

## Hodnocení kontingenčních tabulek

### Motivace

Při zpracování dat se velmi často setkáváme s veličinami nominálního typu, např.:

**rodinný stav ženicha a nevěsty** – svobodný/á, rozvedený/á, vdovec/vdova,

**barva očí** – modrá, hnědá, zelená, šedá,

**barva vlasů** – černá, hnědá, blond, rezavá,

**krevní skupina** – A, B, AB, 0,

atd.

Máme-li k dispozici  $n$  objektů, na nichž zjišťujeme hodnoty dvou nominálních veličin  $X$  a  $Y$ , můžeme testovat některé hypotézy. Nejdůležitější jsou:

hypotéza o nezávislosti

hypotéza o homogenitě (o shodnosti struktury)

hypotéza o symetrii

**Hypotéza o nezávislosti:** nulová hypotéza tvrdí, že znaky X a Y jsou nezávislé.

Např. nás zajímá, zda barva očí a barva vlasů jsou ve sledované populaci jedinců nezávislé.

Intenzitu případné závislosti měří různé koeficienty, které nabývají hodnot od 0 do 1. Čím je takový koeficient bližší 1, tím je závislost mezi danými dvěma veličinami silnější a čím je bližší 0, tím je slabší.

**Hypotéza o homogenitě (o shodnosti struktury):** nulová hypotéza tvrdí, že rozložení pravděpodobností náhodné veličiny Y je stejné za různých podmínek, které vyjadřují varianty náhodné veličiny X.

Např. nás může zajímat, zda věková struktura hospitalizovaných pacientů – veličina Y, nabývá variant: do 25 let, 26-45 let, 46-65 let, 66 let a více, je stejná ve dvou nemocnicích – veličina X, nabývá variant 1 a 2.

**Hypotéza o symetrii:** nulová hypotéza tvrdí, že pokus neovlivní pravděpodobnost výskytu sledovaného znaku. Tato hypotéza se používá v situacích, kdy na n objektech sledujeme pravděpodobnost výskytu nějakého znaku před pokusem a po pokusu (obdobu párového t-testu).

Např. nás zajímá, zda požití alkoholu ovlivní schopnost řidiče úspěšně projet náročnou uzavřenou trať. V tomto případě veličina X nabývá variant 1 – projel trať bez chyb, 2 – projel trať s chybami a veličina Y nabývá variant 1 – před požitím alkoholu, 2 – po požití alkoholu.

## Kontingenční tabulky

Nechť  $X, Y$  jsou dvě nominální náhodné veličiny (tj. obsahová interpretace je možná jenom u relace rovnosti). Nechť  $X$  nabývá variant  $x_{[1]}, \dots, x_{[r]}$  a  $Y$  nabývá variant  $y_{[1]}, \dots, y_{[s]}$ .

Označme:

$$\pi_{jk} = P(X = x_{[j]} \wedge Y = y_{[k]}) \dots \text{simultánní pravděpodobnost dvojice variant } (x_{[j]}, y_{[k]})$$

$$\pi_{j.} = P(X = x_{[j]}) \dots \text{marginální pravděpodobnost varianty } x_{[j]}$$

$$\pi_{.k} = P(Y = y_{[k]}) \dots \text{marginální pravděpodobnost varianty } y_{[k]}$$

Simultánní a marginální pravděpodobnosti zapíšeme do kontingenční tabulky:

	$y$	$y_{[1]}$	$\dots$	$y_{[s]}$	$\pi_{j.}$
$x$	$\pi_{jk}$				
$x_{[1]}$		$\pi_{11}$	$\dots$	$\pi_{1s}$	$\pi_{1.}$
$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_{[r]}$		$\pi_{r1}$	$\dots$	$\pi_{rs}$	$\pi_{r.}$
$\pi_{.k}$		$\pi_{.1}$	$\dots$	$\pi_{.s}$	1

Pořídíme dvourozměrný náhodný výběr  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  rozsahu  $n$  z rozložení, kterým se řídí dvourozměrný diskretní náhodný vektor  $(X, Y)$ . Zjištěné absolutní simultánní četnosti  $n_{jk}$  dvojice variant  $(x_{[j]}, y_{[k]})$  uspořádáme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]}$	...	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
x	$n_{jk}$				
$X_{[1]}$		$n_{11}$	...	$n_{1s}$	$n_{1.}$
...		...	...	...	...
$X_{[r]}$		$n_{r1}$	...	$n_{rs}$	$n_{r.}$
$n_{.k}$		$n_{.1}$	...	$n_{.s}$	$n$

$n_{j.} = n_{j1} + \dots + n_{js}$  je marginální absolutní četnost varianty  $x_{[j]}$

$n_{.k} = n_{1k} + \dots + n_{rk}$  je marginální absolutní četnost varianty  $y_{[k]}$

Simultánní pravděpodobnost  $\pi_{jk}$  odhadneme pomocí simultánní relativní četnosti  $p_{jk} = \frac{n_{jk}}{n}$ , marginální pravděpodobnosti  $\pi_{j.}$

a  $\pi_{.k}$  odhadneme pomocí marginálních relativních četností  $p_{j.} = \frac{n_{j.}}{n}$  a  $p_{.k} = \frac{n_{.k}}{n}$ .

