

Signály a soustavy

Garant předmětu:

Prof. Ing. Vladimír Šebesta, CSc.

Autoři textu:

Prof. Ing. Vladimír Šebesta, CSc.

Prof. Ing. Zdeněk Smékal, CSc.

Obsah

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | ÚVOD | 7 |
| 1.1 | PŘÍKLADY SIGNÁLŮ | 7 |
| 1.1.1 | <i>Signál EKG</i> | 7 |
| 1.1.2 | <i>Řečový signál</i> | 8 |
| 1.1.3 | <i>Hudební signál</i> | 9 |
| 1.1.4 | <i>Datové signály</i> | 10 |
| 1.1.5 | <i>Obrazový signál</i> | 11 |
| 1.2 | DEFINICE SIGNÁLU | 12 |
| 1.2.1 | <i>Bližší vymezení pojmu signál</i> | 12 |
| 1.2.2 | <i>Matematické modely signálu</i> | 14 |
| 1.3 | ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY | 15 |
| 1.3.1 | <i>Operace s jedním signálem</i> | 15 |
| 1.3.2 | <i>Operace se dvěma signály</i> | 17 |
| 1.4 | SYSTÉMY A JEJICH TŘÍDĚNÍ | 20 |
| 1.4.1 | <i>Definice systému</i> | 20 |
| 1.4.2 | <i>Třídění systémů</i> | 23 |
| 2 | PERIODICKÝ SIGNÁL | 25 |
| 2.1 | HARMONICKÝ SIGNÁL | 25 |
| 2.1.1 | <i>Model harmonického signálu</i> | 25 |
| 2.1.2 | <i>Spektrum harmonického signálu</i> | 27 |
| 2.2 | OBEČNÝ PERIODICKÝ SIGNÁL | 28 |
| 2.2.1 | <i>Definice periodického signálu</i> | 28 |
| 2.2.2 | <i>Fourierova řada</i> | 28 |
| 2.3 | SPEKTRA PERIODICKÝCH SIGNÁLŮ | 31 |
| 2.3.1 | <i>Funkce sinc(.)</i> | 31 |
| 2.3.2 | <i>Odvození vzorce pro integrál</i> | 32 |
| 2.3.3 | <i>Spektrum periodických obdélníkových impulzů</i> | 32 |
| 2.3.4 | <i>Poučky o spektrech</i> | 34 |
| 2.4 | ZOBECNĚNÍ FOURIEROVY ŘADY | 35 |
| 3 | SIGNÁLY SE SPOJITÝM SPEKTRÉM | 38 |
| 3.1 | ZAVEDENÍ FOURIEROVY TRANSFORMACE | 38 |
| 3.2 | POUČKY O SPEKTRECH | 40 |
| 3.2.1 | <i>Vlastnosti spektrální funkce</i> | 40 |
| 3.2.2 | <i>Linearita zobrazení</i> | 40 |
| 3.2.3 | <i>Posunutí v čase</i> | 40 |
| 3.2.4 | <i>Změna časového měřítka</i> | 40 |
| 3.2.5 | <i>Spektrum konvoluce</i> | 41 |
| 3.2.6 | <i>Spektrální hustota energie</i> | 42 |
| 3.3 | SPEKTRA VYBRANÝCH SIGNÁLŮ | 43 |
| 3.3.1 | <i>Jednotkový impulz</i> | 43 |
| 3.3.2 | <i>Jednotkový skok</i> | 44 |
| 3.3.3 | <i>Stejnoseměrný signál</i> | 46 |
| 3.3.4 | <i>Harmonický signál</i> | 47 |
| 3.3.5 | <i>Obdélníkový impulz</i> | 47 |
| 3.3.6 | <i>Periodický sled jednotkových impulzů</i> | 48 |
| 3.3.7 | <i>Zpětný obraz signálu s obdélníkovým spektrem</i> | 49 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | SYSTÉMY SE SPOJITÝM ČASEM | 51 |
| 4.1 | CHARAKTERISTIKY LINEÁRNÍHO NEPARAMETRICKÉHO SYSTÉMU | 51 |
| 4.2 | IDEÁLNÍ PŘENOSOVÝ ČLÁNEK | 54 |
| 4.3 | KMITOČTOVÉ FILTRY | 56 |
| 5 | NÁHODNÉ SIGNÁLY SE SPOJITÝM ČASEM..... | 58 |
| 5.1 | PROČ NÁHODNÉ PROCESY | 58 |
| 5.2 | DEFINICE NÁHODNÉHO PROCESU..... | 58 |
| 5.3 | MNOŽINA REALIZACÍ | 59 |
| 5.4 | DISTRIBUČNÍ FUNKCE A FUNKCE HUSTOTY ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOTI | 60 |
| 5.5 | MOMENTY..... | 61 |
| 5.6 | STACIONARITA..... | 61 |
| 5.7 | ERGODICITA..... | 62 |
| 5.8 | SPEKTRÁLNÍ HUSTOTA VÝKONU..... | 63 |
| 6 | ANALOGOVÉ A ČÍSLICOVÉ SIGNÁLY | 65 |
| 6.1 | PROČ? | 65 |
| 6.2 | IDEÁLNÍ VZORKOVÁNÍ..... | 67 |
| 6.3 | NÁVRAT OD VZORKŮ K PŮVODNÍMU SIGNÁLU | 69 |
| 6.4 | VÝŠKOVÉ KVANTOVÁNÍ..... | 70 |
| 6.5 | A/D A D/A PŘEVOD | 72 |
| 7 | SIGNÁLY S DISKRÉTNÍM ČASEM..... | 75 |
| 7.1 | DISKRÉTNÍ ČAS | 75 |
| 7.2 | ZÁKLADNÍ DISKRÉTNÍ SIGNÁLY | 75 |
| 7.2.1 | <i>Jednotkový impulz</i> | 75 |
| 7.2.2 | <i>Jednotkový skok</i> | 75 |
| 7.2.3 | <i>Harmonický signál</i> | 76 |
| 7.2.4 | <i>Exponenciální posloupnosti</i> | 77 |
| 7.3 | OPERACE SE SIGNÁLY | 77 |
| 7.3.1 | <i>Přiřazení periodické posloupnosti posloupnosti délky N</i> | 77 |
| 7.3.2 | <i>Okno</i> | 78 |
| 7.3.3 | <i>Lineární konvoluce</i> | 79 |
| 7.3.4 | <i>Kruhové posunutí</i> | 79 |
| 7.3.5 | <i>Kruhová konvoluce</i> | 79 |
| 8 | DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE..... | 82 |
| 8.1 | FOURIEROVA TRANSFORMACE DISKRÉTNÍHO SIGNÁLU..... | 82 |
| 8.2 | DISKRÉTNÍ FOURIEROVA ŘADA | 83 |
| 8.2.1 | <i>Definice diskrétní Fourierovy řady</i> | 83 |
| 8.2.2 | <i>Vlastnosti diskrétní Fourierovy řady</i> | 83 |
| 8.3 | DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE | 85 |
| 8.3.1 | <i>Definice diskrétní Fourierovy transformace</i> | 85 |
| 8.3.2 | <i>Vlastnosti obrazu</i> | 86 |
| 8.4 | RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE | 87 |
| 9 | NÁHODNÉ SIGNÁLY S DISKRÉTNÍM ČASEM..... | 93 |
| 9.1 | DEFINICE NÁHODNÉHO SIGNÁLU S DISKRÉTNÍM ČASEM | 93 |
| 9.2 | MNOŽINA REALIZACÍ | 94 |
| 9.3 | MOMENTY..... | 97 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 9.4 | STACIONARITA A ERGODICITA | 97 |
| 9.5 | SPEKTRÁLNÍ HUSTOTA VÝKONU | 97 |
| 10 | SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM | 101 |
| 10.1 | LINEÁRNÍ STACIONÁRNÍ SYSTÉM | 101 |
| 10.2 | IMPULZNÍ CHARAKTERISTIKA | 102 |
| 10.3 | SPOJOVÁNÍ DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ LTI | 103 |
| 10.4 | PŘENOSOVÁ FUNKCE SYSTÉMU LTI | 104 |
| 10.5 | REALIZAČNÍ MOŽNOSTI | 105 |
| 10.6 | KMITOČTOVÉ CHARAKTERISTIKY | 107 |
| 11 | SDĚLOVACÍ SOUSTAVA A JEJÍ CHARAKTERISTIKY | 111 |
| 11.1 | SDĚLOVACÍ SOUSTAVA | 111 |
| 11.2 | PŘENOS V ZÁKLADNÍM PÁSMU | 115 |
| 11.2.1 | <i>Binární signál</i> | 115 |
| 11.2.2 | <i>Čtyřstavový signál</i> | 115 |
| 11.2.3 | <i>Šířka spektra</i> | 116 |
| 11.2.4 | <i>Signál a rušení</i> | 118 |
| 11.2.5 | <i>Mezisymbolové přeslechy</i> | 120 |
| 12 | SIGNÁLY PRO PŘENOS V PŘELOŽENÉM PÁSMU | 125 |
| 12.1 | ANALOGOVÉ MODULACE | 125 |
| 12.1.1 | <i>Amplitudová modulace</i> | 125 |
| 12.1.2 | <i>Kmitočtová modulace</i> | 127 |
| 12.2 | ČÍSLICOVÉ MODULACE | 128 |
| 12.2.1 | <i>Amplitudové klíčování</i> | 128 |
| 12.2.2 | <i>Kmitočtové klíčování</i> | 129 |
| 12.2.3 | <i>Fázové klíčování</i> | 130 |
| 12.3 | SIGNÁLY MNOHOKANÁLOVÝCH SOUSTAV | 132 |
| 12.3.1 | <i>Multiplexy</i> | 132 |
| 12.3.2 | <i>Mnohokanálové přístupy</i> | 133 |
| 13 | DODATKY | 135 |
| 13.1 | OPERACE S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY | 135 |
| 13.2 | TRANSFORMACE Z | 137 |
| 13.2.1 | <i>Zavedení transformace Z</i> | 137 |
| 13.2.2 | <i>Vlastnosti transformace Z</i> | 137 |
| 13.2.3 | <i>Výpočty obrazů</i> | 138 |
| 13.3 | KORELACE | 139 |
| 13.3.1 | <i>Korelační funkce periodického signálu</i> | 139 |
| 13.3.2 | <i>Náhodný proces se spojitým časem</i> | 140 |
| 13.3.3 | <i>Náhodný proces s diskrétním časem</i> | 141 |
| 13.4 | VÝSLEDKY TESTŮ | 142 |
| 13.5 | VLASTNOSTI ZOBRAZENÍ V TABULKÁCH | 146 |
| 13.6 | ÚVOD DO MATLABU | 147 |

