(x)$, $p \in S_+^{l-1}$ pevné, regulární. Mluvíme pak o *křivce rozvoje příjmů.* V bodě $x \in P$ je tečná přímka k $g^{-1}(p)$ právě přímka $\mathrm{KerD}g(x)$ (z definice). Tuto křivku lze pak interpretovat jakožto křivku poptávky rostoucí s bohatstvím při pevných cenách. Můžeme pak uvažovat bohatství jakožto funkci $w : P \to R$ definovanou jako $w(x) = x \cdot g(x)$. Pak w je *ostře* rostoucí podél každé křivky rozvoje příjmů. Skutečně, křivka $g^{-1}(p)$ je diferencovatelně parametrizovatelná podle w.

Předpokládejme nyní, že bohatství účastníka pochází z obdaření e z P a je funkcí $w = p \cdot e$ ceny p. Poslední vlastnost poptávky je dána tvrzením:

Tvrzení 2.6 *Buď p_i posloupnost cenových vektorů ležící v $\mathrm{int}R_+^l$ konvergující k $p^* \in \delta R_+^l$ pro $i \to \infty$. Pak $||f(p_i, p_i \cdot e)|| \to \infty$ pro $i \to \infty$.*

Důkaz. Nechť neplatí, že $||f(p_i, p_i \cdot e)|| \to \infty$ pro $i \to \infty$. Pak pro nějaké $x^* \in R_+^l$ existuje vhodná podposloupnost i_j, $j = 1, 2, \ldots, \infty$ tak, že $f(p_{i_j}, p_{i_j} \cdot e) \to x^*$. Totiž pak všechny prvky $f(p_{i_j}, p_{i_j} \cdot e)$ leží v nějaké kompaktní kouli tj. z této posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Můžeme tedy v dalším bez újmy na obecnosti předpokládat, že posloupnost $f(p_i, p_i \cdot e) \to x^*$. Pro každé i položme $w_i = p_i \cdot e$. Pak $e \in B_{p_i, w}$; tj. $u(f(p_i, p_i \cdot e)) \geq u(e)$. Speciálně $f(p_i, p_i \cdot e) \in u^{-1}([u(e), \infty))$. Z uzavřenosti množiny $u^{-1}([u(e), \infty))$ pak nutně $x^* \in u^{-1}([u(e), \infty))$. Dle 2.5 máme, že $x^* \in P$. Proto je $g(x^*)$ definováno a rovno p^*. Ale protože $p^* \in \delta R_+^l$ dostáváme spor s naším předpokladem monotonie 2.2.

Ekonomika úplné směny sestává z: m účastníků se stejným prostorem komodit P. Účastník i pro $i = 1, \ldots, m$ má preference reprezentovány funkcí užitečnosti $u_i : P \to R$ splňující podmínky 2.1, 2.2, 2.3 a 2.5. Zároveň předpokládejme, že každý účastník i má k dispozici obdaření $e_i \in P$. Tedy pro cenový systém $p_i \in R_+^l - \{0\}$ je bohatství účastníka i rovno $p \cdot e_i$.

Můžeme pak interpretovat tento model jakožto ekonomii směny, ve které se každý účastník pokouší směnit své obdařené komodity za svazek komodit, který by zvýšil jeho uspokojení při omezení daným rozpočtem. Pojem ekonomiky lze představit následovně:

Stav ekonomiky se skládá z *alokace* $x \in P^m$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ a *cenového systému* $p_i \in S_+^{l-1}$. Alokace se nazývá *přípustná*, pokud $\sum x_i = \sum e_i$. Tedy celkové zásoby ekonomiky ukládají omezení na alokace; neexistuje produkce. Stav $(x, p) \in P^m \times S_+^{l-1}$ se nazývá *konkurenční* (*Walrasovův*) *rovnovážný stav*, pokud splňuje podmínky (A) a (B):

(A) $\sum x_i = \sum e_i$.

což není nic jiného, než podmínka přípustnosti.

(B) Pro všechna i, x_i maximalizuje u_i na množině zásob $\{y \in P : p \cdot y = p \cdot e_i\}$ tj. $x_i = f(p, p \cdot e_i)$.

Poznamenejme, že podmínka (B) se nezmění (díky monotonii funkce u_i), jestliže množinu zásob nahradíme množinou $\{y \in P : p \cdot y \leq p \cdot e_i\}$. Dále připomeňme, že podmínku (B) lze nahradit podmínkami (B1) a (B2):

(B1) $p \cdot x_i = p \cdot e_i$ pro všechna i.

(B2) Pro všechna i, $g_i(x_i) = p_i$.

Věta 2.7 *Buď dána ekonomika úplné směny tj. m obchodníků s obdařeními e_i, $1 \leq i \leq m$ a preferencemi reprezentovanými funkcemi užitečnosti $u_i : P \to R$ splňujícími podmínky 2.1, 2.2, 2.3 a 2.5. Pak existuje rovnovážný stav ekonomiky tj. můžeme najít $x_i \in P$, $1 \leq i \leq m$ a cenový vektor $p \in S_+^{l-1}$ splňující* (A) *a* (B).

Převeďme podmínky (A) a (B) do problému poptávky a nabídky. Buď tedy $S : R_+^l - \{0\} \to R_+^l$ konstantní zobrazení, $S(p) = \sum e_i$. Podobně klademe $D : \mathrm{int} R_+^l - \{0\} \to R_+^l$ $D(p) = \sum f_i(p, p \cdot e_i)$, kde $f_i(p, p \cdot e_i)$ je poptávka určená funkcí u_i. Definujme nadbytek poptávky $Z : \mathrm{int} R_+^l - \{0\} \to R^l$ předpisem $Z(p) = D(p) - S(p)$. Poznamenejme, že rovnovážné podmínky (A) a (B) jsou splněny pro vektor (x, p) právě tehdy, když $Z(p) = 0$ a $x_i = f_i(p, p \cdot e_i)$. Budeme aplikovat větu 1.10. Ověřme, že jsou splněny podmínky 1.8, 1.9, 1.10 a 1.11. Evidentně, Z je spojitá funkce, Z je homogenní, protože jak S tak D jsou homogenní funkce, Z splňuje slabý Walrasův zákon. Totiž zejména pro $p \in \mathrm{int} R_+^l$ máme

$$p \cdot Z(p) = p \cdot D(p) - p \cdot S(p) = \sum p \cdot f_i(p, p \cdot e_i) - \sum p \cdot e_i = \sum (p \cdot x_i - p \cdot e_i) = 0.$$

Ověřme podmínku 1.11. Máme ukázat, že $p_k \to \overline{p} \notin \mathrm{int}R^l_+$ implikuje $\sum_{j=1}^l Z^j(p_k) \to \infty$. Ale to je právě tehdy, když $\sum_j \sum_i f_i(p_k, p_k \cdot e_i)^j \to \infty$. Z tvrzení 2.6 máme, že pro každé i platí $||f_i(p_k, p_k \cdot e_i)|| \to \infty$ pro $k \to \infty$ tj. $\sum_{j=1}^l \left(f_i(p_k, p_k \cdot e_i)^j\right)^2 \to \infty$. Z nezápornosti f_i pak nutně i $\sum_{j=1}^l f_i(p_k, p_k \cdot e_i)^j \to \infty$. Celkem pak $\sum_j \sum_i f_i(p_k, p_k \cdot e_i)^j \to \infty$. Tedy existuje cenový vektor $p^* \in \mathrm{int}R^l_+$ tak, že $Z(p^*) \leq 0$. Z věty 1.8 pak nutně $Z(p^*) = 0$.

Věnujme se nyní ekonomice úplné směny takové, že budeme předpokládat pouze spojité preference. Uvažme nyní preference na celém prostoru komodit R^l_+ reprezentované spojitými funkcemi $u : R^l_+ \to R$. Nahraďme podmínky 1.8, 1.9, 1.10 a 1.11 následujícím podmínkami:

$$\text{Funkce } u : R^l_+ \to R \text{ je spojitá.} \tag{2.6}$$

$$u(\lambda x + (1-\lambda)x') > c, \text{ pokud } u(x), u(x') \geq c \text{ a } 0 < \lambda < 1. \tag{2.7}$$

Předpokládejme dále, že každý obchodník má k dispozici, kromě preferenční funkce u_i, obdaření $e_i \in P$. Zejména tedy má k dispozici kladné množstí každé komodity.

Věta 2.8 *Jsou-li dány preferenční funkce užitku $u_i : R^l_+ \to R$, $1 \leq i \leq m$ splňující 2.6, 2.7 a obdaření $e_i \in P$, $1 \leq i \leq m$, existuje pak rovnovážný stav* volného použití (x^*, p^*). *Tedy*

1. $\sum_i x_i^* \leq \sum_i e_i$, *a*

2. *Pro všechna i, x_i^* maximalizuje u_i na množině zásob $\{x_i \in R^l_+ : p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot e_i\}$.*

Důkaz. Než budeme konstruovat funkci poptávky, zbavíme se části komoditního prostoru blízké nekonečnu. Přesněji, vyberme reálné číslo $c > ||\sum_i e_i||$ a položme $X_c = D_c \cap R^l_+$. Definujme dále přidruženou funkci *falešné poptávky* $\hat{f}_i : (R^l_+ - \{0\} \times R^l_+ \to X_c)$ následovně:

$$\hat{f}_i(p, w) := x_0, \; u(x_0) = \max\{u_i(x) : x \in \hat{B}_{p,w}\},$$

kde $\hat{B}_{p,w} = \{x \in X_c : p \cdot x \leq w\}$. Protože je množina $\hat{B}_{p,w}$ kompaktní, konvexní a neprázdná, okamžitě plyne z *ostré* konvexity u_i, že je funkce $\hat{f}_i(p, w)$ dobře definovaná.

Věta 2.9 *Funkce falešné poptávky $\hat{f}_i : (R^l_+ - \{0\} \times R^l_+ \to X_c)$ je spojitá, je homogenní tj. $\hat{f}_i(\lambda p, \lambda w) = \hat{f}_i(p, w)$ pro všechna $\lambda > 0$ a $p \cdot \hat{f}_i(p, w) \leq w$. Zároveň, pokud $||\hat{f}_i(p, w)|| < c$, pak maximum $f_i(p, w)$ funkce u_i existuje na množině $B_{p,w} = \{x \in R^l_+ : p \cdot x \leq w\}$ (pravdivá poptávka) a navíc platí $f_i(p, w) = \hat{f}_i(p, w)$.*

Důkaz. Je evidentní, že funkce falešné poptávky $\hat{f}_i$ je spojitá, je homogenní a $p \cdot \hat{f}_i(p, w) \leq w$.

Ukážeme zbývající část věty. Nechť $\hat{x}_i = \hat{f}_i(p, w)$ tak, že $||\hat{f}_i(p, w)|| < c$. Uvažme $x_i \in B_{p,w}$ tak, že $u_i(x_i) \geq u_i(\hat{x}_i)$. Nechť $S = \{y : y = \lambda x_i + (1 - \lambda)\hat{x}_i, 0 < \lambda < 1\}$ je odpovídající interval s krajními body $x_i, \hat{x}_i$. Pro všechna $x'_i \neq \hat{x}_i$ na množině $S \cap X_c$ máme $u_i(x'_i) > u_i(\hat{x}_i)$ z *ostré* konvexity, což je spor s výběrem $\hat{x}_i$ jakožto bodu maxima funkce falešné poptávky. ▮

Nyní definujme funkce $\hat{D}(p) = \sum_i \hat{f}_i(p, p \cdot e_i)$, $S(p) = \sum_i e_i$ a $\hat{Z} : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ jakožto $\hat{Z}(p) := \hat{D}(p) - S(p)$. Pak evidentně $\hat{Z}$ splňuje slabý Walrasův zákon a tedy dle věty 1.9 existuje cenový vektor p tak, že $\hat{Z}(p) = 0$. Položíme-li tedy $\hat{x}_i = \hat{f}_i(p, w)$, máme $\sum_i \hat{x}_i = \sum_i e_i$ a $||\hat{f}_i(p, w)|| < c$. Tedy dle 2.9 je nutně $\hat{x}_i = \hat{f}_i(p, w) = f_i(p, w) = x_i$. Zejména je tedy vektor $(x_1, \ldots, x_m, p)$ rovnovážným stavem *volného použití* ekonomiky úplné směny. ▮

Předpokládejme nyní, že funkce užitku $u_i : R^l_+ \to R$ splňuje následující

Podmínka nenasycenosti: Funkce $u_i : R^l_+ \to R$ nemá maximum.

Pak můžeme bez újmy na obecnosti tvrdit, že vektor komodit $f_i(p, w) = x_i$ splňuje dokonce rovnost $p \cdot f_i(p, w) = w$. Jinak bychom totiž mohli vybrat komoditní vektor $x^*_i \in R^l_+$ mimo $B_{p,w}$ tak, že $u_i(x^*_i) > u_i(\hat{x}_i)$, což je opět spor podmínky *ostré* konvexity a výběrem x_i jakožto bodu maxima na $B_{p,w}$. Celkem tedy dostaneme, že pro obvyklou funkci nadbytku poptávky $Z(p)$ platí Walrasův zákon v rovnovážném stavu.

3 Paretova optimalita

Budeme nyní pracovat na nějaké otevřené množině $W \subseteq R^n$ a funkcemi třídy C^2 $u_i : W \to R$, $1 \le i \le m$. Můžeme pak W považovat za prostor stavů nějakého sdružení, přičemž členové tohoto sdružení mají preference reprezentované funkcemi užitku u_i. Bod $x \in W$ se nazývá *Paretovým optimem*, pokud neexistuje žádný prvek $y \in W$ tak, že $u_i(y) \ge u_i(x)$ pro všechna i a pro nějaké i_0 $u_{i_0}(y) > u_{i_0}(x)$. O takovém y říkáme, že *dominuje* stav x. Je-li $m = 1$, je Paretovo optimum právě obyčejné maximum. Bod $x \in W$ je *lokální Paretovo optimum*, jestliže existuje okolí N bodu x a x je Paretovo optimum pro funkce užitku $u_i : W \to R$, $1 \le i \le m$ omezené na okolí N. Bod $x \in W$ se nazývá *silné Paretovo optimum*, jestliže $y \in W$ splňuje $u_i(y) \ge u_i(x)$ pro všechna i, pak nutně $x = y$. Podobně, bod $x \in W$ se nazývá *lokální silné Paretovo optimum*, jestliže existuje okolí N bodu x a x je silné Paretovo optimum pro funkce užitku $u_i : W \to R$, $1 \le i \le m$ omezené na okolí N. Poznamenejme, že tyto definice lze zavést obecně, např. pro libovolnou podmnožinu $W \subseteq R^n$.

Věta 3.1 *Buď $u_i : W \to R$, $1 \le i \le m$, funkce třídy C^2, kde W je otevřená podmnožina R^n. Je-li $x \in W$ lokální Paretovo optimum, existují nezáporná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \ge 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že*

$$\sum_i \lambda_i D u_i(x) = 0. \tag{3.1}$$

Pokud navíc platí, že

$$\sum_i \lambda_i D^2 u_i(x) \text{ je negativně definitní na } \langle \lambda_1 D u_1(x), \dots, \lambda_m D u_m(x) \rangle^{\perp}, \tag{3.2}$$

je x bod lokálního silného Paretova optima.

Poznamenejme, že položíme-li $m = 1$, $n = 1$, je věta 3.1 standardní věta matematické analýzy funkcí jedné proměnné pro maximum. Je-li $m = 1$ a n libovolné, jedná se o případ maxima funkce více proměnných.

Věta 3.2 Stiemkeho věta *Proto, aby systém lineárních rovnic* $Ax = 0$ *měl kladné řešení* $x > 0, x \in R^m$ *je nutné a dostatečné, aby byl průnik množin* $\{A^T p : p \in R^n\}$ *a* $R^m_+ - \{0\}$ *prázdný.*

Věta 3.3 Tuckerova věta *Systém lineárních rovnic* $Ax = 0, x \geq 0$ *a systém lineárních nerovnic* $A^T p \geq 0$ *mají vždy dvojici řešení* (x, p) *takovou, že* $A^T p + x > 0$.

Důkaz věty 3.1. Nechť $Pos = \{v \in R^m : v = (v_1, \ldots, v_m), v_i \geq 0\}$, $\overline{Pos}$ příslušný uzávěr. Přitom $u = (u_1, \ldots, u_m) : W \to R^m$. Buď x lokální Paretovo optimum a předpokládejme, že $\mathrm{Im} \mathrm{D}u(x) \cap Pos \neq \emptyset$. Pak existuje $v \in R^n$ tak, že $\mathrm{D}u(x)(v) \in Pos$. Dále buď $\alpha(t)$ křivka začínající v x, obsažená ve W taková, že $\alpha'(0) = v$. Pak, z Taylorova rozvoje funkcí u_i, dostáváme, že existuje t_0 tak, že pro všechna i a $t \leq t_0$ je $u_i(\alpha(t)) = u_i(\alpha(0)) + t\mathrm{D}u(x)(v)_i + R_1(t)_i$, kde $\frac{R_1(t)}{t} \to 0$ pro $t \to 0$, $\mathrm{D}u(x)(v)_i > R_1(t)_i$ tj. $u_i(\alpha(t)) > u_i(\alpha(0)) = u_i(x)$ tj. x není Paretovo lokální optimum. Nutně tedy $\mathrm{Im} \mathrm{D}u(x) \cap Pos = \emptyset$.

Předpokládejme nyní, že rovnice $\lambda \cdot \mathrm{D}u(x) = 0$ má pouze triviální nezáporné řešení. Pak dle 3.3 platí, že existuje vektor $v \in R^n$ tak, že $\mathrm{D}u(x)(v) \in Pos$, což není možné. Tedy rovnice $\lambda \cdot \mathrm{D}u(x) = 0$ má netriviální nezáporné řešení, čímž je dokázána první část věty.

Ukažme výše uvedené přímo pomocí aparátu lineárního programování:

Primární úloha

$$\begin{aligned}
&\max \textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i \\
&\text{za podmínek} \\
&(\mathrm{D}u_1(x), \ldots, \mathrm{D}u_m(x)) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0 \\
&\lambda_i \geq 0
\end{aligned} \tag{PU}$$

a duální úloha

$$
\begin{array}{l}
\min \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot v_j \\
\text{za podmínky} \\
(v_1, \ldots, v_n) \cdot (\mathrm{D}u_1(x), \ldots, \mathrm{D}u_m(x)) \geq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{array}
\tag{DU}
$$

Protože však primární úloha je neomezená právě tehdy, když existuje netriviální nezáporný vektor λ splňující $\lambda \cdot \mathrm{D}u(x) = 0$ a duální úloha nemá přípustné řešení právě tehdy, když $\mathrm{ImD}u(x) \cap Pos = \emptyset$, máme z věty o dualitě první část naší věty.

Předpokládejme nyní, že druhá část naší věty platí pro případ $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq m$ a uvažme obecný případ. Přečíslujme indexy tak, že $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq k$, $\lambda_i = 0$, $k+1 \leq i \leq m$. Pak podmínky 3.1 a 3.2 jsou tytéž pro optimalizaci $u_1, \ldots, u_m$ v bodě x a optimalizaci $u_1, \ldots, u_k$ v bodě x. Protože ale dle předpokladu je věta platná v tomto případě, je x lokální silné Paretovo optimum v bodě x pro funkce $u_1, \ldots, u_k$. Je tedy x lokální silné Paretovo optimum v bodě x pro funkce $u_1, \ldots, u_m$.

Stačí se tedy omezit na důkaz případu, kdy jsou všechna λ_i kladná. Předpokládejme pro jednoduchost, že bod x je počátek R^n a že $u(x) = 0 \in R^m$. Můžeme tedy v dalším volně používat označení x pro libovolný bod z W. Zejména tedy podmínka, že $0 \in W$ je bod lokálního silného Paretova optima, je ekvivalentní podmínce, že existuje okolí N počátku 0 ve W tak, že $(u(N) - \{0\}) \cap \overline{Pos} = \emptyset$. Ukážeme tedy, že existuje takovéto okolí N.

Označme $K = \mathrm{KerD}u(0)$ jádro lineárního zobrazení $\mathrm{D}u(0)$ a $K^{\perp}$ jeho ortogonální doplněk.

Lemma 3.4 *Existují reálná čísla $r, \delta > 0$ tak, že pokud $||x|| < r$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^{\perp}$ a $||x_2|| \leq \delta ||x_1||$, pak platí pro nenulové x nerovnost $\lambda \cdot u(x) < 0$.*

Důkaz. Nechť $H = \sum_i \lambda_i D^2 u_i(0)$. Protože H je negativně definitní na K, je $H(x,x) \le -\sigma||x||^2$ pro nějaké vhodné kladné číslo σ a pro všechny vektory $x \in K$ (totiž stačí se omezit na jednotkovou kouli v K, tam má funkce H maximum, které je nutně záporné a rovno $-\sigma$).

Nechť nyní $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$. Pak můžeme psát $H(x,x) = H(x_1,x_1) + 2H(x_1,x_2) + H(x_2,x_2)$. Ale víme, že $|H(x_1,x_2)| \le C||x_1|| \cdot ||x_2||$ a $|H(x_2,x_2)| \le C_1||x_2|| \cdot ||x_2||$ pro vhodné nezáporné konstanty C a C_1.

Můžeme tedy vybrat vhodná dostatečně malá kladná čísla η, δ tak, že pokud $||x_2|| \le \delta||x_1||$, pak $H(x,x) \le -\eta||x||^2$. Aplikujeme-li Taylorovu větu o rozvoji pro $||x|| < r$, $u(x) = \mathrm{D}u(0)(x) + \mathrm{D}^2u(0)(x,x) + R_3(x)$, kde $|\lambda \cdot R_3(x)| < \frac{\eta}{2}||x||^2$. Pak $\lambda \cdot u(x) = \lambda \cdot \mathrm{D}u(0)(x) + \lambda \cdot \mathrm{D}^2u(0)(x,x) + \lambda \cdot R_3(x) \le -\eta||x||^2 + \lambda \cdot R_3(x) < 0$. ∎

Označme nyní $J = \mathrm{Im}\mathrm{D}u(0)$ a pišme pro $u \in R^m$ jako $u = (u_a, u_b)$, $u_a \in J$, $u_b \in J^\perp$.

Lemma 3.5 *Jsou-li dána reálná čísla $\alpha > 0$ a $\delta > 0$, existuje reálné číslo $s > 0$ tak, že pokud $||x|| < r$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$ a $||x_2|| \ge \delta||x_1||$, pak nerovnost $||u_b(x)|| \le \alpha||u_a(x)||$.*

Důkaz. Restrikce $\mathrm{D}u(0)_{K^\perp} : K^\perp \to \mathrm{Im}\mathrm{D}u(0)$ zobrazení $\mathrm{D}u(0) : R^n \to \mathrm{Im}\mathrm{D}u(0)$ je lineární izomorfismus. Totiž, je-li $\mathrm{D}u(0)(x) = \mathrm{D}u(0)(y)$ je nutně $\mathrm{D}u(0)(x-y) = 0$ t.j. $x - y \in K \cap K^\perp = \{0\}$ tj. $x = y$. Nechť $z \in \mathrm{Im}\mathrm{D}u(0)$. Pak existuje $x \in R^n$ tak, že $\mathrm{D}u(0)(x) = z$. Ale $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$. Tedy $z = \mathrm{D}u(0)(x) = \mathrm{D}u(0)(x_1) + \mathrm{D}u(0)(x_2) = 0 + \mathrm{D}u(0)(x_2)$.