## Testování hypotézy o nezávislosti

Testujeme nulovou hypotézu  $H_0$ : X, Y jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny proti alternativě  $H_1$ : X, Y nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny.

Kdyby náhodné veličiny X, Y byly stochasticky nezávislé, pak by platil multiplikační vztah

$\forall j = 1, \dots, r, \forall k = 1, \dots, s: \pi_{jk} = \pi_{j.} \cdot \pi_{.k}$  neboli  $\frac{n_{jk}}{n} = \frac{n_{j.}}{n} \cdot \frac{n_{.k}}{n}$ , tj.  $n_{jk} = \frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n}$ . Číslo  $m_{jk} = \frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n}$  se nazývá **teoretická četnost**

dvojice variant  $(x_{[j]}, y_{[k]})$ .

$$\text{Testová statistika: } K = \frac{\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s \left( n_{jk} - \frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n} \right)^2}{\frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n}}$$

Platí-li  $H_0$ , pak K se asymptoticky řídí rozložením  $\chi^2((r-1)(s-1))$ .

Kritický obor:  $w = \left[ \chi^2_{1-\alpha}, \infty \right)$ .

Hypotézu o nezávislosti veličin X, Y tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$ , když  $K \geq \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1))$ .

## Podmínky dobré aproximace

Rozložení statistiky K lze aproximovat rozložením  $\chi^2((r-1)(s-1))$ , pokud teoretické četnosti  $\frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n}$  aspoň v 80% případů nabývají hodnoty větší nebo rovné 5 a ve zbylých 20% neklesnou pod 2. Nemí-li splněna podmínka dobré aproximace, doporučuje se slučování některých variant.

## Měření síly závislosti

**Cramérův koeficient:**  $v = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}}$ , kde  $m = \min\{r,s\}$ . Tento koeficient nabývá hodnot mezi 0 a 1. Čím blíže je k 1, tím je

závislost mezi X a Y těsnější, čím blíže je k 0, tím je tato závislost volnější.

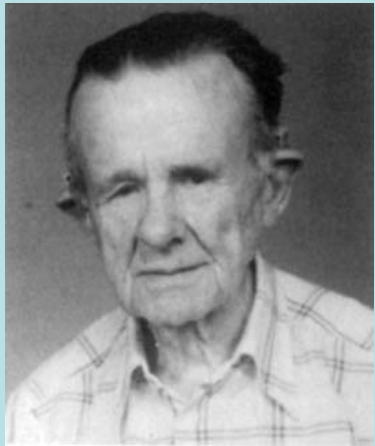
Význam hodnot Cramérova koeficientu:

mezi 0 až 0,1 ... zanedbatelná závislost,

mezi 0,1 až 0,3 ... slabá závislost,

mezi 0,3 až 0,7 ... střední závislost,

mezi 0,7 až 1 ... silná závislost.



Carl Harald Cramér (1893 – 1985): Švédský matematik

## Příklad

V sociologickém průzkumu byl z uchazečů o studium na vysokých školách pořízen náhodný výběr rozsahu 360. Mimo jiné se zjišťovala sociální skupina, ze které uchazeč pochází (veličina X) a typ školy, na kterou se hlásí (veličina Y). Výsledky jsou zaznamenány v kontingenční tabulce:

Sociální skupina	Typ školy			$n_j$
	univerzitní	technický	ekonomický	
I	50	30	10	90
II	30	50	20	100
III	10	20	30	60
IV	50	10	50	110
$n_k$	140	110	110	360

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny. Vypočtěte Cramérovův koeficient.

## Řešení:

Nejprve vypočteme všech 12 teoretických četností:

Sociální skupina	Typ školy			$n_{j.}$
	univerzitní	technický	ekonomický	
I	50	30	10	90
II	30	50	20	100
III	10	20	30	60
IV	50	10	50	110
$n_{.k}$	140	110	110	360

$$\begin{aligned} \frac{n_{1.} \cdot n_{.1}}{n} &= \frac{90 \cdot 140}{360} = 35, & \frac{n_{1.} \cdot n_{.2}}{n} &= \frac{90 \cdot 110}{360} = 27,5, & \frac{n_{1.} \cdot n_{.3}}{n} &= \frac{90 \cdot 110}{360} = 27,5, \\ \frac{n_{2.} \cdot n_{.1}}{n} &= \frac{100 \cdot 140}{360} = 38,9, & \frac{n_{2.} \cdot n_{.2}}{n} &= \frac{100 \cdot 110}{360} = 30,6, & \frac{n_{2.} \cdot n_{.3}}{n} &= \frac{100 \cdot 110}{360} = 30,6, \\ \frac{n_{3.} \cdot n_{.1}}{n} &= \frac{60 \cdot 140}{360} = 23,3, & \frac{n_{3.} \cdot n_{.2}}{n} &= \frac{60 \cdot 110}{360} = 18,3, & \frac{n_{3.} \cdot n_{.3}}{n} &= \frac{60 \cdot 110}{360} = 18,3, \\ \frac{n_{4.} \cdot n_{.1}}{n} &= \frac{110 \cdot 140}{360} = 42,8, & \frac{n_{4.} \cdot n_{.2}}{n} &= \frac{110 \cdot 110}{360} = 33,6, & \frac{n_{4.} \cdot n_{.3}}{n} &= \frac{110 \cdot 110}{360} = 33,6 \end{aligned}$$

Vidíme, že podmínky dobré aproximace jsou splněny, všechny teoretické četnosti převyšují číslo 5.