Seznam obrázků

| | | |
|----------------------|---|----|
| OBRÁZEK 1.1: | SIGNÁL EKG..... | 7 |
| OBRÁZEK 1.2: | ŘEČOVÝ SIGNÁL..... | 8 |
| OBRÁZEK 1.3: | TÓNY FLÉTNY (NAHOŘE) A KLAVÍRU (DOLE)..... | 9 |
| OBRÁZEK 1.4: | SIGNÁLOVÉ PRVKY NRZ..... | 10 |
| OBRÁZEK 1.5: | BINÁRNÍ SIGNÁL..... | 10 |
| OBRÁZEK 1.6: | OBRAZ SLOŽENÝ Z PIXELŮ..... | 11 |
| OBRÁZEK 1.7: | DIGITÁLNÍ OBRAZOVÝ SIGNÁL..... | 11 |
| OBRÁZEK 1.8: | SIGNÁL A JEHO MATEMATICKÝ MODEL..... | 12 |
| OBRÁZEK 1.9: | SIGNÁL S DISKRÉTNÍM ČASEM..... | 13 |
| OBRÁZEK 1.10: | ZMĚNA ČASOVÉHO MĚŘÍTKA..... | 14 |
| OBRÁZEK 1.11: | POSUNUTÍ V ČASE..... | 15 |
| OBRÁZEK 1.12: | OBRÁCENÍ ČASOVÉ OSY..... | 16 |
| OBRÁZEK 1.13: | OPERACE SE DVĚMA SIGNÁLY..... | 17 |
| OBRÁZEK 1.14: | KONVOLUCE..... | 18 |
| OBRÁZEK 1.15: | KORELACE DVOU SIGNÁLŮ..... | 19 |
| OBRÁZEK 1.16: | DYNAMICKÝ SYSTÉM..... | 21 |
| OBRÁZEK 1.17: | PŘÍKLAD ELEKTRICKÉHO SYSTÉMU..... | 21 |
| OBRÁZEK 1.18: | PRŮBĚH PŘECHODNÉHO DĚJE..... | 22 |
| OBRÁZEK 1.19: | PŘECHODNÝ DĚJ PŘI NENULOVÉM POČÁTEČNÍM STAVU..... | 22 |
| OBRÁZEK 2.1: | MODEL HARMONICKÉHO SIGNÁLU..... | 26 |
| OBRÁZEK 2.2: | SPEKTRUM MODULŮ..... | 27 |
| OBRÁZEK 2.3: | SPEKTRUM ARGUMENTŮ..... | 27 |
| OBRÁZEK 2.4: | SOUČET FOURIEROVY ŘADY SIGNÁLU..... | 29 |
| OBRÁZEK 2.5: | ČÁSTEČNÉ SOUČTY FOURIEROVY ŘADY..... | 30 |
| OBRÁZEK 2.6: | FOURIEROVSKÁ ZOBRAZENÍ..... | 30 |
| OBRÁZEK 2.7: | ZPĚTNÁ FOURIEROVSKÁ ZOBRAZENÍ..... | 31 |
| OBRÁZEK 2.8: | PERIODICKY SE OPAKUJÍCÍ OBDÉLNÍKOVÉ IMPULZY..... | 32 |
| OBRÁZEK 2.9: | SPEKTRUM MODULŮ A SPEKTRUM ARGUMENTŮ PERIODICKÉHO SLEDU OBDÉLNÍKOVÝCH IMPULSŮ..... | 33 |
| OBRÁZEK 2.10: | HADAMARDOVY FUNKCE..... | 35 |
| OBRÁZEK 2.11: | HAAROVY WAVELETY..... | 36 |
| OBRÁZEK 3.1: | PERIODICKÉ SIGNÁLY S NARŮSTAJÍCÍ PERIODOU..... | 38 |
| OBRÁZEK 3.2: | MODULY KOEFICIENTŮ FOURIEROVÝCH ŘAD..... | 39 |
| OBRÁZEK 3.3: | ZMĚNA ČASOVÉHO MĚŘÍTKA..... | 41 |
| OBRÁZEK 3.4: | SPEKTRUM KONVOLUCE DVOU OBDÉLNÍKOVÝCH SIGNÁLŮ..... | 41 |
| OBRÁZEK 3.5: | SPEKTRÁLNÍ HUSTOTA ENERGIE..... | 42 |
| OBRÁZEK 3.6: | JEDNOTKOVÝ IMPULZ..... | 43 |
| OBRÁZEK 3.7: | MODUL A ARGUMENT SPEKTRÁLNÍ FUNKCE JEDNOTKOVÉHO IMPULZU..... | 44 |
| OBRÁZEK 3.8: | JEDNOTKOVÝ SKOK..... | 45 |
| OBRÁZEK 3.9: | SPEKTRUM JEDNOTKOVÉHO SKOKU..... | 45 |
| OBRÁZEK 3.10: | STEJNOSNĚRNÝ SIGNÁL A JEHO SPEKTRÁLNÍ FUNKCE..... | 46 |
| OBRÁZEK 3.11: | SPEKTRUM HARMONICKÉHO SIGNÁLU..... | 47 |
| OBRÁZEK 3.12: | OBDÉLNÍKOVÝ IMPULZ..... | 47 |
| OBRÁZEK 3.13: | SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO IMPULZU..... | 48 |
| OBRÁZEK 3.14: | PERIODICKÝ SLED JEDNOTKOVÝCH IMPULZŮ..... | 48 |
| OBRÁZEK 3.15: | SPEKTRÁLNÍ FUNKCE PERIODICKÉHO SLEDU JEDNOTKOVÝCH IMPULZŮ..... | 49 |
| OBRÁZEK 3.16: | OBDÉLNÍKOVÁ SPEKTRÁLNÍ FUNKCE..... | 49 |
| OBRÁZEK 3.17: | ČASOVÝ PRŮBĚH SIGNÁLU S OBDÉLNÍKOVÝM SPEKTRÉM..... | 50 |
| OBRÁZEK 4.1: | ČLÁNEK BUZENÝ ZDROJEM HARMONICKÉHO SIGNÁLU..... | 52 |

| | | |
|----------------------|---|-----|
| OBRÁZEK 4.2: | MODULOVÁ KMITOČTOVÁ CHARAKTERISTIKA | 53 |
| OBRÁZEK 4.3: | FÁZOVÁ KMITOČTOVÁ CHARAKTERISTIKA | 54 |
| OBRÁZEK 4.4: | IDEÁLNÍ FILTRY | 55 |
| OBRÁZEK 4.5: | TOLERANČNÍ SCHÉMA | 56 |
| OBRÁZEK 5.1: | REALIZACE NÁHODNÉHO PROCESU | 58 |
| OBRÁZEK 5.2: | REALIZACE NORMÁLNÍHO NÁHODNÉHO PROCESU | 59 |
| OBRÁZEK 5.3: | NESTACIONÁRNÍ NÁHODNÝ PROCES | 62 |
| OBRÁZEK 5.4: | MĚŘENÍ SPEKTRÁLNÍ HUSTOTY VÝKONU | 63 |
| OBRÁZEK 6.1: | IDEÁLNÍ VZORKOVÁNÍ | 65 |
| OBRÁZEK 6.2: | IDEÁLNÍ VZORKOVÁNÍ V KMITOČTOVÉ OBLASTI | 66 |
| OBRÁZEK 6.3: | ALIASING V KMITOČTOVÉ OBLASTI | 68 |
| OBRÁZEK 6.4: | Vliv ANTIALIASINGOVÉHO FILTRU | 69 |
| OBRÁZEK 6.5: | PŘENOSOVÁ FUNKCE REKONSTRUKČNÍHO FILTRU | 69 |
| OBRÁZEK 6.6: | REKONSTRUKCE V ČASOVÉ OBLASTI | 70 |
| OBRÁZEK 6.7: | KVANTOVÁNÍ ZAOKROUHLOVÁNÍM | 71 |
| OBRÁZEK 6.8: | ANALOGOVĚ DIGITÁLNÍ PŘEVOD | 72 |
| OBRÁZEK 6.9: | DIGITÁLNĚ ANALOGOVÝ PŘEVOD | 73 |
| OBRÁZEK 6.10: | ALIASING V ČASOVÉ OBLASTI | 74 |
| OBRÁZEK 7.1: | ČASOVÁ OSA DISKRÉTNÍHO SIGNÁLU | 75 |
| OBRÁZEK 7.2: | JEDNOTKOVÝ IMPULZ A JEDNOTKOVÝ SKOK | 76 |
| OBRÁZEK 7.3: | POSLOUPNOSTI $\cos(0,1\pi n)$ A $4 \cos(0,2\pi n + 0,3\pi)$ | 76 |
| OBRÁZEK 7.4: | LINEÁRNÍ KONVOLUCE | 78 |
| OBRÁZEK 7.5: | LINEÁRNÍ A CYKICKÉ POSUNUTÍ | 79 |
| OBRÁZEK 7.6: | KRUHOVÁ KONVOLUCE | 80 |
| OBRÁZEK 8.1: | DISKRÉTNÍ FOURIEROVA ŘADA | 84 |
| OBRÁZEK 8.2: | DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE | 85 |
| OBRÁZEK 8.3: | OPERACE VYJÁDŘENÉ POMOCÍ GRAFU SIGNÁLOVÝCH TOKŮ | 88 |
| OBRÁZEK 8.4: | ROVNICE (8.25) ZAPSANÉ POMOCÍ GRAFŮ SIGNÁLOVÝCH TOKŮ | 89 |
| OBRÁZEK 8.5: | ALGORITMUS FFT TYPU DIT PRO $N = 4$ | 89 |
| OBRÁZEK 8.6: | ALGORITMUS O ZÁKLADU 2 TYPU DIT PRO $N = 16$ | 90 |
| OBRÁZEK 8.7: | MOTÝLEK PRO DVĚ SKUPINY ALGORITMŮ | 91 |
| OBRÁZEK 8.8: | POROVNÁNÍ POČTU OPERACÍ | 91 |
| OBRÁZEK 9.1: | ROZLOŽENÍ OKAMŽIKŮ t_i NA ČASOVÉ OSE | 93 |
| OBRÁZEK 9.2: | SOUBOR REALIZACÍ | 93 |
| OBRÁZEK 9.3: | REALIZACE NÁHODNÉHO PROCESU S DISKRÉTNÍ MNOŽINOU HODNOT | 94 |
| OBRÁZEK 9.4: | DISTRIBUČNÍ FUNKCE | 95 |
| OBRÁZEK 9.5: | DISTRIBUČNÍ FUNKCE DRUHÉHO PROCESU | 95 |
| OBRÁZEK 9.6: | HUSTOTA PRAVDĚPODOBNOSTI | 96 |
| OBRÁZEK 9.7: | ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTÍ | 96 |
| OBRÁZEK 9.8: | SIGNÁL A JEHO SPEKTRÁLNÍ HUSTOTA | 99 |
| OBRÁZEK 10.1: | ODEZVA NA JEDNOTKOVÝ IMPULZ A OBECNÝ SIGNÁL | 102 |
| OBRÁZEK 10.2: | METODA SUPERPOZICE | 102 |
| OBRÁZEK 10.3: | PARALELNÍ SPOJENÍ | 103 |
| OBRÁZEK 10.4: | SÉRIOVÉ SPOJENÍ | 104 |
| OBRÁZEK 10.5: | ZÁKLADNÍ OPERACE VYJÁDŘENÉ GRAFY SIGNÁLOVÝCH TOKŮ | 106 |
| OBRÁZEK 10.6: | GRAF SIGNÁLOVÝCH TOKŮ SYSTÉMU IIR DRUHÉHO ŘÁDU | 107 |
| OBRÁZEK 11.1: | DVOUBODOVÁ SOUSTAVA | 111 |
| OBRÁZEK 11.2: | SMÍŠENÁ SOUSTAVA | 113 |
| OBRÁZEK 11.3: | ČÍSLICOVÁ SDĚLOVACÍ SOUSTAVA | 114 |
| OBRÁZEK 11.4: | ČTYŘSTAVOVÝ SIGNÁL | 116 |

