SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

© Institut biostatistiky a analýz

VI.
KONVOLUCE
&
VZORKOVACÍ TEORÉM

MU

IBA

© Institut biostatistiky a analýz

KONVOLUCE

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau).s_2(t-\tau).d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\tau).s_2(\tau).d\tau \qquad \approx S_1(\omega).S_2(\omega)$$

Důkaz:

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau).s_2(t-\tau).d\tau = \begin{vmatrix} x = t-\tau \\ \tau = t-x \\ d\tau = -dx \end{vmatrix} =$$

$$= -\int_{\infty}^{-\infty} s_2(x).s_1(t-x).dx = s_2(t) * s_1(t)$$

KONVOLUCE

Distributivní zákon:

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$$

Asociativní zákon:

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

© Institut biostatistiky a analýz

KONVOLUCE

Zákon o posunu v čase

$$\text{Je}-\text{li}$$

$$f_1(t) * f_2(t) = c(t),$$

$$\text{pak}$$

$$f_1(t) * f_2(t-T) = c(t-T),$$

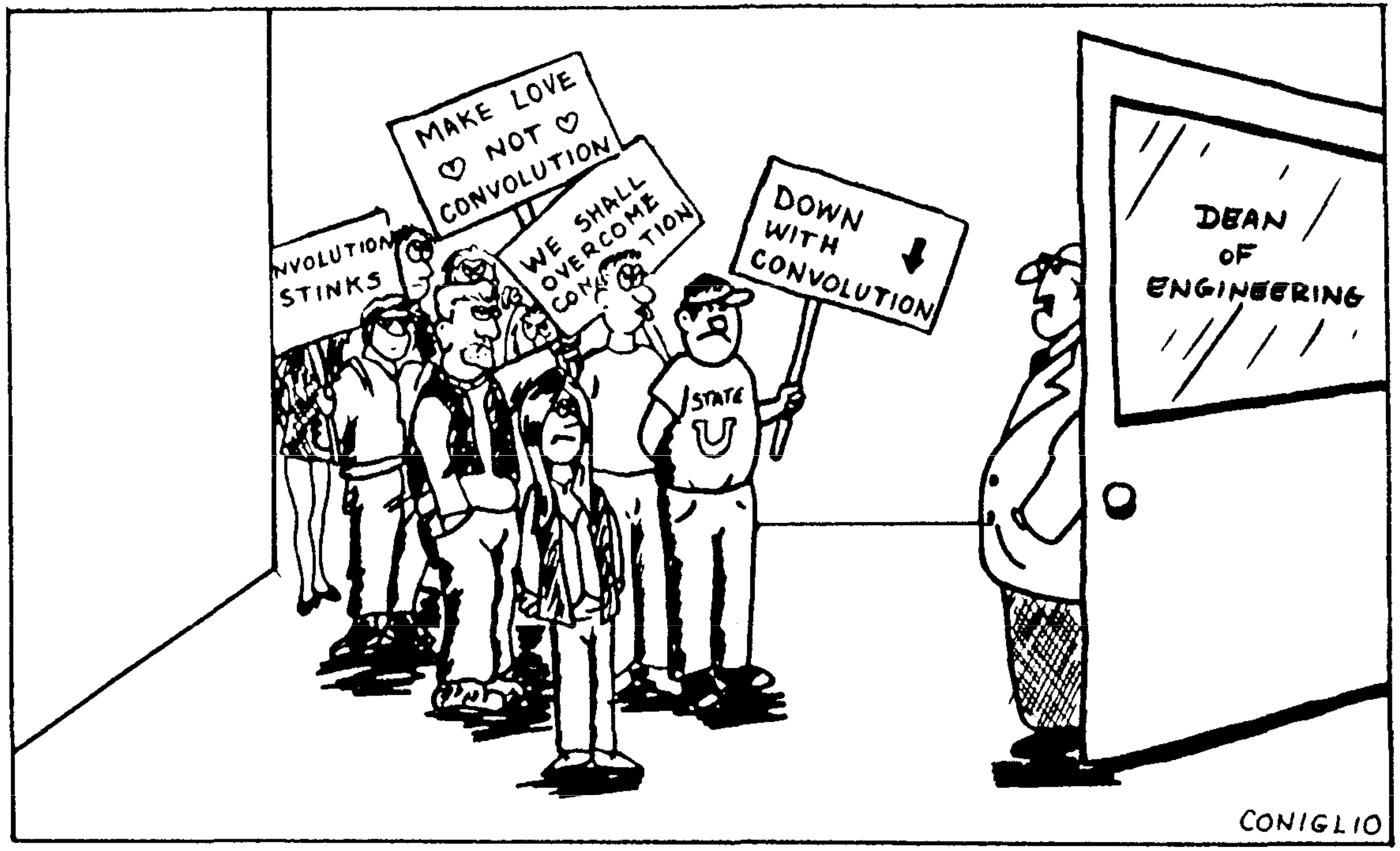
$$f_1(t-T) * f_2(t) = c(t-T)$$

$$\text{a}$$

$$f_1(t-T_1) * f_2(t-T_2) = c(t-T_1-T_2)$$

© Institut biostatistiky a analýz

KONVOLUCE



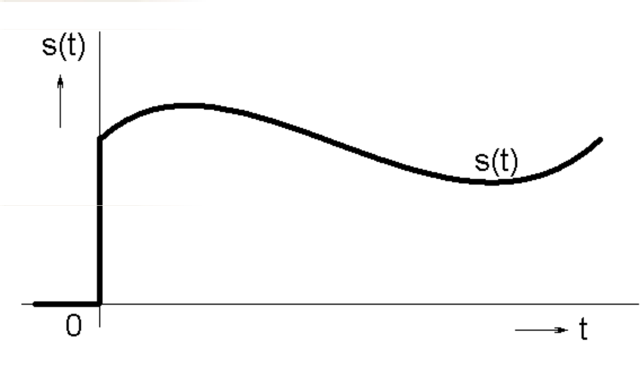
Convolution: its bark is worse than its bite!

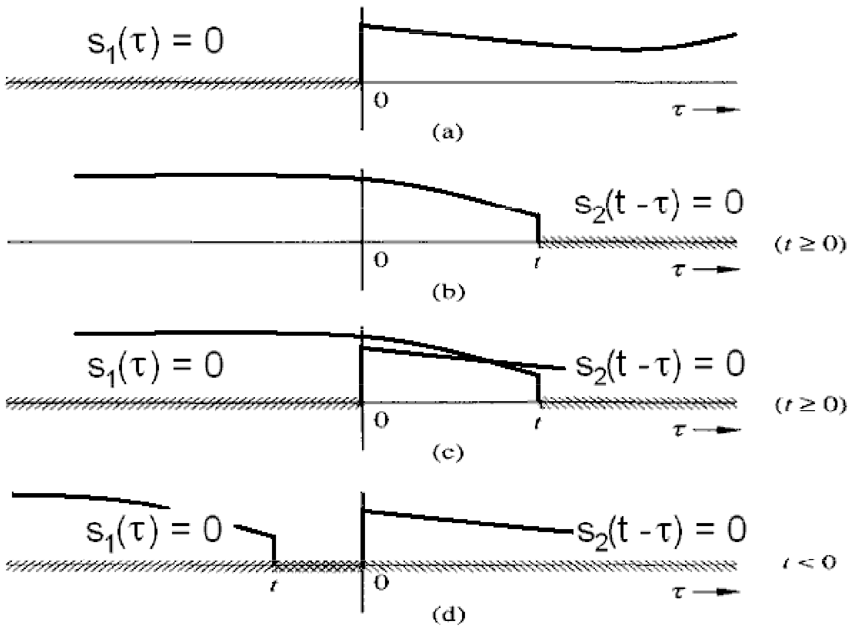
© Institut biostatistiky a analýz

KONVOLUCE

Konvoluce kauzálních signálů:

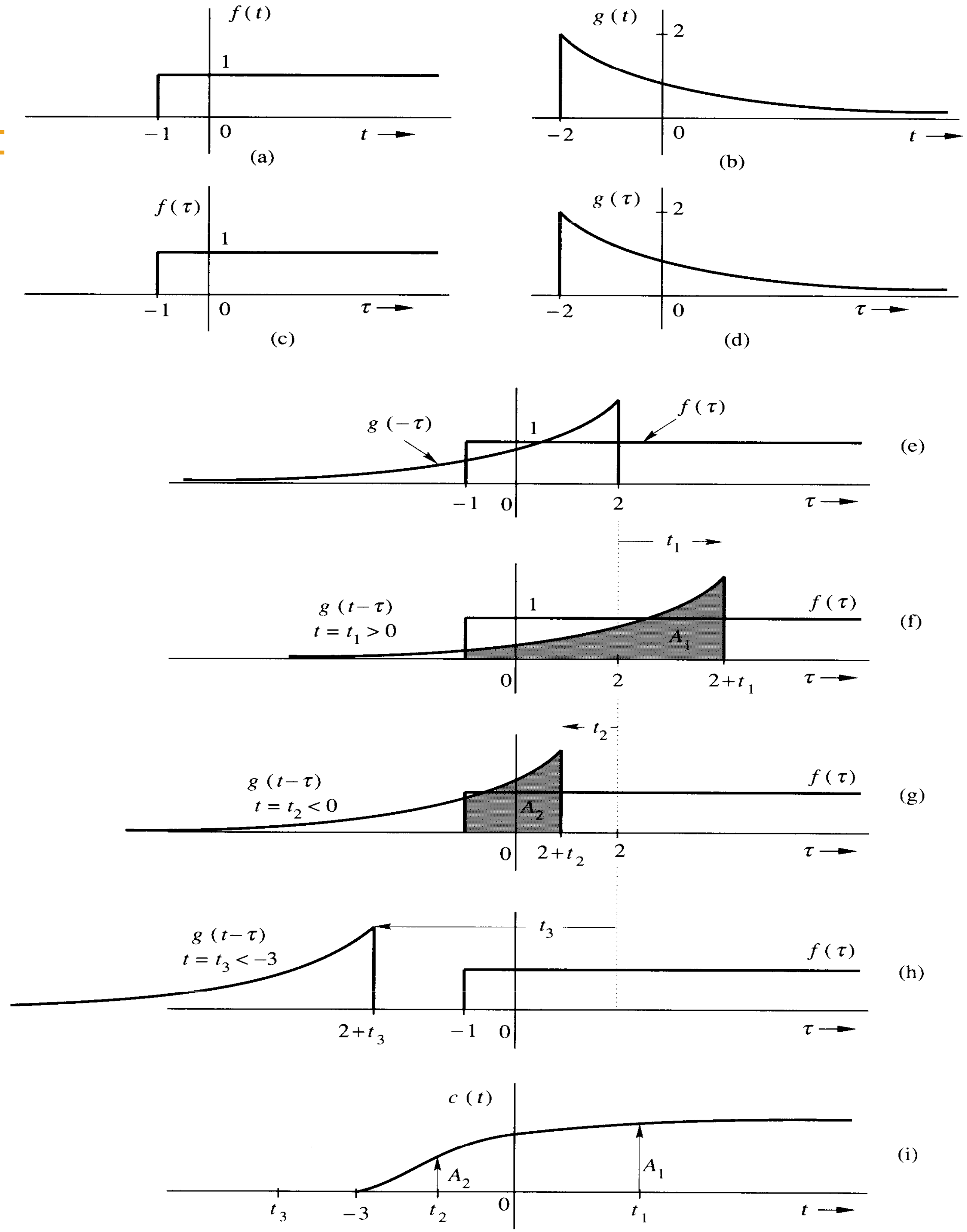
Pro kauzální signály platí s(t) = 0 pro t < 0





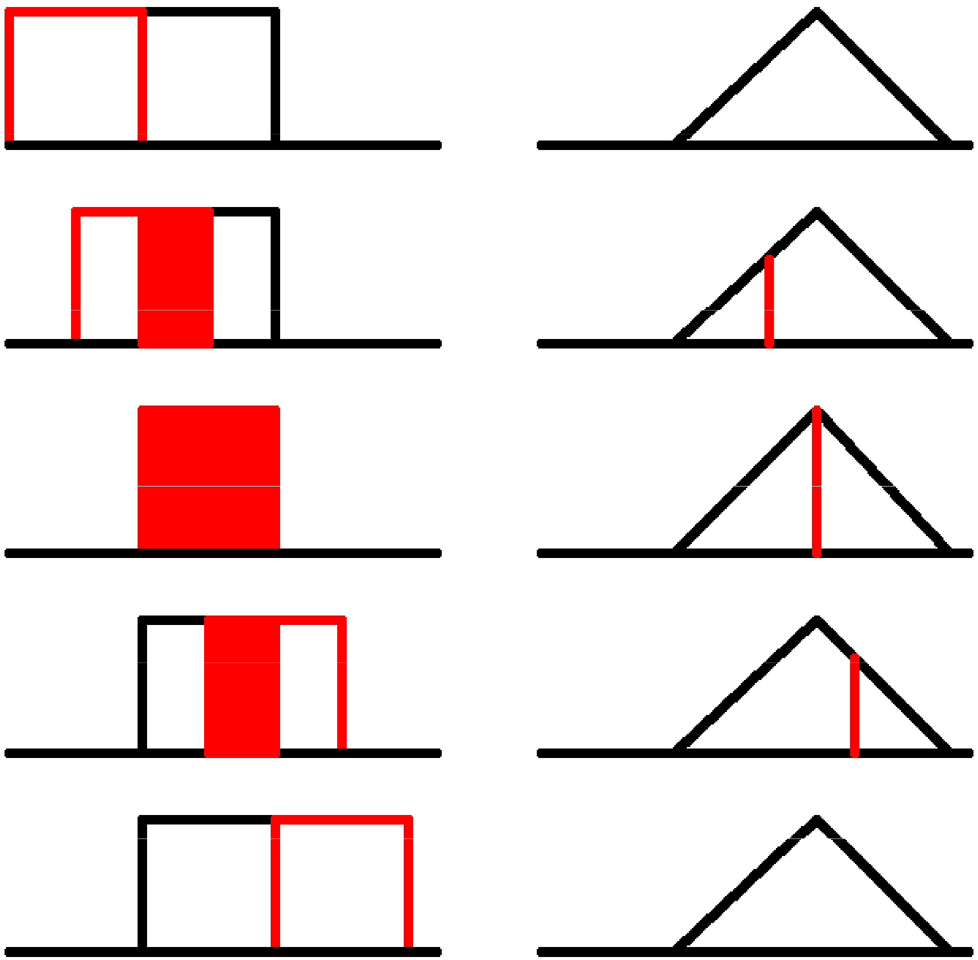
$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau).s_2(t-\tau).d\tau$$

KONVOLUCE



© Institut biostatistiky a analýz

KONVOLUCE



© Institut biostatistiky a analýz

KONVOLUCE

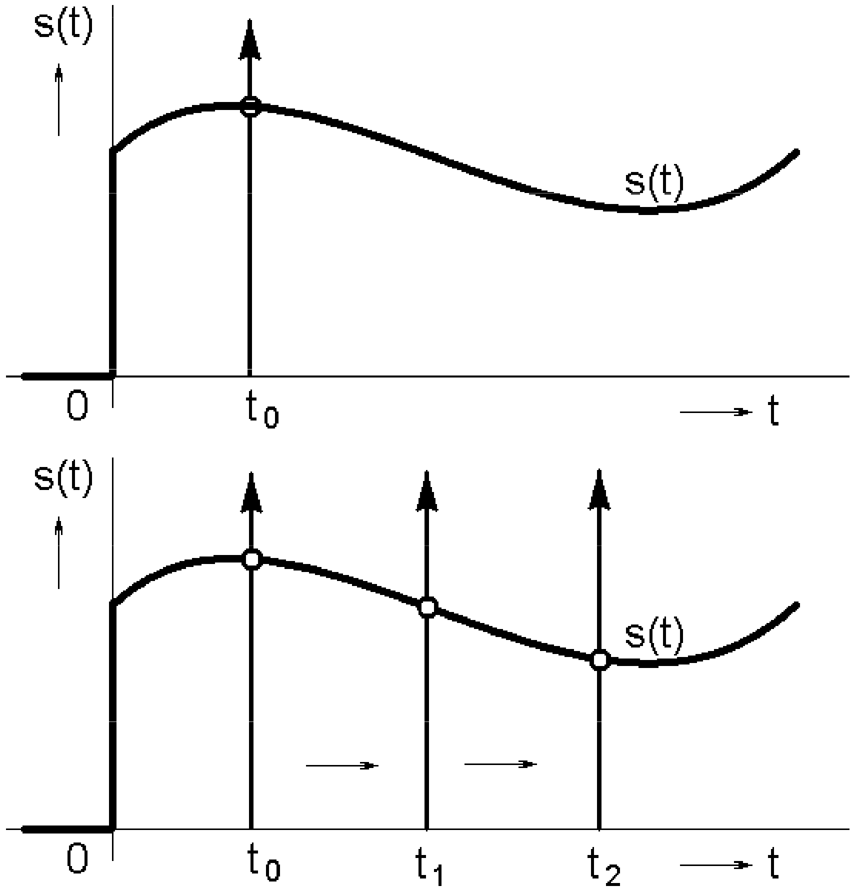
signálu s jednotkovým impulsem

definice:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t).\delta(t-t_0)dt = s(t_0)$$

konvoluce:

$$s(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t).\delta(t-\tau)d\tau = s(t)$$