Dosadíme do vzorce pro testovou statistiku K:

$$K = \frac{(90 - 35)^2}{35} + \frac{(90 - 27,5)^2}{27,5} + \dots + \frac{(90 - 33,6)^2}{33,6} = 76,84 .$$

Dále stanovíme kritický obor:

$$W = \left( \chi^2_{1-\alpha} \cdot (k-1) \cdot (s-1) \right)_{\infty} = \left( \chi^2_{0,95} \cdot (4-1) \cdot (3-1) \right)_{\infty} = \left( \chi^2_{0,95} \cdot 6 \right)_{\infty} = (12,6, \infty)$$

Protože  $K \notin W$ , hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Vypočteme Cramérův koeficient:  $v = \sqrt{\frac{76,4}{360 \cdot 2}} = 0,3267 .$

Hodnota Cramérova koeficientu svědčí o tom, že mezi veličinami X a Y existuje středně silná závislost.



## Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o třech proměnných (X - sociální skupina, Y – typ školy, četnost) a 12 případech:

	1 X	2 Y	3 četnost
1	I	univerzitní	50
2	I	technický	30
3	I	ekonomický	10
4	II	univerzitní	30
5	II	technický	50
6	II	ekonomický	20
7	III	univerzitní	10
8	III	technický	20
9	III	ekonomický	30
10	IV	univerzitní	50
11	IV	technický	10
12	IV	ekonomický	50

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Očekávané četnosti. Dostaneme kontingenční tabulku teoretických četností:

Souhrnná tab.: Očekávané četnosti (ty p školy)				
Četnost označených buněk > 10				
Pearsonův chí-kv. : 76,8359, sv=6, p=,000000				
X	Y univerzitní	Y technický	Y ekonomický	Řádk. součty
I	35,0000	27,5000	27,5000	90,0000
II	38,8889	30,5556	30,5556	100,0000
III	23,3333	18,3333	18,3333	60,0000
IV	42,7778	33,6111	33,6111	110,0000
Vš. skup.	140,0000	110,0000	110,0000	360,0000

Všechny teoretické četnosti jsou větší než 5, podmínky dobré aproximace jsou splněny. V záhlaví tabulky je uvedena hodnota testové statistiky  $K = 76,8359$ , počet stupňů volnosti 6 a odpovídající p-hodnota. Je velmi blízká 0, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny.

Hodnotu testové statistiky a Cramérův koeficient dostaneme také tak, že na záložce Možnosti zaškrtneme Pearsonův & M-V chí kvadrát a Cramérovo V, na záložce Detailní výsledky vybereme Detailní 2 rozm. tabulky.

Statist.	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	76,83589	df=6	p=,00000
M-V chí-kvadr.	84,53528	df=6	p=,00000
Fí	,4619881		
Kontingenční koeficient	,4193947		
Cramér. V	,3266749		

## Testování hypotézy o homogenitě (o shodnosti struktury)

Na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$  testujeme hypotézu

$H_0: \pi_{1k} = \pi_{2k} = \dots = \pi_{rk}, k = 1, 2, \dots, s$  proti alternativě  $H_1$ : aspoň jedna dvojice pravděpodobností se liší.

Nulová hypotéza tvrdí, že rozložení pravděpodobností náhodné veličiny  $Y$  je stejné za různých podmínek, které vyjadřují varianty náhodné veličiny  $X$ .

Testová statistika i kritický obor jsou stejné jako při testování hypotézy o nezávislosti.

**Příklad:** V severozápadním Skotsku byla provedena studie, která měla prokázat, zda je procentuální zastoupení krevních skupin na celém území homogenní či nikoliv. V oblasti Eskdale bylo náhodně vybráno 100 osob, v oblasti Annandale 125 osob a v oblasti Nithsdale 253 osob. Výsledky jsou uvedeny v tabulce:

oblast	Krevní skupina				$n_{j.}$
	A	B	0	AB	
Eskdale	33	6	56	5	100
Annandale	54	14	52	5	125
Nithsdale	98	35	115	5	253
$n_{.k}$	185	55	223	15	478

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 proveďte test homogenity.

## Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o třech proměnných (X - oblast, Y – krevní skupina, četnost) a 12 případech:

	1	2	3
	X	Y	četnost
1	Eskdale	A	33
2	Eskdale	B	6
3	Eskdale	O	56
4	Eskdale	AB	5
5	Annandale	A	54
6	Annandale	B	14
7	Annandale	O	52
8	Annandale	AB	5
9	Nithsdale	A	98
10	Nithsdale	B	35
11	Nithsdale	O	115
12	Nithsdale	AB	5

Nejprve vytvoříme kontingenční tabulku řádkově podmíněných relativních četností, abychom získali představu o procentuálním zastoupení krevních skupin ve sledovaných třech oblastech:

Kontingenční tabulka (krevní skupiny)						
Četnost označených buněk > 10						
(Marginální součty nejsou označeny)						
	X	Y A	Y B	Y O	Y AB	Řádk. součty
Četnost	Eskdale	33	6	56	5	100
Řádk. četn.		33,00%	6,00%	56,00%	5,00%	
Četnost	Annandale	54	14	52	5	125
Řádk. četn.		43,20%	11,20%	41,60%	4,00%	
Četnost	Nithsdale	98	35	115	5	253
Řádk. četn.		38,74%	13,83%	45,45%	1,98%	
Četnost	Vš. skup.	185	55	223	15	478

Ověříme podmínky dobré aproximace:

Souhrnná tab.: Očekávané četnosti (krevní skupiny)					
Četnost označených buněk > 10					
Pearsonův chí-kv. : 10,4537, sv=6, p=,106812					
X	Y A	Y B	Y O	Y AB	Řádk. součty
Eskdale	38,7029	11,50628	46,6527	3,13808	100,0000
Annandale	48,3787	14,38285	58,3159	3,92259	125,0000
Nithsdale	97,9184	29,11088	118,0314	7,93933	253,0000
Vš.skup.	185,0000	55,00000	223,0000	15,00000	478,0000

Podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Testová statistika nabývá hodnoty 10,45372, p-hodnota je 0,10681, což znamená, že na asymptotické hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu, že procentuální zastoupení krevních skupin ve sledovaných třech oblastech Skotska je shodné.

## Testování hypotézy o symetrii

Má-li kontingenční tabulka stejný počet řádků jako sloupců (tj.  $r = s$ ), nazývá se **čtvercová**. Pokud veličiny  $X$  a  $Y$  mají stejné varianty, můžeme testovat hypotézu symetrie  $H_0: \pi_{jk} = \pi_{kj}$  pro všechny dvojice  $(j,k)$ .

Testová statistika:  $K = \sum_{j=1}^r \sum_{k=j+1}^{r-1} \frac{(n_{jk} - n_{kj})^2}{n_{jk} + n_{kj}}$ . Platí-li  $H_0$ , pak  $K$  se asymptoticky řídí rozložením  $\chi^2(r(r-1)/2)$ .

Kritický obor:  $w = \langle \chi^2_{1-\alpha; r(r-1)/2}, \infty \rangle$ .

$H_0$  zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$ , když  $K \in w$ .

**Příklad:** Na souboru 45 náhodně vybraných žáků byla zjišťována obtížnost dvou úloh. Každý žák řešil obě úlohy v náhodném pořadí (polovina žáků v jednom pořadí, polovina v opačném). Výsledky řešení byly klasifikovány do tří kategorií:

Řešení 1. úlohy	Řešení 2. úlohy			$n_{j.}$
	správně	částečně správně	chybně	
správně	8	5	1	14
částečně správně	2	15	1	18
chybně	4	3	6	13
$n_{.k}$	14	23	8	45

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že obě úlohy jsou stejně obtížné.

### Řešení:

Vypočítáme realizaci testové statistiky:

$$K = \frac{(5-2)^2}{5+2} + \frac{(4-1)^2}{1+4} + \frac{(3-1)^2}{1+3} = 4,0857$$

Stanovíme kritický obor:  $w = \langle \chi^2_{1-\alpha; r(r-1)/2}, \infty \rangle = \langle \chi^2_{1-0,05; 3}, \infty \rangle = \langle 7,815, \infty \rangle$ .

Testová statistika se nerealizuje v kritickém oboru, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu, že obě úlohy jsou stejně obtížné.

## Čtyřpolní tabulky

Nechť  $r = s = 2$ . Pak hovoříme o **čtyřpolní kontingenční tabulce** a používáme označení:  $n_{11} = a$ ,  $n_{12} = b$ ,  $n_{21} = c$ ,  $n_{22} = d$ .

X	Y		$n_{j.}$
	$y_{[1]}$	$y_{[2]}$	
$x_{[1]}$	a	b	a+b
$x_{[2]}$	c	d	c+d
$n_{.k}$	a+c	b+d	n

## Test nezávislosti ve čtyřpolní tabulce

Testovou statistiku pro čtyřpolní kontingenční tabulku lze zjednodušit do tvaru:

$$K = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

Platí-li hypotéza o nezávislosti veličin X, Y, pak K se asymptoticky řídí rozložením  $\chi^2(1)$ .

Kritický obor:  $w = \left( \chi^2_{1-\alpha}, \infty \right)$

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$ , když  $K \in W$ .

