Příklad 5.5: Uvažujme model tvaru:

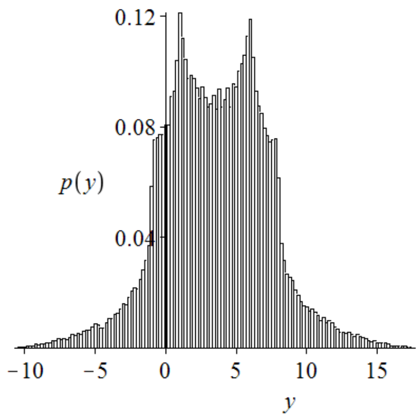
$$Y = \sin(X_1) + 7 \cdot \sin^2(X_2) + \frac{1}{10} \cdot X_3^4 \cdot \sin(X_1),$$

kde X_1, X_2, X_3 jsou všechny náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti na intervalu $(-\pi, \pi)$. Proveďme globální analýzu citlivosti.

***Řešení*:** Nejprve určíme střední hodnotu a rozptyl řešení Y. To provedeme výpočtem pomocí systému Maple, viz zdrojový kód Maple na konci. Obdržíme tak:

$$E(Y) = \frac{7}{2}, \quad V(Y) = \frac{1}{1800} \cdot \pi^8 + \frac{1}{50} \cdot \pi^4 + \frac{53}{8}.$$

Pravděpodobnostní rozdělení veličiny Y můžeme odhadnout vygenerováním realizací pro X_1, X_2, X_3, následným vyhodnocením a zobrazením histogramu (v Maple příkazem `Histogram`). Histogram získaný v systému Maple pro $M = 10^5$ vyhodnocení modelové rovnice je uveden na obrázku 5.1.



Obr. 5.1 *Histogram vygenerovaných řešení pro model příkladu 5.5.*

Podle vztahu (5.8)

$$V_i = V_{X_i}(E_{X_{-i}}(Y|X_i)), \tag{5.8}$$

vypočítáme hodnoty vlivů prvního řádu jednotlivých parametrů X_i na řešení Y (pro $i = 1, 2, 3$):

$$V_1 = V_{X_1}(E(Y|X_1)) = V\left(\sin(X_1) + \frac{\pi^4}{50} \cdot \sin(X_1)\right) = \frac{1}{5000} \cdot \pi^8 + \frac{1}{50} \cdot \pi^4 + \frac{1}{2},$$
$$V_2 = V_{X_2}(E(Y|X_2)) = V\left(-7 \cdot \cos^2(X_2)\right) = \frac{49}{8},$$
$$V_3 = V_{X_3}(E(Y|X_3)) = V\left(\frac{7}{2}\right) = 0.$$

Následně určíme podle vztahu (5.9)

$$S_i = \frac{V_i}{V(Y)}. \tag{5.9}$$

indexy globální citlivosti pro parametry X_1, X_2, X_3:

$$S_1 = \frac{V_1}{V(Y)} \doteq 0,3139; \quad S_2 = \frac{V_2}{V(Y)} \doteq 0,4424; \quad S_3 = \frac{V_3}{V(Y)} = 0.$$

V tomto jednoduchém příkladu bylo možné získat indexy globální citlivosti analyticky zavedenými vztahy. Pro názornost vypočítejme nyní indexy globální citlivosti pomocí Soboľovy metody.

Nejprve musíme vygenerovat dvě skupiny realizací parametrů X_1, X_2, X_3. Nechť každá skupina obsahuje $M = 10^5$ realizací pro každý z parametrů. Zvolíme jednu ze skupin, spočteme M vyhodnocení modelu Y (pro jednotlivé realizace parametrů X_1, X_2, X_3) a určíme jejich průměr (tj. střední hodnotu) a rozptyl. Obdržíme[1]:

$$\widehat{E}(Y) \doteq 3,4958; \quad \widehat{V}(Y) \doteq 13,9476; \quad (V(Y) \doteq 13,8446)\,.$$

Nyní přistoupíme k výpočtu odhadů vlivů jednotlivých parametrů definovaných vztahem (5.16) až (5.18).

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{M} f(x_{1k}, ..., x_{mk}), \tag{5.16}$$

$$\widehat{V}(Y) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{M} f^2(x_{1k}, ..., x_{mk}) - \left(\widehat{f}_0\right)^2, \tag{5.17}$$

$$\widehat{V}_i = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{M} f\left(x_{-ik}{}^{(1)}, x_{ik}{}^{(1)}\right) \cdot f\left(x_{-ik}{}^{(2)}, x_{ik}{}^{(1)}\right) - \left(\widehat{f}_0\right)^2, \tag{5.18}$$

$$\widehat{V}_{-i} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{M} f\left(x_{-ik}{}^{(1)}, x_{ik}{}^{(1)}\right) \cdot f\left(x_{-ik}{}^{(1)}, x_{ik}{}^{(2)}\right) - \left(\widehat{f}_0\right)^2, \tag{5.19}$$