Zároveň poznamenejme, že pro každý lineární izomorfismus v euklidovském prostoru existují kladné konstanty $k_1, k_2 > 0$ tak, že

$$k_1||x|| \le ||F(x)|| \le k_2||x||$$

pro všechna x. Speciálně tedy existují kladné konstanty $c_1, c_2 > 0$ tak, že

$$\begin{aligned} ||\mathrm{D}u(0)(x)|| = ||\mathrm{D}u(0)(x_2)|| &\ge c_1||x_2|| \quad \text{pro všechna } x = x_1 + x_2 \\ &\ge c||x|| \quad\quad \text{pokud } ||x_2|| \ge \delta||x_1||. \end{aligned}$$

Rozviňme $u(x)$ do Taylorovy řady. Pak

$$u_a(x) + u_b(x) = u(x) = \mathrm{D}u(0)(x) + R(x).$$

Přitom pro $\beta > 0$ můžeme předpokládat, že $||R(x)|| \leq \beta||x||$ pro $||x|| < s$, $s > 0$ vhodné reálné číslo. Přitom $R(x) = R_a(x) + R_b(x)$, $R_a(x) \in J$, $R_b(x) \in J^\perp$. Tedy

$$||u_a(x)|| = ||\mathrm{D}u(0)(x) + R_a(x)|| \geq ||\mathrm{D}u(0)(x)|| - || - R_a(x)|| \geq (c - \beta)||x||$$

a

$$||u_b(x)|| = ||R_b(x)|| \leq \beta||x||.$$

Zvolme β tak, že $\frac{\beta}{c-\beta} < \alpha$. Pak $||u_b(x)|| \leq \alpha||u_a(x)||$. ▮

Dokončeme nyní důkaz věty 3.1. Vyberme α z lemma 3.5 tak, že pokud $||u_b(x)|| \leq \alpha||u_a(x)||$, pak $u(x) \notin \overline{Pos} - \{0\}$.

Ukážeme nyní, že rovnice $\lambda \cdot \mathrm{D}u(x) = 0$ má kladné řešení právě tehdy, když $\mathrm{Im}\mathrm{D}u(0) \cap \overline{Pos} = \emptyset$.

Ukažme výše uvedené pomocí aparátu lineárního programování:

Primární úloha

$$\begin{aligned}
&\max \lambda_j \\
&\text{za podmínek} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\mathrm{PU}_j)\\
&(\mathrm{D}u_1(x), \ldots, \mathrm{D}u_m(x)) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0 \\
&\lambda_i \geq 0
\end{aligned}$$

a duální úloha

$$\begin{array}{ll} \max \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot v_j & \\ \text{za podmínky} & \qquad (\mathrm{DU}_j) \\ (v_1, \ldots, v_n) \cdot (\mathrm{D}u_1(x), \ldots, \mathrm{D}u_m(x)) \geq (0 \ldots \overbrace{1}^{j} 0). & \end{array}$$

Protože však všechny primární úlohy (PU_j) jsou neomezené právě tehdy, když existuje netriviální kladný vektor λ splňující $\lambda \cdot \mathrm{D}u(x) = 0$ a všechny duální úlohy (DU_j) nemají přípustná řešení právě tehdy, když $\mathrm{ImD}u(0) \cap \overline{Pos} = \{0\}$, máme z věty o dualitě naše tvrzení o průniku $\mathrm{ImD}u(0) \cap \overline{Pos}$.

Vyberme tedy kruh se středem 0 a poloměrem $r_0 < \min(r, s)$, r z lemmatu 3.4 a s z lemmatu 3.5, δ z lemmatu 3.5 dle lemmatu 3.4. Nutně pak $u(x) \notin \overline{Pos} - \{0\}$ pokud $||x|| < r_0$ tj. 0 je bod lokálního silného Paretova optima. ▮

Přejděme nyní k rozšíření věty 3.1 o podmínky omezení. Jsou tedy funkce třídy C^2 $u_1, \ldots, u_m$ definovány na nějaké otevřené množině $W \subseteq R^l$ spolu s omezeními danými podmínkami tvaru $g_\beta(x) \geq 0$, $\beta = 1, \ldots, k$, kde $g_\beta : W \to R$ je funkce třídy C^2. Můžeme vyjádřit tento problém jakožto hledání optima restrikcí funkcí $u_1, \ldots, u_m$ na množině $W_0 \subseteq R^l$, $W_0 = \{x \in W : g_\beta(x) \geq 0, \beta = 1, \ldots, k\}$.

Věta 3.6 *Buď $u_i : W_0 \to R$, $1 \leq i \leq m$, funkce jako výše uvedeno, $x \in W_0$ lokální Paretovo optimum. Pak existují nezáporná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, $\mu_1, \ldots, \mu_k \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že*

$$\sum_i \lambda_i D u_i(x) + \sum_\beta \mu_\beta D g_\beta(x) = 0, \tag{3.3}$$

přičemž $\mu_\beta = 0$ pro $g_\beta(x) \neq 0$.

Pokud navíc platí, že $\sum_i \lambda_i D^2 u_i(x) + \sum_\beta \mu_\beta D^2 g_\beta(x)$ je negativně definitní na

$$\langle \lambda_1 D u_1(x), \ldots, \lambda_m D u_m(x), \mu_1 D g_1(x), \ldots, \mu_k D g_k(x) \rangle^\perp, \tag{3.4}$$

je x bod lokálního silného Paretova optima.

Důkaz. Abychom dokázali první část věty, předpokládejme (bez újmy na obecnosti), že $g_\beta(x) = 0$ právě pro všechna $\beta = 1, \dots, k$ a definujme zobrazení $\varphi : W \to R^{m+k}$ předpisem $\varphi = (u_1, \dots, u_m, g_1, \dots, g_k)$. Tvrdíme pak, že $\mathrm{ImD}\varphi(x) \cap Pos = \emptyset$. Jinak by, analogicky jako v 3.1, existoval vektor $v \in R^l$ tak, že $\mathrm{D}\varphi(x)(v) \in Pos$ a nechť $\alpha(t)$ buď křivka ve W splňující $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = v$. Pro dostatečně malá ϵ je $\alpha(\epsilon) \in W_0$ a dominuje $\alpha(0) = x$. Tedy x není lokální Paretovo optimum. Nutně tedy $\mathrm{ImD}\varphi(x) \cap Pos = \emptyset$. Existuje pak vektor $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_k) \in \overline{Pos} - \{0\}$ normální k podprostoru $\mathrm{ImD}\varphi(x)$, stejně jako ve větě 3.1. Tím jsme dokázali první část věty 3.6.

K důkazu druhé části nejprve poznamenejme, že z definice lokálního silného Paretova optima plyne pro bod $x \in W_0$, že pokud bod x je bodem lokálního silného Paretova optima pro funkci φ na W, pak je i bodem lokálního silného Paretova optima pro funkce $u_1, \dots, u_m$ na W_0. Ale z 3.1 víme, že x je bodem lokálního silného Paretova optima pro funkci φ na W. ▮

Zakončeme tento odstavec s několika poznámkami:

1. Věta 3.1 je speciální případ věty 3.6 pro $k = 0$.

2. Předpokládejme, že g_α splňují *podmínku nedegenerovanosti* v bodě $x \in W_0$. Pak je množina vektorů $\mathrm{D}g_\beta$ pro β takové, že $g_\beta(x) = 0$, lineárně nezávislá tedy speciálně alespoň jedno λ_i je kladné.

3. Pokud je ve větě 3.6 $m = 1$, není první část nic jiného než Kuhn-Tuckerova věta. Je-li navíc splněna podmínka nedegenerovanosti, lze volit $\lambda_1 = 1$.

4 Základní věta ekonomiky blahobytu

Vraťme se nyní k ekonomice úplné směny z odstavce 2. Přitom funkce užitečnosti $u_i : P \to R$ $i-$tého obchodníka, $i = 1, \dots, m$ splňují podmínku 2.1 tj. že funkce $u_i : P \to R$ je třídy C^2, podmínku monotonie 2.2 tj., že $g_i(x) \in P \cap S^{l-1} = \mathrm{int}(S^{l-1}_+)$ pro všechna $x \in P$, zde $g_i(x) = \frac{\mathrm{grad} u_i(x)}{||\mathrm{grad} u_(x)||}$, kde $\mathrm{grad} u_i = \left(\frac{\delta u_i}{\delta x^1}, \dots, \frac{\delta u_i}{\delta x^l}\right)$, podmínku konvexnosti 2.3, že restrikce $\mathrm{D}g_i(x)$ z nadroviny $g_i(x)^\perp$ do sebe má záporné vlastní hodnoty a nakonec je hraniční podmínku 2.5, že Indiferentní křivka $u_i^{-1}(c)$ je uzavřená v R^l pro všechna c.

Nebudeme však předpokládat, že bohatství účastníka pochází z obdaření e_i z P a je funkcí $w_i = p \cdot e_i$ ceny p. Budeme ale předpokládat, že úplné zdroje naší ekonomiky jsou dány pevným vektorem $r \in P$.

Pak množina W dosažitelných alokací neboli stavů má tvar

$$W = \{x \in P^m : x = (x_1, \dots, x_m), x_i \in P, \sum_i x_i = r\}.$$

Funkce individuálního užitku $u_i : P \to R$ i-tého účastníka nám indukuje zobrazení $v_i : W \to R$ tak, že $v_i(x) = u_i(x_i)$. Je přirozené si klást otázku, jak vypadají Paretově optimální stavy pro funkce v_i, $i = 1, \dots, m$. Platí:

Věta 4.1 *Následující tři podmínky na alokaci $x \in W$ vzhledem k indukovaným funkcím užitku $v_i : W \to R$ jsou ekvivalentní:*

1. *x je lokální Paretovo optimum.*
2. *x je lokální silné Paretovo optimum.*
3. *$g_i(x_i) = p \in S_+^{l-1}$ pro všechna i.*

Přitom množinu všech takovýchto x označíme θ.

Důkaz. Poznamenejme, že evidentně podmínka (2) implikuje podmínku (1). Ukažme, že (1) implikuje (3). Abychom to dokázali, stačí nám pouze předpokládat o funkcích $u_i : P \to R$, že jsou třídy C^1.

Předpokládejme tedy, že $x \in W$ je lokální Paretovo optimum. Z první části věty 3.1 máme, že existují nezáporná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že $\sum_i \lambda_i \mathrm{D}v_i(x) = 0$ tj. $\sum_i \lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i) = 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že například λ_1 je kladné. Uvažme nyní vektor $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_m) \in$

$(R^l)^m$ tak, že $\sum_i \overline{x}_i = 0$, tj. jedná se o tečný vektor k W. Je-li navíc speciálně $\overline{x} = (\overline{x}_1, 0, \ldots, 0, \overbrace{-\overline{x}_1}^{k}, 0, \ldots, 0)$, máme pak $\sum_i \lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i)(\overline{x}_i) = \lambda_1 \mathrm{D}u_1(x_1)(\overline{x}_1) - \lambda_k \mathrm{D}u_k(x_k)(\overline{x}_1) = 0$ pro všechna $\overline{x}_1 \in R^l$. Nutně tedy, protože $\mathrm{D}u_j(x_j) \in P$ pro všechna j, λ_1 je kladné, je i λ_k kladné a $\lambda_1 \mathrm{D}u_1(x_1) = \lambda_k \mathrm{D}u_k(x_k)$. Po podělení normou pak $g_1(x_1) = g_k(x_k)$. Je tedy podmínka (3) splněna.

Abychom dokázali ekvivalenci těchto tří podmínek, zbývá ukázat, že pokud x splňuje podmínku (3), pak platí (2) tj. x je lokální silné Paretovo optimum.

Lemma 4.2 *Buď $u : P \to R$ funkce splňující 2.3. Pokud $y \in P$, $u(y) \geq u(x)$ a $x \neq y$, pak $Du(x)(y-x) > 0$. Pak i $y \cdot g(x) > x \cdot g(x)$.*

Důkaz. Pro $0 \leq t \leq 1$ dle 2.3 je nutně $u(x) \leq u(x+t(y-x))$. Nutně tedy je její derivace v bodě x nezáporná tj. platí $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)u(x+t(y-x))|_{t=0} \geq 0$ tj. $\mathrm{D}u(x)(y-x) \geq 0$. Předpokládejme, že $\mathrm{D}u(x)(y-x) = 0$. Rozvojem v bodě x dostáváme $u(x+t(y-x)) = u(x) + 0 + \underbrace{\mathrm{D}^2u(x)(t(y-x), t(y-x))}_{<0} + R_3(t)$. Tedy pro dostatečně malá t je $u(x) > u(x+t(y-x))$, což je spor s výše uvedeným.

Chceme nyní ukázat, že x je bod lokálního silného Paretova optima. Nechť nyní y je takový bod, že $v_i(x) \leq v_i(y)$ pro všechna i. Chceme ukázat, že $x = y$. Předpokládejme opak. Pak pro nějaké i_0 víme, že platí $y_{i_0} \cdot g_{i_0}(x_{i_0}) > x_{i_0} \cdot g_{i_0}(x_{i_0})$. Položme $p = g_{i_0}(x_{i_0})$. Pak $p = g_i(x_i)$ pro všechna i. Tedy $\sum_i y_i \cdot p > \sum_i x_i \cdot p$. Ale protože $y \in W$, nutně $\sum_i y_i = r = \sum_i x_i$ tedy i $\sum_i y_i \cdot p = r = \sum_i x_i \cdot p$. Nutně pak pro všechna i máme $x_i = y_i$ tj. $x = y$ tj. x je silné Paretovo optimum.

Zaveďme nyní pojem *rovnovážného stavu ekonomiky blahobytu*. Řekneme, že stav $(x,p) \in W \times S_+^{l-1}$ je rovnovážným stavem ekonomiky blahobytu, jestliže i-tá projekce x_i je bodem maxima funkce u_i na rozpočtové množině $B_{p,p\cdot x_i} = \{x \in P : p \cdot x = p \cdot x_i\}$. Množinu všech rovnovážných stavů ekonomiky blahobytu budeme označovat Λ. Z této definice plyne, že bod (x,p), $x = (x_1, \ldots, x_m), x_i \in P, p \in S_+^{l-1}$ leží v Λ, pokud platí:

(1_E) $\sum_i x_i = r$,
(2_E) $g_i(x_i) = p$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$.

Máme-li navíc k dispozici údaje o individuálních obdařeních $e_i \in P, i = 1, \ldots, m$ tak, že $\sum_i e_i = r$, dostáváme Walrasův rovnovážný stav

(3_E) $p \cdot e_i = p \cdot x_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Věta 4.3 *Mezi množinami θ a Λ existuje vzájemně jednoznačná korespondence $\beta : \Lambda \to \theta$ definovaná předpisem $\beta((x,p)) = x$ a $\alpha : \theta \to \Lambda$ definována následovně: $\alpha(x) = (x, g_1(x_1))$.*

Důkaz. Evidentně, β je korektně definovaná surjekce. Totiž, vzorem prvku x je prvek $(x, g_1(x_1))$. Ukažme, že je i injekce. Nechť $\beta(x,p) = \beta(x,q)$. Pak nutně $p = g_1(x_1) = q$. ▮

V dalším budeme o funkcích užitku u_i předpokládat pouze, že jsou třídy C^2. Označme θ_s podmnožinu množiny W, která sestává z lokálních silných Paretových optim.

Tvrzení 4.4 *Je-li bod $x \in W$ bod lokálního optima pro indukované funkce užitku na W, pak*

1. *existují nezáporná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že*

$$\sum_i \lambda_i Du_i(x) = 0,$$

   což implikuje, že $g_i(x_i)$ jsou nezávislé na i.

   Pokud navíc platí, že

2. $$\sum_i \lambda_i D^2 u_i(x)(\overline{x}_i) \text{ je záporná na množině takových } \overline{x}, \text{ že}$$

   $\sum_i \overline{x}_i = 0$, $\overline{x}_i \cdot g_i(x_i) = 0$ pro všechna i a pro jisté i_0 je $\overline{x}_{i_0} \neq 0$, je x bod lokálního silného Paretova optima tj. $x \in \theta_s$.

Důkaz. Stejně jako ve větě 3.1 víme, že $\mathrm{Im}\mathrm{D}u(x) \cap Pos = \emptyset$, tj. existuje vektor λ tak, že rovnice $\lambda \cdot \mathrm{D}u(x) = 0$ má netriviální nezáporné řešení λ, čímž je pomocí 4.1 dokázána první část věty. Položme $K = \{\overline{x} : \sum_j \overline{x}_j = 0, \overline{x}_i \cdot g_i(x_i) = 0$ pro všechna $i\}$. Pak K je vektorový podprostor a forma $H = \sum_i \lambda_i \mathrm{D}^2 u_i(x)$ je negativně definitní na množině K. Platí pak zejména obdoba lemmat 3.4 a 3.5. Tedy pak nutně máme $x \in \theta_s$. ▌

Studujme nyní situaci z věty 4.1 pro prostory komodit s hranicí. Předpokládejme, že každá funkce užitku $u_i : R^l_+ \to R$ je restrikce funkce třídy C^2 na nějaké otevřené množině obsahující množinu R^l_+. Speciálně pak máme definovány derivace $\mathrm{D}u_i(x)$ a $\mathrm{D}^2 u_i(x)$ na hranici δR^l_+ a podmínky 2.2 a 2.3 mají smysl i pro hraniční body.

Buď $r \in \mathrm{int} R^l_+$ vektor celkových zásob. Položme dále $W_0 = \{x : x \in R^{lm}_+, \sum_j x_j = r\}$. Pak W_0 je prostor přípustných stavů naší ekonomiky úplné směny. Buď dále W relativní okolí množiny W_0 vzhledem k množině $W_r = \{x : x \in R^{lm}, \sum_j x_j = r\}$ tak, že funkce $v_i : W \to R$ jsou zde definovány jakožto $v_i(x) = u_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Nechť jsou dále funkce omezení $g^k_i : W \to R$ určeny předpisem $g^k_i(x) = x^k_i$. Pak nalezení optima ve W_0 je ekvivalentní nalezení optima pro funkce $v_i : W \to R$ s omezeními $g^k_i(x) \geq 0$.

Věta 4.5 *Nechť funkce $u_i : R^l_+ \to R$ splňují*

$$g_i(x_i) = \frac{\mathrm{grad}\, u_i(x_i)}{||\mathrm{grad}\, u_i(x_i)||} \in S^{l-1}_+, \tag{4.1}$$

pro všechna i a

$$D^2 u_i(x) \text{ je negativně definitní na } g_i(x_i)^\perp. \tag{4.2}$$

Je-li bod $x \in W_0$ bod lokálního optima pro indukované funkce užitku na W_0, pak

1. *existují normovaný nezáporný vektor $p \in S^{l-1}_+$ a nezáporná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že*

   $$p \geq \lambda_i D u_i(x_i) \text{ pro všechna } i,$$

   přičemž rovnost nastává v k-té souřadnici, jestliže $x^k_i \neq 0$.

   Pokud navíc platí, že

2.

$$p \cdot x_i \neq 0 \text{ pro všechna } i,$$

je x bod lokálního silného Paretova optima.

Důkaz. Pro omezení $g_i^k(x) = x_i^k$ víme, že $\mathrm{D}g_i^j(x)(\overline{x}) = \overline{x}_i^j$ pro všechny vektory $\overline{x} \in (R^l)^m$ takové, že $\sum_i \overline{x}_i = 0$. Dle věty 3.6 víme, že existují nezáporná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, $\mu_1, \dots, \mu_k \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že

$$\sum_i \lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i)(\overline{x}_i) + \sum_{i,j} \mu_i^j \overline{x}_i^j = 0,$$

přičemž $\mu_\beta = 0$ pro $x_i^j \neq 0$.

Proveďme nyní konkrétní volbu $\overline{x}_i^j = 1$, $\overline{x}_k^j = -1$ a nechť všechny ostatní souřadnice jsou nulové. pak nutně

$$\lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i)(\overline{x}_i)^j + \mu_i^j = \lambda_k \mathrm{D}u_k(x_k)(\overline{x}_k)^j + \mu_k^j,$$

přičemž $\mathrm{D}u_k(x_k)(\overline{x}_k)^j$ značí j-tou souřadnici vektoru $\mathrm{D}u_k(x_k)(\overline{x}_k)$. Celkem tedy je vektor $q = \lambda_k \mathrm{D}u_k(x_k) + \mu_k$ nezávislý na indexu k. Přitom $\mu_k = (\mu_k^1, \dots, \mu_k^l) \geq 0$ a nutně $\mu_k \cdot x_k = 0$. Poznamenejme, že q je nenulový vektor (jinak by nutně všechna λ_i a μ_i^j byla nulová). Položme $p = \frac{p}{||p||}$. Položíme-li $\lambda_i' = \frac{\lambda_i}{||p||}$, $\mu_i'^j = \frac{\mu_i^j}{||p||}$, máme pak

$$p = \lambda_k' \mathrm{D}u_k(x_k) + \mu_k',$$

přičemž $\lambda_k' \geq 0$, $\mu_k' \geq 0$, $\mu_k' \cdot x_k = 0$. To ale není nic jiného, než první část naší věty.

Abychom dokázali zbývající část věty, uvažme prvek $y \in W_0$ tak, že $u_i(y_i) \geq u_i(x_i)$ pro všechna i. Dle lemmatu 4.2 platí $\mathrm{D}u_i(x_i)(y_i - x_i) \geq 0$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $y_i = x_i$. Platí ale zároveň, že

$$p \cdot x_i = \lambda_i' \mathrm{D}u_i(x_i) \cdot x_i + \mu_i' \cdot x_i = \lambda_i' \mathrm{D}u_i(x_i) \cdot x_i.$$

Nutně tedy je $\lambda_i' \neq 0$, protože $p \cdot x_i \neq 0$. Zopakujeme-li tuto úvahu ještě jednou, obdržíme nerovnost

$$p(y_i - x_i) \geq \mu_i \cdot y_i \text{ tj. } p \cdot y_i \geq p \cdot x_i,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $y_i = x_i$. Z druhé strany nutně $\sum_i y_i = r = \sum_i x_i$ tj. $\sum_i p \cdot y_i = p \cdot r = \sum_i p \cdot x_i$ a pro všechna i skutečně nastává rovnost. ▮

Zaveďme nyní pojem *rovnovážného stavu ekonomiky blahobytu* pro W_0. Řekneme, že stav $(x, p) \in W_0 \times S_+^{l-1}$ je rovnovážným stavem ekonomiky blahobytu, jestliže i-tá projekce x_i je bodem maxima funkce u_i na rozpočtové množině $B_{p,p\cdot x_i} = \{x \in P : p \cdot x \leq p \cdot x_i\}$. Množinu všech takovýchto rovnovážných stavů ekonomiky blahobytu budeme označovat Λ_0. Pokud bod (x, p) leží v Λ_0, pak $\sum_i x_i = r$.

Věta 4.6 *Pokud $(x, p) \in \Lambda_0$, existují nezáporná čísla $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ a nezáporné vektory $\mu_i \in R_+^l$, $i = 1, \ldots, m$ tak, že $x_i \cdot \mu_i = 0$ a $p = \lambda_i Du_i(x_i) + \mu_i$. Obráceně, pokud $(x, p) \in W_0 \times S_+^{l-1}$ tak, že $p \cdot x_i \neq 0$ pro všechna i a navíc $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \in R_+^l$, $i = 1, \ldots, m$ splňují výše uvedené, pak $(x, p) \in \Lambda_0$.*

Důkaz. Protože x_i je maximum funkce u_i na $B_{p,p\cdot x_i}$ pro všechna i, existují $\lambda_i, \sigma_i \geq 0$ a nezáporné vektory $\mu_i \in R_+^l$, $i = 1, \ldots, m$ ne všechny nulové tak, že

$$\lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i)(\overline{x}_i) + \sum \mu_i^j \mathrm{D}g_i^j(x_i)(\overline{x}_i) - \sigma_i p \cdot \overline{x}_i = 0$$

pro všechna $\overline{x}_i \in R^l$.