Povšimněte si, že za platnosti hypotézy o nezávislosti  $ad = bc$ .

Pro čtyřpolní tabulku navrhl R. A. Fisher přesný (exaktní) test nezávislosti známý jako **Fisherův faktoriálový test**.



Sir Ronald Aylmer Fisher (1890 – 1962): Britský statistik a genetik.

(Fisherův přesný test je popsán např. v knize K. Zvára: Biostatistika, Karolinum, Praha 1998. Princip spočívá v tom, že pomocí kombinatorických úvah se vypočítají pravděpodobnosti toho, že při daných marginálních četnostech dostaneme tabulky, které se od nulové hypotézy odchyľují aspoň tak, jako daná tabulka.)

**Upozornění:** STATISTICA poskytuje p-hodnotu pro Fisherův přesný test. Jestliže vyjde  $p \leq \alpha$ , pak hypotézu o nezávislosti zamítáme na hladině významnosti  $\alpha$ .



**Příklad:** V náhodném výběru 50 obézních dětí ve věku 6 – 14 let byla zjišťována obezita rodičů. Veličina X – obezita matky, veličina Y – obezita otce. Výsledky průzkumu jsou uvedeny v kontingenční tabulce:

X	Y		$n_{j.}$
	ano	ne	
ano	15	9	24
ne	7	19	26
$n_{.k}$	22	28	50

Pomocí Fisherova exaktního testu ověřte, zda lze na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu o nezávislosti náhodných veličin X a Y.

## Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o třech proměnných X, Y (varianty 0 – neobézní, 1 – obézní) a četnost a čtyřech případech:

	1 X	2 Y	3 četnost
1	obézní	obézní	15
2	obézní	neobézní	9
3	neobézní	obézní	7
4	neobézní	neobézní	19

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Fisher exakt., Yates, McNemar (2x2). Dostaneme výstupní tabulku:

Statist.	Statist. : X(2) x Y(2) (obezita rodicu)		
	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	6,410777	df=1	p=,01134
M-V chí-kvadr.	6,548348	df=1	p=,01050
Yatesův chí-kv.	5,048207	df=1	p=,02465
Fisherův přesný, 1-str.			p=,01188
2-stranný			p=,02163
McNemarův chí-kv. (A/D)	,2647059	df=1	p=,60691
(B/C)	,0625000	df=1	p=,80259

Vidíme, že p-hodnota pro Fisherův exaktní oboustranný test je 0,02163, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že obezita matky a otce spolu nesouvisí.

## Test homogenity ve čtyřpolní tabulce

Na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$  testujeme hypotézu  $H_0: \pi_{1k} = \pi_{2k}, k = 1, 2$  proti alternativě  $H_1$ : aspoň jedna dvojice pravděpodobností se liší.

Testová statistika  $K = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$  je stejná jako u testu nezávislosti. Tato statistika se v případě platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením  $\chi^2(1)$ .

Kritický obor:  $w = \{\chi^2_{1-\alpha}, \infty\}$ . Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$ , když  $K \in W$ .

**Příklad:** Očkování proti chřipce se zúčastnilo 460 dospělých, z nichž 240 dostalo očkovací látku proti chřipce a 220 dostalo placebo. Na konci experimentu onemocnělo 100 lidí chřipkou. 20 z nich bylo z očkované skupiny a 80 z kontrolní skupiny. Na asymptotické hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že výskyt chřipky v očkované a kontrolní skupině je shodný.

**Řešení:**

Údaje uspořádáme do čtyřpolní kontingenční tabulky, kde roli veličiny X hraje onemocnění chřipkou a roli veličiny Y existence očkování.

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování		n <sub>j</sub>
	ano	ne	
ano	20	80	100
ne	220	140	360
n <sub>k</sub>	240	220	460

Vypočteme sloupcově podmíněné relativní četnosti:

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování	
	ano	ne
ano	8,3%	36,4%
ne	91,7%	63,6%

Vidíme, že v očkované skupině onemocnělo chřipkou 8,3% lidí, v kontrolní skupině však 36,4%. Zjistíme, zda takto velký rozdíl je způsoben pouze náhodnými vlivy.

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace, tedy nejprve vypočteme teoretické četnosti:

$$\frac{n_{1,n_1}}{n} = \frac{100 \cdot 240}{460} = 52,17, \quad \frac{n_{1,n_2}}{n} = \frac{100 \cdot 220}{460} = 47,83, \quad \frac{n_{2,n_1}}{n} = \frac{360 \cdot 240}{460} = 87,83, \quad \frac{n_{2,n_2}}{n} = \frac{360 \cdot 220}{460} = 172,17$$

Všechny teoretické četnosti jsou větší než 5, podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Realizace testové statistiky:

$$K = \frac{n \sum \frac{(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}{240 \cdot 220 \cdot 100 \cdot 360} = 53,01, \quad \text{Kritický obor: } W = \langle \chi^2_{1-\alpha}, \infty \rangle = \langle \chi^2_{0,99}, \infty \rangle = \langle 6,635, \infty \rangle$$

Protože  $K \in W$ ,  $H_0$  zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,01. S rizikem omylu nejvýše 0,01 jsme tedy prokázali, že výskyt chřipky v očkované a kontrolní skupině se liší.