© Institut biostatistiky a analýz

KONVOLUCE

- spojité signály

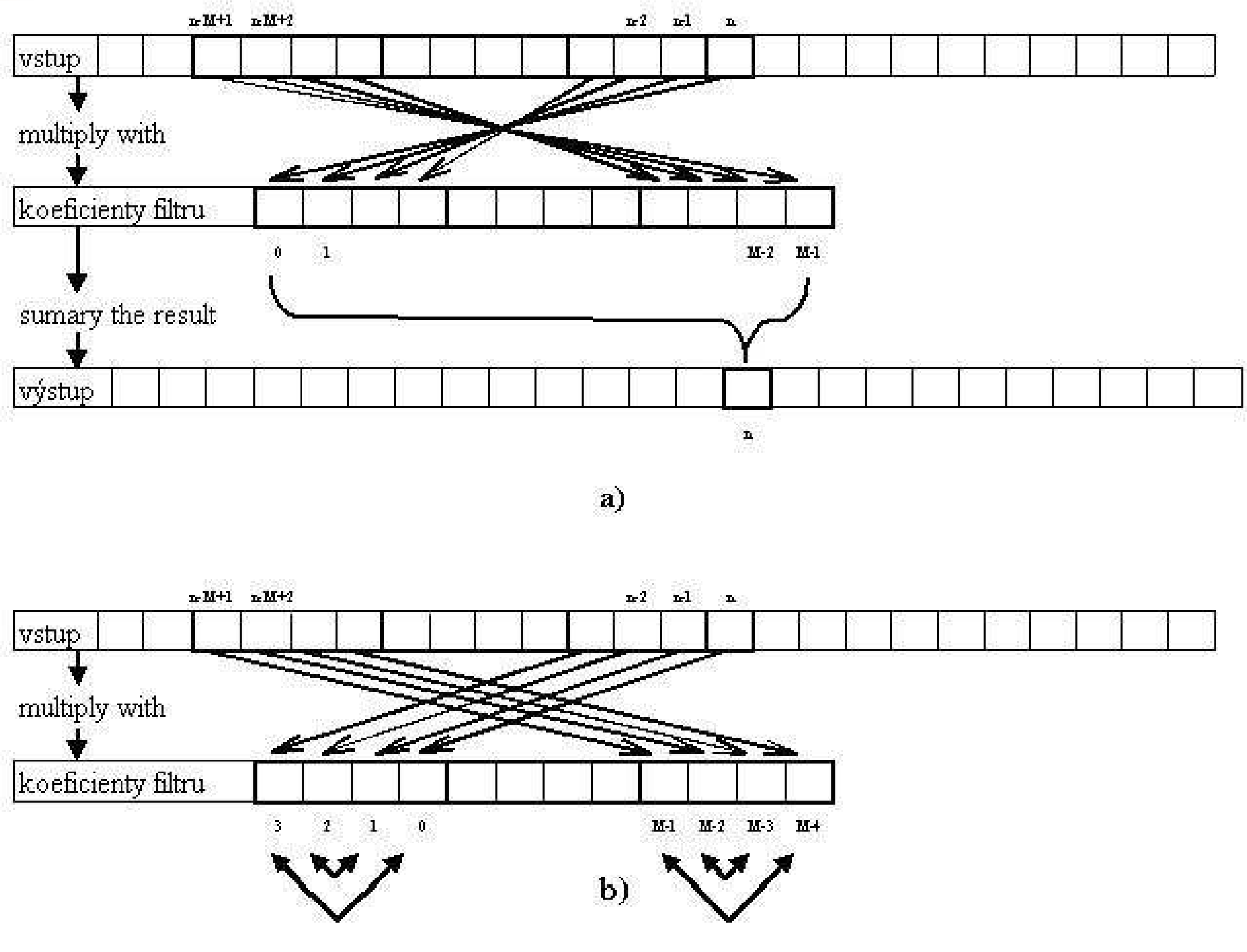
$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{t} s_1(\tau).s_2(t-\tau).d\tau \approx S_1(\omega).S_2(\omega)$$

- diskrétní signály

$$s_1(nT) * s_2(nT) = \sum_{i=0}^{n} s_1(iT).s_2(nT - iT) \approx S_1(z).S_2(z)$$

© Institut biostatistiky a analýz

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE



© Institut biostatistiky a analýz

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

$$x_1(nT) * y_2(nT) = \sum_{i=0}^{n} x_1(iT).y_2(nT - iT)$$

n=0 x_0y_0

n=1 $x_0y_1 + x_1y_0$

n=2 $x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0$

n=3 $x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0$

n=4 $x_0y_4 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + x_4y_0$

n=5 $x_0y_5 + x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1 + x_5y_0$

:

$\{x_0, x_1, x_2, x_3\} * \{y_0, y_1, y_2\} =$

$= (x_0\ y_0)\ (x_0\ y_1)\ (x_0\ y_2)$

$(x_1\ y_0)\ (x_1\ y_1)\ (x_1\ y_2)$

$(x_2\ y_0)\ (x_2\ y_1)\ (x_2\ y_2)$

$(x_3\ y_0)\ (x_3\ y_1)\ (x_3\ y_2)$

----

následuje sečtení pod sebou

© Institut biostatistiky a analýz

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD

obecně:

$\{x_0, x_1, x_2, x_3\} * \{y_0, y_1, y_2\} =$

$= (x_0\ y_0)\ (x_0\ y_1)\ (x_0\ y_2)$

$(x_1\ y_0)\ (x_1\ y_1)\ (x_1\ y_2)$

$(x_2\ y_0)\ (x_2\ y_1)\ (x_2\ y_2)$

$(x_3\ y_0)\ (x_3\ y_1)\ (x_3\ y_2)$

----

následuje sečtení pod sebou

konkrétní čísla:

{1, 2, -2, -1} * {1, -1, 2} =

= 1 -1 2

2 -2 4

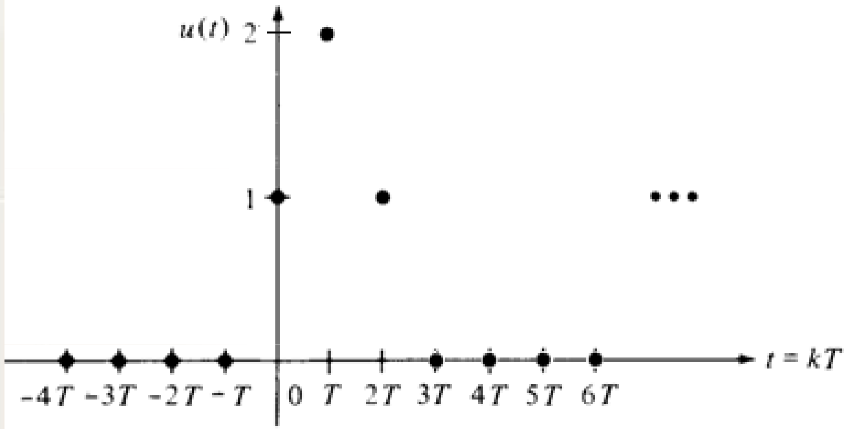
-2 2 -4

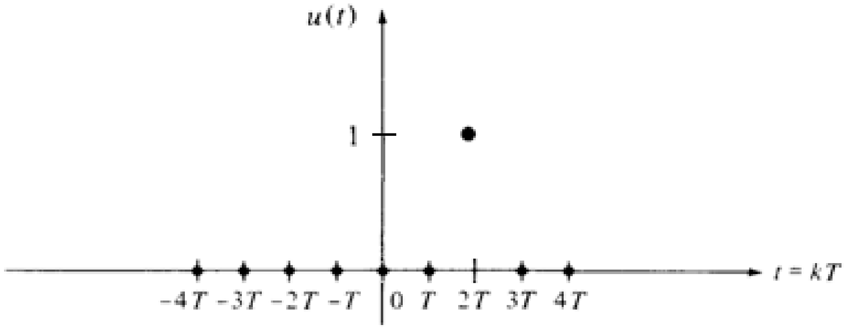
-1 1 -2

(1, 1,-2, 5,-3,-2)

© Institut biostatistiky a analýz

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
A JEŠTĚ JEDEN PŘÍKLAD





{1, 2, 1} * {0,0,1} =

= 0 0 1

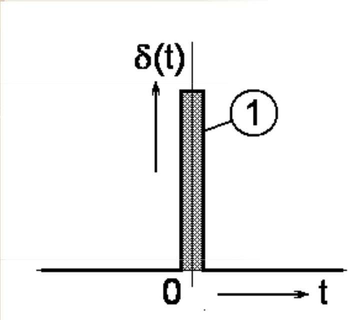
0 0 2

0 0 1

(0, 0, 1, 2, 1)

