



SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTEMY



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz, Kamenice 3, 4. patro, dv.č.424



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

IX. Z TRANSFORMACE SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

Z TRANSFORMACE

definice DTFT - opakování

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \exp(-jk\omega T),$$

$X(\omega)$ je obecně komplexní funkce proměnné ω - kmitočtu

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \exp(j\omega T)^{-k},$$

je-li $z = \exp(j\omega T)$, dostaneme

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k}, \quad \text{oboustranná Z-transformace}$$

Z TRANSFORMACE

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k}, \quad \text{jednostranná Z-transformace}$$

Z-transformace jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT)) = 1$$

Z-transformace posunutého jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT-nT)) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta(kT-nT) z^{-k} = \Delta(0T) z^{-n} = z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

Z TRANSFORMACE

Z-transformace jednotkového skoku

$$U(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$$

vynásobíme-li obě strany $(z-1)$ dostaneme

$$(z-1).U(z) = (z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\dots) - (1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\dots) = z$$

$$U(z) = z/(z-1) = 1/(1-z^{-1})$$

VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

Linearita

$$a.x(k) + b.y(k) \sim a.X(z) + b.Y(z)$$

Posun vpravo $x(k).u(k)$

$$x(k-n).u(k-n) \sim z^{-n}X(z)$$

Posun vpravo $x(k)$

$$x(k-1) \sim z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$x(k-2) \sim z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}.x(-1)$$

⋮

$$x(k-n) \sim z^{-n}X(z) + x(-n) + z^{-1}.x(-n+1) + \dots + z^{-n+1}.x(-1)$$

Je-li $x(m) = 0$ pro $m = -1, -2, \dots, -n$, je

$$x(k-n) \sim z^{-n}X(z),$$

což je totéž jako pro $x(k-n).u(k-n)$.

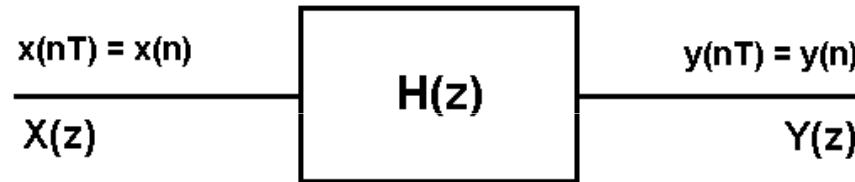
VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

Konvoluce

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^n x(i) \cdot y(n-i) \approx X(z) \cdot Y(z)$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

PŘENOSOVÁ FUNKCE



$$y(nT) = h(nT) * x(nT)$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$H(z) = Y(z)/X(z)$, kde $H(z)$ je racionální lomená funkce proměnné z^{-1} (**obrazová přenosová funkce**)

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

NULOVÉ BODY A PÓLY

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \quad n \leq m$$

$$H(z) = A \cdot \frac{z^{m-n} \prod_{i=1}^n (z - z_{ni})}{\prod_{i=1}^m (z - z_{pi})}$$

A – zesílení; z_{ni} ... nulové body; z_{pi} ... póly

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

DIFERENČNÍ ROVNICE

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_n z^{-m} + b_{n-1} z^{-m+1} + b_{n-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$(b_n z^{-n} + b_{n-1} z^{-n+1} + b_{n-2} z^{-n+2} + \dots + b_0).Y(z) = \\ = (a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0).X(z)$$

$$b_m Y(z).z^{-m} + b_{m-1} Y(z).z^{-m+1} + b_{m-2} Y(z).z^{-m+2} + \dots + b_0.Y(z) = \\ = a_n X(z).z^{-n} + a_{n-1} X(z).z^{-n+1} + a_{n-2} X(z).z^{-n+2} + \dots + a_0.X(z)$$

!!! za předpokladu nulových počátečních podmínek !!!

$$b_m y(iT - mT) + b_{m-1} y(iT - mT + T) + b_{m-2} y(iT - mT + 2T) + \dots + b_0 y(iT) = \\ = a_n x(iT - nT) + a_{n-1} x(iT - nT + T) + a_{n-2} x(iT - nT + 2T) + \dots + a_0 x(iT)$$

$$y(iT) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{b_0} .x(iT - kT) - \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{b_0} .y(iT - kT)$$

diferenční rovnice

SYSTEMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

FREKVENČNÍ PŘENOSOVÁ FUNKCE

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \quad n \leq m$$

$$H(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m}$$

$$z = \exp(j\omega T)$$

$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{j\omega m T} + a_1 e^{j\omega(m-1)T} + a_2 e^{j\omega(m-2)T} + \dots + a_m e^{j\omega 0 T}}{b_0 e^{j\omega m T} + b_1 e^{j\omega(m-1)T} + b_2 e^{j\omega(m-2)T} + \dots + b_m e^{j\omega 0 T}}$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

