Predikátová logika

Úvod

- Nestačí zkoumat vlastnosti jediného objektu
- Potřebujeme se ptát, zda danou vlastnost má z dané množiny
  - alespoň jeden prvek
  - každý prvek
- Příklady výroků, které nelze formalizovat výrokovou logikou
  - Každé prvočíslo je liché
  - Existuje dívka, která je chytrá a zároveň krásná

Kvantifikátory

- Univerzální kvantifikátor $\forall$
  - každý, všechny, …
  - $\forall x \in \mathbf{N}: (x+1) \in \mathbf{N}$
    - pro všechna přirozená čísla x platí…
- Existenční kvantifikátor $\exists$
  - existuje, některý, …
  - $\exists x \in \mathbf{N}: (x-100) \in \mathbf{N}$
    - existuje přirozené číslo x takové, že…
- Zesílený existenční kvantifikátor $\exists!$
  - existuje právě jeden, jediný, …
  - $\exists! x \in \mathbf{N}: (x-1) \notin \mathbf{N}$
    - existuje jediné přirozené číslo x, pro které…

Formální jazyk predikátové logiky

- Individuální jména (konstanty)
  - označují konkrétní objekt
  - a, b, c, …
- Individuální proměnné
  - neoznačují konkrétní objekt, mají svůj definiční obor
  - x, y, z, …
- Funkční symboly
  - přiřazují prvkům definičního oboru jiné prvky
  - f, g, h, …
- Predikátové symboly
  - označují vlastnosti a vztahy
  - P, Q, R, …
- Logické spojky
  - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
- Kvanitifikátory
  - $\forall$, $\exists$
- Závorky

Arita (četnost)

- = počet operandů/parametrů/argumentů
- Podle počtu operandů rozlišujeme operátory na
  - nulární
  - unární
  - binární
  - ternární
  - …
- $+, -, *, /, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ jsou binární operátory
  - jejich arita je 2, mají 2 operandy)
- $\sqrt{}\ , \neg$ jsou unární operátory
  - jejich arita je 1, mají 1 operand

Term

- Term označuje prvek definičního oboru

- Každá konstanta je term
- Každá individuální proměnná je term
- Je-li *f* funkční symbol arity *n* a t_1, t_2, … t_n jsou termy, pak $f(t_1, t_2, \dots t_n)$ je rovněž term
- Nic jiného není term

Formule predikátového kalkulu

- Výsledkem formule bude logická hodnota (pravda/nepravda)

- Je-li P predikátový symbol arity m a $t_1, t_2, \dots t_m$ jsou termy, pak $P(t_1, t_2, \dots t_m)$ je (atomická) predikátová formule.
- Jsou-li α, β predikátové formule, pak i $(\neg\alpha)$, $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\Rightarrow\beta)$, $(\alpha\Leftrightarrow\beta)$ jsou predikátové formule
- Je-li α predikátová formule a x individuální proměnná, pak i $(\forall x)\alpha$, $(\exists x)\alpha$ jsou predikátové formule
- Nic jiného není predikátová formule

Příklad jazyka predikátové logiky

- Pracujeme s množinou lidí
- Konstanty (konkrétní lidé)
  - p = Pavel, r = Radka
- Funkční symboly
  - o(x) = otec člověka x
  - m(x) = matka člověka x
- Predikátové symboly
  - k(x) = x umí hrát na kytaru
  - ♥(x, y) = x má rád y
- Příklady formalizovaných predikátových výroků
  - Pavel má rád Radku: ♥(p, r)
  - Pavlův otec umí hrát na kytaru: k(o(p))
  - Pavlova matka má ráda Radčina otce: ♥(m(p), o(r))
  - Radka má ráda každého, kdo umí hrát na kytaru: $(\forall x)(k(x) \Rightarrow$ ♥$(r,x))$
  - Všichni mají rádi Pavla: $(\forall x)$♥(x,p)
  - Existuje člověk, který má rád všechny, kteří umí hrát na kytaru: $(\exists x)(\forall y)(k(y) \Rightarrow$ ♥$(x,y))$

Volný a vázaný výskyt proměnné

- Def: Řekneme, že výskyt proměnné *x* je **vázáný**, nachází-li se proměnná x v nějaké podformuli φ formule tvaru $(\forall x)\varphi$ nebo $(\exists x)\varphi$
- Def.: Podformule φ z předchozí definice se nazývá **obor (platnosti) kvantifikátoru**
- Výskyt proměnné je tedy vázaný, je-li v oboru platnosti nějakého kvantifikátoru
- Def.: Výskyt proměnné, který není vázaný, se nazývá **volný**.
- Jedna proměnná může mít ve formuli jak volný, tak vázaný výskyt!
- Def.: Formule, která neobsahuje volné proměnné, se nazývá **uzavřená**.
- Def.: Forumule, která není uzavřená, se nazývá **otevřená**.