© Institut biostatistiky a analýz

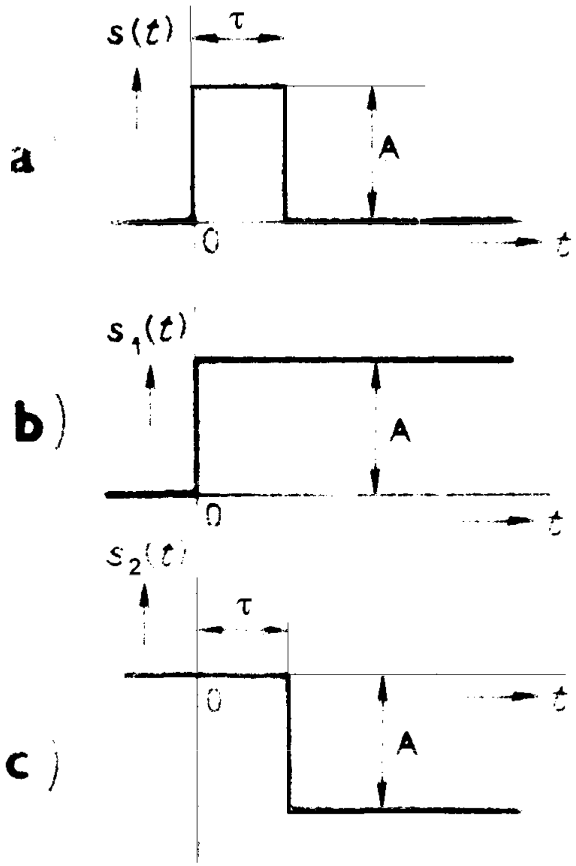
SPEKTRUM DIRACOVA IMPULZU

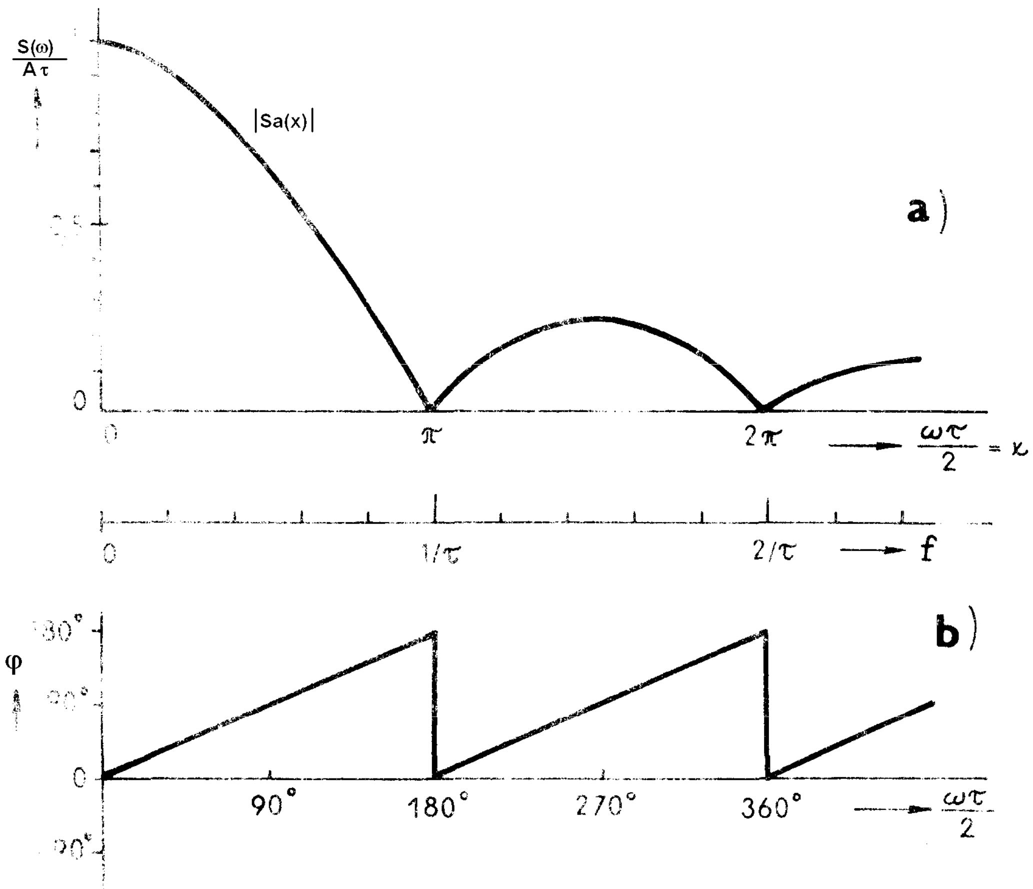


$\tau \rightarrow 0$

$A \rightarrow \infty$

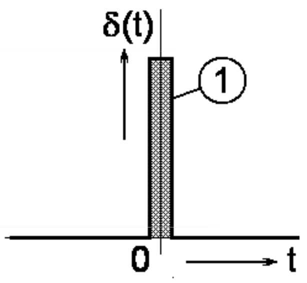
$A.\tau = 1$





© Institut biostatistiky a analýz

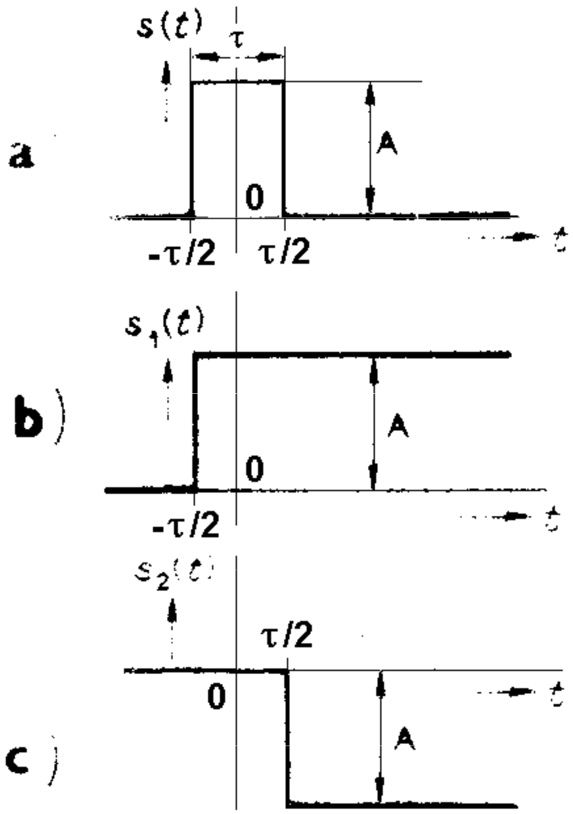
SPEKTRUM DIRACOVA IMPULZU



$\tau \rightarrow 0$

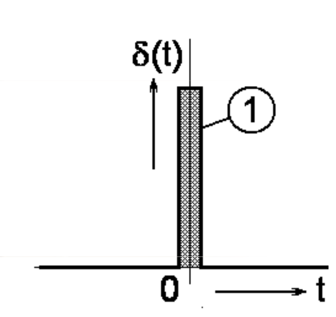
$A \rightarrow \infty$

$A.\tau = 1$



© Institut biostatistiky a analýz

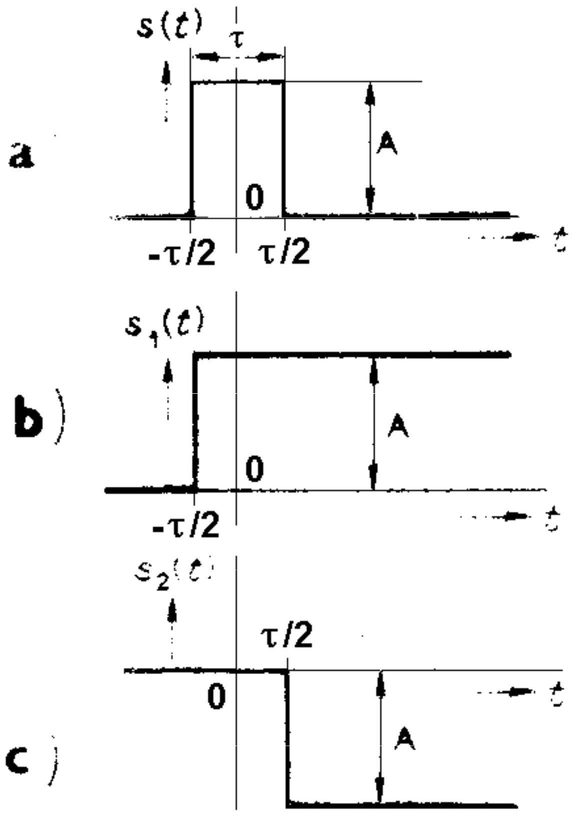
SPEKTRUM DIRACOVA IMPULZU



$\tau \rightarrow 0$

$A \rightarrow \infty$

$A.\tau = 1$



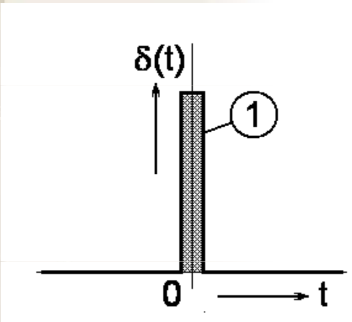
$$S(\omega) = A.\left(\frac{1}{j\omega}.e^{j\omega\tau/2} - \frac{1}{j\omega}.e^{-j\omega\tau/2} \right) =$$

$$= A.\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega} = \ldots =$$

$$= \frac{2A}{\omega}.\sin\frac{\omega\tau}{2} = \ldots = A.\tau.\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}.$$