To je ekvivalentní s tím, že

$$\lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i) + \mu_i = \sigma_i p, \quad \mu_i \cdot x_i = 0.$$

Pokud by $\sigma_i = 0$, nutně i $\lambda_i = 0$, $\mu_i = 0$. Můžeme tedy dělit obě strany rovnosti σ_i a po přeznačení máme

$$\lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i) + \mu_i = p, \quad \mu_i \cdot x_i = 0.$$

Tím jsme dokázali první část. Pro důkaz druhé části předpokládejme, že existuje $y_i \in B_{p,p\cdot x_i}$ tak, že $u_i(x_i) < u_i(y_i)$. Pak dle 4.2 platí $\mathrm{D}u_i(x_i)(y_i - x_i) > 0$ a pro $p \cdot y_i \geq y_i \cdot \lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i) > p \cdot x_i$, $\lambda_i \neq 0$. Tedy $y_i \notin B_{p,p\cdot x_i}$, spor. Celkem $(x, p) \in \Lambda_0$. ▮

Ve zbývající části tohoto odstavce budeme předpokládat, že $\mathrm{D}u_i(x_i) \in \mathrm{int}S_+^{l-1}$ a $\mathrm{D}^2u_i(x_i) < 0$ na $\mathrm{Ker}\mathrm{D}u_i(x_i)$. Řekneme, že pro bod $x \in W_0$ existuje *izolovaná komunita* $\emptyset \subset S \subset \{1,\ldots,m\}$, jestliže pro každý prvek $i \in S$ a každý nenulový prvek $x_i^j \neq 0$ dostáváme, že $x_k^j = 0$ platí pro všechna $k \notin S$.

Lemma 4.7 *Předpokládejme, že $x \in W_0$ je bez izolovaných komunit a že $i, q \in \{1,\ldots,m\}$ jsou dva účastníci naší ekonomiky. Pak existuje posloupnost $i_1,\ldots,i_n$ agentů tak, že $i_1 = i, i_n = q$ a posloupnost zboží $j_1,\ldots,j_n$ tak, že $x_{i_k}^{j_k} \neq 0$ a pro všechna k nutně buď $j_{k+1} = j_k$ nebo $i_{k+1} = i_k$.*

Důkaz. Sporem. Bez újmy na obecnosti lze říci, že $i = i_1 = 1$ a uvažme všechny posloupnosti $(i_1,\ldots,i_n)$, $(j_1,\ldots,j_n)$ výše uvedeného tvaru tak, že $i_1 = 1$. Označme S jakožto podmnožinu všech možných i_n dosažitelných tímto způsobem. Je-li $S \neq \emptyset$ vlastní, pak má x izolovanou komunitu. ▮

Důsledek 4.8 *Nechť bod $x \in W_0$ nemá izolované komunity. Pak existuje jediný odpovídající cenový vektor $p \in S_+^{l-1}$.*

Důkaz. Stejně jako ve větě 4.5 a dle věty 3.6 víme, že existují nezáporná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \mu_1, \ldots, \mu_k \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že

$$p = \lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i) + \mu_i,$$

přičemž $\mu_i \cdot x_i = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme přečíslovat zboží a účastníky tak, že účastník 1 má nějakou část zboží 1 tj. $x_1^1 \neq 0$. Normujme vektor p následovně: $p^1 = 1$. Pak $p^1 = 1 = \lambda_1 \mathrm{D}u_1(x_1)^1 + \mu_1^1 = \lambda_1 \mathrm{D}u_1(x_1)^1$, protože $\mu_1^1 = 0$. Je tedy λ_1 jednoznačně určeno. Buď q nějaký jiný účastník. Uvažme posloupnost $i_1,\ldots,i_n$ agentů tak, že $i_1 = 1, i_n = q$ a posloupnost zboží $j_1,\ldots,j_n$ tak, že $x_{i_k}^{j_k} \neq 0$ a pro všechna k nutně buď $j_{k+1} = j_k$ nebo $i_{k+1} = i_k$. Předpokládejme indukcí, že λ_{i_l} je určeno pro všechna $l < k$ a chceme určit λ_{i_k}. Jsou dvě možnosti: buď $i_{k-1} = i_k$ a pak $\lambda_{i_k} = \lambda_{i_{k-1}}$ nebo $i_{k-1} \neq i_k$ a potom $j_{k-1} = j_k$ a oba účastníci i_{k-1}, i_k mají nenulové množství zboží j_k. Máme tedy rovnosti $p^{j_k} = \lambda_{i_{k-1}} \mathrm{D}u_{i_{k-1}}(x_{i_{k-1}})^{j_k}$ a $p^{j_k} = \lambda_{i_k} \mathrm{D}u_{i_k}(x_{i_k})^{j_k}$. Známe tedy p^{j_k} a následně λ_{i_k}. Opět jsme zde použili tu skutečnost, že odpovídající μ_i^j byla nulová. Zejména tedy máme tedy až na násobek jednoznačně určené všechny koeficienty λ_i. Buď dále k nějaké zboží. Vyberme index i tak, že $x_i^k \neq 0$. Pak $p^k = \lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i)^k$ jednoznačně určuje p^k, což dokazuje naše tvrzení. ▮

Následující vztah mezi Paretovými optimy a rovnovážnými stavy vyplývá bezprostředně z 4.8.

Věta 4.9 *Jestliže ekonomika splňuje předpoklad neexistence izolovaných komunit pro všechna Paretova optima, pak mezi množinou* θ_0 *Paretových optim a množinou* Λ_0 *rovnovážných stavů existuje vzájemně jednoznačná korespondence* $\beta_0 : \Lambda_0 \to \theta_0$ *definovaná předpisem* $\beta_0((x,p)) = x$ *a* $\alpha_0 : \theta_0 \to \Lambda_0$ *definována následovně:* $\alpha_0(x) = (x, g_1(x_1))$.

Kapitola 5

Dualita v mikroekonomii

1 Úvod

Co se myslí tím, když se řekne, že existuje *dualita* mezi nákladovou a produkční funkcí? Předpokládejme, že je dána *produkční funkce* F a že $u = F(\mathbf{x})$, kde u je maximální množství výroby (produkce), které může být vyrobeno technologií během určitého období, jestliže vektor vloženého (vstupního) množství $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N)$ je užit během období. Tudíž produkční funkce F popisuje technologii dané firmy. Na druhou stranu *minimální celkové náklady* firemní výroby na nejmenší výstup (produkci) úrovně u dané vstupními cenami $(p_1, p_2, \ldots, p_N) \equiv p$ jsou definovány jako $C(u, \mathbf{p})$) a to je samozřejmě funkce u, p a dané produkční funkce F. To co není tak samozřejmé, je to, že (za určitých podmínek regularity) *nákladová funkce* $C(u, \mathbf{p})$ rovněž zcela popisuje technologii dané firmy, tj. daná firemní nákladová funkce C může být použita k definování firemní produkční funkce F. Tudíž se jedná o *dualitu* mezi nákladovou a produkční funkcí v tom smyslu, že každá z těchto funkcí může popisovat technologii firmy stejně dobře.

V první části této kapitoly rozvineme tuto dualitu mezi nákladovou a produkční funkcí podrobněji. V druhé části odvodíme podmínky regularity, jež nákladová funkce C musí mít (bez ohledu na tvar funkce nebo zvláštních regulárních vlastností produkční funkce F), a ukážeme, jak může být produkční funkce zkonstruována z dané nákladové funkce. Ve třetí části rozvineme tuto dualitu mezi nákladovou a produkční funkcí vícero formálnějším způsobem.

Ve čtvrté části budeme uvažovat o dualitě mezi (přímou) produkční funkcí F a vzájemně si odpovídající nepřímou produkční funkcí G. Daná produkční funkce F, vstupní ceny $p \equiv (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ a vstupní rozpočet y dolarů, *nepřímé produkční funkce* $G(y, \mathbf{p})$ je definována jako maximální výstup (produkt) $u = F(\mathbf{x})$, který může být vyroben (vyprodukován) daným rozpočtem vynuceným vstupními náklady $\mathbf{p}^T\mathbf{x} \equiv \sum_{i=1}^{N} p_i\mathbf{x}_i \leq y$. Tudíž nepřímá produkční funkce $G(y, \mathbf{p})$ je funkcí maximálního přípustného rozpočtu y, vstupních cen p, se kterými výrobce počítá a produkční funkci F výrobce. Za určitých regulárních podmínek se ukáže, že G může také zcela popisovat technologii a tudíž je tu dualita mezi přímou a nepřímou produkční funkcí.

Výše uvedené duality mezi náklady, produkcí (výrobou) a nepřímou produkční funkcí se také může interpretovat v kontextu teorie spotřeby: prostě nechat (dovolit) F být *užitkovou funkcí spotřebitele*, $\mathbf{x}$ vektorem nakoupeného zboží (nebo nájemné), u užitkovým stupněm spotřebitele a y *příjmem* spotřebitele nebo výdaji (náklady) na N komodit. Potom $C(u, \mathbf{p})$ je minimální náklad (výdaj) dosahující užitkový stupeň u daný tak, že spotřebitel počítá s cenami p za zboží a to je dualita mezi užitkovou funkcí F spotřebitele a funkcí C, která je často nazývána *nákladovou (výdajovou) funkcí* v kontextu teorie spotřebitele. Podobně $G(y, \mathbf{p})$ může být nyní definována jako maximální užitek, který spotřebitel může dosáhnout tak, že počítá s cenami p a příjem y vydá na N komodit. V souvislosti se spotřebitelem je G nazývána jako *nepřímá užitková funkce* spotřebitele.

Tudíž každá z našich duálních teorií má dvě interpretace: jednak v souvislosti s výrobou a jednak v souvislosti se spotřebitelem. V části 2 chceme využít výrobní teoretickou terminologii kvůli konkrétnosti. Nicméně v následující části budeme používat více neutrální terminologii, která bude zahrnovat jak produkční tak i spotřební interpretaci. Produkční resp. užitkovou funkci F budeme nazývat *agregační funkce*, nákladovou resp. výdajovou funkci C *nákladová funkce* a nepřímou produkční resp. užitkovou funkci G *nepřímá agregační funkce.*

V páté části je zavedena funkce vzdálenosti $D(u, \mathbf{x})$. Vzdáleností funkce poskytuje ještě další způsob charakteristiky technologie. Hlavní použití vzdálenostní funkce je v konstrukci Malmquistova (1953) množstevního inde**x**u.

V části 6 prodiskutujeme několik dalších teorií duality: tj. prodiskutujeme další metody pro ekvivalentní popis technologie, buď lokálně nebo globálně, v jednovstupém nebo v N-vstupém konte**x**tu. Čtenář, který se zajímá o aplikaci, může přeskočit části 3 – 6.

Matematické teorie prezentované v části 2 – 6 mohou vypadat jen jako čistě teoretické výsledky (pro matematické účely) bez praktického využití. Avšak toto není ten případ. V části 7 – 10 předvedeme některé aplikace dříve rozvinutých teorií. Tyto aplikace spadají do dvou hlavních kategorií: 1)měření technologií nebo preferencí (část 9 a 10) 2)odvození srovnatelných statistických výsledků (část 7 a 8).

V části 10 se zaměříme na firmy, které mohou produkovat mnoho výstupů, zatímco zpracovávají mnoho vstupů (kdežto předtím jsme se zabývali pouze jedním vstupem). Uvedeme některé teorie duality a povšimneme si jejich některých aplikací.

Nakonec v části 11 a 12 se krátce zmíníme o některých dalších oblastech ekonomiky, kde mohou být duální teorie aplikovány.

Důkazy jsou v některých částech vynechány : důkazy mohou být nalezeny v odkazované literatuře nebo v Diewertovi (1982).

2 Dualita mezi nákladovou (výdajovou) a produkční (užitkovou) funkcí: Zjednodušený pohled

Předpokládejme, že máme dánu N-rozměrnou vstupní produkční funkci F: $u = F(\mathbf{x})$, kde u je množství vyprodukovaného výstupu za určitou dobu a $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) \geq 0_N$ je nezáporný vektor vstupu zpracovaného za tuto dobu. Dále předpokládejme, že výrobce může nakoupit množství zpracovávaných vstupů za pevné kladné ceny $p \equiv (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N) >> 0_N$ a že se výrobce nepokusí mít monopolní sílu na trhu vstupů.*

*V části 11 je tato podmínka zmírněna.

Nákladová funkce výrobce C je definována jako výsledek problému minimalizace ceny výroby při zachování výstupní úrovně u, za podmínky, že výrobce počítá se vstupním vektorem cen p:

$$C(u, \mathbf{p}) \equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^T \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\}. \tag{2.1}$$

V této části je ukázáno, že nákladová funkce C vyhovuje překvapivému počtu podmínek regularity, bez ohledu na funkcionální tvar produkční funkce F, poskytující jen řešení cenového minimalizačního problému 2.1. V následující části je ukázáno, jak tyto podmínky regularity nákladové funkce mohou být pužity v případě důkazu komparativních statistických teorií o odvození poptávkové funkce pro vstupy ([23]).

Dříve než zavedeme vlastnosti nákladové funkce C, je vhodné dát prostor následujícím minimalizačním podmínkám regularity produkční funkce F:

Předpoklad 1 pro F

F je spojitá shora, tj. pro všechna $u \in \text{range}F$ je $L(u) \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0_N, F(\mathbf{x}) \geq u\}$ uzavřená množina.

Jestliže F je spojitá funkce, pak samozřejmě F bude rovněž spojitá shora. Předpoklad 1 je dostatečný k implikaci toho, že řešení cenového (nákladového) minimalizačního problému 2.1 existuje.

Následujících sedm vlastností pro nákladovou funkci C může být nyní odvozeno jen za předpokladu, že produkční funkce F vyhovuje předpokladu 1.

Vlastnost 1 pro C

Pro každé $u \in$ prostor F a $p \gg 0_N, C(u, \mathbf{p}) \geq 0$, tj. C je nezáporná funkce.

Důkaz.

$$\begin{aligned} C(u, \mathbf{p}) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0_N, F(\mathbf{x}) \geq u\} \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{x}^*, \text{ kde } \mathbf{x}^* \geq 0_N \text{ a } F(\mathbf{x}^*) \geq u \\ &\geq 0, \text{ neboť } \mathbf{p} \gg 0_N \text{ a } \mathbf{x}^* \geq 0_N. \end{aligned}$$

Vlastnost 2 pro C

Jestliže $p \gg 0_N$ a $k > 0$, potom $C(u, k\mathbf{p}) = kC(u, \mathbf{p})$ pro každé $u \in \text{range}F$, tj. nákladová funkce je (jednoznačně) lineárně homogenní ve vstupních cenách pro fixní výstupní úroveň.

Důkaz. Nechť $p \gg 0_N, k > 0$ a $u \in \text{range}F$. Pak

$$\begin{aligned} C(u, k\mathbf{p}) &\equiv \min_{\mathbf{x}}\{(k\mathbf{p})^T\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} \\ &= k \min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p}^T\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} = k\ C(u, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Vlastnost 3 pro C

Jestliže nějaká kombinace vstupních cen roste, pak minimální produkční náklady reálného výstupu úrovně u se sníží, tj. jestliže $u \in \text{range}F$ a $\mathbf{p}^1 > \mathbf{p}^0$, pak $C(u, \mathbf{p}^1) \geq C(u, \mathbf{p}^0)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} C(u, \mathbf{p}^1) &\equiv \min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p}^{1T}\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} \\ &= \mathbf{p}^{1T}, \text{ kde } \mathbf{x}^1 \geq 0_N \text{ a } F(\mathbf{x}^1) \geq u \\ &\geq \mathbf{p}^{0T}\mathbf{x}^1, \text{ neboť } \mathbf{p}^1 > \mathbf{p}^0 \text{ a } \mathbf{x}^1 \geq 0_N \\ &\geq \min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p}^{0T}\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\}, \text{neboť } \mathbf{x}^1 \text{ je} \\ &\quad\ \text{přípustný pro minimalizaci nákladů,} \\ &\quad\ \text{ale není nutně optimální} \\ &\equiv C(u, \mathbf{p}^0). \end{aligned}$$

Vlastnosti nákladové funkce byly intuitivně zřejmé z ekonomického pohledu. Ale následující důležité vlastnosti nejsou tak intuitivně zřejmé.

Vlastnost 4 pro C

Pro všechna $u \in \text{range}F$, $C(u, \mathbf{p})$ je konkávní funkce p.

Důkaz: Nechť $u \in \text{range}F$, $\mathbf{p}^0 \gg 0_N, \mathbf{p}^1 \gg 0_N$ a $0 \le \lambda \le 1$. Pak

$$\begin{aligned}
C(u, \mathbf{p}^0) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^{0T}\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \ge u\} = \mathbf{p}^{0T}\mathbf{x}^0 \text{ a} \\
C(u, \mathbf{p}^1) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^{1T}\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \ge u\} = \mathbf{p}^{1T}\mathbf{x}^1. \text{ Nyní} \\
C(u, \lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{(\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \ge u\} \\
&= (\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T\mathbf{x}^\lambda \\
&= \lambda\mathbf{p}^{0T}\mathbf{x}^\lambda + (1-\lambda)\mathbf{p}^{1T}\mathbf{x}^\lambda \\
&\ge \lambda\mathbf{p}^{0T}\mathbf{x}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^{1T}\mathbf{x}^1, \text{ neboť } \mathbf{x}^\lambda \text{ je přípustné pro} \\
&\quad\ \text{minimalizaci nákladů ve spojitosti s cenovým} \\
&\quad\ \text{vektorem vstupů } \mathbf{p}^0 \text{ a } \ \mathbf{p}^1, \text{ ale není nutně} \\
&\quad\ \text{optimální pro tyto úlohy} \\
&= \lambda C(u, \mathbf{p}^0) + (1-\lambda) C(u, \mathbf{p}^1).
\end{aligned}$$

Základní idea ve výše uvedeném důkazu je opakovaně použita v duální teorii. Vzhledem k neintuitivní povaze vlastnosti 4 je asi výhodné poskytnout geometrickou interpretaci ve 2–vstupovém případě (tj. $N = 2$).

Předpokládejme, že výrobce produkuje výstup úrovně u. Definujme množinu S^0 jako množinu nezáporných kombinací vstupů, které jsou buď na nebo pod optimální nákladovou čárou (izokvantou), kdy výrobce počítá s cenami $\mathbf{p}^0$; tj. $S^0 \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^{0T}\mathbf{x} \le C(u, \mathbf{p}^0), \mathbf{x} \ge 0_N\}$, kde $C^0 \equiv C(u, \mathbf{p}^0) = \mathbf{p}^{0T}\mathbf{x}^0$ je minimum produkčních nákladů výstupu u daných tak, že výrobce počítá s cenami $\mathbf{p}^0 \gg 0_N$. Všimněme si, že vektor vstupů $\mathbf{x}^0$ řeší nákladovou minimalizační úlohu v tomto případě. Nyní předpokládejme, že výrobce počítá se vstupními cenami $\mathbf{p}^1 \gg 0_N$ a definujme S^1, C^1, a $\mathbf{x}^1$ analogicky, tj. $S^1 \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^{1T}\mathbf{x} \le C(u, \mathbf{p}^1), \mathbf{x} \ge 0_N\}, C^1 \equiv C(u, \mathbf{p}^1) = P^{1T}\mathbf{x}^1$, kde vektor vstupů $\mathbf{x}^1$ řeší nákladový minimalizační problém, kdy výrobce počítá s cenami $\mathbf{p}^1$.

Nechť $0 < \lambda < 1$ a nyní předpokládejme, že výrobce počítá s průměrnými cenovými vstupy $\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1$.

Definujme S^λ, C^λ a $\mathbf{x}^\lambda$ jako předtím:

$$\begin{aligned} S^\lambda &\equiv \{\mathbf{x} : (\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T\mathbf{x} \leq C(u, \lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1), \mathbf{x} \geq 0_N\}, \\ C^\lambda &\equiv C(u, \lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1) = (\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T\mathbf{x}^\lambda, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{x}^\lambda$ řeší nákladový minimalizační problém, kdy výrobce počítá s průměrnými cenami $\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1$. Nakonec uvažujme nákladovou izokvantu, která by byla výsledkem, jestliže výrobce spotřebovává průměr ze dvou počátečních nákladů $\lambda C^0 + (1-\lambda)C^1$, odpovídajících průměru cen vstupů $\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1$. Množina nezáporných kombinací vstupů, která je buď na nebo pod nákladovou linií, je definována jako množina $S^* \equiv \{\mathbf{x} : (\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T\mathbf{x} \leq \lambda C^0 + (1-\lambda)C^1, \mathbf{x} \geq 0_N\}$. K ukázání konkávnosti C potřebujeme ukázat, že $C^\lambda \geq \lambda C^0 + (1-\lambda)C^1$ nebo (ekvivalentně) potřebujeme ukázat, že S^λ obsahuje množinu S^*. To může být dokázáno tak, že nákladová izokvanta příslušící množině S^*, $L^* \equiv \{\mathbf{x} : (\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T\mathbf{x} = \lambda C^0 + (1-\lambda)C^1\}$ protíná průnik nákladových izokvant příslušících množinám S^0 a S^1. Nákladová izokvanta příslušící množině $S^\lambda, L^\lambda \equiv \{\mathbf{x} : (\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T\mathbf{x} = C^\lambda\}$ je zřejmě souběžná (paralelní) s L^*. A konečně L^λ musí být buď shodná s L^* nebo ležet nad ní, protože kdyby L^λ byla pod L^*, tak by existoval bod na u izokvantě, který by ležel pod alespoň jednou z nákladových izokvant $L^0 \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^{0T}\mathbf{x} = C^0\}$ nebo $L^1 \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^{1T}\mathbf{x} = C^1\}$, což by odporovalo minimalizaci nákladů v $\mathbf{x}^0$ nebo $\mathbf{x}^1$.

Vlastnost 5 pro C

Pro všechna $u \in \text{range}F, C(u, \mathbf{p})$ je spojitá v p pro $p \gg 0_N$. [Důkaz této vlastnosti je založen na výsledcích ve Fenchelovi (1953, str.75) a Rockafellarovi (1970, str. 82).]

Vlastnost 6 pro C

$C(u, \mathbf{p})$ je neklesající v u pro pevné p, tj. jestliže $p \gg 0_N, u^0, u^1 \in \text{range}F$, a $u^0 \leq u^1$, pak $C(u^0, \mathbf{p}) \leq C(u^1, \mathbf{p})$.

Důkaz:

Nechť $p \gg 0_N, u^0, u^1 \in$ prostor F a $u^0 \leq u^1$. Pak

$$\begin{aligned} C(u^1, \mathbf{p}) &\equiv \min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p}^T\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u^1\} \\ &\geq \min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p}^T\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u^0\}, \text{ neboť kdyby } u^0 \leq u^1, \text{ pak} \\ &\quad \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u^1\} \subset \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u^0\} \text{ a minimum} \\ &\quad \mathbf{p}^T\mathbf{x} \text{ nad větší množinou nemůže růst} \\ &\equiv C(u^0, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

V porovnání s předcházejícími vlastnostmi nákladové funkce vyžaduje následující vlastnost silný matematický aparát. Protože tyto matematické závěry jsou užitečné nejenom v této kapitole, ale i v kapitolách následujících, na chvíli odbočíme a uvedeme je.

V následujících definicích nechť S značí podmnožinu $\mathbb{R}^M$, T je podmnožinou $\mathbb{R}^K$, $\{x^n\}$ je posloupnost bodů z množiny S a $\{y^n\}$ posloupnost bodů z množiny T. Pro úplnější diskusi o následujících definicích a teoriích — viz. [3, Chapter 1 of the Handbook, Green a Heller].

Definice:

Φ je *korespondence* (mnohoznačné zobrazení) z S do T, jestliže pro každé $x \in S$ existuje neprázdná množina obrazů $\Phi(x)$, která je podmnožinou T.