## Test symetrie ve čtyřpolní tabulce (McNemarův test)

Jde o obdobu párového testu pro ordinální, intervalové či poměrové proměnné. Na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$  testujeme nulovou hypotézu

$H_0: \pi_{12} = \pi_{21}$  proti alternativě  $H_1: \pi_{12} \neq \pi_{21}$ . (Jedná se o shodu pravděpodobností v políčkách na vedlejší diagonále.)

Například sledujeme, zda určité ošetření ovlivňuje pravděpodobnost výskytu jistého znaku na objektech základního souboru.

Testová statistika  $K = \frac{(b - c)^2}{b + c}$  se v případě platnosti  $H_0$  asymptoticky řídí rozložením  $\chi^2(1)$ .

Kritický obor:  $W = \{\chi^2_{1-\alpha/2}, \infty\}$ .

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$ , když  $K \in W$ .

Podmínky dobré aproximace:  $b + c > 8$ .

**Příklad:** Máme zjistit, zda požití alkoholu ovlivňuje schopnost řidičů správně projet určitou trasu. Bylo náhodně vybráno 100 řidičů, kteří měli za úkol projet uvedenou trasu. Po požití alkoholu dostali stejný úkol. Výsledky experimentu máme v tabulce:

Před požitím alkoholu	Po požití alkoholu		n <sub>j</sub>
	bezchybně	s chybami	
bezchybně	45	35	80
s chybami	15	5	20
n <sub>k</sub>	60	40	100

Test proved'te na asymptotické hladině významnosti 0,05.

### Řešení:

Před požitím alkoholu správně projelo trať 60 řidičů, po požití pouze 40. Ověříme, zda rozdíl mezi těmito počty řidičů je způsoben pouze náhodnými vlivy.

Vidíme, že podmínky dobré aproximace jsou splněny,  $b + c = 50 > 8$ .

Vypočteme testovou statistiku:  $K = \frac{(b - \frac{a \cdot c}{b + c})^2}{b + c} = \frac{(5 - \frac{5 \cdot 5}{35 + 5})^2}{35 + 5} = 3$ . Kritický obor:  $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}, \infty \rangle = \langle \chi^2_{0,95}, \infty \rangle = \langle 3,841, \infty \rangle$ . Protože

$K \in W$ ,  $H_0$  zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 0,05 jsme tedy prokázali, že požití alkoholu ovlivňuje schopnost řidiče správně projet určitou trasu.

## Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o třech proměnných X (1 – před požitím alkoholu, 2 – po požití alkoholu), Y (1 – bezchybně, 2 – s chybami) a četnost a čtyřech případech:

	1 X	2 Y	3 četnost
1	před požitím alkoholu	bezchybně	45
2	před požitím alkoholu	s chybami	35
3	po požití alkoholu	bezchybně	15
4	po požití alkoholu	s chybami	5

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Fisher exakt., Yates, McNemar (2x2). Dostaneme výstupní tabulku:

Statist.	Statist. : X(2) x Y(2) (ridici.sta)		
	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	2,343750	df=1	p=,12579
M-V chí-kv adr.	2,458654	df=1	p=,11688
Yatesův chí-kv.	1,627604	df=1	p=,20204
Fisherův přesný, 1-str.			p=,09946
2-stranný			p=,20120
McNemarův chí-kv. (A/D)	30,42000	df=1	p=,00000
(B/C)	7,220000	df=1	p=,00721

Zajímá nás poslední řádek označený McNemarův chí-kv. (B/C). Testová statistika nabývá hodnoty 7,22 (systém

STATISTICA používá při výpočtu testové statistiky tzv. opravu na nespojitost:  $K = \frac{(|n_{12} - n_{21}| - 1)^2}{n_{12} + n_{21}}$ ). Odpovídající p-

hodnota je 0,00721, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že požití alkoholu neovlivňuje schopnost řidiče správně projet určitou trasu.

## Podíl šancí ve čtyřpolní kontingenční tabulce

Ve čtyřpolních tabulkách používáme charakteristiku  $OR = \frac{ad}{bc}$ , která se nazývá výběrový **podíl šancí** (odds ratio). Považujeme ho za odhad neznámého teoretického podílu šancí  $op = \frac{\pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{21}\pi_{12}}$ . Můžeme si představit, že pokus se provádí za dvojích různých okolností a může skončit buď úspěchem nebo neúspěchem.