| | | |
|-----------------------|--|-----|
| OBRÁZEK 11.5: | SPEKTRUM AMPLITUD A PŘENOSOVÁ FUNKCE..... | 117 |
| OBRÁZEK 11.6: | SIGNÁL PŘED A ZA DOLNÍ PROPUSTÍ | 117 |
| OBRÁZEK 11.7: | PŘÍJEM BINÁRNÍHO SIGNÁLU | 118 |
| OBRÁZEK 11.8: | DIAGRAM OKA | 118 |
| OBRÁZEK 11.9: | PODMÍNĚNÉ HUSTOTY | 119 |
| OBRÁZEK 11.10: | PŘÍZPŮSOBENÝ FILTR | 120 |
| OBRÁZEK 11.11: | SIGNÁLY V PŘÍZPŮSOBENÉM FILTRU | 120 |
| OBRÁZEK 11.12: | VYSÍLACÍ A PŘÍJÍMACÍ FILTR | 121 |
| OBRÁZEK 11.13: | KMITOČTOVÁ CHARAKTERISTIKA FILTRU RC | 121 |
| OBRÁZEK 11.14: | IMPULZOVÁ CHARAKTERISTIKA FILTRU RC | 122 |
| OBRÁZEK 11.15: | ODEZVA NA SIGNÁLOVÝ PRVEK | 123 |
| OBRÁZEK 11.16: | ČÍSLICOVÁ FILTRACE | 123 |
| OBRÁZEK 12.1: | AMPLITUDOVÁ MODULACE | 125 |
| OBRÁZEK 12.2: | SPEKTRUM AM SIGNÁLU | 126 |
| OBRÁZEK 12.3: | SOUČINOVÝ DEMODULÁTOR | 126 |
| OBRÁZEK 12.4: | ASK – ČASOVÉ PRŮBĚHY | 128 |
| OBRÁZEK 12.5: | SPEKTRUM ASK | 129 |
| OBRÁZEK 12.6: | KMITOČTOVÉ KLÍČOVÁNÍ..... | 129 |
| OBRÁZEK 12.7: | FÁZOVÉ KLÍČOVÁNÍ | 130 |
| OBRÁZEK 12.8: | SIGNÁLY V SOUČINOVÉM DEMODULÁTORU..... | 130 |
| OBRÁZEK 12.9: | SPEKTRUM SIGNÁLU BPSK..... | 131 |
| OBRÁZEK 12.10: | PŘÍJEM ZARUŠENÉHO SIGNÁLU..... | 131 |
| OBRÁZEK 12.11: | VÍCECESTNÉ ŠÍŘENÍ..... | 133 |
| OBRÁZEK 13.1: | KOMPLEXNÍ ROVINA | 135 |
| OBRÁZEK 13.2: | JEDNOTKOVÁ KRUŽNICE | 135 |
| OBRÁZEK 13.3: | ZOBRAZENÍ ČÍSLA $\exp(j\pi)$ | 136 |
| OBRÁZEK 13.4: | AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOST DISKRÉTNÍHO PROCESU..... | 142 |
| OBRÁZEK 13.5: | VZÁJEMNÁ KORELAČNÍ FUNKCE | 145 |
| OBRÁZEK 13.6: | GRAF SIGNÁLU SE SPOJITÝM ČASEM..... | 150 |
| OBRÁZEK 13.7: | PŘÍKAZ <code>SUBPLOT</code> | 151 |

1 Úvod

V názvu skript se vyskytují dva pojmy: signál a soustava. Jsou to pojmy velmi obecné a používají se ve více významech. Ve sdělovací technice se signálem rozumí fyzikální nositel informace. Informace je každá zpráva, sdělení, údaj. Soustavou je téměř každý objekt, se kterým se v technické praxi setkáváme.

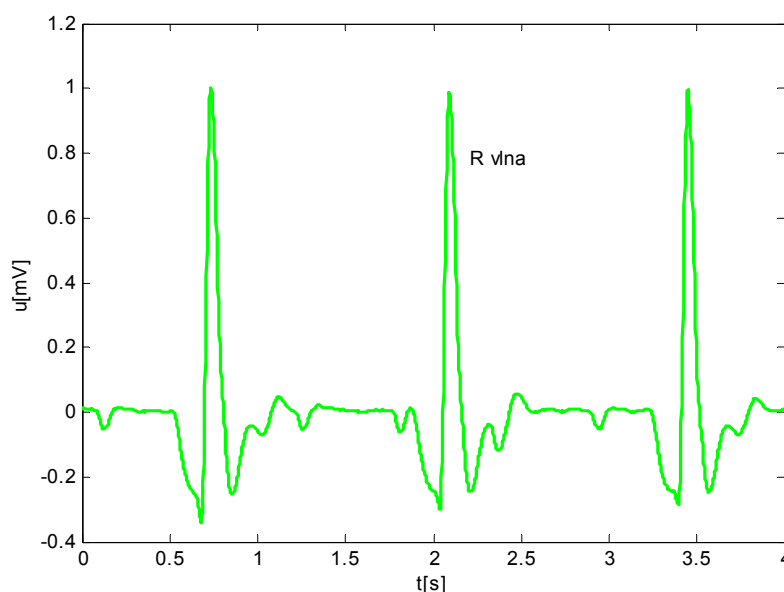
Signály a soustavy je vžitý název pro předmět, který má studenty seznámit se základními vlastnostmi signálů a soustav, jejich popisem a s působením soustav na signál. Pro předmět Signály a soustavy bylo napsáno velké množství učebnic, které se vzájemně liší svým pojetím i rozsahem. Autoři před Vámi ležícího textu si vzali za úkol napsat srozumitelnou učebnici. Tím není řečeno, že by zvládnutí látky nevyžadovalo úsilí studenta. Rozsah textu napovídá, že v něm nemůže být všechno. Jedná se o předmět úvodní. Přesto lze říci, že zvládnutí učiva přinese studentovi schopnost používat některé v technické praxi velmi užitečné nástroje analýzy a zpracování signálů. Navíc mu pomůže s přehledem proniknout do problematiky dalších předmětů.

V dalších částech této kapitoly budou uvedeny příklady konkrétních signálů a soustav, pak budou pojmy signál a soustava blíže vymezeny. V závěru kapitoly se seznámíme s některými základními operacemi se signály. S jinými operacemi se signály se setkáme později.

1.1 Příklady signálů

1.1.1 Signál EKG

Signál EKG (Electrocardiography signal, ECG) poskytuje lékaři důležité informace o činnosti a stavu lidského srdce. Signál zdravého člověka je přibližně periodický s periodou asi 1s, **Obrázek 1.1**. Nápadným prvkem v časovém průběhu EKG je zpravidla útvar charakteristického tvaru známý pod označením QRS komplex. V něm nejvíce vyniká R vlna.



Obrázek 1.1: Signál EKG.

V moderních přístrojích se signál EKG vzorkuje, aby pak mohl být vyjádřen posloupností čísel a následně číslicově zpracován. Standardní rychlosti vzorkování signálu EKG jsou 250 vzorků (samples) za sekundu a 500 vzorků za sekundu (Sa/s).

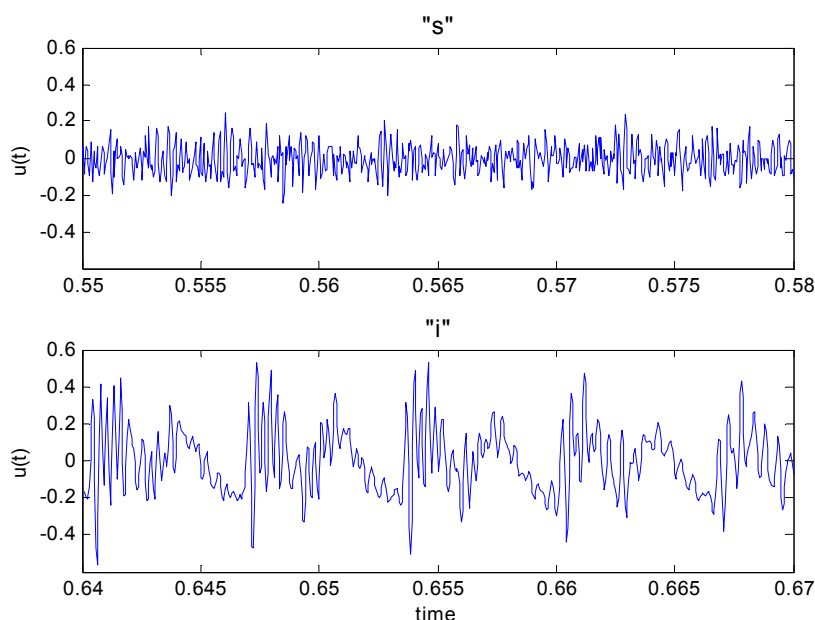
Vlastní signál EKG je doprovázen různými rušivými složkami. Patří k nim například napětí s kmitočtem 50 Hz naindukované ze síťových rozvodů kapacitními vazbami a magnetickou indukci. Další rušivé signály, které jsou součástí snímaného napětí, jsou vyvolány svalovými stahy. Přítomnost rušivých signálů může být nepříjemná, protože užitečná složka signálu má rozkmit jen asi 1 mV.

1.1.2 Řečový signál

Řečový signál je akustickým signálem. Má celou řadu specifických vlastností a nese rozličné informace. Především má nějaký obecný věcný obsah, sdělení, které by bylo možné vyjádřit písmem. Z řečového signálu jsme zpravidla schopni rozpoznat, zda mluví muž, žena nebo dítě, jakým jazykem mluví, jakou má náladu a pod. Také jsme schopni na základě hlasového projevu rozpoznat nám známou osobu, což je využíváno v bezpečnostních systémech.

Při přenosu řeči na velkou vzdálenost můžeme klást různé nároky na kvalitu přenosu podle toho, jaké informace chceme z přijatého signálu získat. Jakost řečového signálu je dána především kmitočtovým pásmem propustnosti sdělovacího systému. V praxi se ustálila telefonní kvalita (telephone speech) s pásmem 300 Hz až 3 400 Hz, v USA 200 Hz až 3 200 Hz, rozhlasová kvalita (wideband speech) s pásmem 50 Hz až 7 kHz a konečně CD kvalita (wideband audio) s pásmem 10 Hz až 20 kHz stereo.

Časový průběh napětí získaného z mikrofonu odpovídající části hlásky "s" je znázorněn na obrázku (**Obrázek 1.2:** Řečový signál) v horní polovině, v dolní polovině obrázku je nakreslen časový průběh hlásky "i". Časový průběh vyjadřující hlásku "s" je výrazně nepravidelný, zatímco signál hlásky "i" je skoro periodický.



Obrázek 1.2: Řečový signál

Promluva může být členěna na jednotlivé fonémy. Foném je část řečového signálu s následující definiční vlastností: změnou fonému se mění význam slova. Foném je pojem blízký pojmu hláska, je však přesněji vymezen. Například krátká samohláska a dlouhá

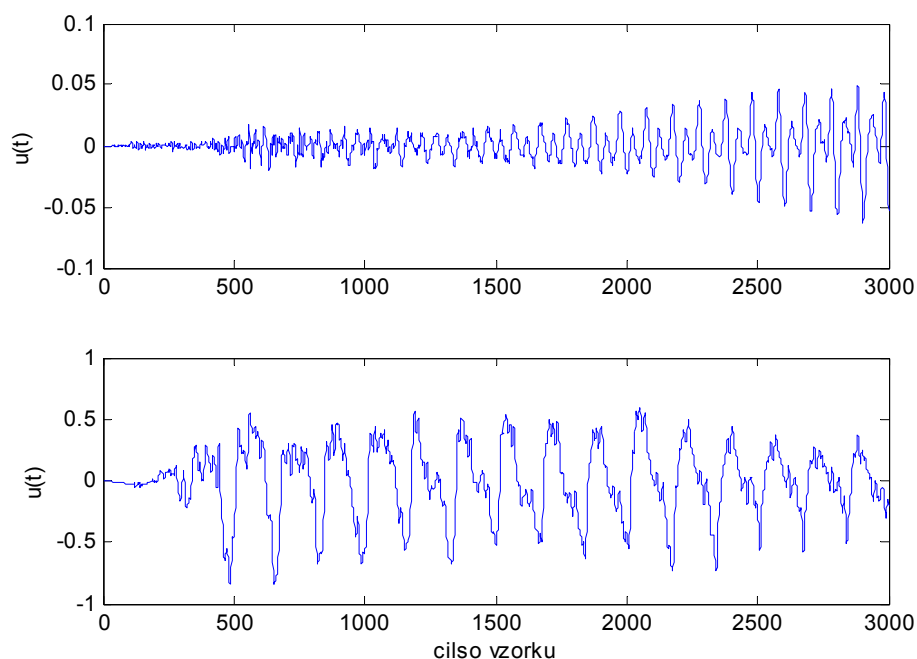
samohláska představují dva různé fonémy. Fonémy mohou být tříděny podle druhu buzení vokálního traktu.