Pro výpočet vlivu V_1 parametru X_1 vypočteme dalších M vyhodnocení modelu Y, a to tak, že budeme brát realizace parametru X_1 z první skupiny (té dříve zvolené) a realizace parametrů X_2, X_3 z druhé skupiny na začátku vygenerovaných realizací. Zcela analogicky vypočteme jiných M vyhodnocení modelu Y jak pro určení vlivu V_2 parametru X_2, tak pro určení vlivu V_3 parametru X_3. Získáme níže uvedené hodnoty:

$$\widehat{S}_1 \doteq 0,3131; \quad \widehat{S}_2 \doteq 0,4418; \quad \widehat{S}_3 \doteq -0,0040.$$

Po výpočtu vlivů V_1, V_2, V_3 můžeme přistoupit k výpočtu indexů globální citlivosti prvního řádu podle vztahu (5.9):

$$\widehat{V}_1 \doteq 4,4250; \quad \widehat{V}_2 \doteq 6,2190; \quad \widehat{V}_3 \doteq 0,0010;$$

$$\widehat{S}_1 \doteq 0,3173; \quad \widehat{S}_2 \doteq 0,4459; \quad \widehat{S}_3 \doteq 0,0001;$$

[1] V závorce je uvedená pro porovnání zaokrouhlená hodnota přesné hodnoty $V(Y)$.

Jestliže aplikujeme korekční člen (5.21),

$$\left|\frac{1}{M}\cdot\sum_{k=1}^{M} f\left(\boldsymbol{x}_{(k)}{}^{(1)}\right)\cdot f\left(\boldsymbol{x}_{(k)}{}^{(2)}\right)-\left(\widehat{f_0}\right)^2\right|. \tag{5.21}$$

jehož hodnota je přibližně −0,0571. Homma a Saltelli (viz [24]) doporučují korekční člen (5.21) aplikovat bez absolutní hodnoty[2] na jednotlivé rozptyly $V_{i_1,\dots,i_s}$ (pro $i_1,\dots,i_s \in \{1,2,3\}$, $i_1 < \dots < i_s$) tak, že od rozptylů prvního řádu (V_i) se korekční člen odečte. Pak obdržíme:

$$\widehat{V}_1 \doteq 4,3680; \quad \widehat{V}_2 \doteq 6,1619; \quad \widehat{V}_3 \doteq -0,0561.$$

Základní zdrojový kód pro výpočet výše uvedených hodnot v Maple:

Výpočet indexů globální citlivosti pomocí systému Maple

```
M := 10^5:
with(Statistics):
X[1] := RandomVariable(Uniform(-Pi, Pi)):
X[2] := RandomVariable(Uniform(-Pi, Pi)):
X[3] := RandomVariable(Uniform(-Pi, Pi)):

X1s := Sample(X[1], M):  # M realizaci veliciny X[1]
X2s := Sample(X[2], M):  # M realizaci veliciny X[2]
X3s := Sample(X[3], M):  # M realizaci veliciny X[3]

Ys := sin~(X1s) + 7*(sin~(X2s))^~2 + ((1/10)*X3s^~4)*(sin~(X1s)):

f[0] := Mean(Ys):      # odhad stredni hodnoty
V[0] := Variance(Ys):  # odhad rozptylu

X1s2 := Sample(X[1], M):  # "druha skupina" M realizaci veliciny X[1]
X2s2 := Sample(X[2], M):  # "druha skupina" M realizaci veliciny X[2]
X3s2 := Sample(X[3], M):  # "druha skupina" M realizaci veliciny X[3]
Ys2 := Vector(M):

# citlivost parametru X[1]
Ys2 := sin~(X1s) + 7*(sin~(X2s2))^~2 + ((1/10)*X3s2^~4)*~(sin~(X1s)):
V[1] := Mean(Ys*~Ys2)-f[0]^2;
S[1] = V[1]/V[0];

# citlivost parametru X[2]
Ys3 := sin~(X1s2) + 7*(sin~(X2s))^~2 + ((1/10)*X3s2^~4)*~(sin~(X1s2)):
V[2] := Mean(Ys*~Ys3)-f[0]^2;
S[2] = V[2]/V[0];

# citlivost parametru X[3]
Ys4 := sin~(X1s2) + 7*(sin~(X2s2))^~2 + ((1/10)*X3s^~4)*~(sin~(X1s2)):
V[3] := Mean(Ys*~Ys4)-f[0]^2;
S[3] = V[3]/V[0];

# korekcni clen
Ysk := sin~(X1s2) + 7*(sin~(X2s2))^~2 + ((1/10)*X3s2^~4)*~(sin~(X1s2)):
```

---

[2] Absolutní hodnota byla přidána, aby příslušná věta měla správný matematický význam. Znaménko členu v absolutní hodnotě je však podstatné!

```
V[k] := Mean(Ys*~Ysk)-f[0]^2;
```