Definice:

Korespondence Φ je *shora semispojitá* (neboli *shora hemispojitá*) v bodě $x^0 \in S$, jestliže $\lim_n x^n = x^0$, $y^n \in \Phi(x^n)$, $\lim_n y^n = y^0$, implikuje $y^0 \in \Phi(x^0)$. Korespondence Φ je *zdola semispojitá v bodě* $x^0 \in S$, jestliže $\lim_n x^n = x^0$, $y^0 \in \Phi(x^0)$ implikuje, že existuje posloupnost $\{y^n\}$, tak že $y^n \in \Phi(x^n)$ a $\lim_n y^n = y^0$. Korespondence Φ je *spojitá v* $x^0 \in S$, jestliže je shora a zdola semispojitá v bodě x^0.

Lemma 2 [Berge (1963, p. 116)]:

Φ je shora semispojitá korespondence na S právě tehdy, když graf $\Phi \equiv \{(x, y) : x \in S, y \in \Phi(x)\}$ je uzavřená množina $S \times T$.

Theorem shora semi–spojitého maxima [Berge (1963, p. 116)]

Nechť f je shora spojitá funkce definovaná na $S \times T$, kde T je kompaktní (uzavřená, ohraničená) podmnožina $\mathbb{R}^K$. Předpokládejme, že Φ je korespondence z S do T a že Φ je shora semi–spojitá na S. Pak funkce g definovaná $g(x) \equiv \max_V\{f(x, y) : y \in \Phi(x)\}$ je jednoznačně definována a je shora semi–spojitá na S.

Theorem maxima [Debreu (1952, pp. 889 – 890); (1959, p. 19); Berge (1963, p. 116)]

Nechť f je spojitá funkce reálných hodnot definovaná na $S \times T$, kde T je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^K$. Nechť Φ je korespondence z S do T a nechť Φ je spojitá na S. Definujme (maximum) funkce g jako $g(x) \equiv \max_y\{f(x, y) : y \in \Phi(x)\}$ a korespondenci ξ jako $\xi(x) \equiv \{y : y \in \Phi(x)$ a $f(x, y) = g(x)\}$. Potom funkce g je spojitá na S a korespondence ξ je shora semi–spojitá na S.

Vlastnost 7 pro C

Pro každé $p \gg 0_N, C(u, p)$ je zdola spojitá v u; tj. jestliže $p^* \gg 0_N, u^* \in$ range F, $u^n \in$ range$F$ pro všechna n, $u^1 \leq u^2 \leq \ldots$ a $\lim u^n = u^*$, pak $\lim_n C(u^n, p^*) = C(u^*, p^*)$.

Důkaz vlastnosti 7 se nachází v Diewert (1982).

Za účelem přiblížení této vlastnosti v C, čtenář může zjistit, že je výhodné zvolit $N = 1$ a nechat produkční funkce $F(x)$ jako následující *krokovací* funkci (shora spojitá) [Shepard (1970, p. 89)]:

$$F(x) \equiv \{0, \text{ jestliže } 0 \leq x <; 1, \text{ jestliže } 1 \leq x < 2; 2, \text{ jestliže } 2 \leq x < 3; \ldots\}.$$

Pro $p > 0$ je odpovídající nákladová funkce $C(u, p)$ následující (zdola spojitá) *krokovací* funkce:

$$C(u, p) \equiv \{0, \text{ jestliže } 0 = u; p, \text{ jestliže } 0 < u \leq 1; 2p, \text{ jestliže } 1 < u \leq 2; \ldots\}.$$

Výše uvedené vlastnosti nákladové funkce mají empirické důsledky, jak si ukážeme později. Nicméně, jeden důsledek může být uveden na tomto místě. Předpokládejme, že můžeme sledovat náklady, vstupní ceny a výstup (zisk) pro firmu a předpokládejme dále, že máme ekonometricky odhadnutou následující lineární nákladovou funkci:

$$C(u,p) = \alpha + \beta^T p + \gamma u \tag{2.2}$$

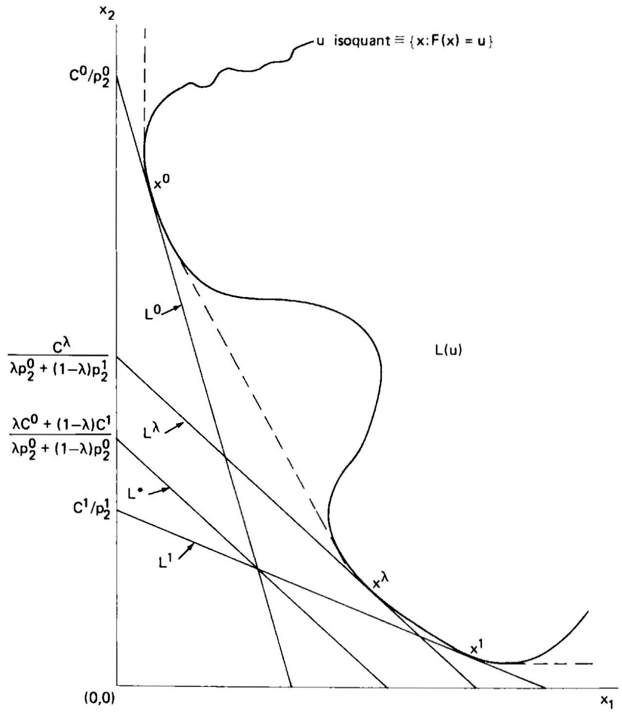
kde α a γ jsou konstanty a β je vektor konstant. Může být (2.2) skutečnou nákladovou funkcí firmy? Odpovědí je ne, jestliže firma konkurenčně minimalizuje náklady a jestliže jedna ze dvou konstant α a γ je nenulová, v tomto případě C nevyhovuje Vlastnosti 2 (lineární homogenita cen vstupů).

Nyní předpokládejme, že máme určenou nějakou skutečnou nákladovou funkci C firmy, ale že neznáme produkční funkci F firmy (s výjimkou toho, že F splňuje Předpoklad 1). Jak můžeme použít danou nákladovou funkci $C(u,p)$ (splňující výše uvedené vlastnosti 1 – 7) k vytvoření příslušné produkční funkce $F(x)$ firmy?

Odpovídající k produkční funkci $u = F(x)$ je skupina produkčních isoploch $\{x : F(x) = u\}$ nebo skupina rovinných množin $L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u\}$. Pro každé $u \in$ prostoru F může být nákladová funkce použita k vytvoření *krajní* aproximace množiny $L(u)$ následujícím způsobem. Vyberte ceny vstupů $p^1 \gg 0_N$ a nakreslete povrch izokvanty $\{x : p^{1T}x = C(u,p^1)\}$. Množina $L(u)$ musí ležet nad (a protínat) touto množinou, protože $C(u,p^1) \equiv \min_x\{p^{1T}x : x \in L(u)\}$; tj. $L(u) \subset \{x : p^{1T}x \leq C(u,p^1)\}$. Vyberte další dodatečné vstupní cenové vektory $p^2 \gg 0_N, p^3 \gg 0_N, \ldots$ a graf povrchů izokvanty $\{x : p^{1T}x = C(u,p^1)\}$. Je lehce vidět, že $L(u)$ musí být podmnožinou všech množin $\{x : p^{1T}x \leq C(u,p^1)\}$. Tedy:

$$L(u) \subset \bigcap_{p \gg 0_N} \{x : p^T x \leq C(u,p)\} \equiv L^*(u), \tag{2.3}$$

tj. $L(u)$ množina skutečných produkčních možností musí být obsažena v množině $L^*(u)$ *krajních* aproximovaných produkčních možností, která je obdržena jako průnik všech opěrných celkových nákladových poloprostorů na skutečné množině technologií $L(u)$.



Obrázek (2.1)

Na obrázku (2.1) je $L^*(u)$ označena přerušovanou čarou. Povšimněte si, že okraj (hranici) této množiny vytváří aproximace skutečných isokvant u a že tyto aproximované isokvanty se kryjí se skutečnými jen zčásti, nemají zpětné zakřivení a nekonvexní části skutečných isokvant.
Jestliže již byla skutečná skupina množin $L^*(u)$ aproximovaných produkčních možností vytvořena, aproximované produkční funkce může být definována jako

$$\begin{aligned} F^*(x) &\equiv \max\{u : x \in L^*(u)\} \\ &= \max\{u : p^T x \leq C(u,p) \\ &\qquad \text{pro každé } p \gg 0_N\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

pro $x \geq 0_N$. Všimněme si, že maximalizační problém definovaný ve (2.4) má nekonečný počet omezení (jedno omezení pro každé $p \gg 0_N$). Tedy (2.4) může být použito k definování aproximované produkční funkce F^*, máme-li pouze nákladovou funkci C.

Je jasné (viz. obrázek 2.1), že aproximovaná produkční funkce F^* se nebude obecně překrývat se skutečnou funkcí F. Je tedy také jasné, že z hlediska sledovaného tržního chování, jestliže výrobce konkurenčně minimalizuje náklady, potom nezáleží, zda výrobce minimalizující náklady podléhá omezení produkční funkce dané jako F nebo F^*: pozorovaná tržní data nás nikdy nepřivedou ke zjištění, zda výrobce má výrobní funkci F nebo aproximovanou funkci F^*.

Je také jasné, že jestliže chceme, aby se aproximovaná produkční funkce F^* kryla se skutečnou funkcí F, pak je nezbytné, aby F splňovala následující dva předpoklady:

Předpoklad 2 pro F

F je neklesající, tj. jestliže $x^2 \geq x^1 \geq 0_N$, pak $F(x^2) \geq F(x^1)$.

Předpoklad 3 pro F

F je kvazi-konkávní funkce, tj. pro každé $u \in$ prostoru F, $L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u\}$ je konvexní množina.

Jestliže F splňuje Předpoklad 2, potom zpětné zakřivení izokvant nemůže nastat, jestliže F splňuje Předpoklad 3, potom nekonvexní izokvanty, znázorněného modelu, na obrázku 2.1, nemohou nastat.

Není příliš obtížné si všimnout, že pokud F splňuje Předpoklady 1–3 a nákladová funkce C se počítá podle (2.1), potom aproximovaná produkční funkce F^* (spočítaná podle (2.4)) se bude krýt se skutečnou produkční funkcí F, tj. je zde *dualita* mezi nákladovými funkcemi splňujícími Vlastnosti 1–7 a produkčními funkcemi splňujícími Předpoklady 1–3. První člověk, který dokázal Theorem formální duality byl Shephard (1953).

V následující části si uvedeme podobný Theorém duality po zavedení některých silnějších podmínek na příslušnou produkční funkci F.

Následující výsledek je podklad pro mnoho teoretických a empirických aplikací teorie duality.

Lemma 3 [Hicks (1946, p. 331); Samuelson (1947, p. 68); Karlin (1959, p 272); a Gorman (1976)]

Předpokládejme, že produkční funkce F splňuje Předpoklad 1 a že nákladová funkce C je definována pomocí (2.1). Nechť $u^* \in$ prostoru F, $p^* \gg 0_N$ a předpokládejme, že x^* je řešení minimalizace nákladů při produkci u^*, když ceny vstupů p^* existují, tj.

$$C(u^*, p^*) \equiv \min_x \{p^{*T} x : F(x) \geq u^*\} = p^{*T} x^*. \tag{2.5}$$

Jestliže navíc je C derivovatelná podle cen vstup; v bodě (u^*, p^*), pak:

$$x^* = \nabla_p C(u^*, p^*), \tag{2.6}$$

kde

$$\nabla_p C(u^*, p^*) \equiv [\partial C(u^*, p_1^*, \ldots, p_N^*/\partial p_1, \ldots, \partial C(u^*, p_1^*, \ldots, p_N^*)/\partial p_N]^T$$

je vektor prvních parciálních derivací C podle složek cenového vektoru vstupů p.

Důkaz:

Libovolný vektor vhodných vstupních cen $p \gg 0_N, x^*$ je přípustný pro problém minimalizace nákladů definovaný pomocí $C(u^*, p)$, ale není nutně optimální, tj. pro každý $p \gg 0_N$ máme následující nerovnost:

$$p^T x^* \geq C\left(u^*, p\right). \tag{2.7}$$

Pro $p \gg 0_N$ definujme funkci $g(p) \equiv p^T x^* - C(u^*, p)$. Z (2.7) plyne, že $g(p) \geq 0$ pro $p \gg 0_N$ a z (2.5) $g(p^*) = 0$. Tedy, $g(p)$ nabývá globálního minima v $p = p^*$. Protože g je diferencovatelná v p^*, musí být splněna první nezbytná podmínka pro lokální minimum:

$$\nabla_p g(p^*) = x^* - \nabla_p C(u^*, p^*) = 0_N,$$

které implikuje (2.6). Q.E.D.

Tedy derivace nákladové funkce výrobce $C(u, p)$ podle cen vstupů p dává výrobcův systém funkcí poptávky po vstupech, který minimalizuje náklady $x(u, p) = \nabla_p C(u, p)$.

Výše uvedená lemma by měla být pečlivě srovnána s následujícím závěrem.

Lemma 4 [Shephard (1953, p. 11)]

Jestliže nákladová funkce $C(u, p)$ splňuje Vlastnosti 1–7 a navíc je diferencovatelná podle cen vstupů v bodě (u^*, p^*), pak

$$x(u^*, p^*) = \nabla_p C(u^*, p^*), \tag{2.8}$$

kde $x(u^*, p^*) \equiv [x_1(u^*, p^*), \ldots, x_N(u^*, p^*)]^T$ je vektor množství vstupů minimalizující náklady potřebných k vytvoření u^* jednotek výstupu, máme-li ceny p^*, kde příslušná produkční funkce F^* je definována pomocí (2.4), $u^* \in$ prostoru F^* a $p^* \gg 0_N$.

Rozdíl mezi Lemmatem 3 a Lemmatem 4 je, že Lemma 3 předpokládá existenci produkční funkce F a nestanovuje vlastnosti nákladové funkce, kromě derivovatelnosti, zatímco Lemma 4 předpokládá pouze existenci nákladové funkce splňující příslušné podmínky regularity a odpovídající produkční funkce F^* je definována za použití dané nákladové funkce. Tedy, z ekonometrického pohledu, Lemma 4 je užitečnější než Lemma 3: za účelem získání podobného systému vstupních poptávkových funkcí, vše, co musíme udělat je předpokládat funkční tvar C, který splňuje příslušné podmínky regularity a derivovat C podle složek cenového vektoru vstupů p. Není nutné odhadnout odpovídající produkční funkci a také není nutné trvat na někdy obtížné algebře při derivování funkcí poptávky po vstupech prostřednictvím Lagrangeových technik.

Historické poznámky

Tvrzení, že existují dva nebo více ekvivalentní způsoby popisující výkony a technologii, tvoří jádro teorie duality. Matematickým základem pro ekonomickou teorii duality je Minkowského Věta (1911), uvedená v Fenchel (1953, p. 48-50) a Rockafellar (1970, p. 95-99): každá uzavřená konvexní množina může být reprezentována jako průnik svých opěrných podprostorů. Tedy, za jistých podmínek, uzavřená konvexní množina $L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u, x \geq 0_N\}$ může být reprezentována jako průnik podprostorů generovaných nákladovými izoplochami dotýkajícími se množiny produkčních možností $L(u), \cap_p \left\{x : p^T x \geq C(u,p)\right\}$.

Jestliže spotřebitel (výrobce) má rozpočet $y > 0$, který spotřebuje na N komodit, pak maximální užitek (nebo výstup) při cenách $p \gg 0_N$ může obdržet jako řešení rovnosti $y = C(u,p)$ nebo řešením

$$1 = C(u, p/y) \tag{2.9}$$

(kde upotřebíme lineární homogenitu C v p) pro u jako funkci normalizovaných cen, p/y-. Nazvěme výslednou funkci G, tak že $u = G(p/y)$. Alternativně, G může být definována přímo z produkční funkce F následujícím způsobem pro $p \gg 0_N$, $y > 0$:

$$G^*(p,y) \equiv \max \left\{F(x) : p^T x \leq y, x \geq 0_N\right\} \tag{2.10}$$

nebo

$$G\left(\frac{p}{y}\right) \equiv \max \left\{F(x) : \left(\frac{p}{y}\right)^T x \leq 1, x \geq 0_N\right\}.$$

Houthakker (1951-52, p. 157) nazval funkci G *nepřímou užitkovou funkcí* a, stejně jako nákladovou funkci C, také může charakterizovat preference nebo technologické zvláštnosti za jistých podmínek (Část 4 dále). Důvod pro uvedení tohoto u této části oddílu je, že historicky to bylo zavedeno do ekonomické literatury před nákladovou funkcí od Antonelliho (1971, p. 349) v 1886 a potom Konüsem (Konyus) (1924). Tedy, první článek, který připustil, že preference mohou být ekvivalentně popsány přímou nebo nepřímou funkcí užitku ukázal Konyus a Byushgens (1926, p. 157), kteří si všimli, že rovnice $u = F(x)$ a $u = G(p/y)$ jsou ekvivalentní pro stejné body, ale v odlišných souřadnicích: první rovnice je v bodových souřadnicích, zatímco druhá v rovinných a tečných souřadnicích. Konyus a Byushgens (1926, p. 159) také zavedli minimalizační problém, který dovoluje odvodit přímou užitkovou funkci z nepřímé užitkové funkce a, konečně, znázornili do grafu různé preference v cenovém prostoru pro případ dvou druhů zboží.

Teorie duality v anglicky psané literatuře pravděpodobně začala dvěma články od Hotellinga (1932, 1935), který asi jako první ekonom užil slovo *dualita*:

> Stejně tak jako máme užitkovou funkci u spotřebních veličin, jejichž derivací jsou ceny, tak máme duálně funkci cen, jejíž derivací jsou spotřební veličiny. [Hotelling (1932,p. 594)].

Hotteling (1932, p. 594) také připustil, že nákladová funkce může být zobrazována křivkami, které jsou konkávně rostoucí, tj. poznal, že nákladová funkce $C(u, p)$ by vyhovovala *doplněné* podmínce v p.

Hotelling (1932, p. 590; 1935, p. 68) také zavedl *ziskovou funkci* Π, která poskytuje ještě další způsob jak může být popsána technologie klesajících výnosů z rozsahu. S použitím našeho zápisu je funkce Π definována jako

$$\Pi(p) \equiv \max \left\{F(x) - p^T x\right\} \tag{2.11}$$

Hotelling určil, že poptávkové funkce, maximalizující zisk $[x_1(p), \ldots, x_N(p)]^T \equiv x(p)$, mohou být obdrženy diferencováním ziskové funkce, tj. $x(p) = -\nabla_p \Pi(p)$. Tedy, jestliže je Π třídy C^2, tak lze snadno odvodit Hotellingovy *podmínky symetrie* (1935, p. 69):

$$-\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(p) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_i \partial p_j}(p) = -\frac{\partial x_j}{\partial p_l}(p). \tag{2.12}$$

Roy (1942, p. 20) definoval nepřímou užitkovou funkci G^* jako v (2.10) výše a potom odvodil analogii Lemma 3, výše uvedené, která je nazvána *Royova identita* (1942, pp. 18-19),

$$x\left(\frac{p}{y}\right) = \frac{-\nabla_p G^*(p,y)}{\nabla_y G^*(p,y)}. \tag{2.13}$$

kde $x(p/y) \equiv [x_1(p/y), \ldots, x_n(p/y)]^T$ je vektor poptávkových funkcí maximalizujících užitek získaných tak, že spotřebitel (výrobce) má ceny $p \gg 0_N$ a důchod $y > 0$ na spotřebu. Roy (1942, pp. 24-27) ukázal, že G^* se snižuje v ceně p, v důchodu a homogenní stupně 0 v (p, y); tj. $G^*(\lambda p, \lambda y) = G^*(p, y)$ pro $\lambda > 0$. Tedy $G^*(p, y) = G^*(p/y, 1) \equiv G(p/y) = G(v)$, kde $v \equiv p/y$ je vektor normalizovaných cen. V článku z roku 1947 Roy odvodil následující verzi Royovy identity (1947, p. 219), kde nepřímá užitková funkce G je použita místo G^*:

$$x_i(v) = \frac{\partial G(v)}{\partial v_i} \Bigg/ \sum_{j=1}^{N} v_j \frac{\partial G(v)}{\partial v_j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.14}$$

Francouzský matematik Ville (1951, p. 125) také odvodil užitečné vztahy (2.14) v roce 1946. Snad proto by měla (2.14) být nazývána Villeho identita. Ville (1951, p. 126) si všiml, že jestliže přímá užitková funkce $F(x)$ je lineárně homogenní, potom nepřímá funkce $G(v) \equiv \max_x\{F(x)\ v^T x \leq 1, x \geq 0_N\}$ je homogenní stupně -1, tj. $G(\lambda v) = \lambda^{-1} G(v)$ pro $\lambda > 0, v \gg 0_n$ a tedy $-G(v) = = \sum_{j=1}^{N} v_j\, (\partial G(v)/\partial v_j)$. Substituce poslední identity do (2.14) dává jednodušší rovnici (viz. také Samuelson (1972)]:

$$x_i(v) = -\partial \ln G(v)/\partial v_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.15}$$

V tomto oddíle by měl být také uveden Antonelli (1971, p. 349), který získal Royovu verzi identity v 1886 a Konyus a Byushgens (1926, p. 159) téměř odvodili toto v roce 1926 následujícím způsobem: vzali v úvahu problém minimalizovaného nepřímého užitku $G(v)$ s normalizovanou cenou v při omezení $v^T x = 1$. Jak si Houthakker (1951-52, pp. 157-158) později všiml, tento minimalizační problém s omezením generuje přímou užitkovou funkci, tj. pro $x \gg 0_N$ máme:

$$F(x) = \min_v\{G(v) : v^\top x \leq 1, v \geq 0_N\}. \tag{2.16}$$

Konyus a Byushgens získali podmínky prvního řádu pro problém (2.16): $\nabla_v G(v) = \mu x$. Jestliže vyloučíme Lagrangeův multiplikátor μ z tohoto posledního systému rovnic užitím $v^\top x = 1$, získáme vztah $x = \nabla_v G(v)/v^\top \nabla_v G(v)$, který je v (2.14) zapsán ve vektorovém tvaru. Konyus a Byushgens však tento poslední krok přesně neprovedli.

Jiné pozoruhodné pojednání napsal Wold (1943–44). Definoval zde nepřímou užitkovou funkci $G(v)$ (nazval ji ,,funkce cenové preference“) a ukázal, že plochy indiference cenového prostoru jsou konvexní k počátku nebo lineární,tj. ukázal, že $G(v)$ je kvazikonvexní funkce† při normalizovaných cenách v. Woldova raná práce je shrnuta v Wold (1953, str. 145–148).

Malmquist (1953, str. 212) také definuje nepřímou užitkovou funkci $G(v)$ a ukazuje, že je to kvazikonvexní funkce ve v.

Jestliže produkční funkce F vyjadřuje konstantní výnosy z rozsahu produkce (tj. $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ pro všechna $\lambda \geq 0, x \geq 0_N$) a je spojitá, potom se odpovídající nákladová funkce rozkládá následujícím způsobem:
Nechť $u > 0, p \gg 0_N$; potom

$$\begin{aligned} C(u,p) &\equiv \min_x \{p^\top x : F(x) \geq u\} \\ &= \min_x \{up^\top (x/u) : F(x/u) \geq 1\} \\ &= u \min_z \{p^\top z : F(z) \geq 1\} \\ &\equiv u\, C(1,p). \end{aligned} \tag{2.17}$$

(Výše uvedený důkaz předpokládá, že existuje alespoň jedno $x^* > 0$ takové, že $F(x^*) > 0_N$, takže množina $\{z : F(z) \geq 1\}$ je neprázdná.) Samuelson (1953–54) předpokládá, že produkční funkce F je lineárně homogenní a podléhá *zobecněnému zákonu klesajících výnosů*, $F(x' + x") \geq F(x') + F(x")$ (který je ekvivalentní konkávnosti F, pokud je F lineárně homogenní). Definuje (str. 15) jednotkovou nákladovou funkci $C(1,p)$ a zjišťuje, že $C(1,p)$ má stejné vlastnosti v p jako F v x. Také poznamenává (str. 15), že rovina na ploše

†Funkce G je kvazikonvexní právě tehdy, když $(-G)$ je kvazikonkávní.

odpovídající jednotkovému výstupu (oblast nekonečné substitučnosti) bude odpovídat rohu na jednotkové nákladové ploše. Tuto poznámku učinil již Shephard (1953, str. 27–28).