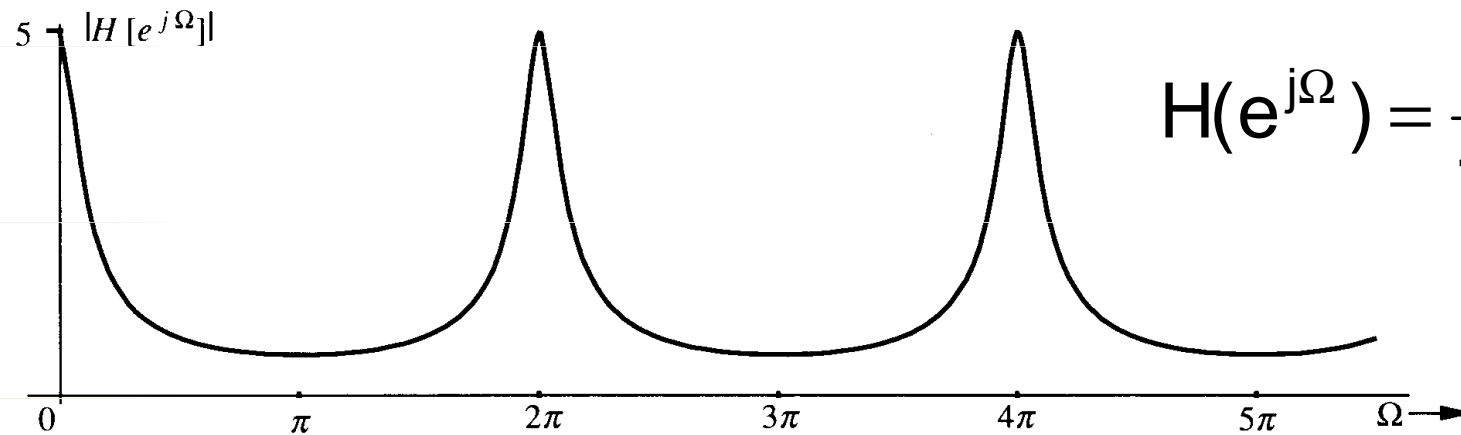
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY

$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{j\omega m T} + a_1 e^{j\omega(m-1)T} + a_2 e^{j\omega(m-2)T} + \dots + a_m e^{j\omega 0 T}}{b_0 e^{j\omega m T} + b_1 e^{j\omega(m-1)T} + b_2 e^{j\omega(m-2)T} + \dots + b_m e^{j\omega 0 T}}$$

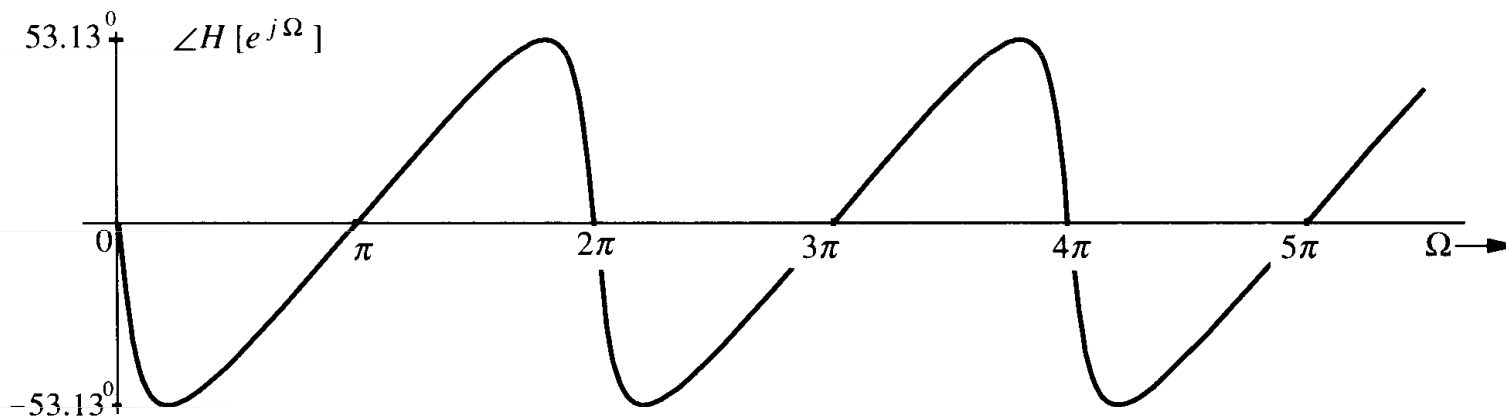
$$H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\varphi}$$

SYSTEMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY



$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 0,8 \cdot e^{-j\Omega}}$$



VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

operátorová přenosová funkce

$$H(p) = Y(p)/X(p)$$

$$H(z) = Y(z)/X(z)$$

$$Y(p) = H(p).X(p)$$

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau).s_2(t - \tau).d\tau \approx S_1(p).S_2(p)$$

konvoluce

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^n x(i).y(n - i) \approx X(z).Y(z)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

za předpokladu, že $X(z) = 1$ máme

$$Y(z) = H(z).1$$

$$y(kT) = h(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

za předpokladu, že $X(z) = 1$ máme

$$Y(z) = H(z) \cdot 1$$

$$y(kT) = h(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

Z-transformace jednotkového impulsu

$$\mathcal{Z}(\Delta(kT)) = 1$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$y(kT) = h(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z) \cdot \mathcal{Z}(\Delta(kT)))$$

odezva na jednotkový impuls -
- impulsová charakteristika

$$y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p) \cdot \mathcal{L}(\delta(t)))$$

$$Y(p) = H(p) = \mathcal{L}(h(t) * \mathcal{L}^{-1}(1))$$

- ✓ impulsní charakteristika a přenosová funkce tvoří transformační pár Laplacovy (Z) transformace.
- ✓ impulsní charakteristika a frekvenční přenos tvoří transformační pár Fourierovy (DFT) transformace.

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ je-li $h(t) = 0$ pro $t > t_0$ ($h(kT) = 0$ pro $k > k_0$) hovoříme o **systemu s konečnou impulsní charakteristikou (KIO – FIR);**
- ☑ není-li $h(t) = 0$ pro $t > t_0$ ($h(kT) = 0$ pro $k > k_0$) hovoříme o **systemu s nekonečnou impulsní charakteristikou (NIO – IIR);**

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

PŘECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA

přechodová charakteristika =

= odezva systému na jednotkový skok

$$\mathcal{L}(\sigma(t)) = 1/p$$

$$Y(p) = G(p) = H(p) \cdot \mathcal{L}(\sigma(t)) = H(p) \cdot 1/p$$

$$\mathcal{Z}(u(kT)) = 1/1-z^{-1} = z/(z-1)$$

$$Y(z) = G(z) = H(z) \cdot z/(z-1)$$

X. ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

- ☑ vstup – primární příčinou dynamiky systému;
- ☑ paměť – sekundární příčina dynamiky systému;



dva základní typy experimentování se systémy

- ☑ zkoumání vlivu počátečního stavu;
- ☑ zkoumání vlivu vstupního signálu

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

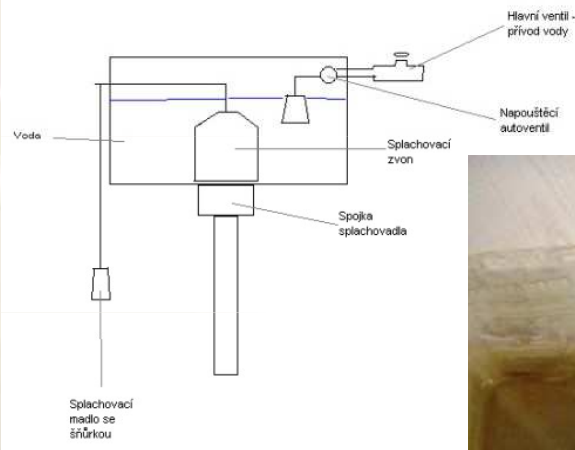
- ☑ v čase t_0 se systém nachází vlivem své předcházející činnosti ve stavu $x(t_0)$ – fyzikální (chemické, biologické,...) počáteční podmínky;
- ☑ bez přivedeného vstupu analyzujeme chování systému – přirozená odezva systému (odezva na počáteční stav – nulové počáteční podmínky)

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU



tendence
(konvergence,
divergence) není
počátečním stavem
ovlivněna



ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

SPOJITÝ SYTÉM

obecně:

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_0 y =$$
$$= a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + a_0 x$$

$$y^{(n)}(0) = y_{n0}; y^{(n-1)}(0) = y_{n-1,0}; \dots, y(0) = y_0$$

bez vstupu:

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_0 y = 0$$

$$y^{(n)}(0) = y_{n0}; y^{(n-1)}(0) = y_{n-1,0}; \dots, y(0) = y_0$$

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

DISKRÉTNÍ SYTÉM

obecně:

$$b_m y(iT - mT) + b_{m-1} y(iT - mT + T) + b_{m-2} y(iT - mT + 2T) + \dots + b_0 y(iT) = \\ = a_n x(iT - nT) + a_{n-1} x(iT - nT + T) + a_{n-2} x(iT - nT + 2T) + \dots + a_0 x(iT)$$

$$y(-mT) = y_{-m,0}; \quad y(-mT + T) = y_{-m+1,0}; \quad \dots, \quad y(0) = y_{0,0}$$

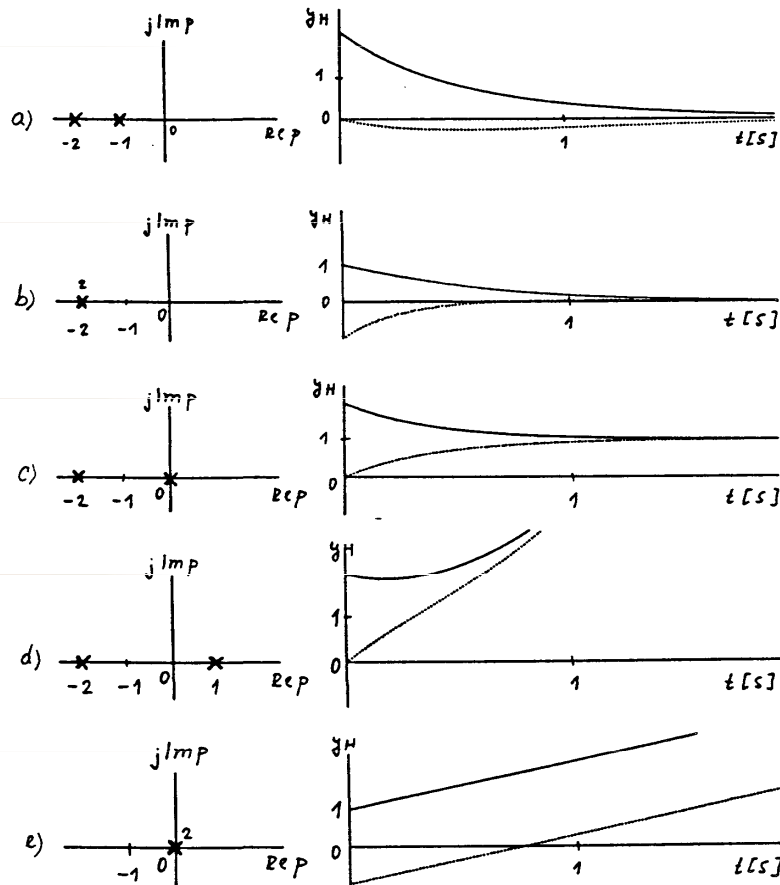
bez vstupu:

$$b_m y(iT - mT) + b_{m-1} y(iT - mT + T) + b_{m-2} y(iT - mT + 2T) + \dots + b_0 y(iT) = 0$$

$$y^{(n)}(0) = y_{n0}; \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1,0}; \quad \dots, \quad y(0) = y_0$$

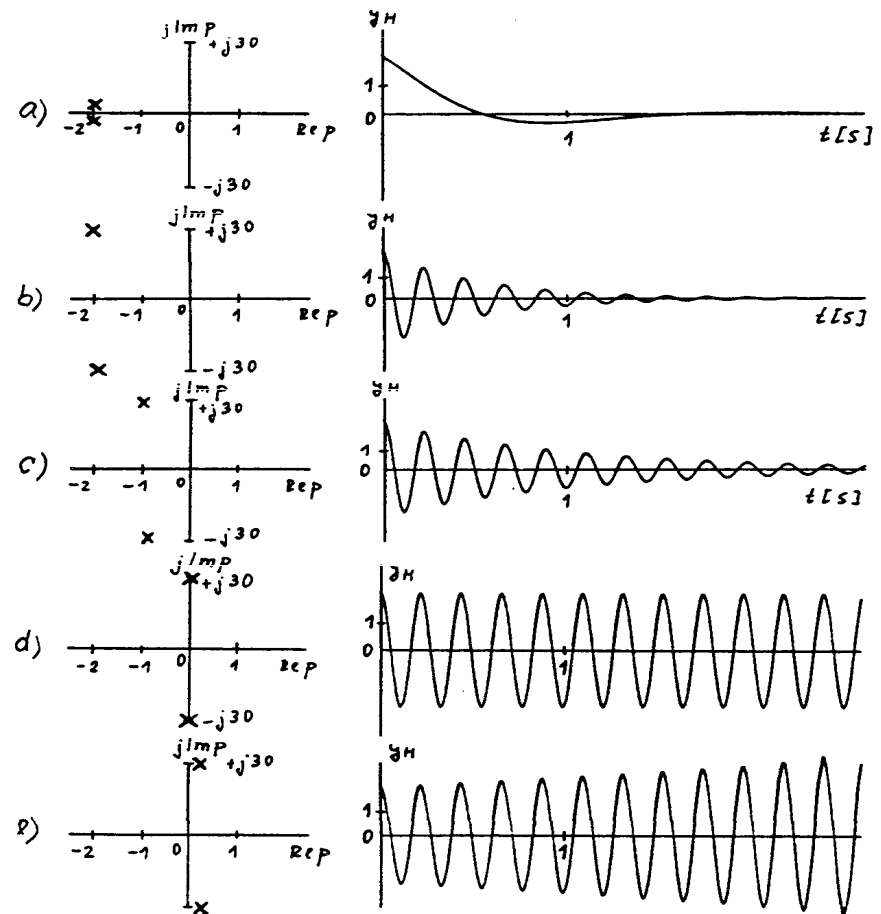
ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU



Přirozená odezva systému 2. řádu pro různá rozložení reálných pólů a různé integrační konstanty C_1 a C_2 . Plná čára: $C_1 = C_2 = 1$. Tečkovaná čára: $C_1 = -1, C_2 = 1$.

- a) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ $y_H(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$
- b) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ $y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$
- c) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0$ $y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2$
- d) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ $y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$
- e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $y_H(t) = C_1 + C_2 t$



Přirozená odezva systému 2. řádu pro různá rozložení komplexních pólů a integrační konstanty $C_1 = C_2 = 1$.

- a) $\lambda_1 = -2 + j3, \lambda_2 = -2 - j3$ $y_H(t) = 2e^{-2t} \cos(3t)$
- b) $\lambda_1 = -2 + j30, \lambda_2 = -2 - j30$ $y_H(t) = 2e^{-2t} \cos(30t)$
- c) $\lambda_1 = -1 + j30, \lambda_2 = -1 - j30$ $y_H(t) = 2e^{-t} \cos(30t)$
- d) $\lambda_1 = j30, \lambda_2 = -j30$ $y_H(t) = 2 \cos(30t)$
- e) $\lambda_1 = 0.2 + j30, \lambda_2 = 0.2 - j30$ $y_H(t) = 2e^{0.2t} \cos(30t)$

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

Přirozená odezva –

- ☑ časem zaniká – **asymptoticky stabilní systém** vzhledem k počátečním podmínkám;
- ☑ ustálí se v konečných mezích (periodicky osciluje nebo je konstantní) – **stabilní systém** nebo **systém na mezi stability** vzhledem k počátečním podmínkám;
- ☑ neohraničeně roste – **nestabilní systém** vzhledem k počátečním podmínkám

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

Ize zjišťovat:

- ☑ **dynamické vlastnosti** (tvar přechodu do nového stavu - rychlost přechodu, monotónnost či kmitání, frekvence kmitání, apod.);
- ☑ **linearitu** (sledováním podobnosti odezev při různých počátečních stavech);
- ☑ **stabilitu** (sledováním konvergence);