Výsledek pokusu	okolnosti		$n_{j\cdot}$
	I	II	
úspěch	a	b	a+b
neúspěch	c	d	c+d
$n_{\cdot k}$	a+c	b+d	n

Poměr počtu úspěchů k počtu neúspěchů (tzv. šance) za 1. okolností je  $\frac{a}{c}$ , za druhých okolností je  $\frac{b}{d}$ . Podíl šancí je tedy

$$OR = \frac{ad}{bc}.$$

Jsou-li veličiny  $X, Y$  nezávislé, pak  $\pi_{jk} = \pi_{j\cdot}\pi_{\cdot k}$ , tudíž teoretický podíl šancí  $op = 1$ . Závislost veličin  $X, Y$  bude tím silnější, čím více se  $op$  bude lišit od 1. Avšak  $op \in (0, \infty)$ , tedy hodnoty  $op$  jsou kolem 1 rozmístěny nesymetricky. Z tohoto důvodu raději používáme logaritmus teoretického či výběrového podílu šancí.



## Testování nezávislosti ve čtyřpolních tabulkách pomocí podílu šancí

Na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$  testujeme hypotézu  $H_0$ :  $X, Y$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny (tj.  $\ln \varphi = 0$ ) proti alternativě  $H_1$ :  $X, Y$  nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny (tj.  $\ln \varphi \neq 0$ ).

Testová statistika  $T_0 = \frac{\ln OR}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}}$  se asymptoticky řídí rozložením  $N(0,1)$ , když nulová hypotéza platí.

Kritický obor:  $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}] \cup [u_{1-\alpha/2}, \infty)$ .

Nulovou hypotézu tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$ , když se testová statistika realizuje v kritickém oboru  $W$ .

Testování nezávislosti lze provést též pomocí  $100(1-\alpha)\%$  asymptotického intervalu spolehlivosti pro logaritmus podílu šancí  $\varphi$ , který je dán vzorcem:

$$I_{\varphi, h} = \left( \ln OR - \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} u_{1-\alpha/2}, \ln OR + \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} u_{1-\alpha/2} \right)$$

Jestliže interval spolehlivosti neobsahuje 0, pak hypotézu o nezávislosti zamítneme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$ .

### Příklad (testování nezávislosti pomocí podílu šancí a pomocí statistiky K):

U 135 uchazečů o studium na jistou fakultu byl hodnocen dojem, jakým zapůsobili na komisi u ústní přijímací zkoušky. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že přijetí na fakultu nezávisí na dojmu u přijímací zkoušky.

přijetí	dojem		$n_{j.}$
	dobrý	špatný	
ano	17	11	28
ne	39	58	97
$n_{.k}$	56	69	125

### Řešení:

#### a) Testování pomocí podílu šancí:

OR  $= \frac{ad}{bc} = \frac{17 \cdot 58}{11 \cdot 39} = 2,298$ . Podíl šancí nám říká, že uchazeč, který zapůsobil na komisi dobrým dojmem, má asi 2,3 x větší šanci na přijetí než uchazeč, který zapůsobil špatným dojmem.

Provedeme další pomocné výpočty:

$$\ln OR = 0,832,$$

$$\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} = \sqrt{\frac{1}{17} + \frac{1}{11} + \frac{1}{39} + \frac{1}{58}} = 0,439, u_{0,975} = 1,96$$

Dosadíme do vzorců pro meze asymptotického intervalu spolehlivosti pro podíl šancí:

$$\ln d = \ln OR - \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0,832 - 0,439 \cdot 1,96 = -0,028, \ln h = \ln OR + \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0,832 + 0,439 \cdot 1,96 = 1,692$$

Protože interval (-0,028; 1,692) obsahuje číslo 0, na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o nezávislosti dojmu u přijímací zkoušky a přijetí na fakultu.

b) Testování pomocí statistiky K:

přijetí	dojem		n <sub>j</sub>
	dobrý	špatný	
ano	17	11	28
ne	39	58	97
n <sub>k</sub>	56	69	125

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace:

$$\frac{n_{1,n_1}}{n} = \frac{28 \cdot 56}{125} = 12,544, \quad \frac{n_{1,n_2}}{n} = \frac{28 \cdot 69}{125} = 15,456,$$

$$\frac{n_{2,n_1}}{n} = \frac{97 \cdot 56}{125} = 43,456, \quad \frac{n_{2,n_2}}{n} = \frac{97 \cdot 69}{125} = 53,544$$

Podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Dosadíme do zjednodušeného vzorce pro testovou statistiku K:

$$K = \frac{n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{(n_{jk} - \frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n})^2}{\frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n}}}{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{n_{jk} \cdot (n_{jk} - 1)}{n_{j.} \cdot n_{.k}}} = \frac{125 \cdot (17 \cdot 58 - 1 \cdot 39)^2}{28 \cdot 97 \cdot 56 \cdot 69} = 3,6953$$

Kritický obor:  $w = (\chi^2_{0,95}, \infty) = (3,841, \infty)$ .

Protože testová statistika se nerealizuje k kritickému oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Vypočteme ještě Cramérův koeficient:  $v = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}} = \sqrt{\frac{3,6953}{125(2-1)}} = 0,1719$

Vidíme, že mezi dojmem u přijímací zkoušky a přijetím na fakultu je pouze slabá závislost.

### **Poznámka k jednostranným alternativám:**

Nulová hypotéza tvrdí, že podíl šancí je roven 1, tj.  $H_0: OR = 1$ .