Sémantika predikátové logiky

- Též hovoříme o **realizaci** PL
- Dosud definované objekty (termy, formule…) popisovaly pouze syntaxi
- Sémantika svazuje jazyk s objekty reálného světa
- Definujeme **univerzum**, tedy množinu objektů, jejichž vlastnosti zkoumáme
- Funkční symboly odpovídají zobrazením na univerzu
- Predikátové symboly popisují vlastnosti a vztahy prvků univerza

Ohodnocení proměnných

- Def.: Libovolné zobrazení z množiny všech proměnných do univerza nazveme **ohodnocení proměnných**.
  - Ohodnocení proměnných tedy každé proměnné přiřadí prvek univerza (=hodnotu)
- Ohodnocení proměnné x prvkem m značíme
  - e(x) = m
  - e(x/m)

Hodnota termu

- Term je definován induktivně, tedy i jeho hodnota bude definována induktivně
- Hodnotu termu t při ohodnocení proměnných e značíme t[e]
- t[e] = e(x), je-li t proměnná x
- t[e] = $f(t_1[e], \ldots, t_n[e])$, kde f je n-ární funkční symbol aplikovaný na termy $t_1 \ldots t_n$.
- Příklad: Hodnota termu x+y bude při ohodnocení proměnných e(x)=1, e(y) = 2 rovna e(x)+e(y)=1+2=3.

Pravdivost atomické formule

- Víme, že atomická predikátová formule vzniká aplikací n-árního predikátového symbolu na n termů
- V konkrétní realizaci predikátové logiky pak dokážeme určit, zda je konkrétní predikát pravdivý či nikoliv
  - Predikáty svým způsobem odpovídají tomu, co byly výroky ve výrokové logice
- Unární predikát je tedy pravdivý právě tehdy, když prvek, jenž je hodnotou termu, který je argumentem daného predikátového symbolu, má požadovanou vlastnost.
- Predikát vyšší arity je pak pravdivý právě tehdy, když hodnoty vstupních termů splňují vlastnosti (vztahy) požadované při definici významu predikátu.

Pravdivost formule I.

- Formule je definována induktivně, tedy i pravdivost formule bude definována induktivně:
- Jsou-li α,β formule, x je proměnná, pak
  - $(\neg\alpha)$ je pravdivá právě tehdy, když je α nepravdivá a naopak
  - $(\alpha\wedge\beta)$ je pravdivá právě tehdy, když jsou obě formule α,β současně pravdivé
  - Analogicky ostatní spojky: $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\Rightarrow\beta)$, $(\alpha\Leftrightarrow\beta)$
    - Viz pravdivostní tabulky ve výrokové logice
  - $(\forall x)\alpha$ je pravdivá tehdy, jestliže je formule α pravdivá při libovolném ohodnocení proměnné x
    - Tedy za x si můžeme dosadit libovolný prvek univerza a formule α musí být pravdivá
  - $(\exists x)\alpha$ je pravdivá tehdy, jestliže existuje takové ohodnocení proměnné x, při němž je formule α pravdivá.
    - Tedy stačí, abychom našli jediný prvek univerza, který při dosazení za x způsobí pravdivost formule α

Pravdivost formule II.

- Pravdivost uzavřené formule je určena jednoznačně v závislosti na realizaci jazyka
- Pravdivost formule tedy závisí pouze na ohodnocení volných proměnných
- Def.: Formule se nazývá **logicky platná** (též **tautologie**), jestliže je pravdivá při libovolné realizaci jazyka PL
- Def.: Formule se nazývá **logicky neplatná** (též **kontradikce**), jestliže není pravdivá při žádné realizaci jazyka PL
- Def.: Formule se nazývá **splnitelná**, jestliže existuje alespoň jedna realizace, v níž je pravdivá.