© Institut biostatistiky a analýz

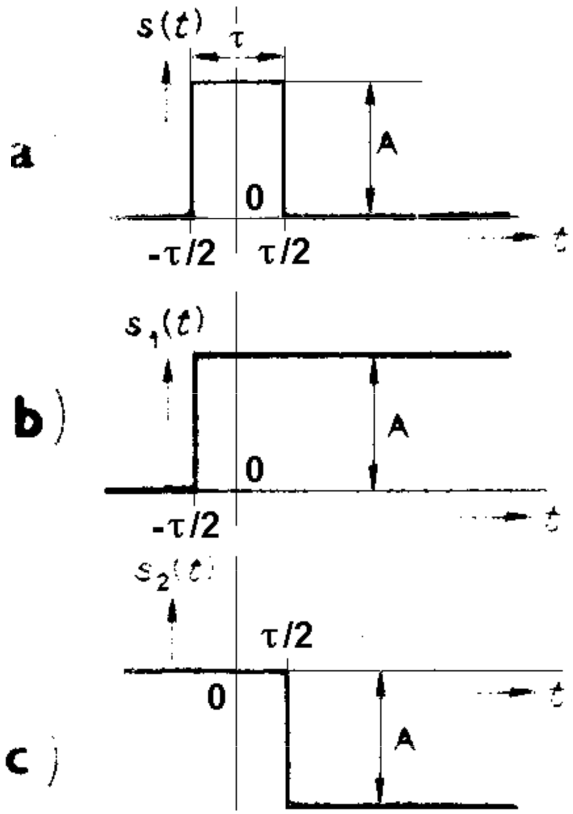
SPEKTRUM DIRACOVA IMPULZU

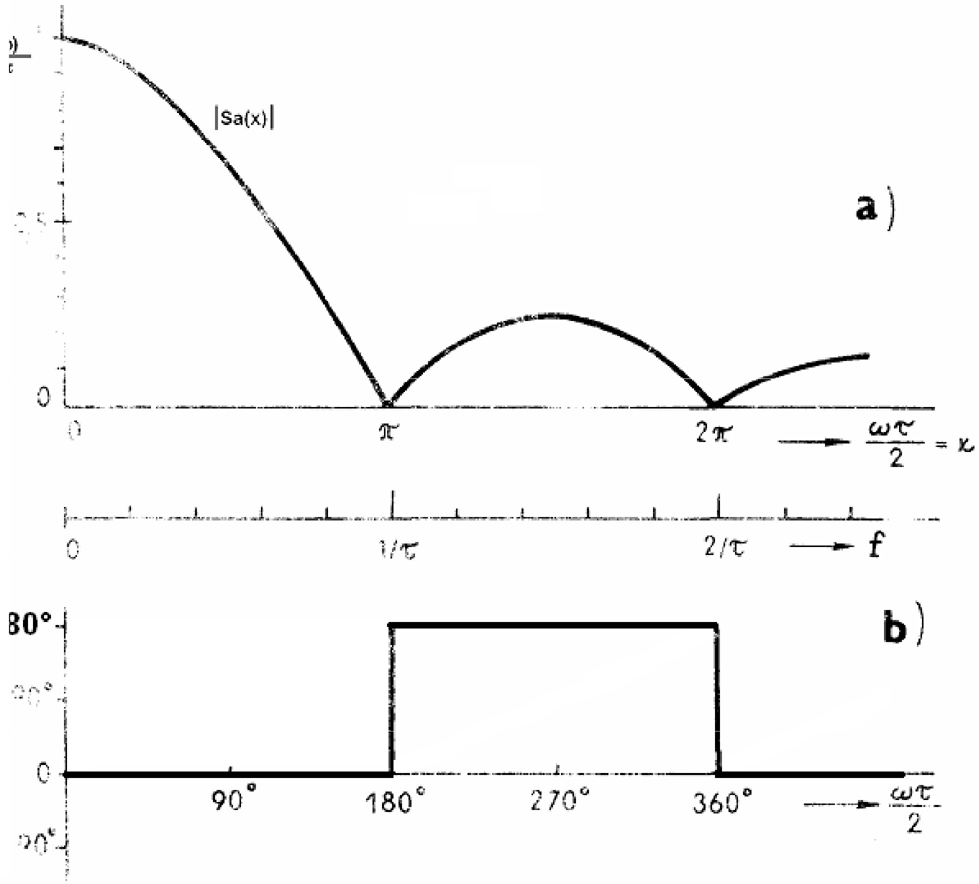


$\tau \rightarrow 0$

$A \rightarrow \infty$

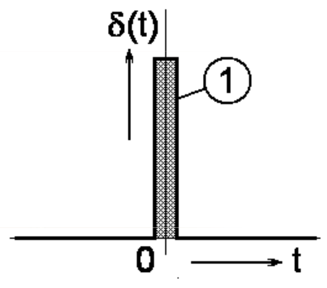
$A.\tau = 1$





© Institut biostatistiky a analýz

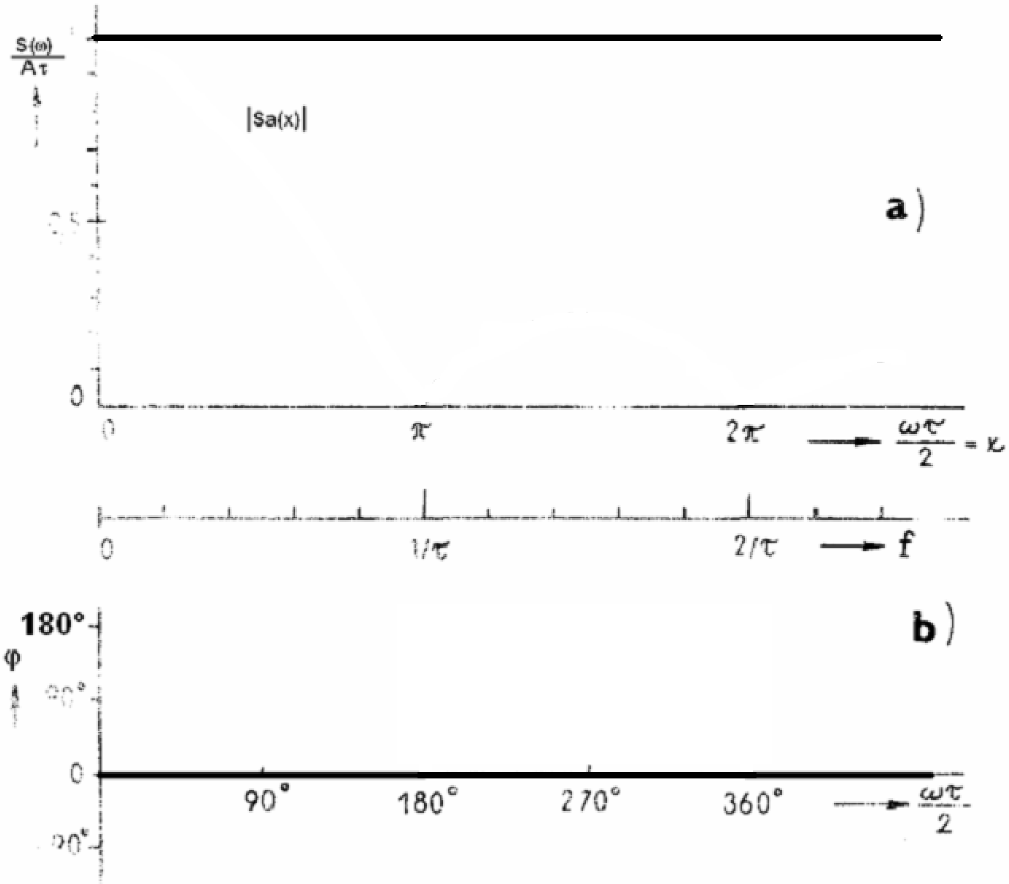
SPEKTRUM DIRACOVA IMPULZU



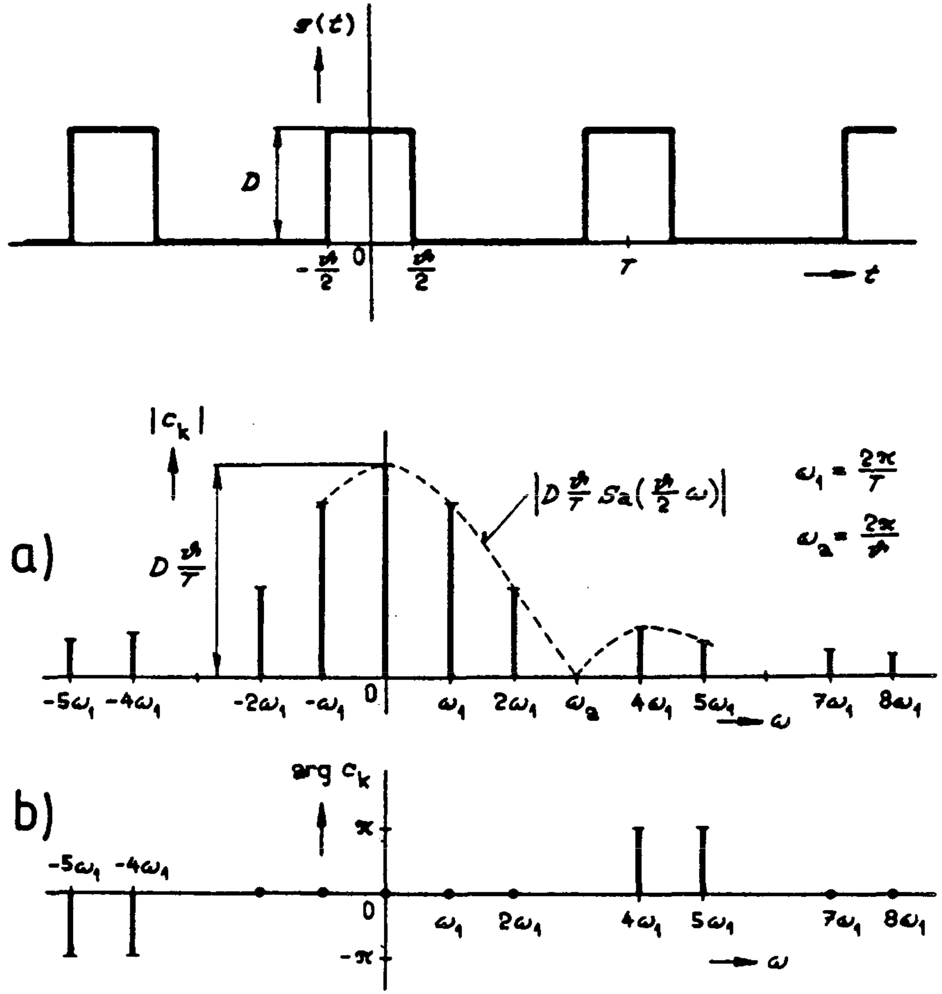
$\tau \rightarrow 0$

$A \rightarrow \infty$

$A.\tau = 1$

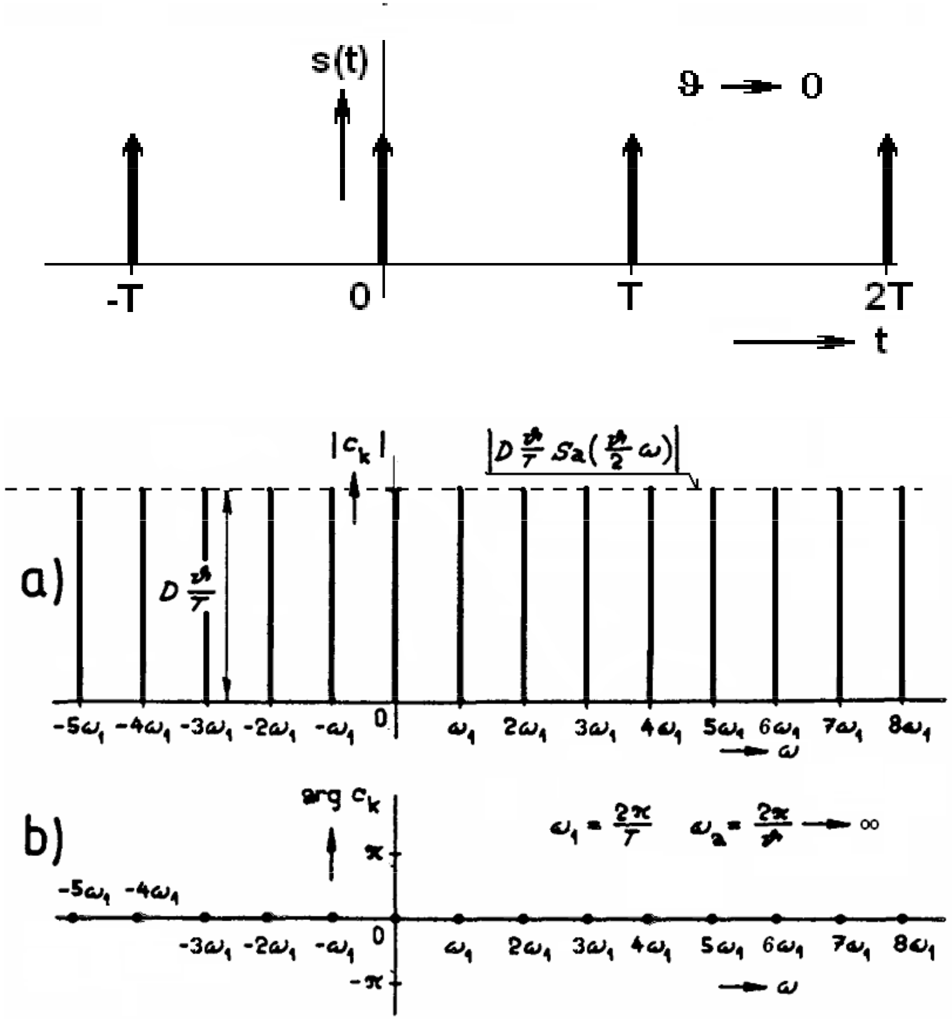


SPEKTRUM PULZU DIRACOVÝCH IMPULZŮ



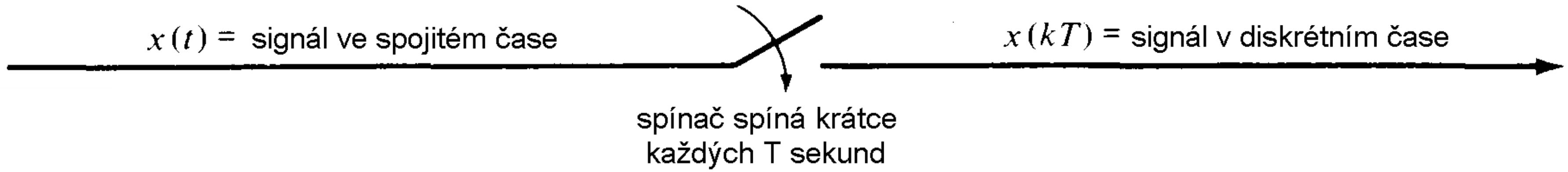