Pro číslicové vyjádření telefonního řečového signálu se klasicky používá vzorkovací kmitočet 8 kSa/s. Signál s horním mezním kmitočtem 7 kHz se vzorkuje se vzorkovacím kmitočtem 16 kSa/s. Řečový signál a jeho vnímání člověkem mají řadu vlastností, které jsou využívány pro úsporné vyjádření řečového signálu posloupností čísel. Nepříjemným doprovodným efektem je zpoždění zaváděné kódováním a dekódováním. Vývoj v této oblasti dosud není uzavřen.

Významnou oblastí výzkumu je rozpoznávání slov. Některé výsledky výzkumu jsou již aplikovány v praxi, například volba telefonního čísla hlasem. Nikdo by si však asi zatím nedovolil bez zvláštních opatření nasadit do praxe hlasové ovládání jeřábu zvedajícího těžké náklady.

1.1.3 Hudební signál

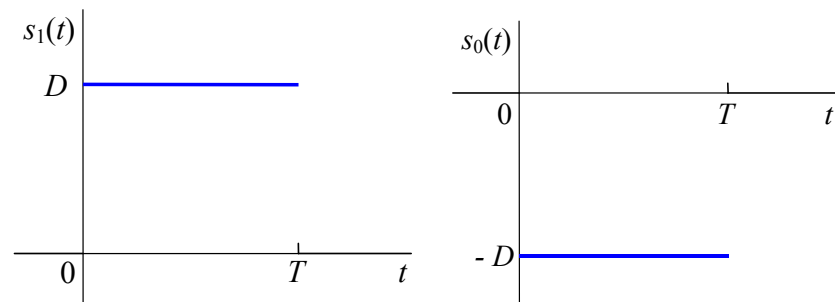
Vedle řečových signálů je dalším významným představitelem akustických signálů hudba. V ideálním případě by byly jednotlivé tóny přesně harmonické a kmitočet by byl jejich nejvýznamnějším parametrem. Tóny jednotlivých nástrojů nejsou přesně harmonické, tj. kosinusové, dokonce nebývají ani přesně periodické. Například u strunových nástrojů se projevuje závislost rychlosti šíření zvuku strunou na kmitočtu. V důsledku toho tzv. vyšší harmonické složky mají kmitočty mírně odchýlené od celistvých násobků kmitočtů základní harmonické složky.



Obrázek 1.3: Tóny flétny (nahore) a klavíru (dole).

Přirozený zvuk většiny hudebních nástrojů je vytvářen mechanickými kmity vzniklými vybuzením nějakého mechanického oscilátoru, který pak vyvolá vibrace dalších částí nástroje. Například u piana je primární oscilátor tvořen napnutou ocelovou strunou, která je uváděna do kmitání úderem kladívka. Struna pak vyvolává vibrace v dřevěném těle piana.

Pro vzorkování Hi-Fi audiosignálu s horním mezním kmitočtem 20 kHz se používá vzorkovací kmitočet 44,1 kSa/s, ale také 48 kSa/s. Pro signál s horním mezním kmitočtem 15 kHz se používá vzorkovací kmitočet 32 kSa/s.

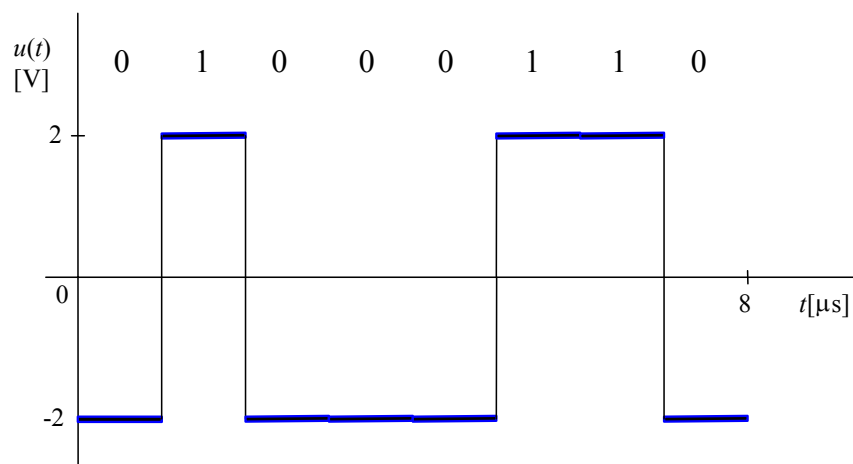


Obrázek 1.4: Signálové prvky NRZ.

1.1.4 Datové signály

V počítačových sítích, v moderních rozhlasových a televizních systémech, v systémech mobilních telefonů, v soustavách dálkového měření a ovládání jsou přenášeny z jednoho místa na druhé sdělovacími soustavami signálové prvky vyjadřující, přímo nebo zprostředkovaně, nuly a jedničky. Příklad signálových prvků datového signálu je nakreslen na obrázku **Obrázek 1.4**. Jedná se o signál nazývaný NRZ (nonreturn-to-zero) dvojí polarity. Nula je vyjadřována záporným impulzem šířky T a výšky D , jednička je vždy vyjádřena kladným impulzem šířky T a výšky D . Při přenosu jsou nejčastěji signálové prvky řazeny jeden za druhým, takže se přenáší $1/T$ signálových prvků za sekundu (**Obrázek 1.5**). Počet signálových prvků přenášených za sekundu se nazývá modulační rychlost. Počet dvojkových číslic přenášených za sekundu se nazývá přenosová rychlost. V našem případě obě veličiny nabývají stejných číselných hodnot.

Signál má obvykle v místě příjmu malý výkon. Je přinejmenším lineárně zkreslen. To se projevuje změnou tvaru signálových prvků. Přitom nám nejvíce vadí zvětšení doby trvání signálových prvků. Signálové prvky po sobě jdoucí se překrývají a vzájemně se ruší. Navíc se ve sdělovacím systému zpravidla k užitečnému signálu přidružují rozličné signály rušivé. Hledání algoritmů pro správné vyhodnocení přijatého signálu spolu s hledáním vhodných tvarů vysílaných signálových prvků a jejich efektivních kombinací představuje příležitost pro uplatnění mnoha odborníků na číslicové zpracování signálu.

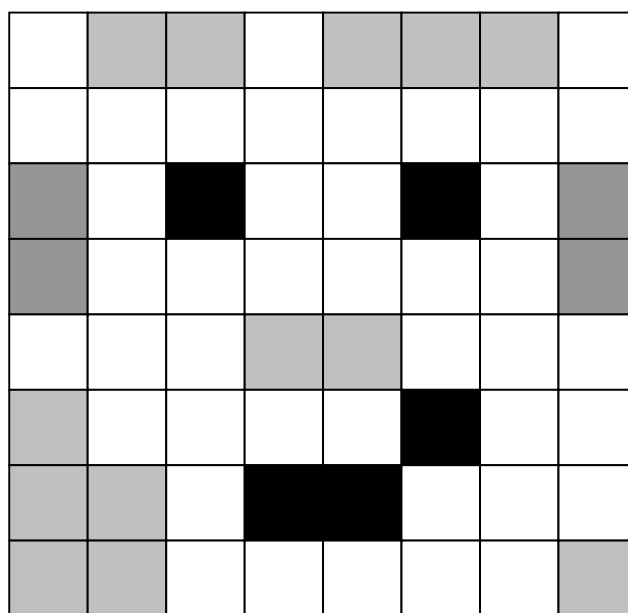


Obrázek 1.5: Binární signál.

Obvykle se snažíme, aby přenosová rychlost byla co největší. Proto musí mít signálové prvky krátkou dobu trvání. To však je, jak se dozvíme v dalších kapitolách skript, v rozporu s druhým obvyklým požadavkem: aby datový signál zabíral co nejmenší šířku kmitočtového pásma. Datový signál má mít i řadu dalších vlastností, zejména by se měl vyznačovat dobrou rozlišitelností signálových prvků.

1.1.5 Obrazový signál

Obrazový signál je, na rozdíl od předchozích příkladů, signálem dvourozměrným. Obrazový signál má původ ve změnách intenzity světla v rovině, tj. ve dvourozměrném prostoru. Analýza a zpracování obrazových signálů je zajímavým oborem, který má široké uplatnění. Má svůj matematický aparát, který se liší od aparátu jednorozměrných signálů, ač je s ním příbuzný. Pro účely přenosu či záznamu nebo zpracování může být dvourozměrný obrazový signál rozložen na řádky. V klasické televizi snímání scény probíhá po řádcích, a tak se signál převádí na jednorozměrný.



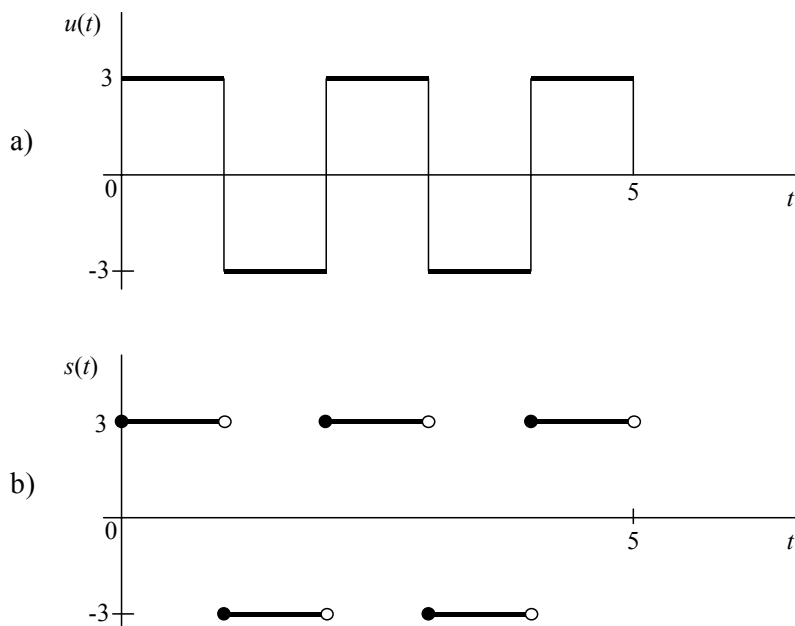
Obrázek 1.6: Obraz složený z pixelů

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 1 | 3 | 0 | 3 | 3 | 0 | 3 | 1 |
| 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 0 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |

Obrázek 1.7: Digitální obrazový signál

V moderní technické praxi má signál formu malých plošek uspořádaných do řádků a sloupců. Plošky se nazývají obrazové prvky, v žargonu pak pixely (z anglického pixel element). **Obrázek 1.6** představuje digitální obrázek, který má 8 řádků, 8 sloupců, 64 pixelů, je černobílý se 4 stupni šedi. Pokud je obraz černobílý, můžeme přiřadit jednotlivým pixelům čísla vyjadřující příslušný stupeň šedi, 0 představuje černou a maximální hodnota, v našem případě 3, představuje bílou, **Obrázek 1.7**. Mezilehlá čísla udávají stupně šedi. Při počtu úrovní 4 můžeme stupeň šedi vyjádřit binárním číslem se dvěma číslicemi, tedy bity. Počet pixelů je 8×8 , takže k úplnému popisu obrázku potřebujeme $8 \times 8 \times 2 = 128$ bitů. Číslcový obrazový signál můžeme získat z řádkového signálu vzorkováním a číselnou reprezentací vzorků. Signál je transformován do podoby posloupnosti čísel nebo na matice čísel. Číslcová forma umožňuje aplikovat postupy pro kompresi dat, zlepšení ostrosti obrazu, potlačení šumu, rozpoznání objektů atd.