Shephardova monografie z roku 1953 se zdá být prvním moderním, přesným pojednáním o teorii duality. Shephard (1953, str. 13–14) uvádí, že nákladovou funkci $C(u,p)$ můžeme interpretovat jako opěrnou funkci pro množinu $\{x : F(x) \geq u\}$, a užívá tohoto faktu k určení vlastností $C(u,p)$ vzhledem k p. Shephard (1953, str. 13) také zmiňuje Minkowského větu (1911) o konvexních množinách a Bonnesenovu a Fenchelovu monografii o konvexních množinách. Musíme poznamenat, že Shephard neobjevil přímo dualitu mezi produkčními a nákladovými funkcemi, objevil dualitu mezi produkčními a distančními funkcemi, kterou budeme definovat v další části, a pak mezi distančními a nákladovými funkcemi.

Shephard (1953, str. 4) definuje *homotetickou* produkční funkci. Je to taková funkce, kterou lze napsat ve tvaru

$$F(x) = \phi[f(x)],$$

kde f je homogenní funkce stupně jedna a ϕ je spojitá, rostoucí funkce f. Seznámíme se s následujícími dodatečnými předpoklady o F (nebo f):

Předpoklad 4 o F

F je (nezáporně) lineárně homogenní; tj. jestliže $x \geq 0_N, \lambda \geq 0$, pak $F(\lambda x) = \lambda F(x)$.

Předpoklad 5 o F

F je slabě pozitivní; tj. pro každé $x \geq 0_N, F(x) \geq 0$, ale $F(x^*) > 0$ pro alespoň jedno $x^* > 0_N$.

Nyní můžeme usuzovat, že $\phi(f)$ je spojitá, rostoucí funkce jedné proměnné pro $f \geq 0$ a $\phi(0) = 0$. Za těchto podmínek existuje inverzní funkce ϕ^{-1}, která má stejné vlastnosti jako ϕ. Pro všechna $f \geq 0$ platí $\phi^{-1}[\phi(f)] = f$. Jestliže $f(x)$ splňuje výše uvedené předpoklady 1, 4 a 5, potom se nákladová funkce

odpovídající $F(x) \equiv \phi[f(x)]$ rozkládá následovně:
nechť $u > 0, p \gg 0_N$; pak

$$\begin{aligned} C(u,p) &\equiv \min_x\{p^\top x : \phi[f(x)] \geq u\} \\ &= \min_x\{p^\top : f(x) \geq \phi^{-1}[u]\} \\ &= \phi^{-1}[u]\min_x\{p^\top(x/\phi^{-1}[u]) : f(x/\phi^{-1}[u]) \geq 1\}, \\ &\quad \text{kde } \phi^{-1}[u] > 0 \text{ pro } u > 0, \\ &= \phi^{-1}[u]c(p), \end{aligned} \tag{2.18}$$

kde $c(p) \equiv \min_z\{p^\top z : f(z) \geq 1\}$ je *funkce jednotkových nákladů*, která odpovídá lineárně homogenní funkci f, nezáporně (kladně) lineárně homogenní, neklesající, konkávní a spojité funkci p (viz výše vlastnosti 1–5). Nebudeme, jako obvykle, schopni odvodit původní produkční funkci $\phi[f(x)]$ z nákladové funkce (2.18), ledaže by f také splňovala výše uvedené předpoklady 2 a 3. Shephard (1953, str.43) obdržel faktorizaci (2.18) pro nákladové funkce odpovídající homotetickým produkčním funkcím.

Shephard (1953, str.28–29) uvádí různá praktická využití teorie duality:

(i) jako pomůcka při agregaci proměnných,

(ii) v ekonometrických studiích produkce v případě, že nejsou dostupná vstupní data, ale náklady, vstupní ceny a výstupní data dostupná jsou,

(iii) jako pomůcka při odvozování srovnávacích neměnných výsledků.

Shephard odvodil, nebo předpověděl mnoho teoretických výsledků a praktických aplikací teorie duality.

Věnujme se nyní určitým výsledkům odvozeným v této kapitole. McFadden (1966) ukázal, že minimum z definice (2.1) existuje, pokud F splňuje předpoklad 1. Vlastnost 1 obdržel Shephard (1953, str. 14), vlastnost 2 Shephard (1953, str. 14) a Samuelson (1953-54, str. 15), vlastnost 3 Shephard (1953, str. 14), vlastnost 4 Shephard (1953, str. 15) [naši metodu důkazu použil McKenzie (1956-57, str. 185)], vlastnosti 5 a 6 Uzawa (1964, str. 217) a konečně vlastnost 7 získal Shephard (1970, str. 83).

Metodu konstrukce množin přibližných produkčních možností $L^*(u)$ pomocí nákladové funkce odvodil Uzawa (1964).

Velmi důležitá je skutečnost, že přibližné izokvanty neobsahují zpětné zahnutí, nebo nekonvexní části pravých izokvant. V souvislosti s teorií spotřebitele na to upozorňuje Hotelling (1935, str. 74), Wold (1943, str. 231; 1953, str. 146) a Samuelson (1950b, str. 359–360) a v souvislosti teorie produkce McFadden (1966, 1978a). Abychom tuto skutečnost zdůraznili, budeme citovat Hotellinga a Samuelsona.

> Jestliže bude mít indiferenční křivka pro nákupy vlnitý charakter, na některých částech bude konvexní k počátku a na ostatních částech konkávní. Musíme učinit závěr, že můžeme považovat za podstatné pouze ty části, které jsou konvexní k počátku. Ostatní jsou vpodstatě nepozorovatelné. Můžeme je objevit pouze v nespojitostech, které mohou nastat v poptávce s nestálými cenovými poměry, které vedou k nečekaným změnám směru tečny ke grafu poptávky v místě nespojitosti, pokud je přímka pootočena. Ale zatímco takovéto nespojitosti mohou odhalit existenci mezery, nemohou nikdy změřit její hloubku. Pokud existují konkávní části indiferenčních křivek a jejich vícerozměrné zobecnění, musejí navždy zůstat v neměřitelné temnotě. [Hotelling(1935, str.74), vlastní překlad]

> Musíme poznamenat, že na konkurenčním trhu nemůžeme pozorovat body, kde jsou indiferenční křivky spíše konvexní než konkávní. Takové body jsou navěky zahaleny v temnotě – pokud neučiníme našeho spotřebitele monopolistou, který si vybírá mezi zbožím ležícím na velmi konvexní *rozpočtové křivce*, (která zohledňuje cenu zboží, které spotřebitel nakupuje). V monopsonním případě můžeme v bodě rovnováhy klidně odvodit sklon spotřebitelovy indiferenční křivky od sklonu pozorovaného omezení. [Samuelson (1950b, str. 359–360), vlastní překlad]

Náš důkaz lemmatu 3 sleduje důkaz připsaný Diamondem a McFaddenem (1974, str. 4) M. W. Gormanovi, nicméně stejná metoda důkazu byla použita také Karlinem (1959, str. 272). Hicksův a Samuelsonův důkaz lemmatu 3 předpokládá diferencovatelnost produkčních funkcí a užívá podmínku prvního řádu pro nákladovou minimalizaci současně s vlastnostmi omezení. V naší citaci uvedené výše Hotelling (1932, str. 594) naznačuje, že také obdržel Hicksovy (1946, str. 331) a Samuelsonovy (1947, str. 68; 1953–54, str. 15–16) výsledky v nepatrně odlišném kontextu.

3 Dualita mezi nákladovými a agregačními (produkčními nebo užitkovými) funkcemi

V této části předpokládejme, že agregační funkce F splňuje následující vlastnosti:

Podmínky I pro F

(i) F je reálná funkce N proměnných definovaná na nezáporném ortantu $\Omega \equiv \{x : x \geq 0_N\}$ a *spojitá* na svém definičním oboru.

(ii) F je *rostoucí*, t.j. $x'' \gg x' \geq 0_N$ implikuje $F(x'') > F(x')$.

(iii) F je *kvazikonkávní* funkce.

Poznamenejme, že uvedené vlastnosti (i) a (ii) jsou silnější než předpoklady 1 a 2 o F učiněné v předchozí části. To znamená, že můžeme odvodit o něco silnější podmínky pro nákladovou funkci $C(u,p)$, která odpovídá $F(x)$ splňující podmínky I.

Nechť U je obor hodnot funkce F. Z (i) a (ii) je vidět, že $U \equiv \{u : \bar{u} \leq u < \bar{\bar{u}}\}$, kde $\bar{u} \equiv F(0_N) < \bar{\bar{u}}$. Poznamenejme, že nejmenší horní závora $\bar{\bar{u}}$ může být konečné číslo nebo $+\infty$. Při aplikaci teorie spotřebitele nemáme důvod předpokládat, že $\bar{u}$ je konečné číslo (tj. $\bar{u}$ může být rovno $-\infty$), ale to jenom mírně ubírá na obecnosti.

Definujme množinu kladných cen $P \equiv \{p : p \gg 0_N\}$.

Věta 1

Jestliže F splňuje podmínky I, pak $C(u,p) \equiv \min_x\{p^\top x : F(x) \geq u\}$ je definovaná pro všechna $u \in U$ a $p \in P$ splňující podmínky II uvedené níže.
Důkaz viz Diewert(1982).

Podmínky II pro C

(i) $C(u,p)$ je reálná funkce $N+1$ proměnných definovaná na $U \times P$ *bodově spojitá v* (u,p) v definičním oboru.

(ii) $C(\bar{u},p) = 0$ pro každé $p \in P$.

(iii) $C(u,p)$ je *rostoucí v* u pro každé $p \in P$; t.j. pokud $p \in P, u', u'' \in U$ při $u' < u''$, potom $C(u',p) < C(u'',p)$.

(iv) $C(\bar{\bar{u}},p) = +\infty$ pro každé $p \in P$; tj. jestliže $p \in P, u^n \in U, \lim_n u^n = \bar{\bar{u}}$, potom $\lim_n C(u^n,p) = +\infty$.

(v) $C(u,p)$ je (pozitivně) *lineárně homogenní v* p pro všechna $u \in U$; tj. $u \in U, \lambda > 0, p \in P$ implikuje $C(u,\lambda p) = \lambda C(u,p)$.

(vi) $C(u,p)$ je *konkávní v* p pro všechna $u \in U$.

(vii) $C(u,p)$ je *rostoucí v* p pro $u > \bar{u}$ a $u \in U$.

(viii) C je taková, že funkce $F^*(x) \equiv \max_u\{u : p^\top x \geq C(u,p)$ pro každé $p \in P, u \in U\}$ je spojitá pro $x \geq 0_N$.

Důsledek 1.1

Jestliže $C(u,p)$ splňuje podmínky II uvedené výše, potom definiční obor C může být rozšířen z $U \times P$ na $U \times \Omega$. Rozšířená funkce C je spojitá v p pro $p \in \Omega \equiv \{p : p \geq 0_N\}$ pro všechna $u \in U$. ‡

‡ $C(u,p)$ nemusí být striktně rostoucí v u, pokud p leží na hranici Ω. Např. uvažme funkci $f(x_1,x_2) \equiv x_1$, která má duální nákladovou funkci $C(u,p_1,p_2) \equiv p_1 u$, která není rostoucí v u, pokud $p_1 = 0$.

Důsledek 1.2

Pro každé $x \geq 0_N, F^*(x) = F(x)$, kde F^* je funkce definovaná nákladovou funkcí C v bodě (viii) podmínek II.

Důsledek 1.2 ukazuje, že nákladová funkce dokáže kompletně popsat produkční funkci, která splňuje podmínky I; tj. užijeme-li McFaddenovu (1966) terminologii, nákladová funkce je *postačující statistika* pro produkční funkci.

Důkaz věty 1 je přímý s výjimkou bodů (i) a (viii), které obsahují vlastnost spojitosti produkční nebo nákladové funkce. Spojitost se jeví jako obtížný pojem teorie duality. Proto se snažíme této vlastnosti v předchozí části vyhnout tak, jak je to jen možné. O problému spojitosti již dříve diskutovali Shephard (1970), Friedman (1972), Diewert (1974a), Blackorby, Primont a Russell (1978) a Blackorby a Diewert (1979).

Abychom dokázali vztah mezi spojitostí $L(u)$ a tím, že $C(u,p)$ je spojitá na $U \times P$, požadujeme, aby byla funkce F rostoucí (vlastnost I(ii)).[§] Pokud je vlastnost I(ii) nahrazena předpokladem slabé monotonie (tak, jako náš starý předpoklad 2 o F z předchozí části), pak náhorní rovina na grafu F („tlusté“ indiferenční plochy v jazyce teorie užitku) způsobí nesouvislosti v C vzhledem k u [srov. Friedman (1972, str. 169)].

Poznamenejme, že II(ii) a II(iii) implikují, že $C(u,p) > 0$ pro $u > \bar{u}$ a $p \gg 0_N$ a že II(iv) není nezávislá vlastnost C, protože plyne z II(ii), (iii), (v) a (vi). poznamenejme také, že F není ryze kvazikonkávní, tj. že množina produkčních možností $L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u\}$ je ryze konvexní.

Konečně, je zřejmé, že máme-li danou pouze nákladovou funkci podniku C, můžeme použít funkci F^* definovanou ve smyslu nákladové funkce v II(viii), abychom vytvořili produkční funkci podniku. Tato skutečnost je formálně zapsána v následující větě.

[§]Friedman (1972) ukazuje, že I(ii) a spojitost shora (předpoklad I o F v předchozí části) postačují k implikaci joint spojitosti C na $U \times P$. Nicméně, pokud nebudeme předpokládat vlastnost aditivity F, ze spojitosti zdola nemůžeme vyvodit, že $C(u,p)$ je rostoucí v u pro $p \in P$ (vlastnost, která plyne z I(i) až I(ii)).

Věta 2

Jestliže C splňuje podmínky II uvedené výše, potom F^* definovaná II(viii) splňuje podmínky I. Navíc, pokud $C^*(u,p) \equiv \min_x\{p^\top x : F^*(x) \geq u\}$ je nákladová funkce definovaná F^*, potom $C^* = C$.

Důsledek 2.1

Množina supergradientů C vzhledem k p v bodě $(u^*, p^*) \in U \times P, \partial C(u^*, p^*)$ je množinou řešení problému nákladové minimalizace $\min_x\{p^{*\top} x : F^*(x) \geq u^*\}$, kde F^* je agregační funkce odpovídající dané nákladové funkci, která splňuje podmínky II. [*Supergradienty* splňují $x^* \in \partial C(u^*, p^*)$ právě tehdy, když $C(u^*, p) \leq C(u^*, p^*) + x^{*\top}(p - p^*)$ pro všechna $p \gg 0_N$.]

Důsledek 2.2 [Shephardovo (1953, str. 11) lemma]

Jestliže C splňuje podmínky II a kromě toho je diferencovatelná vzhledem k cenám vstupů v bodě $(u^*, p^*) \in U \times P$, potom řešení x^* problému nákladové minimalizace $\min_x\{p^{*\top} x : F(x) \geq u^*\}$ je jediné a je rovno vektoru parciálních derivací funkce $C(u^*, p^*)$ podle prvků vektoru cen p; tj.

$$x^* = \nabla_p C(u^*, p^*). \tag{3.1}$$

Předchozí dvě věty poskytly verzi Shephardovy (1953, 1970) věty o dualitě mezi nákladovými a agergačními funkcemi. Podmínky pro C, které odpovídají našim podmínkám I pro F, se zdají být zřejmé kromě bodu II(viii), který nezbytně zaručuje spojitost agregační funkce F^* odpovídající dané nákladové funkci C. Podmínku II(viii) můžeme vynechat, jestliže zesílíme podmínku II(iii): $C(u,p)$ je rostoucí v u pro každé p náležející do $S \equiv \{p : p \geq 0_N, 1_N^\top p = 1\}$. Lze ukázat, že výsledné F^* je spojité [srov. Blackorby, Primont a Russell (1978)]. Mnoho užitečných funkcionálních tvarů však nesplňuje zesílení podmínky II(iii).¶ Alternativní metoda, jak se zbavit podmínky II(viii), krerá zachovává spojitost přímé agregační funkce F^* odpovídající dané nákladové funkci C, je objevit lokální věty o dualitě, tj. předpokládejme, že C splňuje podmínky II(i)–II(vii) pro $(u, p) \in U \times P$, kde P je nyní omezeno na *kompaktní*, konvexní podmnožinu kladného ortantu. Lokálně spojitá funkce F^* může být definovaná pomocí C a naopak má C jako svou nákladovou funkci na $U \times P$. Tento přístup provozují Blackorby a Diewert (1979).

Historické poznámky

Věty o dualitě mezi F a C dokázali za různých podmínek Shephard (1953, 1970), McFadden (1962), Chipman (1970), Hanoch (1978), Diewert (1971a, 1974a), Afriat (1973a) a Blackorby, Primont a Russel (1978).

Věty o dualitě mezi C a úrovňovými množinami $F, L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u\}$ dokázali Uzawa (1964), McFadden (1966, 1978a), Shephard (1970), Jacobsen (1970, 1972), Diewert (1971a), Friedman (1972) a Sakai (1973).

4 Dualita mezi přímými a nepřímými agregačními funkcemi

Předpokládejme, že přímé agregační (užitkové nebo produkční) funkce F splňují Podmínky I vypsané v předchozí části. Základní optimalizační problém, o kterém budeme v této části uvažovat, je problém maximalizace užitku (nebo výstupu) $F(x)$, který podléhá rozpočtovému omezení $p^\top x \leq y$, kde $p \gg 0_N$ je vektor cen komodit (nebo vstupů) a $y > 0$ je množství peněz, které může spotřebitel (výrobce) utratit. Protože $y > 0$, můžeme rozpočtové omezení $p^\top x \leq y$ nahradit $v^\top x \leq 1$, kde $v \equiv p/y$ je vektor *normalizovaných* cen.

¶Např. uvažme funkci $C(u, p) \equiv b^\top pu$, kde $b > 0_N$, ale b není $\gg 0_N$. Tato funkce odpovídá Leontiefově agregační funkci nebo agregační funkci s pevnými koeficienty.

Nepřímá agregační funkce $G(v)$ je definovaná pro $v \gg 0_N$ jako

$$G(v) \equiv \max_x \{F(x) : v^\top x \le 1, x \ge 0_N\}. \tag{4.1}$$

Věta 3

Jestliže přímá agregační funkce F splňuje podmínky I, potom nepřímá agregační funkce G splňuje následující podmínky:

Podmínky III pro G

(i) $G(v)$ je reálná funkce N proměnných definovaná na množině kladných normalizovaných cen $V \equiv \{v : v \gg 0_N\}$ a na tomto definičním oboru je *spojitá*.

(ii) G je *klesající*; tj. jestliže $v'' \gg v' \gg 0_N$, pak $G(v'') < G(v')$.

(iii) G je *kvazikonvexní* na V.

(iv) G[‖] je taková, že funkce $\hat{F}(x) \equiv \min_v\{G(v) : v^\top x \le 1, v \ge 0_N\}$ definovaná pro $x \gg 0_N$ je spojitá na tomto definičním oboru a má spojité rozšíření[**] na nezáporný výsek $\Omega \equiv \{x : x \ge 0_N\}$.

[‖] G zde je rozšíření G na nezáporný výsek, které je definováno Fenchelovou (1953) uzávěrovou operací; tj. definujme nadgraf původního G jako $\Gamma \equiv \{(u, v) : v \gg 0_N, u \ge G(v)\}$, definujme uzávěr Γ jako $\bar{\Gamma}$ a definujme *rozšířené* G jako $G(v) \equiv \inf_u\{u : (u, v) \in \bar{\Gamma}\}$ pro $v \ge 0_N$. Výsledné rozšířené G je zdola spojité (množiny $\{v : G(v) \le u, v \ge 0_N\}$ jsou uzavřené pro všechna u). Pokud je oborem hodnot funkce F množina $U \equiv \{u : \bar{u} \le u < \bar{\bar{u}}\}$, kde $\bar{u} < \bar{\bar{u}}$, potom obor hodnot nerozšířeného G je $\{u : \bar{u} < u < \bar{\bar{u}}\}$ a obor hodnot rozšířeného G je $\{u : \bar{u} < u \le \bar{\bar{u}}\}$, takže pokud $\bar{\bar{u}} = +\infty$, potom $G(v) = +\infty$ pro $v = 0_N$ a definovaná pro ostatní body v na hranici nezáporného ortantu.

[**] F je rozšířená na nezáporný výsek Fenchelovou uzávěrovou operací: definujme podgraf původního $\hat{F}$ jako $\Delta \equiv \{(u, x) : x \gg 0_N, u \le \hat{F}(x)\}$, definujme uzávěr Δ jako $\bar{\Delta}$ a definujme *rozšířenou* $\hat{F}$ jako $F(x) \equiv \sup_u\{u : (u, x) \in \bar{\Delta}\}$ pro $x \ge 0_N$ Jestliže je nerozšířená funkce $\hat{F}$ spojitá pro $x \gg 0_N$, lze dokázat, že rozšířená funkce $\hat{F}$ je spojitá shora pro $x \ge 0_N$. Podmínka III(iv) implikuje, že rozšířená funkce F je spojitá zdola pro $x \ge 0_N$.

Důsledek 3.1

Přímá agregační funkce F může být opět získána z nepřímé agregační funkce G; tj. pro $x \gg 0_N, F(x) = \min_v\{G(v) : v^\top x \le 1, v \ge 0_N\}$.

Důsledek 3.2

Nechť F splňuje podmínky I a nechť $x^* \gg 0_N$. Definujme uzavřenou konvexní množinu normalizovaných opěrných nadrovin v bodě x^* jako uzavřenou konvexní množinu $H(x^*) = \{x : F(x) \ge F(x^*), x \ge 0_N\}$.[††] Pak (i) $H(x^*)$ je množina řešení nepřímého užitkového (nebo produkčního) minimalizačního problému $\min_v\{G(v) : v^\top x^* \le 1, v \ge 0_N\}$, kde G je nepřímá funkce, která odpovídá F podle definice (7.4) a (ii) pokud $v^* \in H(x^*)$, pak x^* je řešením přímého užitkového (nebo produkčního) maximalizačního problému $\max_x\{F(x) : v^{*\top} x \le 1, x \ge 0_N\}$.

Důsledek 3.3 [Hotellingova (1935, str. 71); Woldova (1944, str. 69–71; 1953, str. 45) identita]

Jestliže F splňuje podmínky I a navíc je diferencovatelná pro $x^* \gg 0_N$ s nenulovým vektorem gradientu $\nabla F(x^*) > 0_N$, potom x^* je řešením přímého užitkového (nebo produkčního) maximalizačního problému $\max_x\{F(x) : v^{*\top} x \le 1, x \ge 0_N\}$, kde

$$v^* \equiv \frac{\nabla F(x^*)}{x^{*\top} \nabla F(x^*)}. \tag{4.2}$$

Systém rovnic (4.2) známe pod pojmem systém *inverzních poptávkových funkcí*; *i*-tá rovnice

$$p_i/y \equiv v_i^* = [\partial F(x^*)/\partial x_i] \Bigg/ \left[\sum_{j=1}^{N} x_j^* \partial F(x^*)/\partial x_j\right]$$

[††] Jestliže $v^* \in H(x^*)$, pak $v^{*\top} x^* = 1, x^* \ge 0_N$ a $F(x) \ge F(x^*)$ implikuje $v^{*\top} x \ge v^{*\top} x^* = 1$. Uzavřenost a konvexnost $H(x^*)$ ukázal Rockafellar (1970, str. 215).

vyjadřuje cenu i-té komodity p_i podělenou výdaji y jako funkci vektoru množství x^*, které si spotřebitel nebo výrobce vybere, pokud bude maximalizovat $F(x)$ při rozpočtovém omezení $v^{*\top}x = 1$.