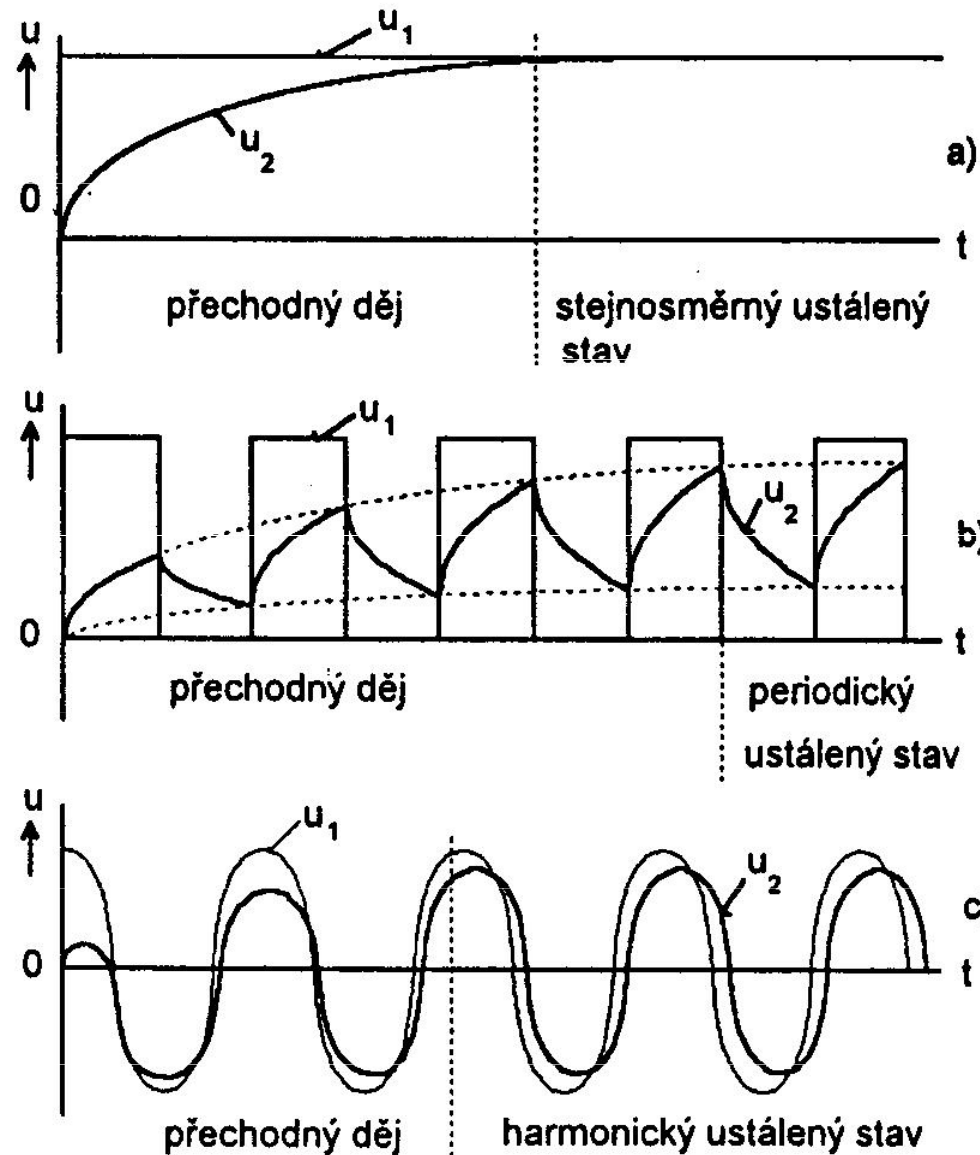
ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU VSTUPNÍHO SIGNÁLU

- ✓ systém se musí nacházet v nulovém počátečním stavu;
- ✓ odpověď systému při nulovém počátečním stavu – **vnucená (vynucená) odezva**;
- ✓ můžeme sledovat chování systému buzeného signály očekávaného průběhu – impulsová odezva, přechodová odezva, frekvenční charakteristika