Pokud víme, že za prvních okolností je šance na úspěch vyšší než za druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme pravostrannou alternativu

$H_1: OR > 1$ .

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$  ve prospěch pravostranné alternativy, když  $100(1-\alpha)\%$  empirický asymptotický jednostranný interval spolehlivosti pro  $\ln OR$  neobsahuje číslo 0.

Pokud víme, že za prvních okolností je šance na úspěch nižší než za druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme jednostrannou alternativu

$H_1: OR < 1$ .

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$  ve prospěch jednostranné alternativy, když  $100(1-\alpha)\%$  empirický asymptotický jednostranný interval spolehlivosti pro  $\ln OR$  neobsahuje číslo 0.

Pokud jsou šance na úspěch stejné za prvních i druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme oboustrannou alternativu

$H_1: OR \neq 1$ .

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$  ve prospěch oboustranné alternativy, když  $100(1-\alpha)\%$  empirický asymptotický oboustranný interval spolehlivosti pro  $\ln OR$  neobsahuje číslo 0.

**Příklad:** U 24 žáků 6. třídy základní školy bylo zjišťováno, zda jsou úspěšní v matematice (tj. mají na posledním vysvědčení známku 1 nebo 2 z matematiky) a zda hrají na nějaký hudební nástroj. Z 10 úspěšných matematiků 6 hrálo na nějaký hudební nástroj, kdežto ve skupině neúspěšných matematiků hrál pouze 1 žák na hudební nástroj. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že úspěch v matematice a hra na hudební nástroj jsou nezávislé veličiny. Proti nulové hypotéze postavte

- oboustrannou alternativu, tj. tvrzení, úspěch v matematice a hra na hudební nástroj spolu souvisí,
- pravostrannou alternativu, tj. tvrzení, že šance na úspěch v matematice jsou vyšší pro žáky, kteří hrají na nějaký hudební nástroj,
- pravostrannou alternativu, tj. tvrzení, že šance na úspěch v matematice jsou nižší pro žáky, kteří hrají na nějaký hudební nástroj.

### Řešení:

Máme kontingenční tabulku

úspěch v M	hra na hudební nástroj		n <sub>j.</sub>
	ano	ne	
ano	6	4	10
ne	1	13	14
n <sub>k.</sub>	7	17	24

Vypočteme podíl šancí:  $OR = \frac{ac}{bd} = \frac{6 \cdot 13}{4 \cdot 1} = \frac{39}{2} = 19,5$ . Podíl šancí nám říká, že žák, který hraje na nějaký hudební nástroj, má 19,5 x větší šanci na úspěch v matematice než žák, který nehraje na žádný hudební nástroj.

Ad a)

Pro testování nulové hypotézy proti oboustranné alternativě sestojíme oboustranný interval spolehlivosti:

Dolní a horní mez intervalu spolehlivosti pro OR zjistíme pomocí STATISTIKY. Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných DM a HM a jednom případě. Do Dlouhého jména proměnné DM napíšeme vzorec pro dolní mez:

$$=\log(19,5)-\sqrt{1/6+1/4+1/1+1/13}*\text{VNormal}(0,975;0;1)$$

a analogicky do Dlouhého jména proměnné HM napíšeme vzorec pro horní mez:

$$=\log(19,5)+\sqrt{1/6+1/4+1/1+1/13}*\text{VNormal}(0,975;0;1)$$

	1 DM	2 HM
1	0,575093	5,365736

Vidíme, že  $0,575093 < \ln OR < 5,365736$  s pravděpodobností aspoň 0,95. Protože tento interval neobsahuje 0, nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch oboustranné alternativy. S rizikem omylu nejvýše 5% se tedy prokázalo, že úspěch v matematice souvisí s hrou na hudební nástroj.

Ad b)

Pro testování nulové hypotézy proti pravostranné alternativě sestrojíme levostranný interval spolehlivosti:

Do Dlouhého jména proměnné DM napíšeme vzorec pro dolní mez:

$$=\log(19,5)-\text{sqrt}(1/6+1/4+1/1+1/13)*\text{VNormal}(0,95;0;1)$$

	1 DM
1	0,960198

Protože interval  $(0,960198; \infty)$  neobsahuje 0, nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch pravostranné alternativy. S rizikem omylu nejvýše 5% se tedy prokázalo, že žáci, kteří hrají na nějaký hudební nástroj, mají vyšší šance na úspěch v matematice.

Ad c)

Pro testování nulové hypotézy proti levostranné alternativě sestrojíme pravostranný interval spolehlivosti:

Do Dlouhého jména proměnné HM napíšeme vzorec pro dolní mez:

$$=\log(19,5)+\text{sqrt}(1/6+1/4+1/1+1/13)*\text{VNormal}(0,95;0;1)$$

	1 HM
1	4,980631

Protože interval  $(-\infty; 4,980631)$  obsahuje 0, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch levostranné alternativy. Neprokázalo se tedy, že žáci, kteří hrají na nějaký hudební nástroj, mají nižší šance na úspěch v matematice.