S 8 sloupci a s 8 řádky se v praxi obvykle nespokojíme. Uvažujme proto hodnoty 1600 a 1200. Také pro počet stupňů šedi budeme uvažovat v praxi přijatelnější hodnotu 256. Pak bude pro binární zápis obrazu zapotřebí $1600 \times 1200 \times 8 = 15360000$ bitů. Pokud se rozhodneme přenášet 25 takovýchto obrázků za sekundu, dostaneme přenosovou rychlost 384 Mbitů za sekundu, a to je docela dost. Navíc bývá vyžadován i přenos informace o barvě. Uvedené okolnosti přiměly techniky k vývoji a zavedení metod umožňujících snížit nároky na únosnou míru.



Obrázek 1.8: Signál a jeho matematický model

1.2 Definice signálu

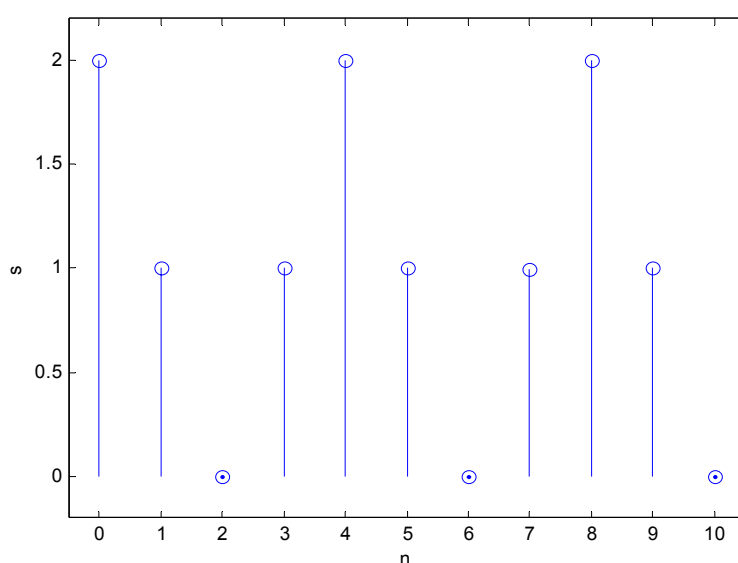
1.2.1 Bližší vymezení pojmu signál

Představy o významu slova signál jsou různé. Dokonce ani inženýři elektrotechnici nejsou ve výkladu obsahu pojmu signál moc jednotní. Pohled na slovo signál je závislý na jejich zaměření. Názory se mohou lišit zejména v hodnocení vzájemné vázanosti či nezávislosti signálu a systému. Pro obvodáře či odborníka na automatické řízení je signál nástrojem pro popis systému, jeho stavu a chování vůči okolí. Naopak pro odborníka na zpracování signálů je systém, ve kterém signál vzniká mnohdy vzdálený a neznámý nebo

nezajímavý, případně nepopsatelný. Tento odborník se zabývá především hledáním efektivních a realizovatelných algoritmů zpracování signálu např. s cílem zjistit některé informace nesoucí parametry užitečné složky signálu. Teprve sekundárně, v případě potřeby, navrhuje systémy algoritmus realizující.

My budeme signálem rozumět veličinu, zpravidla fyzikální, nesoucí informaci. Pojem informace bude chápán velmi obecně jako každá zpráva, sdělení nebo údaj.

S případem, kdy signálem bude elektrické napětí nebo elektrický proud, se budeme setkávat nejčastěji. To souvisí se skutečností, že jsou k dispozici technické prostředky, které umožňují elektrické signály zpracovávat rychle a levně. Také jsou k dispozici prostředky, které převádějí jiné typy signálu na signály elektrické, například mikrofon, různá čidla, snímače. Nejčastěji se také budeme zabývat signály, u kterých se bude informaci nesoucí veličina měnit v závislosti na čase.



Obrázek 1.9: Signál s diskrétním časem

Rozmanitost skutečných signálů vedla k pokusům signály třídit. Takováto třídění jsou nejednoznačná a nepřesná, a proto málo přínosná. My se jim vyhneme a třídění zavedeme až u matematických modelů signálů.

Matematické modely signálů jsou vynikajícím a efektivním nástrojem pro studium signálů a hledání nástrojů jejich analýzy a algoritmů jejich zpracování. Umožní nám snadno zavést užitečné veličiny a pojmy. Student přitom najde bezprostřední uplatnění části svých znalostí středoškolské a vysokoškolské matematiky.

Z příkladů uvedených v 1.1 lze vysledovat, že skutečné signály jsou vždy více či méně neurčité, jejich průběh není přesně předvídatelný. Přesně pravidelný signál by nenesl informaci.

Ukazuje se, že při řešení řady úloh v elektrotechnice lze pominout náhodnost v chování signálu. Proto často skutečné, v podstatě náhodné, stochastické signály nahrazujeme pravidelnými signály s jednoznačně definovanými hodnotami v jejich definičním oboru. Někam mezi náhodné signály a pravidelné signály můžeme zařadit tzv. chaotické signály.

Je vhodné připomenout, že při řešení některých úloh náhodný charakter signálu pominout nelze.

1.2.2 Matematické modely signálu

Matematickými modely signálů mohou být funkce včetně posloupností nebo náhodné procesy včetně diskretních náhodných procesů. Na model signálu klademe dva požadavky, které jsou do značné míry protichůdné. Na jedné straně bychom chtěli, aby model dobře vystihoval všechny důležité vlastnosti signálu, na druhé straně žádáme, aby byl model jednoduchý a výpočtově snadno zpracovatelný. V praxi zpravidla volíme model, který je co nejjednodušší, ale umožňuje přitom ještě řešit danou úlohu. Model konkrétního signálu, který nám bude vyhovovat pro jeden účel, nemusí vyhovovat pro jiný účel.

Funkce jsou deterministickými modely signálů. Náhodné procesy představují stochastické matematické modely signálů. Deterministické modely se používají častěji než stochastické, protože se s nimi snáze pracuje.

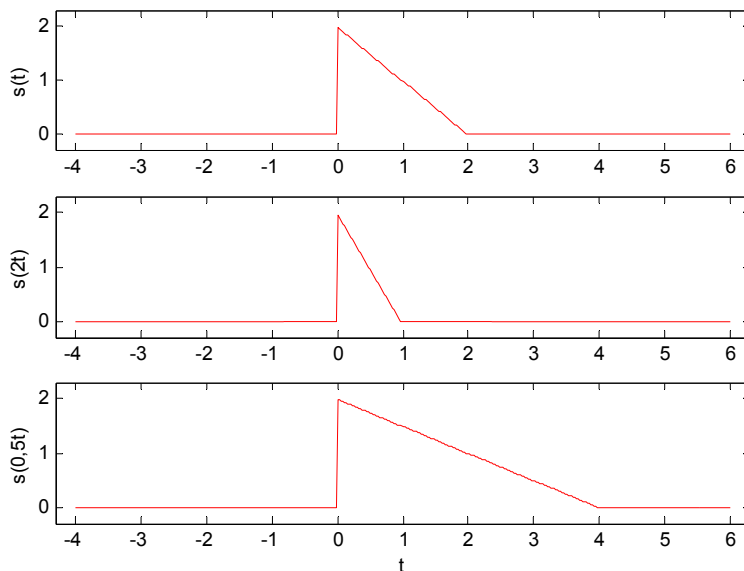
Některé signály je možné popsat funkcí definovanou nad intervalem. Pro řadu signálů je však takovýto popis naprosto nevhodný a jako matematický model jsou používány posloupnosti. Signály reprezentované posloupnostmi budou podrobně analyzovány ve druhé polovině skript.

Stochastickými modely signálů se budeme zabývat v kapitolách 5 a 9.

Je obvyklé a účelné nazývat i matematický model signálu krátce termínem signál.

Matematické modely, které jsou funkcemi, včetně nenáhodných posloupností, se nazývají determinované signály (**Obrázek 1.8b**, **Obrázek 1.9**).

Pro determinované signály můžeme formulovat následující definici. Necht' A je množina (zpravidla reálných nebo komplexních) čísel a předpokládejme, že T je podmnožina množiny \mathbb{R} reálných čísel. Pak každá funkce $x: T \rightarrow A$ se nazývá signál se signálovou osou (signal axis) T a s oborem hodnot (signal range) A . Signálová osa je nejčastěji interpretována jako čas. Signál s časovou osou se někdy nazývá časový signál (time signal).



Obrázek 1.10: Změna časového měřítka

Časová osa je diskretní, když obsahuje konečnou nebo spočetnou množinu okamžiků. Signál je pak signálem s diskretním časem, zkráceně signálem diskretním (discrete-time signal, **Obrázek 1.9**). Časová osa je spojitá, pokud se skládá z intervalů \mathbb{R} . Signál s takovou

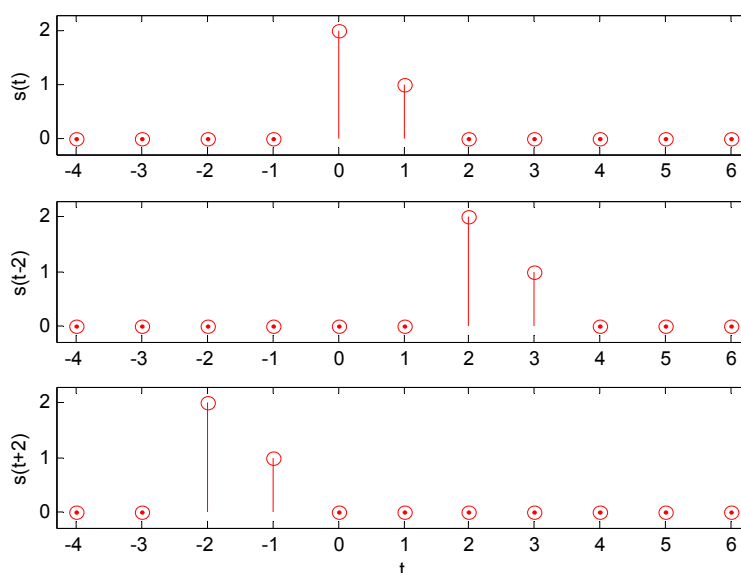
časovou osou se nazývá signálem se spojitým časem (continuous-time signal, **Obrázek 1.8b**).

Obdobné definice lze zavést i u náhodných signálů. Proto stručně shrneme pro náhodné i nenáhodné signály: matematické modely signálu se spojitou časovou osou, ať už funkce nebo náhodné procesy, jsou nazývány signály se spojitým časem.

Matematické modely, které jsou posloupnostmi nebo diskrétními náhodnými procesy, se nazývají signály s diskrétním časem neboli diskrétní signály.

Námi uvedenou definici signálu lze snadno rozšířit na dvojrozměrné signály tím, že se množinou T bude rozumět podmnožina množiny \mathbf{R}^2 .

O množině A jsme si zatím řekli jen málo. V rámci tohoto kurzu to bude většinou množina \mathbf{R} , interval, spočetná podmnožina množiny \mathbf{R} , nebo konečná podmnožina množiny \mathbf{R} . Množinou A však může být i množina \mathbf{C} nebo množina \mathbf{R}^n , kde n je přirozené číslo.



Obrázek 1.11: Posunutí v čase

A jak je to se signály skutečnými? Jejich název se zpravidla vyvozuje z jejich funkce, z toho, jakému účelu tyto signály slouží. Skutečný diskrétní signál je signál, který vyjadřuje posloupnost čísel, skutečný číslicový signál také vyjadřuje posloupnost čísel, tato čísla však musí mít konečný počet číslic. Je vhodné podotknout, že obecně nelze jednoznačně vyvodit účel, jakému signál slouží, tj. funkci signálu, z úseku jeho časového průběhu.

V praxi se signály pomocí systémů různě upravují. Zpracování signálu systémem je v mnoha případech možné rozložit do velmi jednoduchých operací, se kterými se nyní seznámíme.