Příklady tautologií PL

- Všechny tautologie výrokové logiky jsou i tautologiemi v predikátové logice
- $\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$
- $\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$
  - Pravidla pro negování predikátových formulí
- $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$
- $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$
  - Na pořadí týchž kvantifikátorů nezáleží
  - Na pořadí různých kvantifikátorů záleží
- Nelze rozhodnout konečným algoritmem, zda je daná formule tautologie
  - Protože univerzum může být nekonečná množina

Negace predikátových formulí

- Pravidla pro negování logických spojek zůstávají v platnosti
  - $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$
  - $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$
  - $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$
  - $\neg(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a))$
- Nová pravidla pro negování kvantifikátorů
  - $\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$
  - $\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$

Příklady negací

- Negujte formuli $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$
- Řešení: $\neg(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\, \neg(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow$ $\underline{(\exists x)(\neg P(x) \vee \neg Q(x))}$
- Negujte formuli $(\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall y)Q(y)$
- Řešení: $(\exists x)P(x) \wedge \neg(\forall y)Q(y) \Leftrightarrow \underline{(\exists x)P(x) \wedge (\exists y)\neg Q(y)}$
- Negujte formuli: $(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(P(\varepsilon) \Rightarrow Q(\delta))$
- Řešení: $\neg(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(P(\varepsilon) \Rightarrow Q(\delta)) \Leftrightarrow (\exists \varepsilon)(\forall \delta)\neg(P(\varepsilon) \Rightarrow Q(\delta))$ $\Leftrightarrow \underline{(\exists \varepsilon)(\forall \delta)(P(\varepsilon) \wedge \neg Q(\delta))}$
- Vyslovte negace následujících přísloví:
  - Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá.
  - Komu není rady, tomu není pomoci.
  - Kdo o kom před tebou, ten o tobě za tebou

Existenční a univerzální uzávěr predikátové formule

- Def.: Nechť α je otevřená formule PL a $x_1, x_2, \dots x_n$ jsou všechny její volné proměnné. Pak formuli
  - $(\exists x_1)(\exists x_2)\dots(\exists x_n)\alpha$ nazveme **existenční uzávěr** formule α
  - $(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)\alpha$ nazveme **univerzální uzávěr** formule α
- Vlastnosti existenčního a univerzálního uzávěru:
  - Existenční i univerzální uzávěry jsou uzavřené formule PL
  - Formule je splnitelná, je-li splnitelný její existenční uzávěr
  - Formule je kontradikcí, není-li splnitelný její existenční uzávěr
  - Formule je tautologií, je-li její univerzální uzávěr tautologií.

Typické úlohy predikátové logiky

- Najděte takové ohodnocení proměnných, pro něž je (otevřená) formule pravdivá
  - Univerzum U = {1,2,3,4}
  - $P(x,y) = (x<y)$
  - $Q(x)$ = „x je sudé“
  - $(\forall x)(P(x,q) \Rightarrow Q(x))$
  - $(\forall x)(Q(x) \Rightarrow (\exists y)P(y,x))$
  - $(\exists y)P(q,y) \wedge (\exists x)P(x,q)$
- Rozhodněte, zda je v daném modelu daná (uzavřená) formule pravdivá či nikoliv
  - Univerzum U = {1,2,3,4,5,6}
  - $P(x,y) = (x|y)$ (x dělí y beze zbytku)
  - $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$
  - $(\forall x)(\exists y)P(y,x)$

Splnitelná množina formulí

- Směřujeme k budování deduktivní soustavy predikátové logiky
- Def.: Množina formulí F se nazývá **splnitelná** právě tehdy, když existuje taková realizace jazyka PL, v níž jsou všechny formule pravdivé
- Def.: Tato realizace se nazývá **model množiny** formulí
- Jestliže k dané množině formulí F neexistuje model, pak se množina F nazývá **nesplnitelná množina formulí**.

Příklad splnitelné množiny formulí

- $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)), P(a), (\exists x)\neg Q(x)$
- Příklad modelu uvedené množiny formulí
  - Univerzum jsou celá čísla
  - P(x) značí „x je dělitelné deseti“
  - Q(x) značí „x je sudé“
  - a = 10
- Není to tautologie, neboť realizace, v níž by Q(x) značilo dělitelnost třemi, není modelem uvedené množiny formulí

Sémantický důsledek

- Def.:Řekneme, že formule α je **sémantický důsledek** množiny formulí F, pokud každý model množiny formulí F je též modelem formule α
  - Tedy pokud v každé realizaci, v níž jsou pravdivé všechny formule z S, je pravdivá i formule α
- Sémantický důsledek se též nazývá **tautologický důsledek**, nebo říkáme, že formule α **sémanticky (tautologicky) vyplývá** z množiny formulí S.
- Sémantický důsledek značíme S $\models \alpha$