Nyní budeme předpokládat, že máme dánu dobře se chovající nepřímou agregační funkci G a ukážeme, že pomocí této funkce lze definovat dobře se chovající funkci $\hat{F}$ takovou, že G je její nepřímá funkce.

Věta 4

Předpokládejme, že G splňuje podmínky III. Potom $\hat{F}(x)$, která je definovaná pro $x \gg 0_N$

$$\hat{F}(x) = \min_v \{G(v) : v^\top x \leq 1, v \geq 0_N\} \tag{4.3}$$

má rozšíření na $x \geq 0_N$, které splňuje podmínky I. Navíc, jestliže definujeme $G^*(x) \equiv \max_x\{\hat{F}(x) : v^\top x \leq 1, x \geq 0_N\}$ pro $v \gg 0_N$, potom $G^*(v) = G(v)$ pro všechna $v \gg 0_N$.

Důsledek 4.1

Nechť G splňuje podmínky III a nechť $v^* \gg 0_N$. Definujme uzavřenou konvexní množinu normalizovaných opěrných nadrovin v bodě v^* jako uzavřenou konvexní množinu $H^*(v^*) = \{v : G(v) \leq G(v^*), v \geq 0_N\}$. Pak (i) $H^*(v^*)$ je množina řešení přímého užitkového (nebo produkčního) maximalizačního problému $\max_x\{\hat{F}(x) : v^{*\top}x \leq 1, x \geq 0_N\}$ kde $\hat{F}$ je přímá funkce, která odpovídá dané nepřímé funkci G podle definice(4.3) a (ii) pokud $x^* \in H(v^*)$, pak v^* je řešením přímého užitkového (nebo produkčního) minimalizačního problému $\min_v\{G(v) : v^\top x^* \leq 1, v \geq 0_N\}$.

Důsledek 4.2 [Villeova (1946, str. 35); Royova (1947, str. 222) identita]

Jestliže G splňuje podmínky III a navíc je diferencovatelná pro $v^* \gg 0_N$ s nenulovým vektorem gradientu $\nabla G(v^*) < 0_N$, potom x^* je jediným řešením přímého užitkového (nebo produkčního) maximalizačního problému $\max_x\{F(x) : v^{*\top}x \leq 1, x \geq 0_N\}$, kde

$$x^* \equiv \frac{\nabla G(v^*)}{v^{*\top}\nabla G(v^*)}. \tag{4.4}$$

Vidíme, že (4.4) poskytuje protějšek Shephardovu lemmatu v předchozí části. Jak uvidíme později, Shephardovo lemma a Royova identita jsou základem pro mnoho teoretických i empirických aplikací.

Závěrem poznamenejme, že podmínka III(iv) se zdá být také trochu divná. Umožňuje nám odvodit přímou agregační funkci z dané nepřímé funkce splňující podmínky III.[‡‡]

Historické poznámky

Věty o dualitě mezi přímými a nepřímými agregačními funkcemi dokázali Samuelson (1965, 1969, 1972); Newman (1965, str. 138–165); Lau (1969); Shephard (1970, str. 105–113); Hanoch (1978); Weddepohl (1970, kap. 5); Katzner (1970 str. 59–62); Afriat (1972a, 1973c) a Diewert (1974a).

Práce, které uvádějí do souvislostí předpoklady na systém poptávkových funkcí spotřebitele a přímou agregační funkci F (problém integrovatelnosti) napsali Samuelson (1950b); Hurwicz a Uzawa (1971); Hurwicz (1971) a Afriat (1973a, b).

Geometrickou interpretaci Royovy identity najdeme v Darrough a Southey (1977), některá rozšíření viz Weymark (1980).

[‡‡]Bez podmínky III(iv) můžeme stále vyvozovat spojitost $\hat{F}(x)$ přes $x \gg 0_N$, ale výsledná F nemusí nutně mít spojité rozšíření na $x \geq 0_N$. (Pokud $\hat{F}$ není nutně konkávní, ale je pouze kvazikonkávní pro $x \gg 0_N$, její rozšíření nemusí být nutně spojité.) Diskuse a příklady k problému spojitosti viz Diewert (1974a, str. 121–123).

5 Dualita mezi přímými agregačními a distančními nebo deflačními funkcemi

V této části budeme uvažovat o *čtvrté* alternativní metodě charakterizace preferencí spotřebitelů nebo technologií. Tato metoda je zvláště užitečná pro definici jisté třídy indexních čísel podle Malmquista (1953, str. 232).

Jako obvykle, nechť $F(x)$ je agregační funkce splňující podmínky I uvedené výše v části 3. Pro u náležející do vnitřku oboru hodnot F (tj. $u \in \operatorname{int} U$, kde $U \equiv \{u : \bar{u} \leq u < \bar{\bar{u}}\}$) a $x \gg 0_N$, definujme *distanční* nebo *deflační funkci*.[*] [†] Pojem *deflační* funkce pro D je výstižnější z ekonomického pohledu. D jako

$$D(u, x) \equiv \max_k \left\{ k : F\left(\frac{x}{k}\right) \geq u, k > 0 \right\}. \tag{5.1}$$

Takže $D(u^*, x^*)$ je největší číslo, které bude snižovat (zvyšovat pokud $F(x^*) < u^*$) bod $x^* \gg 0_N$ na hranici množiny užitkových (nebo produkčních) možností $L(u^*) \equiv \{x : F(x) \geq u^*\}$. Pokud $D(u^*, x^*) > 1$, pak $x^* \gg 0_N$ produkuje vyšší stupeň užitku, nebo produkce než stupeň označený u^*.

Ukázalo se, že matematické vlastnosti $D(u, \mathbf{x})$ podle $\mathbf{x}$ jsou ty samé jako vlastnosti $C(u, \mathbf{p})$ podle p, ale vlastnosti D podle u jsou převrácené vlastnostem C podle u, jak ukazuje následující věta.

Věta 5

Pokud F splňuje podmínku I, potom D definované v (5.1) splňuje Podmínku IV níže.

Podmínka IV pro D

---

[*] Shephard (1953, str. 6; 1970, str. 65) zavedl distanční funkci do ekonomické literatury. Užil mírně odlišné, ale ekvivalentní definice $D(u, x) \equiv 1/\min_\lambda \{\lambda : F(\lambda x) \geq u, \lambda > 0\}$.

[†] McFadden (1978a) a Blackorby, Primont a Russell (1978) nazvali D *transformační* funkcí. V matematické literatuře [např. Rockafellar (1970, str. 28)] je D nazýváno jako *měrná (kontrolní)* funkce.

(i) $D(u,\mathbf{x})$ je funkce nabývající reálných hodnot s $N+1$ proměnnými definovanými na $intU \times int\Omega = \{u : \overline{u} < u < \overline{\overline{u}}\} \times \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \gg 0_N\}$ a je *spojitá* na této oblasti.
(ii) $D(\overline{u},\mathbf{x}) = +\infty$ pro každé $\mathbf{x} \in int\Omega$; tj. $u^n \in intU, lim u^n = \overline{u}, \mathbf{x} \in int\Omega$ implikuje $lim_n D(u^n,\mathbf{x}) = +\infty$
(iii) $D(u,\mathbf{x})$ je *klesající* v u pro každé $\mathbf{x} \in int\Omega$; tj. jestliže $\mathbf{x} \in int\Omega$, $u', u'' \in intU$ s $u' < u''$, potom $D(u',\mathbf{x}) > D(u'',\mathbf{x})$.
(iv) $D(\overline{\overline{u}},\mathbf{x}) = 0$ pro každé $\mathbf{x} \in int\Omega$; tj. $u^n \in intU, lim u^n = \overline{\overline{u}}, \mathbf{x} \in int\Omega$ implikuje $lim_n D(u^n,\mathbf{x}) = 0$
(v) $D(u,\mathbf{x})$ je (pozitivně) lineárně homogenní v $\mathbf{x}$ pro všechna $u \in intU$; tj. $u \in intU, \lambda > 0, \mathbf{x} \in int\Omega$ implikuje $D(u,\lambda\mathbf{x}) = \lambda D(u,\mathbf{x})$.
(vi) $D(u,\mathbf{x})$ je konkávní v $\mathbf{x}$ pro všechna $u \in intU$
(vii) $D(u,\mathbf{x})$ je rostoucí v $\mathbf{x}$ pro všechna $u \in intU$; tj. $u \in intU$, $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in int\Omega$ implikuje $D(u,\mathbf{x}'+\mathbf{x}'') > D(u,\mathbf{x}')$.
(viii) D je taková, že funkce

$$\tilde{F}(\mathbf{x}) \equiv \{u : u \in intU, D(u,\mathbf{x}) = 1\} \tag{5.2}$$

definovaná pro $\mathbf{x} \gg 0_N$ má spojité rozšíření na $\mathbf{x} \geq 0_N$.

Důsledek 5.1

$\tilde{F}(\mathbf{x}) \equiv \{u : u \in intU, D(u,\mathbf{x}) = 1\} = F(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \gg 0_N$ a tudíž $\tilde{F} = F$; tj. původní agregační funkce F je získána z distanční funkce D podle definice (5.2) pokud F splňuje Podmínku I.

Stejně tak jako pro nákladovou funkci $C(u,\mathbf{p})$ popisovanou v Sekci 3, D splňující Podmínky IV na $intU \times int\Omega$ může být jednoznačně rozšířena na $intU \times \Omega$ použitím Fenchelovy uzávěrové operace. Může být ověřeno, že rozšířená D splňuje Podmínky IV (v), (vi) a (vii) na $intU \times \Omega$, ale společná Podmínka spojitosti IV(i) a podmínky monotónnosti v u nemusí být splněny. Mělo by být také poznamenáno, že jestliže Podmínka I (iii) (kvazi-konkávnost F) by byla vynechána, platnost Věty 5 by byla zachována s tím rozdílem,že by musela být vynechána Podmínka IV(vi) (konkávnost D v $\mathbf{x}$).

Následující věta ukazuje, že deflační funkce D může být také použita pro definici spojité agregační funkce $\tilde{F}$.

Věta 6

Jestliže D splňuje Podmínky IV, má $\tilde{F}$ definovaná v (5.2) pro $\mathbf{x} \in int\Omega$ rozšíření na Ω, které splňuje Podmínky I. Navíc, jestliže definujeme deflační funkci D^* korespondující s $\tilde{F}$ jako

$$D^*(u, \mathbf{x}) \equiv \{k : \tilde{F}(\frac{\mathbf{x}}{k}) = u, k > 0\}, \tag{5.3}$$

potom $D^*(u, \mathbf{x}) = D(u, \mathbf{x})$ pro $(u, \mathbf{x}) \in intU \times int\Omega$.

Důsledek 6.1

Pokud D splňuje Podmínky IV a navíc je spojitě diferencovatelná v $(u^*, \mathbf{x}^*) \in intU \times int\Omega$ s $D(u^*, \mathbf{x}^*) = 1$ a $\frac{\partial D(u*, \mathbf{x}*)}{\partial u} < 0$, potom $\mathbf{x}^*$ je řešení přímé maximalizační úlohy $ma\mathbf{x}_{\mathbf{x}}\{\tilde{F}(\mathbf{x}) : v^{*\perp}\mathbf{x} \leq 1, \mathbf{x} \geq 0_N\}$, kde $\tilde{F}$ je definováno v (5.2) a $v^* > 0_N$ je definováno jako

$$v^* \equiv \nabla_{\mathbf{x}} D(u^*, \mathbf{x}^*). \tag{5.4}$$

Navíc, $\tilde{F}$ je spojitě diferencovatelná v $\mathbf{x}^*$ s

$$\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{F}(\mathbf{x}^*) = \frac{-\nabla_{\mathbf{x}} D(u^*, \mathbf{x}^*)}{\partial D(u^*, \mathbf{x}^*)/\partial u}. \tag{5.5}$$

Tudíž spotřebitelský systém inverzních poptávkových funkcí může být získán diferencováním deflační funkce D splňující Podmínky IV (plus diferencovatelnost) podle složek vektoru $\mathbf{x}$.

Historické poznámky

Věty o dualitě mezi distančními nebo deflačními funkcemi D a agregačními funkcemi $\tilde{F}$ byly dokázány Shephardem (1953,1970), Hanochem (1978), McFaddenem (1978a) a Blackorbyem, Primontem a Russellem (1978).

Je zde řada zajímavých souvislostí (a vět o dualitě) mezi přímou a nepřímou agregační, nákladovou a deflační funkcí. Například Malmquist (1953, str. 214) a Shephard (1953, str. 18) ukazují, že se deflační funkce pro nepřímou agregační funkci, $ma\mathbf{x}_k\{k : G(\frac{v}{k}) \leq u, k > 0\}$, rovná nákladové funkci , $C(u, v)$. Úplný popis těchto vzájemných vazeb a dalších vět o dualitě s různými podmínkami regularity mohou být nalezeny v dílech Hanocha (1980) a Blackorbyho, Primonta a Russella (1978). Některé aplikace jsou v Deatonovi (1979).

Lokální věty o dualitě mezi deflační a agregační funkcí jsou v dílech Blackorbyho a Diewerta (1979).

6 Další věty o dualitě

Konkávní funkce mohou být také popsány pomocí *konjungovaných* funkcí. Navíc se ukázalo, že uzavřené konvexní množiny mohou také být za určitých podmínek (viz Rockafellar (1970, str. 102-105) a Karlin (1959. str. 226-227)) popsány pomocí konjugované funkce. Tudíž přímá agregační funkce F, mající množiny na konvexní úrovni $L(u) \equiv \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\}$, může být také popsána svojí konjugovanou funkcí stejně tak jako svojí nákladovou, deflační či nepřímou agregační funkcí. Tento přístup pomocí konjugovaných funkcí byl započat Hotellingem (1932, str. 36-39; 1960; 1972) a rozšířen Samuelsonem (1947, str. 36-39; 1960; 1972), atd. Nebudeme se zabývat tímto přístupem detailně, i když v další části si zopakujeme těsnou spojitost vět o dualitě mezi užitkovou a transformovanou funkcí.

Další třída vět o dualitě (které také začal Hotelling (1935, str. 75) a Samuelson(1960)) je získána rozdělením komoditního vektoru $\mathbf{x} \geq 0_N$ na dva vektory $\mathbf{x}^1$ a $\mathbf{x}^2$ a potom definováním spotřebitelskou proměnnou agregátní funkcí (alternativně je nazvána podmínkovou nepřímou funkcí užitku) g jako

$$g(\mathbf{x}^1, \mathbf{p}^2, y^2) \equiv ma\mathbf{x}_{\mathbf{x}^2}\{F(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) : \mathbf{p}^{2T}\mathbf{x}^2 \leq y^2, \mathbf{x}^2 \geq 0_{N_2}, \tag{6.1}$$

kde $\mathbf{p}^2 \gg 0_N$ je pozitivní spotřebitelský cenový vektor zboží $\mathbf{x}^2$, a $y^2 > 0$ je spotřebitelský rozpočet, který byl určený na utracení za zboží $\mathbf{x}^2$. Množina řešení (6.1), $\mathbf{x}^2(\mathbf{x}^1, \mathbf{p}^2, y^2)$, je spotřebitelská podmíněná (na $\mathbf{x}^1$) poptávková korespondence. Pokud g splňuje náležitosti podmínek regularity, podmíněné poptávkové funkce mohou být generovány aplikováním Royovy identity (4.4) na funkci $G(v^2) \equiv g(\mathbf{x}^1, v^2, 1)$, kde $v^2 \equiv \mathbf{p}^2/y^2$. Pro formální věty o dualitě mezi přímou a variabilně nepřímou agregační funkcí viz. Epstein, Diewert a

Blackorby, Primont a Russell. Pro další aplikace této duality viz. Epstein (pro aplikace spotřebitelské volby v nejistotě) a Pollak a Diewert (estimace preferencí pro veřejné zboží použitím tržních poptávkových funkcí). Konečně, variabilně nepřímá funkce užitku může být použita pro důkaz Hicksovy verze věty o složeném zboží - skupina zboží se chová stejně jako jedna komodita, pokud se ceny ve skupině zboží mění ve stejném poměru - pro aplikace při méně striktních podmínkách než u Hickse viz. Pollak, Diewert a Blackorby, Primont a Russell.

Nyní stručně pojednáme o rozsáhlé literatuře, tj. o důsledcích různých speciálních struktur jedné z mnoha ekvivalentních reprezentací technologie (jako třeba přímá či nepřímá agregační funkce nebo nákladová funkce). Například Shephard ukázal, že homoteticita přímé funkce implikuje, že nákladová funkce je faktorovaná do $\phi^{-1}(u)c(\mathbf{p})$(viz rovnice (2.18)). Jiným příkladem speciální struktury je separabilita. Reference, které se zabývají implikacemi separability a/nebo homoteticity zahrnují Shephard, Samuelson, Gorman, Lau, McFadden, Hanoch, Pollak, Diewert, Jorgenson a Lau, Blackorby, Primont a Russell a Blackorby a Russell. Pro implikace separability a/nebo homoteticity na Slutského koeficientech nebo na parciálních elasticitách substituce viz Sono, Pearce, Goldman a Uzawa, Geary a Morishima, Berndt, Blackorby a Russell, Diewert a Blackorby a Russell. Pro implikace Hicksovy Věty o agregovaných elasticitách substituce viz. Diewert.

Pro empirické testy předpokladu separability viz. Berndt a Christensen, Burgess a Jorgenson a Lau; pro teoretické diskuse o těchto testových procedurách viz. Blackorby, Primont a Russell a Jorgenson a Lau, Lau, Woodland a Denny a Fuss.

Pro implikace předpokladu konkávnosti přímé agregační funkce nebo předpokladu konve**x**ity nepřímé agregační funkce viz. Diewert.

Výše zmíněné věty o dualitě jsou v podstatě "globální". "Lokální" přístup uvedl ve své práci Blackorby a Kiewer, kde je předpokládáno, že daná nákladová funkce $C(u, \mathbf{p})$ splňuje Podmínky II na $U \times P$, kde U je konečný interval a P je uzavřená, konve**x**ní a ohraničená podmnožina pozitivních cen. Potom zkonstruovali odpovídající přímou agregační, nepřímou agregační a deflační funkci, které jsou duální k dané "lokálně" platné nákladové funkci C. Důkazy těchto "lokálních" vět o dualitě se ukázaly být mnohem jednodušší než odpovídající "globální" věty o dualitě presentované v tomto článku (a jinde), a to z toho důvodu, protože problém spojitosti se neobjevuje díky předpokladu, že $U \times P$ je kompaktní. Tyto "lokální" věty o dualitě jsou prospěšné v empirických aplikacích, protože ekonometrické estimace nákladových funkcí často nesplňují příslušné podmínky regulariy pro všechny ceny, ale podmínky mohou být splněny na menší podmnožině cen, která je empiricky relevantní množinou cen.

Epstein rozšířil teorii duality tak, aby pokrývala více obecných maximalizačních úloh. V Epsteinovi je uvažována následující úloha maximalizace užitku, která se objevila v kontextu teorii volby v podmínkách nejistoty:

$$ma\mathbf{x}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2}\{F(\mathbf{x},\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2) : \mathbf{x} \geq 0_N, \mathbf{x}^1 \geq 0_{N_1}, \mathbf{x}^2 \geq 0_{N_2}, \tag{6.2}$$

$$\mathbf{p}^\top \mathbf{x} + \mathbf{p}^{1\top}\mathbf{x}^1 \leq y^1, \mathbf{p}^\top \mathbf{x} + \mathbf{p}^{2\top}\mathbf{x}^2 \leq y^2\}, \tag{6.3}$$

kde $\mathbf{x}$ představuje současnou spotřebu, $\mathbf{x}^i$ představuje spotřebu ve stavu $i(i = 1, 2)$, p je současný cenový vektor, $\mathbf{p}^i$ je diskontní budoucí cenový vektor, který nastane jestliže nastane stav i a $y^i > 0$ je spotřebitelský diskontní příjem jestliže nastane stav i. V Epsteinovi je uvažována následující maximalizační úloha:

$$\max_{\mathbf{x}}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \geq 0_N, c(\mathbf{x}, \alpha) \leq 0\}, \tag{6.4}$$

kde c je daná omezovací funkce, která závisí na vektoru parametrů α.

Nebudeme se snažit provést detailní analýzu Epsteinových výsledků, ale raději budeme prezentovat více abstraktní verzi jeho základní techniky, která snad zachytí základ teorie duality. Základní maximalizační úloha, kterou jsme studovali je $ma\mathbf{x}_{\mathbf{x}}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v)\}$, kde F je funkce N reálných proměnných $\mathbf{x}$ definovaných na nějaké množině S a $B(v)$ je omezující množina , která závisí na vektoru o M parametrech v, které se mění na množině V. Naše předpoklady o množinách S a V a o omezující množině odpovídající B jsou:

(i) S a V jsou neprázdné kompaktní množiny v $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^M$.
(ii) Pro každé $v \in V$, je $B(v)$ neprázdná a $B(v) \subset S$.
(iii) Pro každé $\mathbf{x} \in S$, je inverzní korespondence $B^{-1}(\mathbf{x})$ neprázdná a

$$B^{-1}(\mathbf{x}) \subset V. \tag{6.5}$$

(iv) Korespondence B je spojitá na V.
(v) Korespondence B^{-1} je spojitá na S.

Naše předpoklady na základní funkci F jsou:

(i) F je reálná funkce N proměnných definovaná na S a je na S spojitá.

(6.6)

(ii) Pro každé $\mathbf{x}^* \in S$, existuje $v^* \in V$ takové, že $F(\mathbf{x}^*) = ma\mathbf{x}_{\mathbf{x}}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v^*)\}$.

Funkce G duální k F je definovaná pro $v \in V$ takto:

$$G(v) \equiv \max_{\mathbf{x}}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v)\}. \tag{6.7}$$

Věta 7

Jestliže S, V a B splňují (6.4) a F splňuje (6.5), potom G definovaná v (6.6) splňuje následující podmínky:
(i) G je reálná funkce M proměnných definovaná na V a je na V spojitá.

(6.8)

(ii) Pro každé $v^* \in V$, existuje $\mathbf{x}^* \in S$ takové, že $G(v^*) = min_v\{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}^*)\}$.

Navíc, defnujeme-li funkci F^* duální k G pro $\mathbf{x} \in S$ takto:

$$F^*(\mathbf{x}) \equiv min_v\{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}), \tag{6.9}$$

potom $F^*(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \in S$.

Důsledek 7.1

Nechť $\mathbf{x}^* \in S$ a definujeme $H(\mathbf{x}^*)$ jako množinu $v^* \in V$ takových, že $F(\mathbf{x}^*) = ma\mathbf{x}_\mathbf{x}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v^*)\}$. Jestliže $v^* \in H(\mathbf{x}^*)$, potom $\mathbf{x}^*$ je řešením $ma\mathbf{x}_\mathbf{x}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v^*)\}$ a v^* je řešením $min_v\{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}^*)\}$.

Důkaz viz. Diewert (1982).

Všimněte si, že předpoklad na F (6.5) (ii) je náhražka našeho starého předpokladu kvazi-konkávnosti v Sekci 4 a množina $H(\mathbf{x}^*)$ definovaná v důsledku 7.1. nahrazuje množinu normalizovaných pomocných nadrovin, které se objevují v důsledku 3.2.

Díky symetrické podstatě našich předpokladů, je zřejmé, že důkaz následující věty je stejný jako důkaz věty 7 až na to, že nerovnosti jsou převrácené.