1.3 Základní operace se signály

1.3.1 Operace s jedním signálem

Pro první tři operace bude společné to, že spočívají v transformaci časové osy. Setkáme se nimi v tomto učebním textu ještě vícekrát.

1.3.1.1 Změna časového měřítka

Změnou časového měřítka (time scaling) rozumíme operaci, kterou se signál $s(t)$ přemění na signál $s(mt)$, zde m je reálné kladné číslo různé od 1. Je-li $m > 1$, jedná se o časovou kompresi signálu (**Obrázek 1.10 b**), při $m < 1$ představuje operace časovou expanzi signálu (**Obrázek 1.10 c**).

1.3.1.2 Posunutí

Posunutí (time translation, shifting) je operace, která signálu $s(t)$ přiřazuje signál $s(t - \tau)$, kde τ je reálná konstanta různá od nuly (**Obrázek 1.11**). Pokud je τ kladná konstanta, představuje zpoždění. Slovo zpoždění má dva významy. Buď má význam právě uvedený, nebo se jím rozumí operace posunutí s kladnou hodnotou τ .

Obecně lze říci, že u sdělovacích soustav s přenosem v jednom směru zpravidla zpoždění signálu není na závadu. Zato u soustav automatického řízení, kde se zavádí pojem transportní zpoždění, může zpoždění velmi nepříznivě ovlivňovat funkci systému. Také ve sdělovacích systémech obousměrných může být zpoždění nežádoucím jevem.

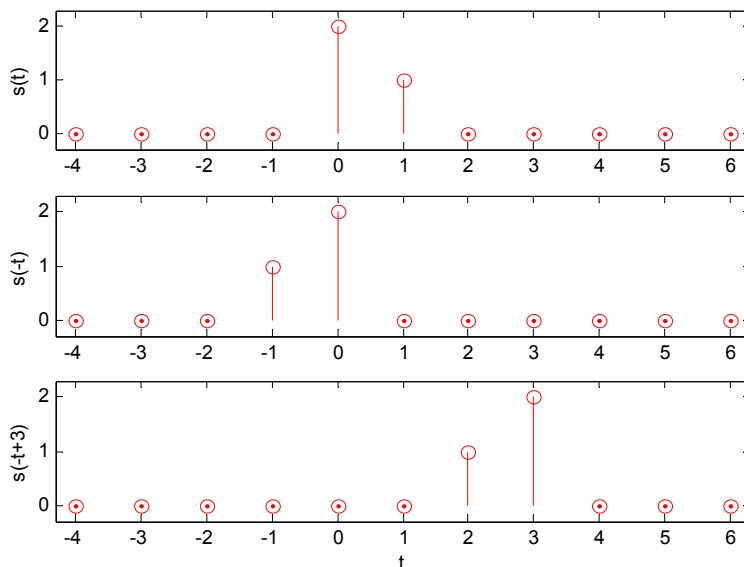
Za zvláštní a velmi užitečný případ posunutí signálu v čase je možné považovat zapsání signálu do paměti a jeho následné čtení. Příkladem může být magnetofonový zápis a čtení.

1.3.1.3 Obrácení časové osy

Reverzací signálu v čase (flipping) rozumíme operaci, kterou se signál $s(t)$ přemění na signál $s(-t)$. Signál pak vlastně běží pozpátku (**Obrázek 1.12 b**).

Obrácení časové osy s posunutím je operace, která signálu $s(t)$ přiřazuje signál $s(\tau - t)$, kde τ je reálná konstanta různá od nuly (**Obrázek 1.12 c**).

S obrácenými a případně i posunutými signály se setkáme v dalším výkladu, když budeme zkoumat významnou operaci se dvěma signály, nazývanou konvoluce. Ta je důležitým pojmem z hlediska teorie systémů.



Obrázek 1.12: Obrácení časové osy

1.3.1.4 Zesílení signálu

Zesílení signálu (amplification) spočívá v přeměně signálu $s(t)$ na signál $as(t)$, přičemž a je reálná konstanta větší než 1. Pokud by kladná konstanta a byla menší než 1, jednalo by se

o zeslabení signálu (attenuation). Je vhodné podotknout, že v teorii obvodů se pojem zesílení chápe odlišně.

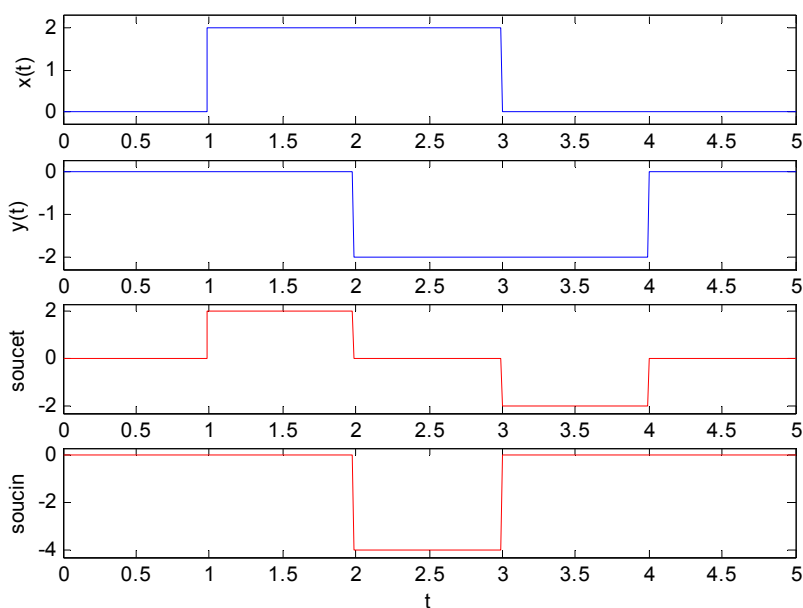
Zesílení elektrických signálů zajišťují obvody nazývané zesilovače, příkladem může být zesilovač napětí realizovaný pomocí operačního zesilovače. Zesilovač se např. vyskytuje v každém magnetofonu, protože signály sejmuté z magnetofonového pásku jsou velmi slabé a nestačily by k náležitému rozkmitání membrány sluchátka či reproduktoru. Zeslabení napětí lze realizovat například pomocí odporového děliče.

Pokud by konstanta $a = -1$, měnil by se signál $s(t)$ na signál $-s(t)$ operací obrácení (inverting).

1.3.2 Operace se dvěma signály

1.3.2.1 Součet dvou signálů

Mějme dva signály $x(t)$ a $y(t)$. Nový signál $z(t)$ můžeme získat jejich sečtením, **Obrázek 1.13c**). V praxi se nám často stává, že se k užitečnému signálu $s(t)$ přičte rušivý signál $n(t)$. Na technikovi pak je, aby nějak vystačil se signálem $s(t)+n(t)$, který má k dispozici namísto žádoucího signálu $s(t)$. Jeho úkol bude tím snazší, čím více toho bude předem o signálech $s(t)$ a $n(t)$ známo.



Obrázek 1.13: Operace se dvěma signály

1.3.2.2 Součin dvou signálů

V tomto učebním textu se několikrát setkáme s aplikací násobení dvou signálů, **Obrázek 1.13d**).

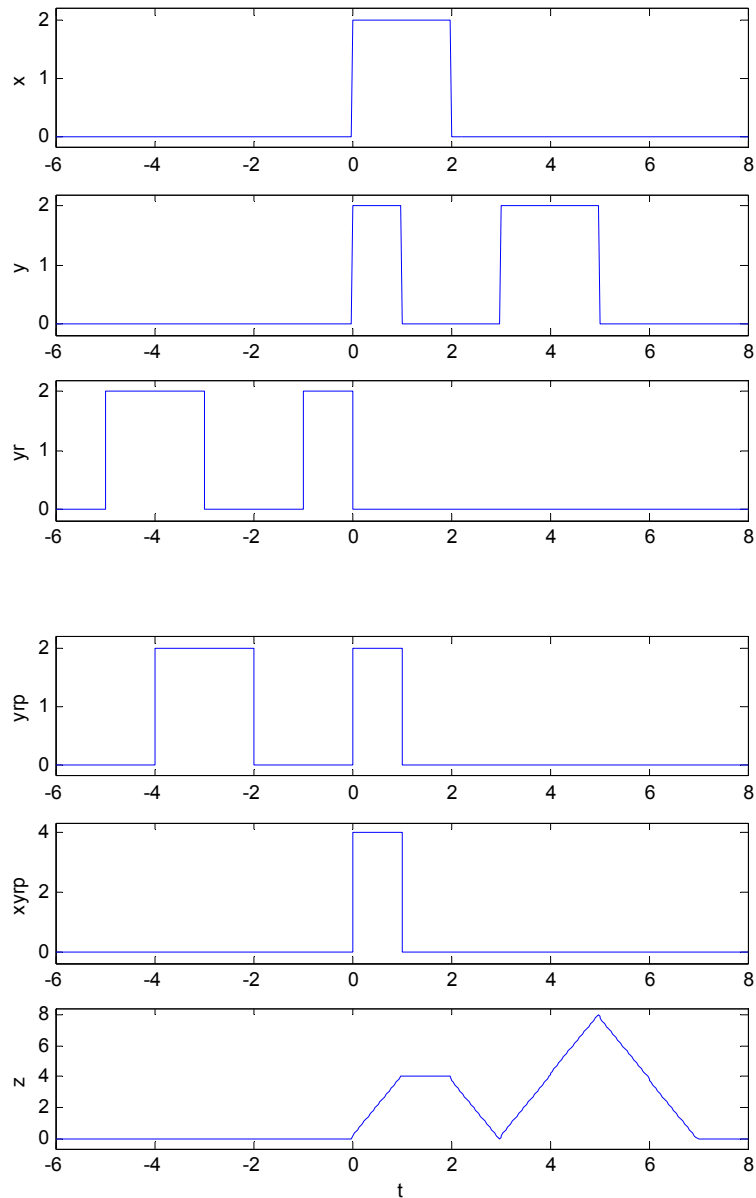
Při zpracování signálů se často používá zvláštní případ násobení dvou signálů, kdy jedním ze signálů je signál s konečnou dobou trvání, tzv. signál okénkový $w(t)$. Operace okénkování (windowing) převádí signál $s(t)$ s obecnou dobou trvání na signál s konečnou dobou trvání, kterým je signál $w(t)s(t)$. Signálem s konečnou dobou trvání rozumíme signál, který je roven nule vně nějakého uzavřeného intervalu.

S násobením se setkáváme i v rádiových zařízeních, například v modulátorech a demodulátorech mobilních telefonů.

Násobení je také dílčí operací v zobrazeních nazývaných konvoluce a korelace. O těch se nyní zmíníme.

1.3.2.3 Konvoluce

Konvoluce dvou signálů je operace, která může být použita pro matematický popis lineárního zpracování signálu. Hlavně proto se s různými typy konvolucí setkáme v dalších kapitolách. Dá se dokonce očekávat, že konvoluce s diskretním časem budou pro studenty srozumitelnější.