© Institut biostatistiky a analýz

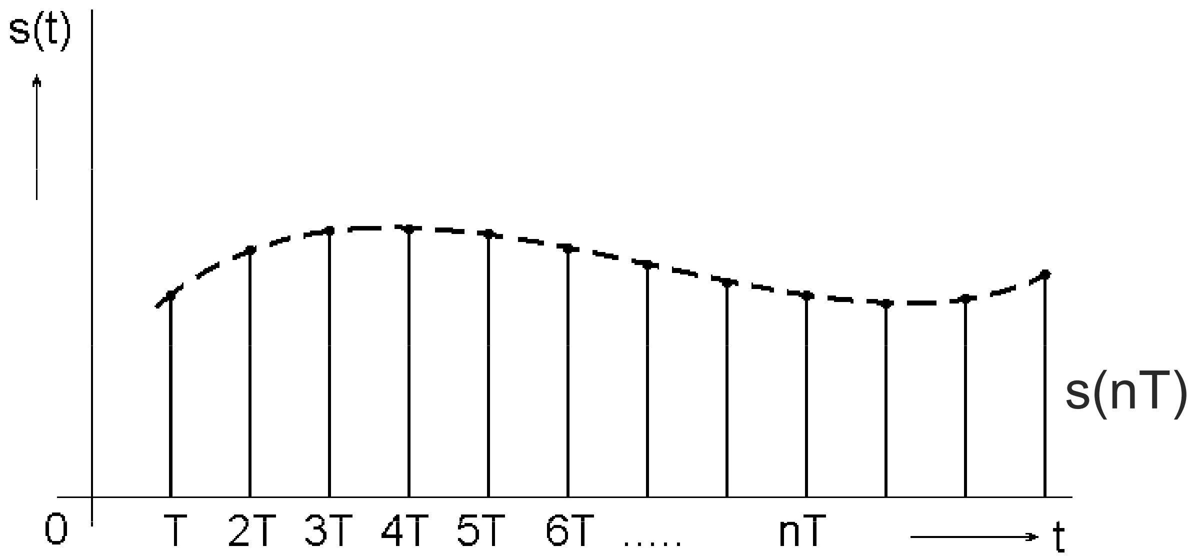
SPEKTRUM PULZU DIRACOVÝCH IMPULZŮ



© Institut biostatistiky a analýz

DISKRÉTNÍ SIGNÁL - VZORKOVÁNÍ

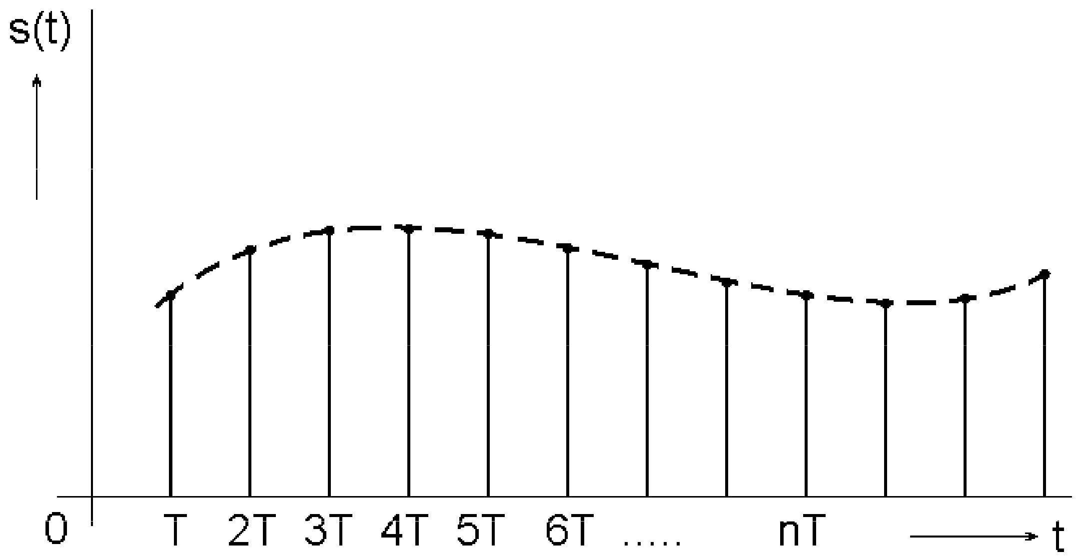




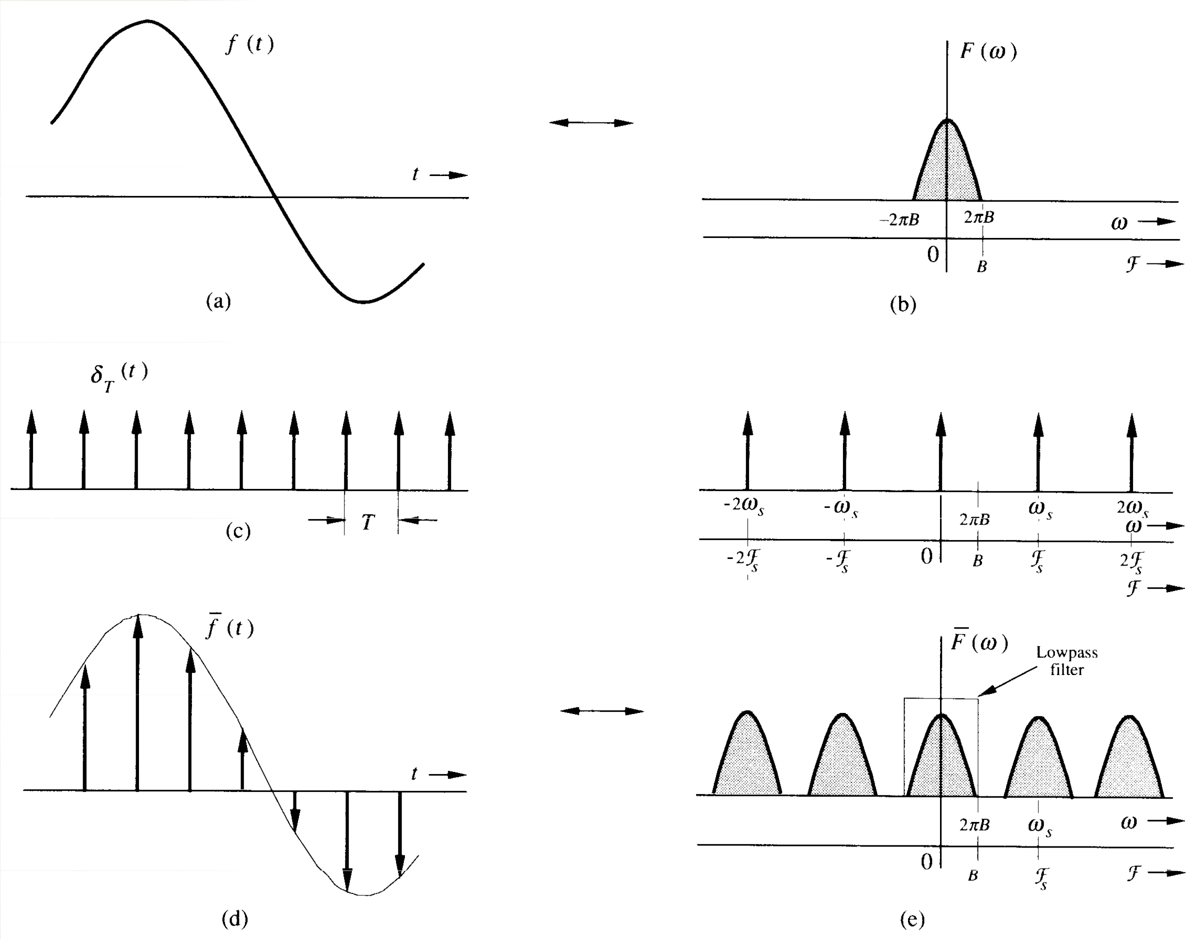
VZORKOVACÍ TEORÉM

$$s(t) \rightarrow s(T_1), s(T_2), s(T_3), \ldots, s(T_n), \ldots$$

$$s(t) \rightarrow s(T), s(2T), s(3T), \ldots, s(nT), \ldots$$



VZORKOVACÍ TEOREM



Vzorkovací frekvence:

$$f_s \geq 2B = f_N,$$

kde B je maximální kmitočet ve vzorkovaném signálu

f_N –