Věta 8

Jestliže S, V a B splňují (6.4) a G splňuje (6.7), potom F^* definovaná v (6.8) splňuje (6.5). Navíc, definujeme-li funkci G^* jako duální k F^* pro $v \in V$ takto:

$$G^*(v) \equiv ma\mathbf{x}_\mathbf{x}\{F^*(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v)\}, \tag{6.10}$$

potom $G^*(v) = G(v)$ pro každé $v \in V$.

Důsledek 8.1

Nechť $v^* \in V$ a definujeme $H^*(v^*)$ jako množinu $\mathbf{x}^* \in S$ takových, že $G(v^*) = min_v\{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}^*)\}$. Jestliže $\mathbf{x}^* \in H^*(v^*)$, potom v^* je řešení $min_v\{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}^*)\}$ a $\mathbf{x}^*$ je řešením $ma\mathbf{x}_\mathbf{x}\{F^*(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v^*)\}$.

Všimněme si, že Podmínka (6.7) (ii) pro G nahrazuje naši starou podmínku kvazi-konvexity pro G v Sekci 4, a množina $H^*(v^*)$ definovaná v důsledku 8.1 nahrazuje množinu normalizovaných pomocných nadrovin, které se objevují v důsledku 4.1.

Nemůžeme stanovit doplněk k důsledku 3.3 (identita Hotelling-Woldova) a důsledku 4.2 (Ville-Royova identita), protože bylo nutné v těchto důsledcích použít diferencovatelnost F a G a příslušnou omezující funkci. Tudíž, abychom odvodili doplňky k důsledkům 3.3 a 4.2 v současném kontextu, museli bychom přidat předpoklady pro F (nebo G) a pro omezující korespondenci B. Přesto výše zmíněné věty ilustrují podstatu struktury teorie duality. Mohou být také interpretovány jako příklady lokálních vět o dualitě.

7 Minimalizace nákladů a derivovaná poptávka po vstupech

Předpokládejme, že technologie firmy může být popsána její produkční funkcí F, kde $u = F(\mathbf{x})$ je maximální výstup, která může být vyprodukován použitím nezáporného vektoru vstupů $\mathbf{x} \geq 0_N$. Předpokládejme, že F splňuje Předpoklad 1 Sekce 2 (tj. produkční funkce je spojitá shora). Jestliže si firma vezme ceny vstupů $p \gg 0_N$ jako dané (tj. firma se nechová jako vstupní monopol), potom v Sekci 2 uvidíme, že funkce celkových nákladů firmy $C(u, \mathbf{p}) \equiv min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p}^\top \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\}$ byla korektně definovaná pro všechna $p \gg 0_N$ a $u \in R(F)$, kde $R(F)$ je obor hodnot F. Navíc $C(u, \mathbf{p})$ byla lineárně homogenní a konkávní v cenách p pro každé u a byla neklesající v u pro každé pevné p.

Nyní předpokládejme že C má druhou spojitou derivaci podle jeho argumentů v bodě $(u^*, \mathbf{p}^*)$, kde $u^* \in R(F)$ a $\mathbf{p}^* \equiv (p_1^*, \ldots, \mathbf{p}_N^*) \gg 0_N$. Z Lemmatu 3 v Sekci 2 nákladové funkce minimalizující poptávku po vstupech $\mathbf{x}_1(u, \mathbf{p}), ..., \mathbf{x}_N(u, \mathbf{p})$ existují v $(u^*, \mathbf{p}^*)$ a jsou rovny parciálním derivacím nákladové funkce podle N vstupních cen:

$$\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*) = \frac{\partial C(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial p_i}, i = 1, \ldots, N. \tag{7.1}$$

Tudíž, předpoklad že C má spojité druhé derivace v $(u^*, \mathbf{p}^*)$ zajišťuje, aby nákladové funkce minimalizující poptávku po vstupech $\mathbf{x}_i(u, \mathbf{p})$ existovaly a měly první spojitou derivaci v $(u^*, \mathbf{p}^*)$

Definujeme $[\partial \mathbf{x}_i / \partial p_j] \equiv [\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_j]$ jako matici typu $N \times N$ derivací N-vstupních funkcí $\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)$

podle N cen $p_j^*, i, j = 1, 2, ..., N$. Z (7.1) plyne, že

$$[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}] = \nabla^2_{pp} C(u^*, \mathbf{p}^*), \tag{7.2}$$

kde $\nabla^2_{pp} C(u^*, \mathbf{p}^*) \equiv [\partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_i \partial p_j]$ je Hessova matice nákladové funkce podle vstupních cen vyčíslených v $(u^*, \mathbf{p}^*)$. Druhá spojitá derivovatelnost C podle p v $(u^*, \mathbf{p}^*)$ implikuje (viz. Youngova věta), že $\nabla^2_{pp} C(u^*, \mathbf{p}^*)$ je symetrická matice taková, že použitím (7.2) dostaneme

$$[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}] = [\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}]^\top = [\frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial p_i}], \tag{7.3}$$

tj. $\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_j = \partial \mathbf{x}_j(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_i$ pro všechna i a j.

Protože je C konkávní v p a má druhou spojitou derivaci podle p v okolí bodu $(u^*, \mathbf{p}^*)$, plyne z toho podle Fenchela nebo Rockafellara, že $\nabla^C(u^*, \mathbf{p}^*)$ je negativně semidefinitní matice. Takže podle (7.2),

$$z^\top [\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}] z \leq 0 \text{ pro všechny vektory} z. \tag{7.4}$$

Takže pro $z = e_i$, i-tý jednotkový vektor,(7.4) implikuje

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial p_i} \leq 0, i = 1, 2, ..., N, \tag{7.5}$$

tj. i-tá nákladová funkce minimalizující poptávku po vstupech nemůže mít pozitivní sklon vzhledem k i-té vstupní ceně pro $i = 1, 2, ..., N$.

Protože je C lineárně homogenní v p, máme $C(u^*, \lambda \mathbf{p}^*) = \lambda C(u*, \mathbf{p}*)$ pro všechna $\lambda > 0$. Budeme-li derivovat tuto poslední rovnici podle p_i pro λ blízké 1, získáme rovnici $C_i(u^*, \lambda \mathbf{p}^*)\lambda = \lambda C_i(u^*, \mathbf{p}^*)$, kde $C_i(u^*, \mathbf{p}^*) \equiv C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_i$. Tudíž $C_i(u^*, \lambda \mathbf{p}^*) = C_i(u^*, \mathbf{p}^*)$ a derivováním této poslední rovnice podle λ dostaneme (pokud se $\lambda = 1$)

$$\sum_{i=1}^N p_j^* \partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_i \partial p_j = 0,$$

pro $i = 1, 2, \ldots, N$. Takže, použitím (7.2) najdeme vstupní poptávkové funkce $\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)$ splňující následujících N omezení:

$$[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}]\mathbf{p}^* = \nabla^2_{pp} C(u^*, \mathbf{p}^*)\mathbf{p}^* = 0_N, \tag{7.6}$$

kde $\mathbf{p}^* = [p_1^*, \mathbf{p}^*, ..., \mathbf{p}_N^*]^\top$.

Závěrečné obecné omezení pro derivování vstupní poptávkové funkce můžeme získat následovně: pro λ blízké 1, derivujme obě strany $C(u^*, \lambda\mathbf{p}^*) = \lambda C(u^*, \mathbf{p}^*)$ podle u a potom výslednou rovnici derivujme podle λ. Pro $\lambda = 1$ dostaneme poslední rovnici ve tvaru:

$$\sum_{i=1}^{N} p_j^* \partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u \partial p_j = \partial C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u.$$

Všimněme si, že druhá parciální diferencovanost C a (7.1) implikují, že

$$\partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u \partial p_j = \partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_j \partial u =$$

$$= \partial[\partial C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_j]/\partial u = \partial \mathbf{x}_j(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u.$$

Takže

$$\sum_{j=1}^{N} p_j^* \frac{\partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial u \partial p_j} = \sum_{j=1}^{N} p_j^* \frac{\partial \mathbf{x}_j(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial u} =$$

$$= \frac{\partial C(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial u} \geq 0. \tag{7.7}$$

Nerovnost $\partial C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u \geq 0$ plyne z vlastnosti, že C neklesá v u. Nerovnost (7.7) nám říká, že změny v nákladové funkci minimalizující poptávku po vstupech indukované rozšířením výstupu nemůžou být všechny záporné, tj. ne všechny vstupy mohou být nevýznamné. S dodatečným předpokladem, že F je lineárně homogenní (a tedy existuje $\mathbf{x} > 0_N$ takové, že $F(\mathbf{x}) > 0$), můžeme vyvodit (Sekce 2), že $C(u, \mathbf{p}) = uc(\mathbf{p})$, kde $c(\mathbf{p}) \equiv C(1, \mathbf{p})$. Tedy, když je F lineárně homogenní,

$$\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*) = u^* \frac{\partial c(\mathbf{p}^*)}{\partial p_i}, i = 1, ..., N, \tag{7.8}$$

a $\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u = \partial c(\mathbf{p}^*)/\partial p_i$. Tedy jestliže $\mathbf{x}_i^* \equiv \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*) > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, N$, užitím (7.8) dostaneme dodatečné omezení

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial u} \frac{u^*}{\mathbf{x}_i^*} = \frac{u^*[\partial c(\mathbf{p}^*)/\partial p_i]}{\mathbf{x}_i^*} = 1, \tag{7.9}$$

jestliže je F lineárně homogenní, tj. vcechny elasticity vstupu k výstupu jsou jednotkové.

Pro obecný případ dvou vstupů nám obecné omezení (7.3)-(7.7) umožní dostat se k následujícím omezením šesti parciálních derivací poptávkové funkce pro dva vstupy $\mathbf{x}_1(u^*, \mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$ a $\mathbf{x}_2(u^*, \mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$: $\partial \mathbf{x}_1/\partial p_1 \leq 0, \partial \mathbf{x}_2/\partial p_2 \leq 0, \partial \mathbf{x}_1/\partial p_2 \geq 0, \partial \mathbf{x}_2/\partial p_1 \geq 0$ (a jestliže je jedna z nerovností ostrá, potom jsou ostré všechny, protože

$$p_1^* \partial \mathbf{x}_1/\partial p_1 = -p_2^* \partial \mathbf{x}_1/\partial p_2 = -p_2^* \partial \mathbf{x}_2/\partial p_1 = (p_2^*)^2 (p_1^*)^{-1} \partial \mathbf{x}_2/\partial p_2) \text{ a}$$
$$p_1^* \partial \mathbf{x}_1/\partial u + p_2^* \partial \mathbf{x}_2/\partial u \geq 0.$$

Tedy, znaménka u $\partial \mathbf{x}_1/\partial u$ a u $\partial \mathbf{x}_2/\partial u$ jsou neznámé, ale pokud je jedno záporné, druhé musí být kladné. Pro konstatní výnosy z rozsahu výroby nejasnost ohledně znamének vymizí: máme $\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u \geq 0, \partial \mathbf{x}_2(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u \geq 0$ a alespoň jedna nerovnost musí být ostrá pokud je $u^* > F(0_2)$.

Výhoda derivování těchto dobře známých komparativních statických výsledků používáním teorie duality je ta, že omezení (7.2)-(7.7) jsou platná i v případech, kdy přímá produkční funkce F není diferencovatelná. Například Leontiefova produkční funkce má lineární nákladovou funkci $C(u, \mathbf{p}) = ua^\top p$, kde $(a_1, a_2, ..., a_N) \equiv a^\top > 0_N^\top$ je konstantní vektor. Může být ověřeno, že omezení (7.2) jsou platná pro tuto nediferencovatelnou produkční funkci.

Historické poznámky

Analogie k (7.3) a (7.4) v kontextu ziskových funkcí byly získány Hotellingem. Hicks a Samuelson dostali vztahy (7.2)-(7.6) a Samuelson získal také (7.7). Všichni tito autoři předpokládali, že primární funkce F byla diferencovatelná a jejich důkazy používaly podmínku prvního řádu pro úlohu minimalizace nákladů (nebo maximalizace užitku) a vlastnosti determinantů pro důkaz svých výsledků.

8 Funkce zisku

Doposud jsme se zabývali problémem firmy, která používá mnoho různých vstupů na výrobu jednoho výrobku. Avšak ve skutečném světě chrlí převážná většina firem mnoho druhů různých výrobků. Proto bude nezbytné zamyslet se nad problémem modelování firmy s mnoha vstupy a výstupy.

Pro ekonomické aplikace bude užitečné zavést tzv. *variabilní funkci zisku* $\Pi(p, \mathbf{x})$, která označuje maximum tržeb mínus variabilní platby za vstupy, které může být dosaženo při daných cenách $p \gg 0_I$ variabilních vstupů a výstupů a při daném vektoru pevně daných vstupů $\mathbf{x} \gg 0_J$. Označme variabilní vstupy a výstupy I-rozměrným vektorem $u \equiv (u_1, u_2, ..., u_I)$, fixní vstupy nechť jsou označeny J-rozměrným vektorem $-\mathbf{x} \equiv (-\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_2, ..., -\mathbf{x}_J)$. Dále označme T množinu všech možných kombinací vstupů a výstupů, které říkáme *množina produkčních možností*. Výstupy jsou zachyceny kladnými čísly, vstupy zápornými, takže je-li $u_i > 0$, pak i-té variabilní zboží jest výstup produkovaný naší firmou. Formálně se definuje Π pro $p \gg 0_I$ a $-\mathbf{x} \ll 0_J$ jako:

$$\Pi(p, \mathbf{x}) \equiv \max_u \{\mathbf{p}^\top u : (u, -\mathbf{x}) \in T\}. \tag{8.1}$$

Je-li T uzavřený, neprázdný konvexní kužel v Euklidovském $I + J$ rozměrném prostoru s následujícími vlastnostmi: (i) pokud $(u, -\mathbf{x}) \in T$, potom $\mathbf{x} \geq 0_J$ (posledních J zboží jsou vždy vstupy); (ii) pokud $(u', -\mathbf{x}') \in T, u' \leq u''$ a $-\mathbf{x}' \leq -\mathbf{x}''$, potom $(u'', -\mathbf{x}'') \in T$ (volná dispozice); (iii) pokud $(u, -\mathbf{x}) \in T$, potom jsou komponenty vektoru u ohraničené shora (hranice možností při pevných vstupech). Potom má Π následující vlastnosti: (i) $\Pi(p, \mathbf{x})$ je nezáporná reálná funkce definovaná pro každé $p \gg 0_I$ a $\mathbf{x} \geq 0_J$ taková, že: $\Pi(p, \mathbf{x}) \leq \mathbf{p}^\top b(\mathbf{x})$ pro každé $p \gg 0_J$. (ii) pro každé $\mathbf{x} \geq 0_J$ je $\Pi(p, \mathbf{x})$ (pozitivnř) lineárně homogenní, konvexní a spojitá v p a (iii) pro každé $p \gg 0_I$ je $\Pi(p, \mathbf{x})$ (pozitivně) lineárně homogenní, konkávní spojitá a neklesající v $\mathbf{x}$. Navíc, Gorman (1968), McFadden (1966) a Diewert (1973a) ukázali, že množina T může být zkonstruována pomocí Π následujícím způsobem:

$$T = \{(u, -\mathbf{x}) : \mathbf{p}^\top u \leq \Pi(p, \mathbf{x}), \forall \mathbf{p} \gg 0_I; \mathbf{x} \geq 0_J\}. \tag{8.2}$$

Tudíž, existuje dualita mezi množinami produkčních možností T a funkcemi variabilního zisku Π, pokud jsou splněny výše uvedené podmínky regularity. Pomocí Shephardova lematu (3.1) a Royovy identity (4.4) můžeme dokázat následující tvrzení:

Holellingovo lemma (1932, str. 594) Splňuje-li funkce variabilního zisku Π podmínky regularity (10.1) a navíc je diferencovatelná vzhledem k cenám variabilního množství v bodě $\mathbf{p}^* \gg 0_I$ a $\mathbf{x}^* \geq 0_J$, potom $\partial\Pi(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)/\partial p_i = u_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ pro $i = 1, 2, ..., I$, kde $u_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ je takové množství čistého výstupu i, které maximalizuje zisk přičemž je dán vektor variabilních cen $\mathbf{p}^*$ a vektor fixních vstupů $\mathbf{x}^*$, které jsou k dispozici.

Hotellingovo lema lze použít k odvození funkce nabídky variabilního výstupu a poptávky po variabilních vstupech. Potřebujeme pouze, aby byl zaručen funkcionální tvar $\Pi(p, \mathbf{x})$ konzistentní s podmínkami regularity pro Π a diferencovatelnost vzhledem ke komponentám vektoru p. Například uvažme funkci translogaritmického variabilního zisku Π definovanou:

$$ln\Pi(p, \mathbf{x}) \equiv \alpha_0 + \sum_{i=1}^{I} \alpha_i lnp_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\sum_{h=1}^{I} \gamma_{ih} lnp_i lnp_h +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \delta_{ij} lnp_i ln\mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^{J} \beta_j ln\mathbf{x}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{J} \phi_{jk} ln\mathbf{x}_j ln\mathbf{x}_k, \tag{8.3}$$

kde $\gamma_{ih} = \gamma_{hi}$ a $\phi_{jk} = \phi kj$. Lehce nahlédneme, že Π definovaná vztahem (8.3) je homogenní stupně jedna v p tehdy a jen tehdy, pokud:

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 1;\ \sum_{i=1}^{I} \delta_{ij} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, J; \sum_{h=1}^{I} \gamma_{ih} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, I. \tag{8.4}$$

Podobně, $\Pi(p, \mathbf{x})$ je homogenní stupně jedna v $\mathbf{x}$ tehdy a jen tehdy, když:

$$\sum_{j=1}^{J} \beta_j = 1;\ \sum_{j=1}^{J} \delta_{ij} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, I; \sum_{k=1}^{J} \phi_{jk} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, J. \tag{8.5}$$

Je-li $\Pi(p, \mathbf{x}) > 0$, definujeme podíl nabídky i-té proměnné jako: $p_i u_i(p, \mathbf{x})/\Pi(p, \mathbf{x}) \equiv s_i(p, \mathbf{x})$. Hotellingovo lemma použité na translogaritmickou funkci definovanou v (8.3) dává následující systém funkcí podílu čisté nabídky:

$$s_i(p, \mathbf{x}) = \alpha_i + \sum_{h=1}^{I} \gamma_{ih} ln p_h + \sum_{j=1}^{J} \delta_{ij} ln \mathbf{x}_j;\ i = 1, 2, \ldots, I. \tag{8.6}$$

Neboť je suma všech podílů jednička, jenom $I - 1$ rovnic v (8.6) je nezávislých. Rovnice (8.3) a $I - 1$ rovnic z (8.6) lze použít k odhadu parametrů funkce translogaritmického variabilního zisku. Povšimněme si přitom, že tyto rovnice jsou lineární v neznámých parametrech stejně jako omezení (8.4) a že můžeme použít modifikace lineárních regresních technik.

Alternativní funkcionální tvary funkcí variabilního zisku jsou navržené v McFadden (1978b), Diewert (1973a) a Lau (1974a). Empirické poznatky vypracoval Kohli (1978), Woodland (1977c), Harris(Appelbaum (1977) a Epstein (1977).

Velice příbuzný je přístup tzv. *sdružené nákladové funkce* $C(u, w) \equiv \min_{\mathbf{x}}\{w^{\perp}\mathbf{x} : (u, -\mathbf{x}) \in T\}$, kde T je množina produkčních možností stejně jako dříve, $w \gg 0_J$ je kladný vektor cen vstupů. Jako obyčejně, pokud je $C(u, w)$ diferencovatelná vzhledem k cenám vstupů w (a splňující příslušné podmínky regularity), potom můžeme z Shephardova lemmatu odvodit systém poptávkových funkcí $\mathbf{x}(u, w)$, které minimalizují náklady. Dostáváme pak:

$$\mathbf{x}(u, v) = \nabla_w C(u, w). \tag{8.7}$$

Sdružené nákladové funkce empiricky odhadoval Burgess (1976a) (který využíval funkcionální tvar Halla (1973)), Brown, Caves, Christensen (1975) a Christensen, Greene (1976) (který využíval translogaritmický funkcionální tvar pro C(u,w), což je analogicky jako u transabilního zisku definované v (8.3).

Historické poznámky Samuelson (1953-54, str.20) nás obeznámil s funkcí národní produkce, což je přístup zmíněné funkce variabilního zisku. Zároveň upozornil na některé vlastnosti. Gorman (1968) a McFadden (1966, 1978a) vynesl na světlo světa tvrzení o dualitě mezi množinou produkčních možností (splňující různé podmínky regularity) a korespondující funkcí variabilního zisku. Alternativní tvrzení o dualitě jsou v Shephard (1970), Diewert (1973a, 1974b), Sakai (1974) a Lau (1976). Pro speciální případ jediného fi**x**ního vstupu se lze poučit z Shephard (1970, str.248-250) nebo Diewert (1974b).

McFadden (1966, 1978a) zavedl funkci sdružené nákladové funkce, sepsal její vlastnosti a dokázal tvrzení o formální dualitě mezi sdruženou nákladovou funkcí a množinou produkčních možností T, stejně jako je to i v Shephard (1970) a Sakai (1974).

E**x**istují také mnohem jednodušší tvrzení o množině produkčních možností a transformačních funkcí, které dávají ma**x**imální množství jednoho výstupu, jenž daná firma může vyrobit (nebo optimální množství požadovaného vstupu) při pevně daných množstvích ostatních vstupů a výstupů. To nalezneme například v Diewert (1973), Jorgenson; Lau (1974a, 1974b) a Lau (1976).

Hotellingovo lemma lze zobecnit tak, abychom postihli i případ nediferencovatelné funkce variabilního zisku: gradient funkce Π vzhledem k p je nahrazen množinou subgradientů. Toto zobecnění bylo poprvé uveřejněno v Gorman (1968, str.150-151) a McFadden (1966, str.11) a opakováno v Diewert (1973a, str.313) a Lau (1976, str.142).

Je-li $\Pi(p, \mathbf{x})$ diferencovatelná vzhledem ke komponentám vektoru fi**x**ních vstupů, potom $w_j = \partial\Pi(p, \mathbf{x})/\partial\mathbf{x}_j$ lze interpretovat jako hodnotu, kterou firma přisuzuje jedné dodatečné jednotce j-tého fi**x**ního výrobního faktoru. Neboli je to "stínová cena" j-tého vstupu (Lau (1976, str.142)). Pokud je navíc firma vystavena vektoru cen $w \gg 0_J$ výrobních faktorů pro "fi**x**ní" vstupy a během určitého období lze měnit množství těchto "fi**x**ních" faktorů, pak pokud firma minimalizuje náklady na dosažení daného množství variabilního zisku, dostaneme (Diewert (1974a, str. 140))

$$w = \nabla_{\mathbf{x}} \Pi(p, \mathbf{x}), \tag{8.8}$$

A tyto vztahy mohou být rovněž využity v ekonometrických aplikacích.

Translogaritmický varibalní zisk byl nezávisle navržen v Russel(Boyce (1974) a Diewert (1974a, str.139). Jde zjevně o přímou modifikaci translogaritmického funkcionálního tvaru podle Christen, Jorgenson(Lau (1971) a Saragan (1971).

Vlastnosti porovnávacích statistik $\Pi(p, \mathbf{x})$ nebo $C(u, w)$ byly popsány v Samuelson (1953-54), McFadden (1966, 1978a), Diewert (1974, str. 142-146) a Sakai (1974).