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU VSTUPNÍHO SIGNÁLU



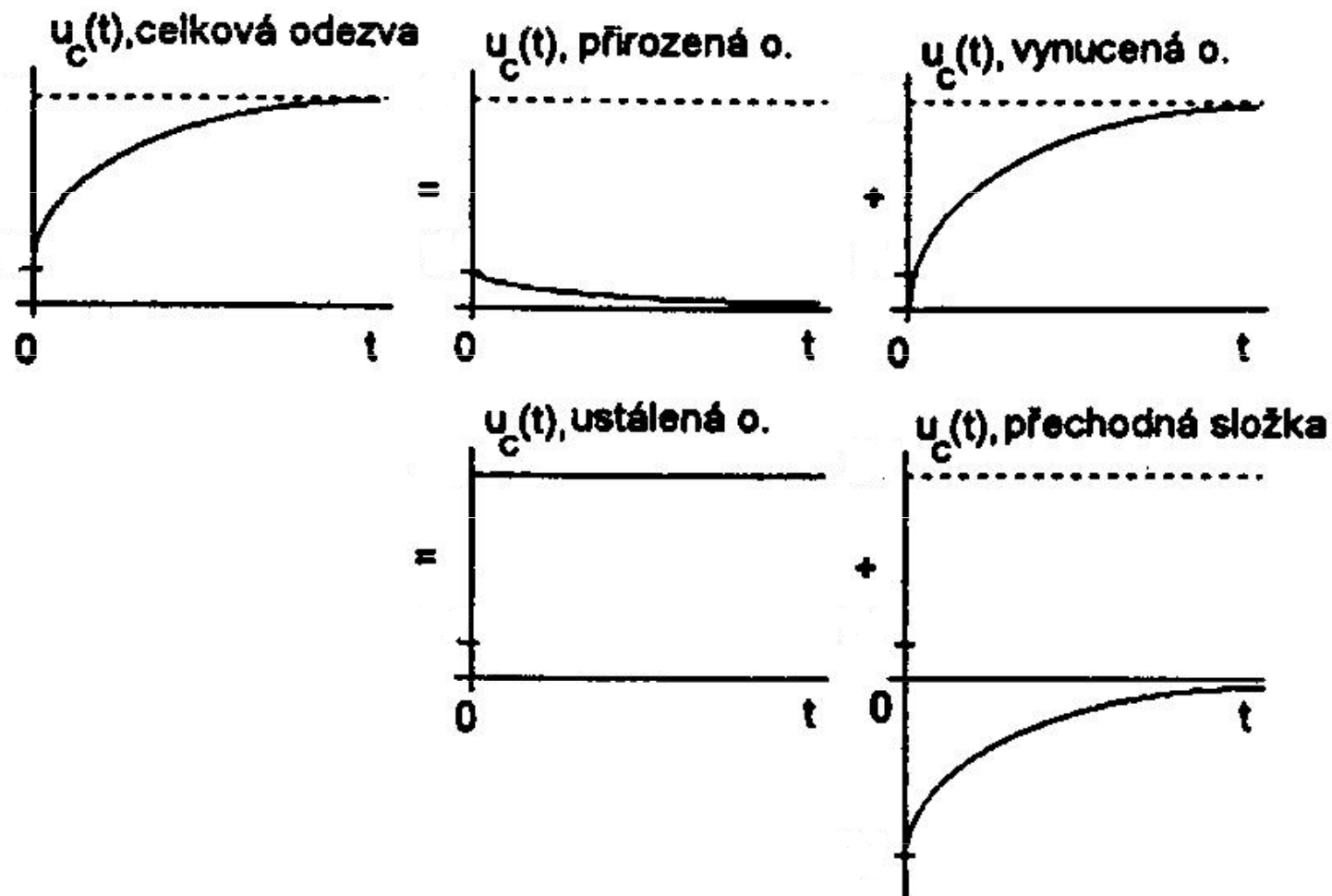
ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

- ☑ **přechodný děj** - popis chování systému z počátečního do koncového stavu
- ☑ **ustálený stav** - stav kdy zaniká pohyb systému (stejnoseměrný ustálený stav) – není to v jediném okamžiku, ale v časovém intervalu
- ☑ **rovnovážný stav** - stabilní, nestabilní

celková odezva = přirozená odezva + vnucená odezva

!!!POZOR !!! platí to jen u lineárních systémů

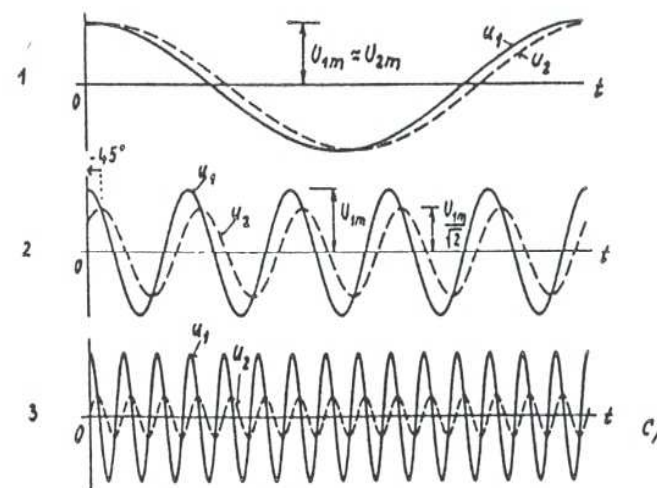
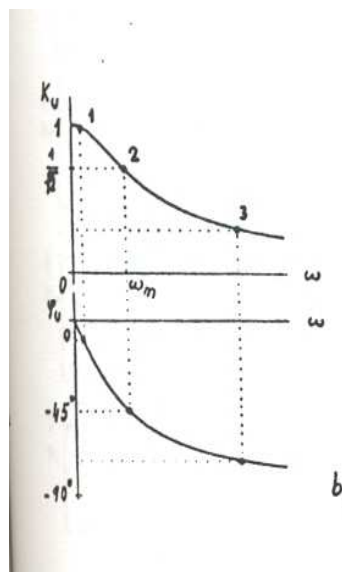
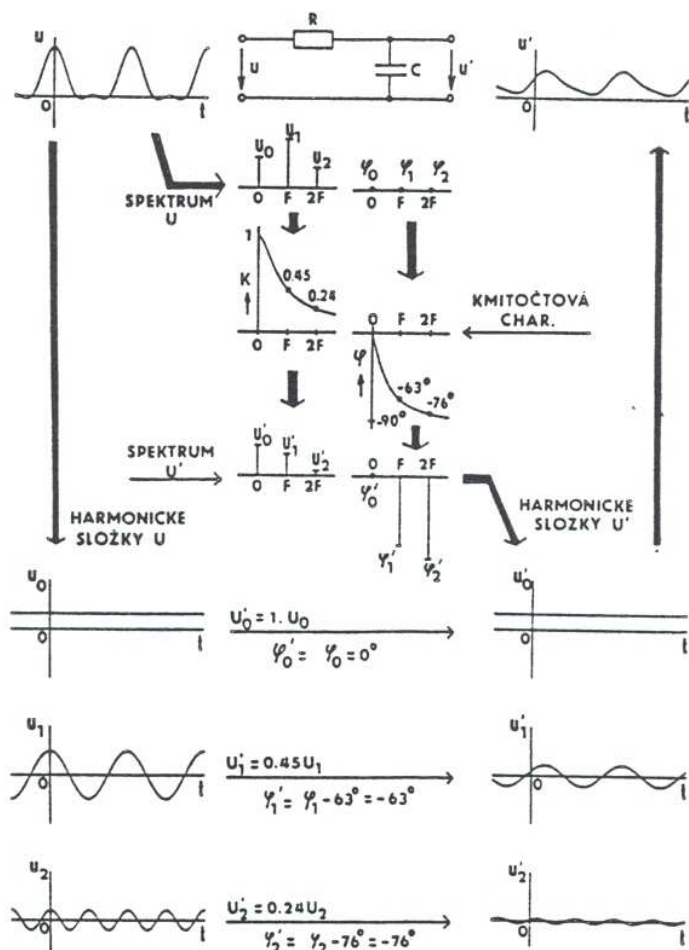
ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH



celková odezva = přechodná odezva + ustálená odezva

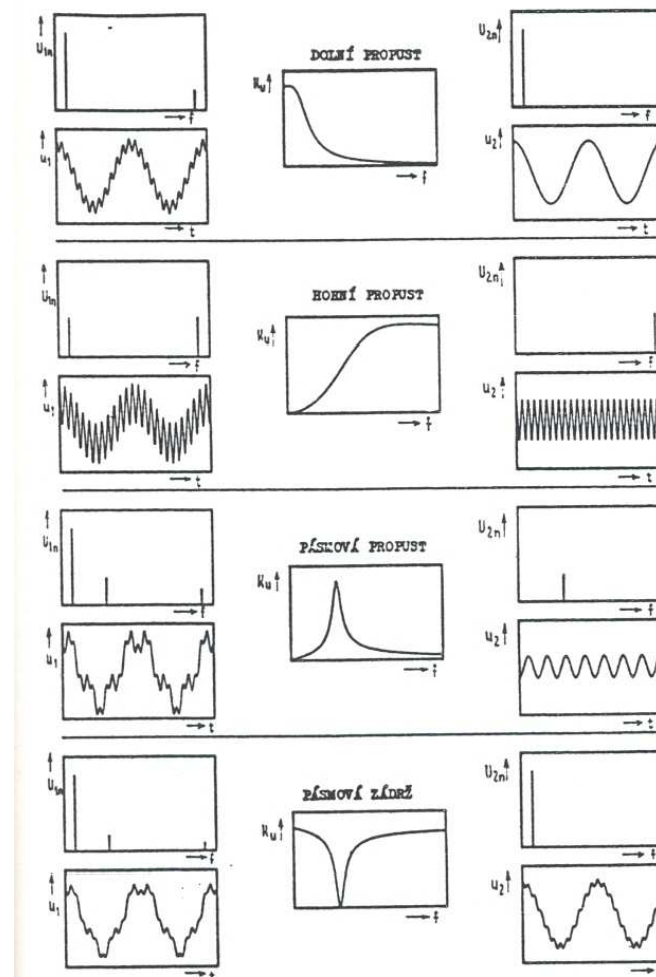
ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

TEST NA HARMONICKÝ SIGNÁL KMITOČTOVÁ CHARAKTERISTIKA



ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

KMITOČTOVÁ CHARAKTERISTIKA LINEÁRNÍ FREKVENČNÍ FILTRACE



Příprava nových učebních materiálů pro obor Matematická biologie

je podporována projektem ESF

č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318

„VÍCEOBOROVÁ INOVACE STUDIA MATEMATICKÉ BIOLOGIE“



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