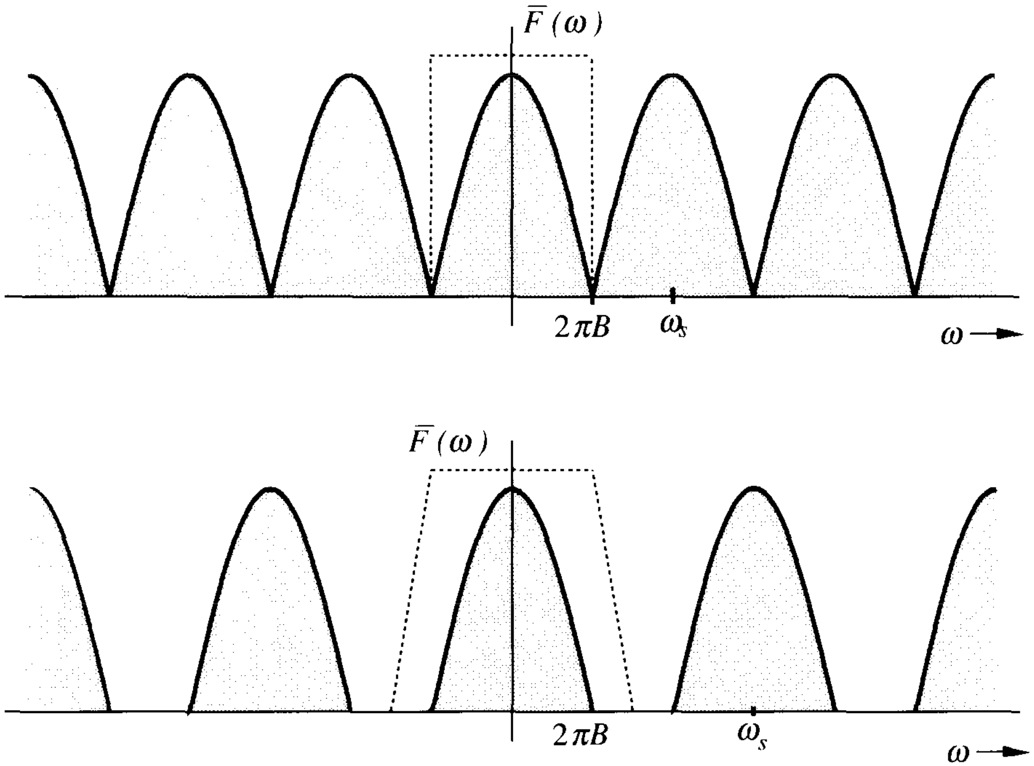
Nyquistův, (Shannonův, Kotelnikovův) kmitočet

$$T_N = 1/f_N = 1/2B$$

Nyquistův interval (perioda), vzorkovací interval (perioda)

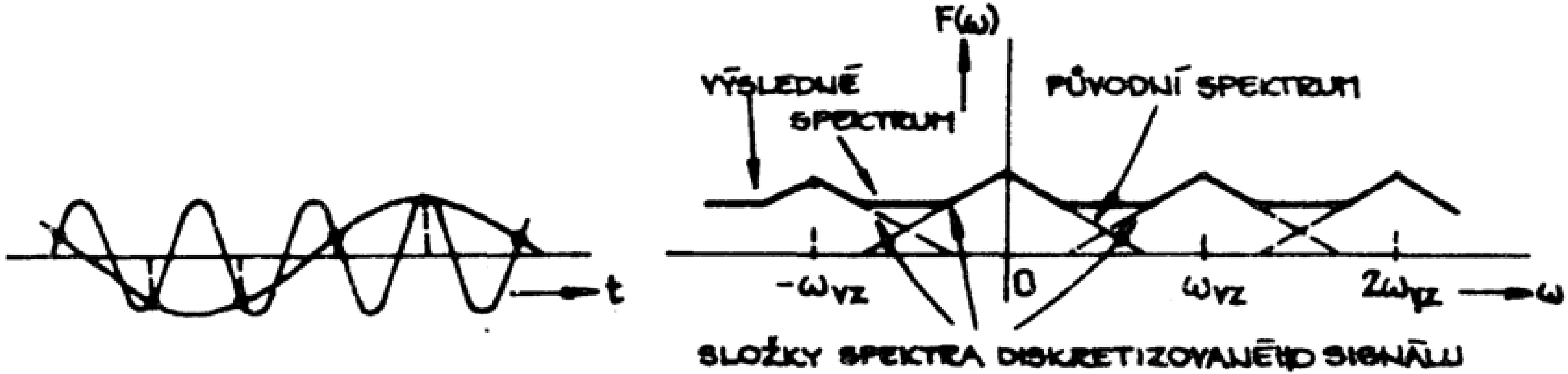
© Institut biostatistiky a analýz

VZORKOVACÍ TEORÉM

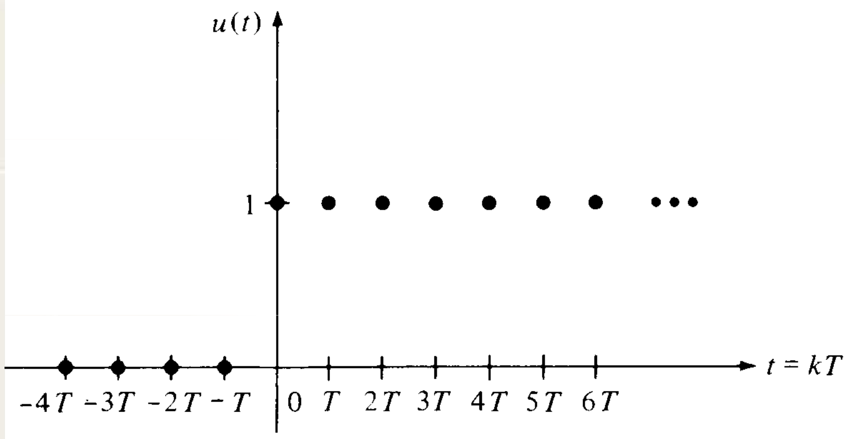


$f_{sr} = (4 \div 5).f_N$

VZORKOVACÍ TEOREM

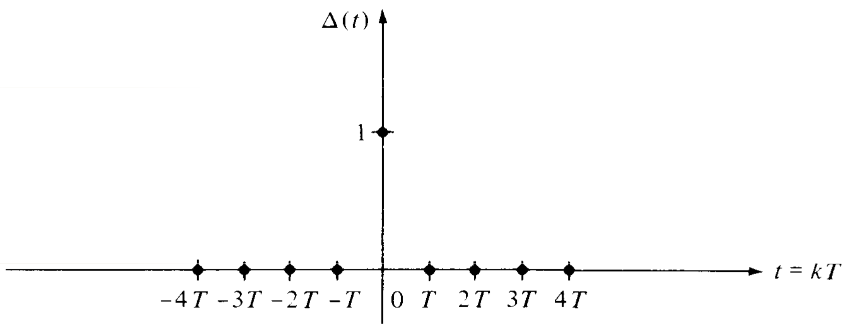


JEDNORÁZOVÉ DISKRÉTNÍ SIGNÁLY



- jednotkový skok

$$\Sigma(t) = \begin{cases} 0, & t = kT, k = \ldots, -2, -1, \\ 1, & t = kT, k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$