Obrázek 1.14: Konvoluce

Konvoluce signálů se spojitým časem je pro případ, že integrál na pravé straně konverguje, definována vztahem

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau, \quad (1.1)$$

kde $z(t)$ je konvoluce,

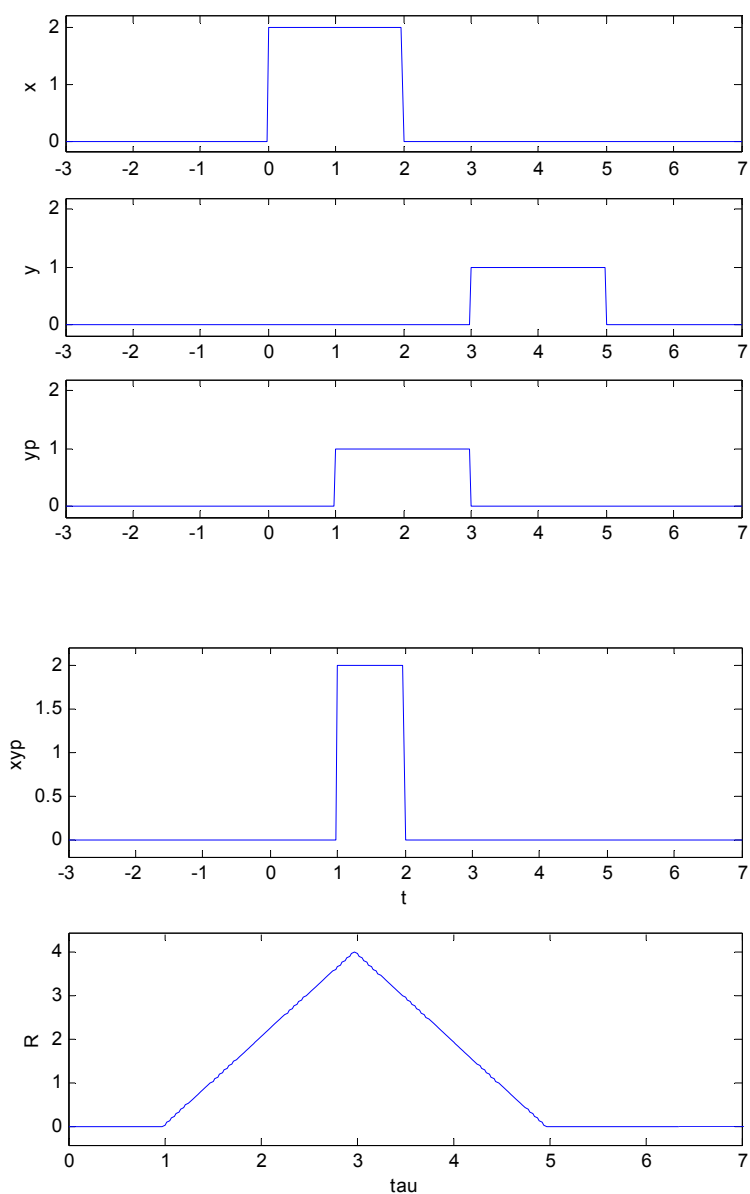
$x(t)$ a $y(t)$ jsou výchozí signály.

Obrázek 1.4 znázorňuje signály x , y , signál y s obrácenou časovou osou, signál y s obrácenou časovou osou posunutý, součin signálu x s předchozím signálem a konvoluci z . Obrázek ukazuje, že konvoluce signálu y se signálem x způsobila vyhlazení signálu y , signál z neobsahuje náběžné a sestupné hrany.

1.3.2.4 Korelace

Korelace $R_{x,y}(\tau)$ dvou determinovaných signálů $x(t)$ a $y(t)$ může být definována vztahem

$$R_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt. \quad (1.2)$$



Obrázek 1.15: Korelace dvou signálů

Opět předpokládáme, že integrál na pravé straně konverguje.

Obrázek 1.15, znázorňuje po řadě signály x , y , signál y posunutý, součin signálu x s předchozím signálem a korelaci $R_{x,y}(\tau)$. Hodnoty korelační funkce jsou závislé na podobnosti či nepodobnosti obou výchozích signálů při jejich vzájemném posunutí o τ . Uvedená definice korelace není jediná. V další textu budou definovány korelační funkce pro různé typy signálů, a to i pro signály náhodné 13.3.

K tomu, co jsme si zatím řekli o operacích se signály, je třeba dodat, že ve skutečných systémech se elementární operace se signály různě kombinují. V praxi se také používají mnohé další operace se signály. Příkladem nelineární operace s jedním signálem je jeho umocnění na druhou.

V kapitole Základní operace se signály jsme si ukázali, že práce s matematickými modely je snadná, mnohdy uplatňujeme jen malou část svých znalostí základů matematiky. Rozdíl oproti matematickým předmětům je ale také v tom, že je zde jiná četnost aplikace poznatků. V teorii signálu například používáme často obrácení časové osy s posunutím, v matematice se obdobné postupy také vyskytují, ale ne tak často. V teorii signálu je také mnohem více než v klasické matematice zastoupena práce s posloupnostmi.

Příklad 1.1: Operace se signály

Je dán signál

$$\begin{aligned} s(n) &= 1 & \text{pro } n = 0, \\ s(n) &= 3 & \text{pro } n = 1, \\ s(n) &= 0 & \text{pro ostatní hodnoty } n \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Nakreslete signály a) $s(n)$, b) $s(n-2)$, c) $s(n+2)$, d) $s(-n)$, e) $s(-n+2)$, f) $s(-n-2)$, g) $2s(n)$ pro n v intervalu $\langle -4, 4 \rangle$.

1.4 Systémy a jejich třídění

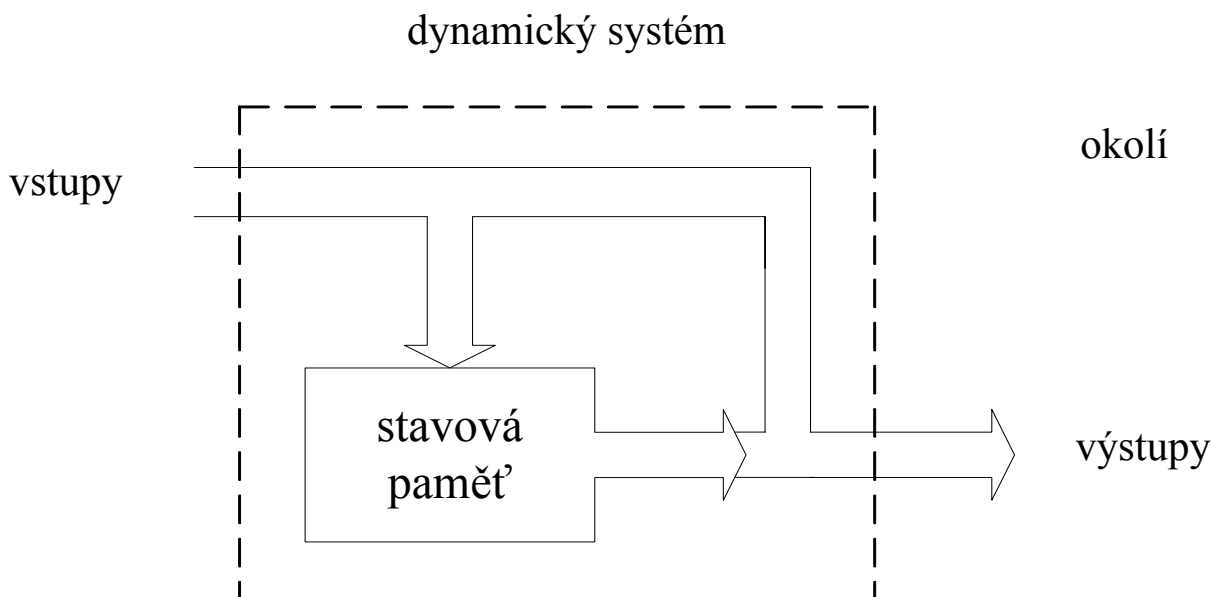
1.4.1 Definice systému

Systém lze chápat jako reálný objekt nebo jeho model, který je tvořen souborem nebo seskupením prvků. Prvky systému na sebe vzájemně působí s cílem plnění požadované funkce. V systému působí fyzikální veličiny, kterými popisujeme vzájemné vazby a ovlivňování prvků navzájem. Tyto fyzikální veličiny jsou **signály**. Například elektrický obvod (elektrický systém) může být sestaven ze základních prvků R , L a C a zdroje. Elektromagnetické jevy sledujeme často pomocí signálů napětí a proudů dílčích prvků. Napětí a proud jsou elektrické signály.

Systém může být spojen s okolím pomocí **vstupů a výstupů**. Fyzikální veličiny, které vzájemně vážou systém s okolím, se nazývají vstupní a výstupní signály. Vícerozměrný systém má více vstupů a výstupů. Definujeme rozměr systému $r \times s$, tj. pro systém, který má r vstupů a s výstupů. Úkolem systému je podle určitých pravidel zpracovávat signály na svých vstupech a vytvářet signály na svých výstupech jako reakci na signály vstupní.

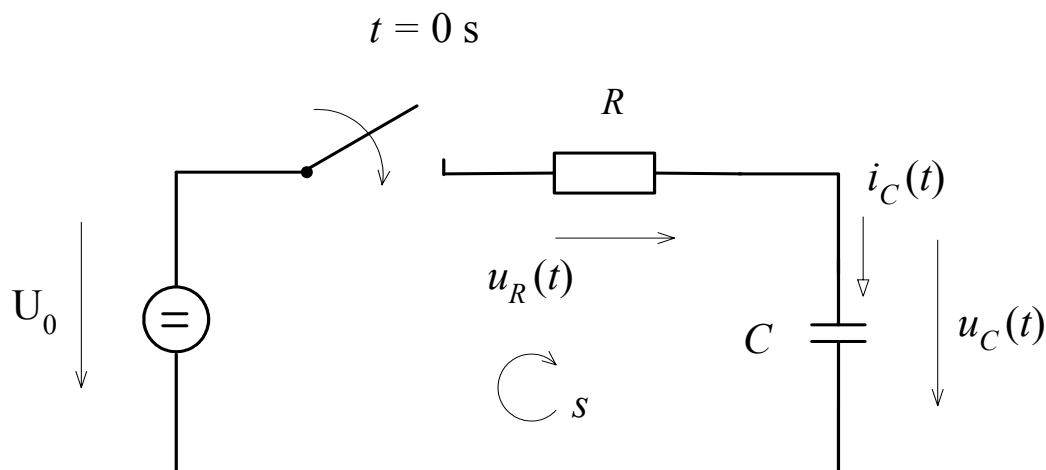
Základní vlastností **dynamického systému** je, že jeho chování v kterémkoliv časovém okamžiku nezávisí pouze na vstupním (budicím) signálu, jenž na něj právě působí, ale také závisí na budicích signálech, které na něj působily v minulosti. Systém vykazuje určitou setrvačnost, pamatuje si vliv signálů z minulosti. Takový systém se také označuje jako **setrvačný systém**. Stav systému je definován jako okamžitý stav paměti systému v čase t_0 .

Stav systému je určen množinou stavových veličin. Na obrázku **Obrázek 1.16** vidíme spojení dynamického systému s okolím. Znalost stavu systému v libovolném okamžiku t_0 společně se znalostí vstupních signálů v tomto čase t_0 nám umožní určit výstupní signály a stav systému v kterémkoliv okamžiku $t \geq t_0$.