V teorii mezinárodního obchodu se všeobecně předpokládá e**x**istence sektorových produkčních funkcí, fi**x**ní domácí zdroje $\mathbf{x}$ a pevné ceny p mezinárodně obchodovatelného zboŘí. Pokoušíme-li se v takovém případě ma**x**imalizovat čistou hodnotu mezinárodně obchodovatelného zboží vyráběného ekonomikou, dostáváme variabilní funkci zisku ekonomiky, $\Pi(p, \mathbf{x})$ nebo Samuelsonovu *funkci národního produktu.* Pokud jsou sektorové produkční funkce "vystaveny" konstantním výnosům z rozsahu, bude mít $\Pi(p, \mathbf{x})$ obvyklé vlastnosti zmíněné výše. Avšak e**x**istence sektorových technologií implikuje dodatečná omezení na porovnávací statistiky národní produkční funkce Π: viz. Chipman (1966,1972, 1974b), Samuelson (1966), Ethier (1974), Woodland (1977a, 1977b), Diewert and Woodland (1977), Jones, Schienkman (1977) a další v odkazech těchto prací. Závěrem poznamenejme, že vlastnosti $\Pi(p, \mathbf{x})$ vzhledem k $\mathbf{x}$ jsou přesně ty vlastnosti, které má neoklasická produkční funkce. Když je $\mathbf{x}$ vektor primárních vstupů, potom můžeme $\Pi(p, \mathbf{x})$ interpretovat jako funkci přidané hodnoty. Pokud se mění ceny p (průměrně) proporcionálně v čase, může být $\Pi(p, \mathbf{x})$ očištěna od inflace trendem všeobecných cen, čímž dostáváme funkci reálné přidané hodnoty, která má vlastnosti neoklasické produkční funkce; viz. Khang (1971), Bruno (1971) a Diewert (1978c, 1980).

9 Dualita a nesoutěživé přístupy k mikroekonomické teorii

Doposud jsme předpokládali, že výrobci a spotřebitelé berou ceny jako dané a optimalizují množství proměnných, které mají pod kontrolou. V této kapitole naznačíme, jak může být teorie duality využito v případě monopsonického či monopolistického chování na straně spotřebitelů nebo výrobců. Nebudeme se to pokoušet přesně vysvětlovat, toliko ilustrujeme používané techniky na 4 příkladech.

9.1 První přístup: Problém monopolu

Předpokládejme, že monopolista produkuje výstup $\mathbf{x}_0$ při produkční funkci $F(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} \gg 0_N$ je vektor variabilních vstupů Nechť je dále monopolista vystaven (inverzní) poptávkové funkci $p_0 = wD(\mathbf{x}_0)$, tzn. $p_0 \geq 0$ je cena, při které se prodá $\mathbf{x}_0$ jednotek výstupu, D je spojitá, kladná funkce v $\mathbf{x}_0$, proměnná $w > 0$ reprezentuje vliv "dalších proměnných" na poptávku. Dlužno dodat, že pokud prodává monopolista spotřebitelům, w může vyrovnat disponibilní důchod uvažovaného časového období. Pokud monopolista prodává výrobcům, w může být lineárně homogenní funkce cen, kterým jsou vystaveni ostatní výrobci. A konečně, předpokládejme, že monopolista chová "soutěžně" na trhu vstupů, když cenový vektor cen vstupů je dán pevně. Potom lze problém maximalizace monopolistova zisku zapsat takto:

$$\max_{p_0,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}} \{p_0\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}^\top\mathbf{x} : \mathbf{x}_0 = F(\mathbf{x}), p_0 = wD(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} \geq 0_N\} =$$

$$= \max_{\mathbf{x}}\{wD[F(\mathbf{x})]F(\mathbf{x}) - \mathbf{p}^\top\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0_N\} =$$

$$= \max_{\mathbf{x}}\{wF^*(\mathbf{x}) - \mathbf{p}^\top\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0_N\} \equiv \Pi^*(w, \mathbf{p}), \tag{9.1}$$

kde $F^*(\mathbf{x}) \equiv D = [F(\mathbf{x})]F(\mathbf{x}) = p_0\mathbf{x}_0/w$ je funkce tržeb očištěná od inflace w nebo pseudoprodukční funkce a Π^* je příslušná funkce pseudozisku (vzpomeňme kapitolu 10), která korespondující s F^*. Povšimněme si, že w hraje roli ceny pro $F^*(\mathbf{x})$. Pokud je F^* konkávní funkce, potom bude $\Pi^*(l, p/w)$ funkce konjugovaná k F^* [vzpomeňme na: Samuelson (1960), Lau (1969, 1978) a Jorgenson, Lau (1974a, 1974b) konjugované přístupy k teorii duality] a Π^* bude duální k F^* (tzn. F^* může být dopočtena z Π^*). I když není F^* konkávní, existuje-li maximum v (11.1) v relevantním okolí cen $(w, \mathbf{p})$, potom může být Π^* využito k reprezentaci relevantní části F^* (tzn. "volný dostupný" obal F^* dostaneme z Π^*). Pokud je navíc Π^* diferencovatelná v $(w^*, \mathbf{p}^*)$ a $\mathbf{x}_0^*, p_0^*, \mathbf{x}^*$ řešť (11.1), pak Hotellingovo lemma dává:

$$u_0^* \equiv \frac{p_0^* \mathbf{x}_0^*}{w^*} = \nabla_w \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*) \mathrm{a} - \mathbf{x}^* = \nabla_\mathrm{p} \Pi^*(\mathrm{w}^*, \mathbf{p}^*). \tag{9.2}$$

Pokud je k tomu Π^* spojitě diferencovatelná druhého řádu v $(w^*, \mathbf{p}^*)$, pak můžeme odvodit obvyklé výsledky pro porovnávací statistiky funkcí prodeje očištěných od inflace, $u_0(w^*, \mathbf{p}^*) \equiv \nabla_w \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*)$ a funkce poptávky $-\mathbf{x}(w^*, \mathbf{p}^*) \equiv \nabla_p \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*)$; zejména $\nabla^2 \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*)$ je pozitivně semidefinitní symetrická matice a $[w^*, \mathbf{p}^{*\top}] \nabla^2 \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*) = 0_{N+1}^\top$.

Vztah (9.2) lze využít k odhadu ekonometrických parametrů Π^* a tudíž nepřímo k odhadu F^*: jednoduše řečeno, postulujeme funkcionální tvar Π^*, diferencujeme Π^*, což "napasujeme" na (9.2) pro danou časovou řadu pozorovaných hodnot $p_0, p, w, \mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}$. Nevýhodou metody jsou: (i) nelze vyjádřit D z F; (ii) nelze testovat, zda-li se vlastně výrobce chová "tržně" na trhu výrobků; (iii) nemůžeme použít naše odhadnuté rovnice k predikci výroby $\mathbf{x}_0$ nebo prodejní ceny p_0 odděleně.

9.2 Druhý přístup: Problém monopsonu

Uvažme problém spotřebitele, který maximalizuje funkci užitku $F(\mathbf{x})$, která splňuje "Podmínky I", ale odtud již dále pro spotřebitele nepředpokládáme fixní ceny nakupovaných komodit. Takže je spotřebitel schopen monopsonicky využít jednoho či více svých dodavatelů. Pak v období r nechť je vystaven nelineárnímu rozpočtovému omezení ve tvaru: $h_r(\mathbf{x}) = 0$, kde $\mathbf{x} \geq 0_N$ je vektor jeho nákupu (nebo rent). Nechť $\mathbf{x}^r \geq 0_N$ je řešení pro období r problému maximalizace "omezeného" užitku, tzn.:

$$\max_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x}) : h_r(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \geq 0_N\} = F(\mathbf{x}^r);\ r = 1, \ldots, T. \tag{9.3}$$

Dále nechť r-tá funkce rozpočtového omezení h_r je diferencovatelná v $\mathbf{x}^r$ s $\nabla_\mathbf{x} h(\mathbf{x}^r) \gg 0_N$ pro každé r. Pak můžeme linearizovat r-té rozpočtové omezení okolo $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$ tak, že vezmeme rozvoj Taylorovy řady prvního řádu. Linearizované rozpočtové omezení je $h_r(\mathbf{x}^r) + [\nabla_{\mathbf{x}} h_r(\mathbf{x}^r)]^\top(\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) = 0$ nebo $[\nabla_{\mathbf{x}} h_r(\mathbf{x}^r)]^\top(\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) = 0$, neboť $h_r(\mathbf{x}^r) = 0$ použitím (9.3). Lehce se nahlédne, že povrch užitku: $\{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^r), \mathbf{x} \geq 0_N\}$ je tečná nejenom k původnímu nelineárnímu rozpočtovému povrchu $\{\mathbf{x} : h_r(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \geq 0_N\}$ v $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$, ale také k povrchu linearizovaného rozpočtového omezení $\{\mathbf{x} : [\nabla h_r(\mathbf{x}^r)]^\top(\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) = 0, \mathbf{x} \geq 0_N\}$ v $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$. Neboť se předpokládá F kvazikonkávní, je množina $\{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq F(\mathbf{x}^r), \mathbf{x} \geq 0_N\}$ konvexní a linearizované rozpočtové omezení je opěrnou nadrovinou k této množině, tzn.:

$$\max_{\mathbf{x}}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x} \leq \mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x}^r, \mathbf{x} \geq 0_N\} = F(\mathbf{x}^r),\ r = 1, \ldots, T, \tag{9.4}$$

kde $\mathbf{p}^r \equiv \nabla h_r(\mathbf{x}^r)$ pro $r = 1, 2, ..., T$. Nyní je (9.4) pouhou řadou "agregátorových" maximalizačních úloh typu, který jsme studovali v kapitole 4 (r-tý vektor normalizovaných cen se definuje jako $v^r \equiv \mathbf{p}^r/\mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x}^r$) a odhadovací techniky nastíněné v kapitole 9 (vzpomeňme například vztah (9.9)) mohou být použity k odhadu parametrů přímých užitkových funkcí duálních k F.

Kapitola 4 se zabývá lineárními rozpočtovými omezeními a proto je irelevantní, jestli je F kvazikonkávní nebo ne (vzpomeňme naši diskusi a diagram v kapitole 2). Avšak nyní požadujeme dodatečné předpoklady, že F je kvazikonkávní, aby se rigorózně ospravedlnila záměna (9.3) za (9.4). Povšimněte si také, že abychom mohli použít tuto proceduru, je nezbytné znát vektor derivací $\nabla_{\mathbf{x}} h_r(\mathbf{x}^r)$ pro každé r; tzn. musíme znát derivace nabídkových funkcí, které spotřebitel využívá v každém období - informace, kterou první přístup nepožaduje.

Model monopsonu zde prezentovaný je ve skutečnosti mnohem širší než klasický model monopsonistického využívání: ceny, kterým je spotřebitel vystaven se mohou měnit s nakupovaným množstvím kvůli nepřebernému množství důvodů, zahrnujíce v to i náklady transakce, množstevní slevy a existenci progresivního zdanění. Většina daňových systémů vede k rozpočtovým omezením se skoky nebo nediferencovatelnými body. To nezpůsobuje žádné problémy s výše uvedenou procedurou, jestliže pózorovaná spotřebitelova volba mezi spotřebou a volným časem nepadne přesně do bodu skoku v tomto rozpočtovém omezení.

9.3 Třetí přístup: Problém monopolu jinak

Znovu se věnujme problému monopolu vyloženému výše. Nechť $\mathbf{x}_0^r > 0, \mathbf{x}^r > 0_N$ je řešením problému maximalizace zisku monopolu pro r-té období, což lze zapsat:

$$\max_{\mathbf{x}}\{w^r D(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x} : \mathbf{x}_0 = F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \geq 0_N\} =$$

$$= w^r D(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r - \mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x}^r, r = 1, 2, ..., T, \tag{9.5}$$

kde $p_0^r \equiv w^r D(\mathbf{x}_0^r) > 0$ je pozorovaná prodejní cena výstupu během r-tého období, $w^r D(\mathbf{x}_0)$ je inverzní poptávková funkce pro období r, $p \gg 0_N$ je vektor cen vstupů pro období r. Pokud je funkce F spojitá a konkávní (tak, že množina produkčních možností $\{(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) : \mathbf{x}_0 \leq F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \geq 0_N\}$ je uzavřená a konvexní) a když inverzní poptávková funkce D je diferencovatelná v $\mathbf{x}_0^r$ pro $r = 1, 2, ..., T$, pak je cílová funkce r-tého maximalizačního problému v (9.5) může být linearizován v okolí $(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{x}^r)$ a tato linearizovaná cílová funkce bude tečná k povrchu produkce $\mathbf{x}_0 = F(\mathbf{x})$ v $(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{x}^r)$. Tudíž:

$$\max_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}}\{\tilde{p}_0^r\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x} : \mathbf{x}_0 = F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \geq 0_N\} \equiv \Pi(\tilde{p}_0^r, \mathbf{p}^r) =$$

$$= \tilde{p}_0^r\mathbf{x}_0^r - \mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x}^r, r = 1, \ldots, T, \tag{9.6}$$

kde $\tilde{p}_0^r \equiv w^r D(\mathbf{x}_0^r) + w^r D'(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r = p_0^r + w^r D'(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r > 0$ je *stínová* neboli *mezní* cena výstupu r-tého období ($\tilde{p}_0^r < p_0^r$ jestliže $w^r > 0$ a $D'(\mathbf{x}_0^r) < 0$ a Π je "pravdivá" funkce firemního zisku, která je duální k produkční funkci F (vzpomeňme Π^* definovanou v prvním přístupu, která je duální ke konvexnímu obalu $D[F(\mathbf{x})]F(\mathbf{x}) \equiv F^*(\mathbf{x})$). Takže problém maximalizace pravdivé nelineární funkce monopolistického zisku (9.6), který má obvyklou strukturu jakmile mezní ceny výstupu $\tilde{p}_0^r$ byly vypočteny tak, aby mohly být použity obvyklé ekonometrické techniky [vzpomeňme vztah (10.5) v Kapitole 10].

Porovnáním třetího přístupu s prvním zjistíme, že třetí přístup vyžaduje extra předpoklad o konkávnosti produkční funkce (konvexní technologie) a dodatečné informace, jako například znalost sklonu poptávkové funkce, kterou monopolista využívá, se požaduje pro každé období.

Lehce se nahlédne, že tento přístup lze zobecnit na firmu vyrábějící víc výrobků, která současně využívá trh se vstupy i výstupy: všechno co potřebujeme je předpoklad konvexnosti technologií a (lokální) znalosti poptávkových a nabídkových funkcí, které firma využívá, aby mohly být spočítány příslušné stínové ceny.

Výše uvedené techniky mohou nýt zřejmě použity v situacích, kdy se firma nechová monopolisticky ani monopsonisticky ve smyslu využívání trhů, ale je vystavena cenám jejích vstupů a výstupů, které závisí na pořízeném nebo prodaném množství, zahrnujíce náklady na transakce a množstevní slevy.

9.4 Čtvrtý přístup: Problém monopolu ještě jednou

Předpokládejme nyní, že produkční funkce splňuje, jako obyčejně, "Podmínky I" a nechť $\mathbf{x}_0^r > 0, \mathbf{x}^r > 0_N$ je řešení maximalizační úlohy monopolistického zisku pro období r (9.5), které lze přepsat jako

$$\max_{\mathbf{x}_0}\{w^r D(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0 - C(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}^r) : \mathbf{x}_0 \geq 0\} = w^r D(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r - \mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x}^r,\ r = 1, \ldots, T, \tag{9.7}$$

kde C značí nákladovou funkci duální k F. Pokud je inverzní poptávková funkce D diferencovatelná v $\mathbf{x}_0^r > 0$ a $\partial C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r)/\partial \mathbf{x}_0$ existují, pak podmínky prvního řádu pro r-tý maximalizační problém v (9.7 dávají podmínku $w^r D(\mathbf{x}_0^r) + w^r D'(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r - \partial C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r)/\partial \mathbf{x}_0 = 0$ nebo, s použitím pozorované prodejní ceny výstupu v r-tém období $p_0^r \equiv w^r D(\mathbf{x}_0^r)$,

$$p_0^r = -w^r D'(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r + \frac{\partial C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r)}{\partial \mathbf{x}_0}, r = 1, \ldots, T. \tag{9.8}$$

Jestliže je nákladová funkce C diferencovatelná v cenách vstupů v bodě $(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r)$ pro každé období r, pak dává Shephardovo lemma dodatečné rovnice

$$\mathbf{x}^r = \nabla_p C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r), r = 1, \ldots, T. \tag{9.9}$$

Předpokládejme, že část inverzní poptávkové funkce, která záleží na $\mathbf{x}_0$, lze $D(\mathbf{x}_0)$ adekvátně aproximovat v relevantním okolí $\mathbf{x}_0$ následující funkcí:

$$D(\mathbf{x}_0) = \alpha - \beta ln\mathbf{x}_0, \tag{9.10}$$

kde $\alpha > 0, \beta \geq 0$ jsou konstanty. Substituce (9.10) do (9.8) dává rovnice

$$p_0^r = w^r \beta + \frac{\partial C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r)}{\partial \mathbf{x}_0}, r = 1, \ldots, T. \tag{9.11}$$

Při daných pozorovaných rozhodováních dané firmy o cenách a množstvích $p_0^r, \mathbf{p}^r, \mathbf{x}_0^r, \mathbf{x}$ a při informaci o w (většinou lze předpokládat, že $w \equiv 1$) může být systém rovnic (9.9) a (9.11) naráz ekonometricky odhadnut jakmile známe diferenciální funkcionální tvar nákladové funkce $C(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$. Pokud je $\beta = 0$ v (9.11), pak se producent chová tržně, prodává-li výstup za cenu p rovnou mezním nákladům, $\partial C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r)/\partial \mathbf{x}_0$. Rovnice (9.11) je zároveň konzistentní s chováním producenta jako monopolisty, který tvoří cenu "naivní přirážkou", neboli "naivní markup", (záleží na hodnotě w). Máme tak základ pro statistické testování tržní struktury: (i) když $\beta = 0$, pak je chování producenta v souladu s tržní situací známou jako "price taking"; (ii) kdyŘ je $\beta > 0$ a $\beta w^r / p_0^r < 1$ pro všecna $r = 1, 2, ..., T$, pak dostáváme chování klasického monopolisty; (iii) pokud je $\beta > 0$, ale $\beta w^r / p_0^r \geq 1$ pro nějaké r, potom máme chování "markup" monopolisty; (iv) když $\beta < 0$, pak nebude chování firmy v souladu s žádným ze tří popsaných způsobů.

Tento přístup nabízí oproti předchozím přístupům několik výhod: (i) můžeme nyní statisticky testovat soutěžní chování; (ii) požadavky na informace jsou nízké - nepotřebujeme e**x**ogenní informaci o poptávkové elasticitě; (iii) nemusíme předpokládat, že produkční funkce F je je konkávní, takže model je konsistentní s rostoucími výnosy z rozsahu produkce; a nakonec (iv) postup je velmi jednoduchý - jen vložíme podmínku βw^r do rovnice soutěže, cena se rovná mezním nákladům.

9.5 Historické poznámky

Základ prvního přístupu je v Lau (1974a, str. 193-4; 1978), ale své kořeny má už v Hotelling (1932, str. 609). Druhý přístup je v Diewert (1971b), ale kořeny jsou v práci Fisch (1936, str. 14). Třetí přístup (izomorfní ke druhému přístupu) je popsán v Diewert (1974a, str. 155). Čtvrtý přístup je od Appelbaum (1975), který požaduje trochu jiné předpoklady pro funkcionální tvar inverzní popávkové funkce. Appelbaum(1975, 1979) také naznačuje, jak by bylo možné jeho přístup rozšířit na několik monopolistických nabídkových výstupů nebo monopsonistických poptávkových vstupů a ukazuje příklad empirického testování založeného na datech o amerického odvětví zpracovávající naftu a zemní plyn. Další empirický příklad této techniky je založen na obchodu mezi USA a Kanadou v Appelbaum(1979). Čtvrtý přístup byl použit v Schworm (1980) v kontextu investiční teorie, kde se ceny investičního zboží odvíjí od nakupovaného množství.

10 Závěr

Věnovali jsme velkou pozornost duálnímu přístupu k mikroekonomické teorii v Sekcích 2-6 této kapitoly. V Sekcích 7 a 8 jsme ukázali, jak může být teorie duality využito k odvození obvyklých porovnávacích statistických tvrzení pro teorii výrobců a spotřebitelů.

Bohužel, počet děl, využívajících teorii duality je tak veliký, že nejsme schopni je všechny uvést.

Literatura

[1] R.G.D. Allen : *Mathematical economics.* Macmillan, London 1963.

[2] K.J. Arrow: *Social choice and individual values.* Wiley, New York 1951, 2nd edition 1963.

[3] K.J. Arrow, M.D. Intriligator: *Handbook of mathematical economics.* Elsevier Science, Amsterdam 1994.

[4] C. Berge: *Topological spaces*, Macmillan, New York 1963.

[5] L. Bican : *Lineární algebra.* SNTL, Praha 1979.

[6] Cellina, A.: *A Theorem on the Approximation of Compact Multi-valued Mappings.* Rendiconti Academia Nazionale Lincei, (8) 47 (1969), 429–433

[7] G. Debreu: *Theory of value*, An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. John Wiley & Sons, Inc.,New York, 1959.

[8] G. Debreu: *Smooth preferences*, Econometrica, 38:387-616, 1972.

[9] Debreu, G.: *Ekonomická teorie v matematické formulaci* (přednáška při příležitosti udělení Nobelovy ceny), Nobelova cena za ekonomii, Academia, Praha, 1993

[10] W.E. Diewert: *Duality theory in economics*, North Holland, Amsterdam 1982.

[11] J. Dupačová, J. Plesník, M Vlach: *Lineárne programovanie.* ALFA, Bratislava 1990.

[12] W. Fenchel: *Convex cones, sets and functions*, Lecture Notes, Department of mathematics, Princeton University, Princeton 1953.

[13] J. Green, W.P. Heller: *Mathematical analysis and convexity with application to economics* in Handbook of mathematical economics, editors K.J. Arrow, M.D. Intriligator, Elsevier Science, Amsterdam 1994, p. 15-53.

[14] J.R. Hicks: *Value and capital*, Oxford University Press, New York 1946.

[15] H. Hotelling: *Demand functions with limited budgets*, Econometrica, 3, 1925, p. 66-78.

[16] S. Karlin: *Mathematical methods and theory in games, programming and economics, vol. I*, Addison-Wesley, Palo Alto, California 1959.

[17] I. Kolář: *Úvod do Thomovy teorie katastrof*, Academia, Praha 1988.

[18] H. Minkowski: *Theorie der konvexen Körper*, Gesammelte Abhandlungen II, B.G. Teubner, Leipzig und Berlin 1911.

[19] H. Nikaido: *Convex structures and economic theory*, Academic Press, New York 1968.

[20] J. Novotný: *Existence rovnovážného stavu v ekonomice s produkcí*, Brno, 2002.

[21] A. Pultr: *Podprostory euklidovských prostorů*, SNTL, Praha 1986.

[22] R.T. Rockafellar: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1970.

[23] P.A. Samuelson: *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge 1963.

[24] R.W. Shephard: *Cost and production functions*, Princeton University Press, Princeton 1953.

[25] R.W. Shephard: *Theory of cost and production functions*, Princeton University Press, Princeton 1970.

[26] R. Sikorski: *Diferenciální a integrální počet funkce více proměnných*, Academia, Praha 1973.

[27] S. Smale: *Global Analysis and Economics*, Handbook of Mathematical Economics. 8.kap. Elsevier Science, Amsterdam, 1994, 331–369.

[28] J. Soukupová a kol.: *Mikroekonomie.* 2.vyd. Management Press, Praha, 1999.

[29] J. von Neumann: *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes*, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, 8:73-83, 1937.

[30] M.S. Vošvrda: *Teoretická ekonomie*, Univerzita Karlova, Praha 1994.

[31] J. Žalská: *Teorie všeobecné rovnováhy*, vybrané problémy, Brno, 2000.

Index