Vlastnosti sémantických důsledků

- Jestliže $\alpha \in S$, pak $S \models \alpha$
- Je-li $R \subseteq S$ a $R \models \alpha$, pak i $S \models \alpha$
  - Doplněním předpokladů zůstávají dosud odvozená tvrzení platná
- Tautologie sémanticky vyplývá z každé (i prázdné) množiny formulí
- Z nesplnitelné množiny formulí sémanticky vyplývá libovolná formule

Logická ekvivalence formulí

- Dvě predikátové formule α,β se nazývají **logicky ekvivalentní** právě tehdy, když mají stejné modely.
  - Tedy každý model jedné z formulí je i modelem druhé formule
- α,β jsou logicky ekvivalentní právě tehdy, když formule $\alpha\Leftrightarrow\beta$ je tautologie.
  - Nelze konečným algoritmem rozhodnout, zda jsou dvě formule logicky ekvivalentní

Deduktivní soustava PL

- Analogie deduktivní soustavy výrokové logiky
- Problém správnosti úsudku
  - Tedy problém rozhodnout, zda z dané množiny předpokladů sémanticky vyplývá daný závěr
- Úsudek je formálně definován analogicky jako ve výrokové logice
  - Místo výrokových formulí používáme predikátové formule
    - Výrokové formule jsou jejich podmnožinou

Odvozovací pravidla PL

- Pravidlo odloučení (modus ponens)
  - $A, (A \Rightarrow B) \vdash B$
- Pravidlo generalizace
  - $P \vdash (\forall x)P(x)$
- Pravidlo specializace
  - $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$
- Princip nepřímého důkazu
  - $A \Rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$
- Přidání existenčního kvantifikátoru
  - $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

Příklady úsudků v PL I.

- Aristotelův sylogismus
  - Každý člověk je smrtelný
  - Aristoteles je člověk
  - Závěr: Aristoteles je smrtelný
- Ověření správnosti
  - Č(x) = x je člověk, S(x) = x je smrtelný, a = Aristoteles
  - $(\forall x)(Č(x) \Rightarrow S(x)),\ Č(a) \vdash S(a)$
  - Důkaz použitím pravidla specializace a pravidla modus ponens

Příklady úsudků v PL II.

- Předpoklady:
  - Kdo lže, ten krade.
  - Kdo krade, ten zabíjí.
  - Kdo zabíjí, ten skončí na šibenici.
  - Pepíček neskončil na šibenici
- Závěr:
  - Pepíček je pravdomluvný
- Formalizace:
  - $(\forall x)(L(x) \Rightarrow K(x))$, $(\forall x)(K(x) \Rightarrow Z(x))$, $(\forall x)(Z(x) \Rightarrow Š(x))$, $\neg Š(p) \vdash \neg L(p)$
  - Důkaz použitím pravidla specializace, obměn implikací, tranzitivity implikace a pravidla modus ponens

Příklady úsudků v PL III.

- Předpoklady
  - Jestliže nikdo nevykradl banku, všichni jsou chudí.
  - Viktor je bohatý
- Závěr
  - Viktor vykradl banku
- Formalizace
  - $(\forall x)\neg KB(x) \Rightarrow (\forall y)CH(y)),\ \neg CH(v) \models KB(v)$
  - Obměna implikace: $(\exists y)\neg CH(y) \Rightarrow (\exists x)KB(x)$
    - Jestliže existuje někdo, kdo není chudý, pak musí existovat někdo, kdo vykradl banku
  - Z ničeho však neplyne, že ten, kdo vykradl banku, je tentýž člověk, jako ten, který není chudý.

Omezení počtu spojek

- Díky pravidlům pro negování kvantifikátorů můžeme omezit počet kvantifikátorů na jeden (libovolný)
- Pro vybudování predikátové logiky nám tedy stačí implikace, negace a univerzální kvantifikátor
  - Nebo implikace, negace a existenční kvantifikátor
  - Nebo Shefferova/Piercova spojka a univerzální/existenční kvantifikátor

Typy matematických vět

- Dva typy matematických vět
  - Obecná matematická věta: $(\forall x)V(x)$
  - Existenční věta: $(\exists x)V(x)$
- $V(x)$ je psána jako implikace $P(x) \Rightarrow Z(x)$, nebo ekvivalence $P(x) \Leftrightarrow Z(x)$
  - P je předpoklad (premisa)
  - Z je závěr (konkluze)

Metody matematických důkazů

- Důkazy obecných vět
  - Přímý důkaz
  - Nepřímý důkaz
  - Důkaz sporem
  - Důkaz matematickou indukcí
- Důkazy existenčních vět
  - Konstrukční důkaz
  - Ryze existenční důkaz
  - Důkaz sporem