- jednotkový impuls

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t = kT, k \neq 0 \end{cases}$$

© Institut biostatistiky a analýz

PERIODICKÉ DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- diskrétní signál x(kT) je periodický s periodou NT, když platí

  $x[(k+N)T] = x(kT)$, pro $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

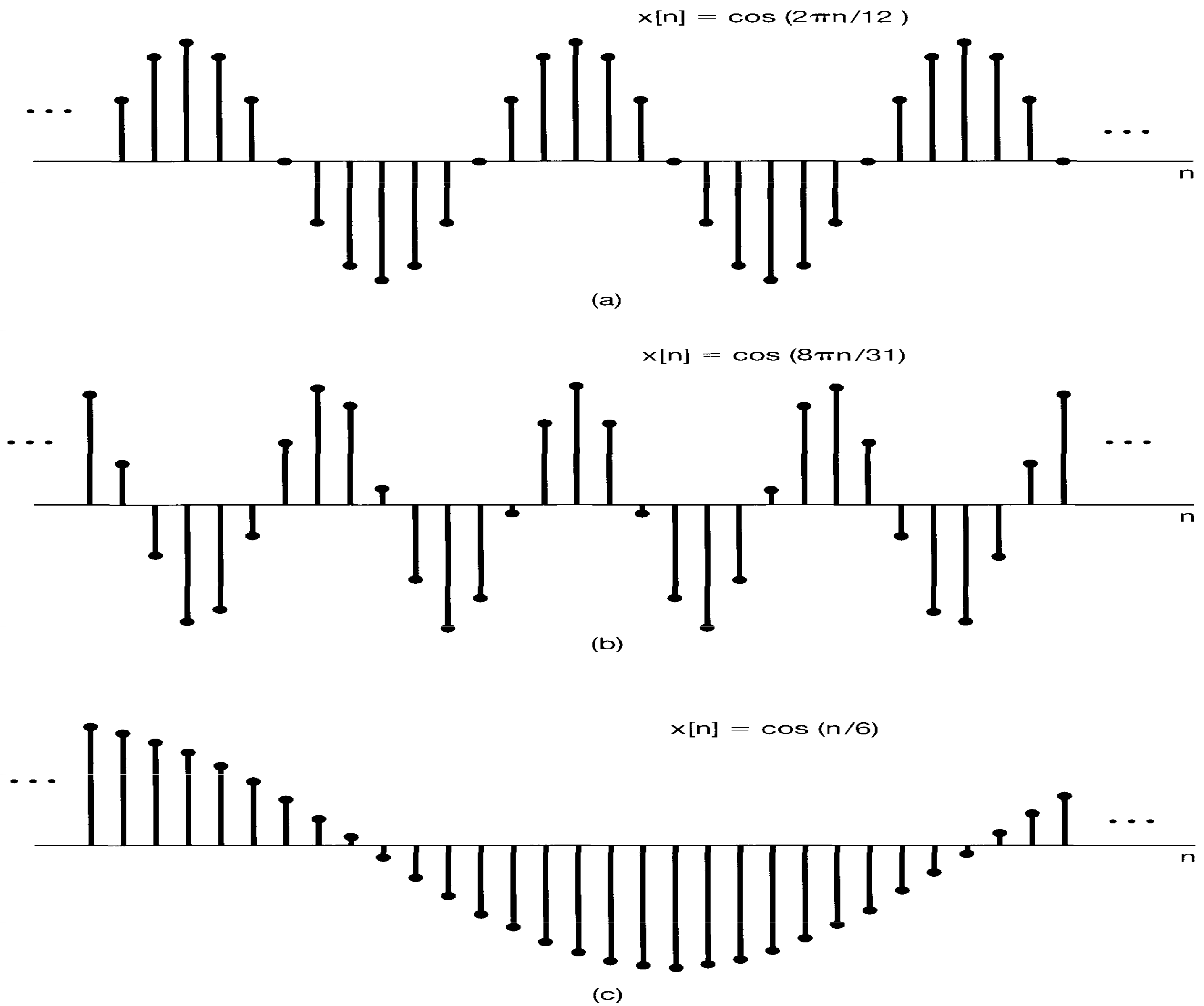
- příklady
  - $x(kT) = A.\cos(2\pi k/N)$
  - $x(kT) = A.\sin(2\pi k/N)$
  - $x(kT) = A.\exp(j2\pi k/N)$

$$x[(k+N)T] = \exp\frac{j2\pi(k+N)}{N} = \exp\frac{j2\pi k}{N}.\exp(j2\pi)$$

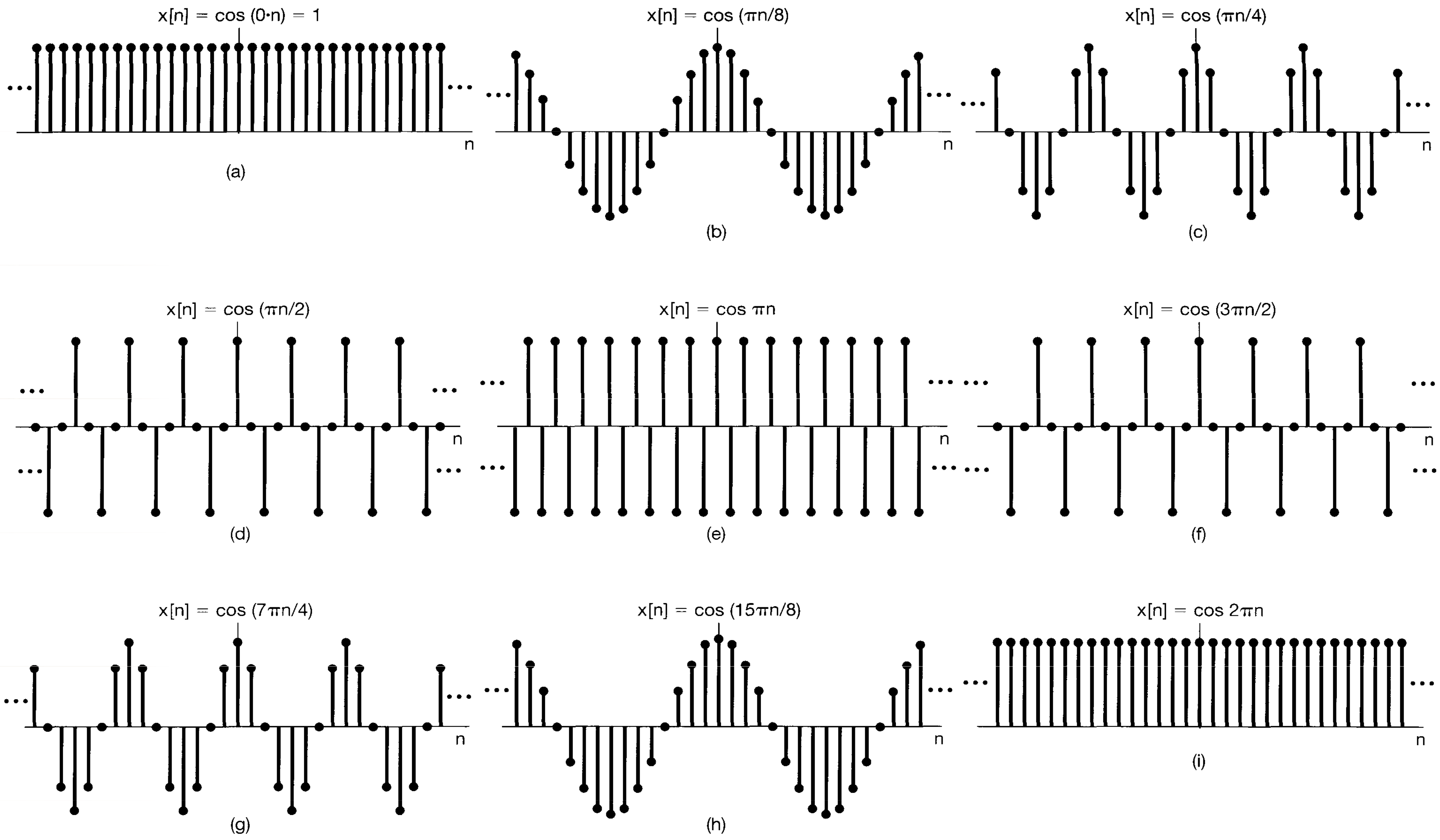
$$\exp(j2\pi) = \cos 2\pi + j\sin 2\pi$$

© Institut biostatistiky a analýz

HARMONICKÝ DISKRÉTNÍ SIGNÁL



HARMONICKÝ DISKRÉTNÍ SIGNÁL



© Institut biostatistiky a analýz

Příprava nových učebních materiálů pro obor Matematická biologie

je podporována projektem ESF

č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318

„VÍCEOBOROVÁ INOVACE STUDIA MATEMATICKÉ BIOLOGIE"

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

© Institut biostatistiky a analýz