Přímý důkaz

- Jediný formálně uznatelný důkaz
  - Ostatní metody je ale vždy možno převést na přímý důkaz
- Posloupnost tvrzení T_1, T_2, … T_n, kde Ti je buďto
  - předpoklad P(x)
  - axiom
  - závěr odvozovacího pravidla
  - $T_n = Z(x)$
- Posloupnost formulí, které ze sebe logicky vyplývají

Přímý důkaz - příklad

- Dokažte, že na množině přirozených čísel platí $(\forall x)((x \geq 2) \Rightarrow (6x + 3 > 13))$
- Vyjdeme z předpokladu, že $x \geq 2$ a postupně dojdeme k závěru, že $6x+3>13$
  - $x \geq 2$
  - $6x \geq 12$
  - $6x + 1 \geq 12 + 1$
  - $6x + 1 \geq 13$
  - $6x + 3 > 13$

Nepřímý důkaz

- Nepřímý důkaz je přímé dokázání obměny implikace
- Příklad: Dokažte, že pro všechna celá čísla platí: je-li n^2 liché, pak i n je liché.
  - $(\forall n)(L(n^2) \Rightarrow L(n))$
  - Obměna: $(\forall n)(S(n) \Rightarrow S(n^2))$
  - Což je snadné dokázat

Důkaz sporem

- Předpokládáme neplatnost dokazovaného tvrzení a poté přímým důkazem (tj. nezpochybnitelnými implikacemi) dojdeme k evidentní kontradikci.
- Dokazovaná věta tudíž musí (za předpokladu bezespornosti teorie) platit

Důkaz sporem - příklad

- Dokažte, že pro všechna celá čísla platí: je-li n^2 liché, pak i n je liché.
  - $(\forall n)(L(n^2) \Rightarrow L(n))$
- Vyslovíme negaci dokazovaného tvrzení
  - $(\exists n)(L(n^2) \wedge S(n))$
- Protože ale $S(n) \Rightarrow n = 2k,\ k \in \mathbf{N} \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 2*2*k^2 \Rightarrow S(n^2)$
- Dostáváme tedy spor
  - $L(n^2) \wedge S(n^2)$
- Negace věty nemůže platit, musí tedy platit dokazovaná věta

Důkaz matematickou indukcí

- Používá se při důkazu tvrzení platného pro všechna přirozená čísla
- Tvrzení dokážeme pro první prvek
- Dokážeme, že platí-li pro nějaký prvek, platí i pro jeho následníka
- Tím pádem víme, že platí pro všechny prvky

Matematická indukce - příklad

- Dokažte, že pro všechna přirozená čísla platí $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$
- Dokážeme platnost pro n = 1:
  - $1 = 1*2/2 = 1$
- Dokážeme, že platí-li tvrzení pro $k \in \mathbf{N}$, platí i pro k+1
  - $1+2+\ldots+k = k(k+1)/2 \Rightarrow 1+2+\ldots+k+(k+1) = (k+1)(k+2)/2$
  - Upravujeme výraz na pravé straně implikace
  - $\underline{1+2+\ldots+k}+(k+1) = (k+1)(k+2)/2$
  - $k(k+1)/2 + (k+1) = (k+1)(k+2)/2$
  - $k/2 + 1 = (k+2)/2$
  - $k + 2 = k + 2$
  - Implikace je tedy pravdivá
- Uvedené tvrzení platí pro všechna přirozená čísla

Konstrukční důkaz

- Máme-li dokázat existenci určitého objektu, zkonstruujeme jej
- Příklad: Dokažte, že existuje pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran.
- Důkaz:
  - Na základě Pythagorovy věty můžeme větu přeformulovat jako $\exists a,b,c \in \mathbf{N}: a^2 + b^2 = c^2$
  - Pak snadno ukážeme, že pro a = 3, b = 4 a c = 5 uvedené tvrzení platí

Ryze existenční důkaz

- Dokážeme existenci požadovaného objektu, aniž bychom jej museli konstruovat
- Příklad: Je dán bílý čtverec 10x10cm a v něm je 101 bodů obarveno na červeno. Dokažte, že při libovolném obarvení těchto bodů existuje trojúhelník s obsahem 1cm^2 který obsahuje alespoň dva červené body.
- Důkaz: Obsah čtverce je 100cm2, obsah trojúhelníka je 1cm2. Do čtverce lze vepsat právě 100 trojúhelníků. Kdyby v každém z nich byl 1 červený bod, museli bychom 101. bod umístit do trojúhelníka, kde už jeden červený bod je.
- Použili jsme tzv. Dirichletův princip