Obrázek 1.16: Dynamický systém

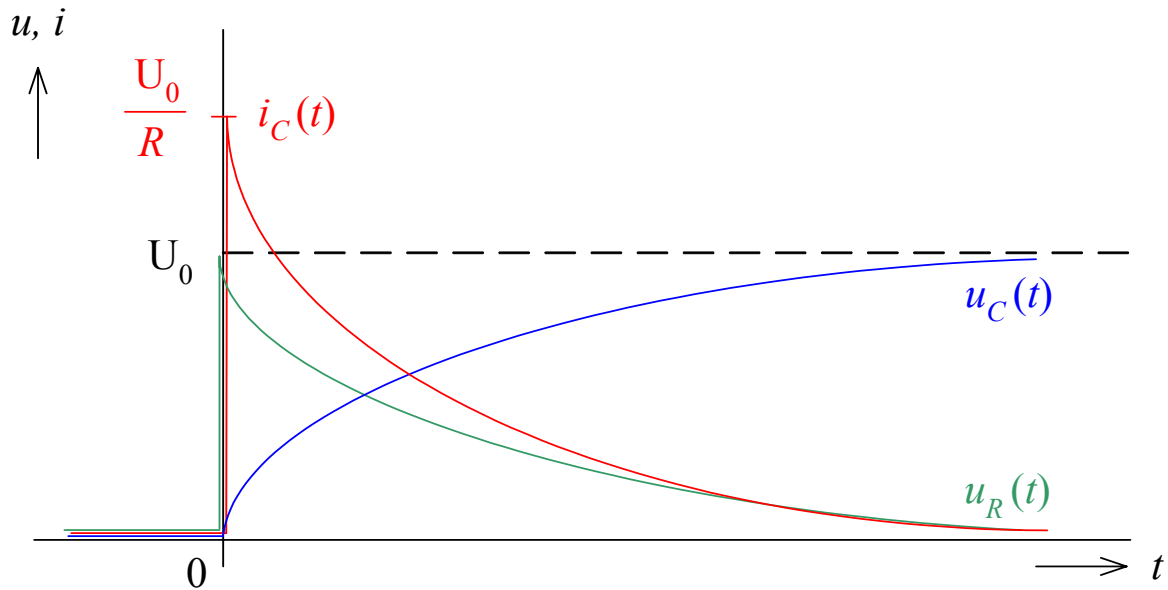
Počet nezávislých stavových veličin definuje řád systému. Stav systému u spojitých (analogových) systémů je spojen s jeho energetickým stavem. Stavová paměť je realizována prvky, které jsou schopny shromažďovat (akumulovat) a uchovávat energii. V případě elektrických systémů jsou to například induktor (ideální cívka), který akumuluje magnetickou energii a kapacitor (ideální kondenzátor), který akumuluje elektrickou energii. Stavovou veličinou induktoru je spjatý magnetický indukční tok ϕ a u kapacitoru jde o elektrický náboj q .



Obrázek 1.17: Příklad elektrického systému

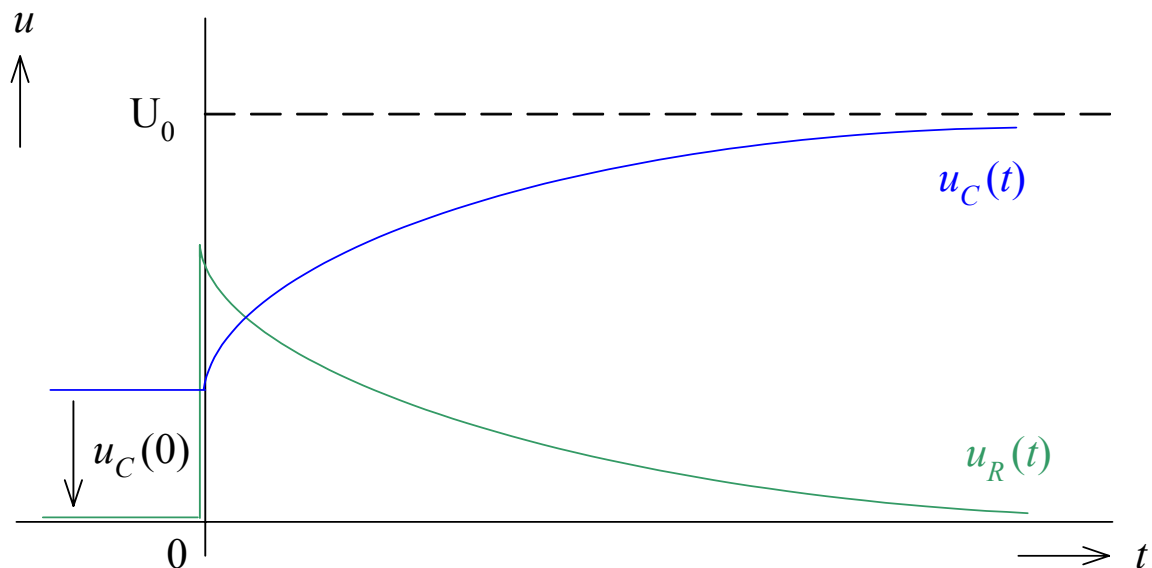
Bližší vysvětlení nám zprostředkuje následující příklad. Jestliže zapojíme do série rezistor s odporem R , kapacitor s kapacitou C , ideální spínač a zdroj stejnoměrného napětí U_0 , tak dostaneme integrační článek nebo derivační článek podle toho, z kterého prvku je brán

výstupní signál (**Obrázek 1.17**). Jestliže sepne v čase $t = 0$ s ideální spínač, pak pro vstupní signál zdroje U_0 jsou výstupní napětí na rezistoru $u_R(t)$ (derivační členek) a na kapacitoru $u_C(t)$ (integrační členek) zobrazeny na obrázku **Obrázek 1.18**. Předpokládá se, že kapacitor nebyl před sepnutím spínače nabit ($u_C(0) = 0$).



Obrázek 1.18: Průběh přechodného děje

V případě, že je kapacitor nabit na nenulové počáteční napětí $u_C(0) \neq 0$ před sepnutím spínače v čase $t = 0$ s, pak průběhy napětí na kapacitoru a rezistoru mají tvar podle obr. A4.



Obrázek 1.19: Přechodný děj při nenulovém počátečním stavu

Stav systému je u RC članku definován velikostí náboje v kapacitoru, který pak určuje velikost elektrické energie kapacitoru.

V obou případech na obrázcích **Obrázek 1.18** a **Obrázek 1.19** po sepnutí spínače musí platit napěťový Kirchhoffův zákon pro smyčku s na obr. **Obrázek 1.17**:

$$-U_0 + u_R(t) + u_C(t) = 0 \quad (1.4)$$

1.4.2 Třídění systémů

Systémy můžeme dělit podle různých hledisek. Základní dělení systémů je podle toho, jaký signál zpracovávají, na:

- **spojité (analogové) systémy**

- **diskrétní systémy**

Spojité systémy zpracovávají spojitý signál, diskrétní systémy zpracovávají diskrétní signál. Zvláštním případem diskrétních systémů jsou číslicové systémy, které zpracovávají číslicové signály. Číslicový signál získáme z diskrétního signálu pomocí operace kvantování a po převodu kvantových hodnot do zvolené číselné soustavy (dvojková nebo šestnáctková čísla apod.).

Další dělení je podle linearity na:

- **lineární systémy**

- **nelineární systémy**

Lineární systémy obsahují pouze lineární prvky. Například u elektrického systému na obrázku **Obrázek 1.17** musí být ampérvoltová (AV) charakteristika rezistoru a coulombvoltová (CV) charakteristika kapacitoru lineární (přímka procházející počátkem souřadnic s nenulovou kladnou směrnici). U lineárních systémů platí **princip superpozice**, který lze s výhodou použít pro jejich řešení.

Nelineární systémy obsahují aspoň jeden prvek, jehož charakteristika není lineární.

Systémy lze také dělit na:

- **deterministické systémy**

- **náhodné (stochastické) systémy**

Chování deterministického systému v budoucnu je možné přesně určit, neboť jeho chování je přesně analyticky popsáno (jsou známy matematické rovnice popisující vztahy mezi signály v systému). Matematické modely však nemusí vystihovat všechny podrobnosti chování reálného systému.

Chování náhodného systému lze předpovědět pouze s určitou pravděpodobností. Model náhodného systému však se více přibližuje chování reálného systému, než deterministický model. Protože jsme zde použili pojmu **model systému** uvedeme i jeho definici:

Jsou dány dva objekty X a Y a pozorovatel. O objektu X říkáme, že je modelem objektu Y, jestliže pozorovatel může použít objektu X k získání odpovědi na některé otázky, které se týkají objektu Y. Systém může být abstraktním modelem reálného objektu.

Podle časových změn lze dále dělit systémy na:

- **stacionární (časově invariantní, neparametrické)**

- **nestacionární (parametrické)**

Stacionární systémy mají strukturu a parametry prvků neproměnné s časem. Naopak u nestacionárních systémů buď struktura systému, nebo parametry prvků (nebo oboje) se mění s časem nezávisle na vnitřních signálech systému.

Poslední dělení, které použijeme, je dělení systémů na:

- **kauzální (příčinné)**

- nekauzální

Reakce (výstupní signál) na podnět (vstupní signál) je u kauzálního systému časově vždy až za tímto podnětem. Nejprve tedy musí vzniknout příčina změny chování a pak teprve odezva na tuto příčinu. Velmi často je kauzalita určena na základě impulzní charakteristiky. Kauzální systém má nulovou část pro záporné časové hodnoty. Tj. pro spojitý systém, který je kauzální, musí platit pro impulzní charakteristiku tato podmínka

$$h(t) = 0 \text{ pro } t < 0. \quad (1.5)$$

Pokud kauzální systém zpracovává reálné signály a lze jeho model realizovat pomocí skutečných prvků, pak hovoříme o **fyzikálně realizovatelném systému**.

U nekauzálního systému může předbíhat reakce podnět, a tedy tento systém nelze reálně realizovat. Můžeme pouze jeho chování simulovat s určitými omezeními např. na počítači.

2 Periodický signál

2.1 Harmonický signál

2.1.1 Model harmonického signálu

Harmonický signál je nejjednodušším periodickým signálem. Může být popsán pomocí obecné funkce kosinové:

$$s(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (2.1)$$

kde C_1 je kladná konstanta nazývaná amplituda,

t je reálná proměnná, čas,

φ_1 je reálná konstanta, počáteční fáze, tj. fáze pro okamžik $t = 0$,

ω_1 je kladná konstanta nazývaná úhlový kmitočet, perioda T_1 je na ni vázána vztahem

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}. \quad (2.2)$$

Index 1 se může čtenáři jevit jako nadbytečný. Později se ukáže, že má určitý smysl. Harmonický signál je plně určen třemi konstantami.

Rovnice (2.2) je názorná, fyzikální význam konstant je jasný. Vyjádření harmonického signálu rovnicí (2.2) však má i své nevýhody. Obtížně se manipuluje s výrazy obsahujícími součiny nebo mocniny harmonických signálů. Navíc výraz na pravé straně rovnice (2.2) nedovoluje jednoduchý přechod ke tvaru, který je vlastní pro praxi nesmírně významné diskrétní Fourierově transformaci 8.4. Nahradíme proto výraz na pravé straně rovnice (2.1) rovnocenným součtem dvou komplexně sdružených funkcí času.

Matematickým základem komplexního vyjádření harmonického signálu je známý vztah

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \exp(j\alpha) + \frac{1}{2} \exp(-j\alpha). \quad (2.3)$$

Pravá strana se skládá ze dvou komplexních výrazů, ty jsou však komplexně sdružené, a proto je jejich součet reálný. Na základě vztahu (2.3) můžeme upravit pravou stranu rovnice (2.1):

$$\begin{aligned} s(t) &= C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = \\ &= \frac{1}{2} C_1 \exp[j(\omega_1 t + \varphi_1)] + \frac{1}{2} C_1 \exp[-j(\omega_1 t + \varphi_1)] = \\ &= \frac{1}{2} C_1 \exp(j\varphi_1) \exp(j\omega_1 t) + \frac{1}{2} C_1 \exp(-j\varphi_1) \exp(-j\omega_1 t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Označíme-li

$$c_1 = \frac{1}{2} C_1 \exp(j\varphi_1) \quad a \quad c_{-1} = \frac{1}{2} C_1 \exp(-j\varphi_1), \quad (2.5)$$

můžeme harmonický signál definovaný rovnicí (2.1) stručně vyjádřit takto:

$$s(t) = c_1 \exp(j\omega_1 t) + c_{-1} \exp(-j\omega_1 t). \quad (2.6)$$

Vztah (2.6) je námi hledaným vyjádřením harmonického signálu dvojicí komplexně sdružených složek. Je zřejmé, že nadále budeme muset pečlivě rozlišovat mezi velkým C_1 (amplitudou) a malým c_1 (komplexním koeficientem). Poznamenejme, že platí

$$c_1 = c_{-1}^* \quad (2.7)$$

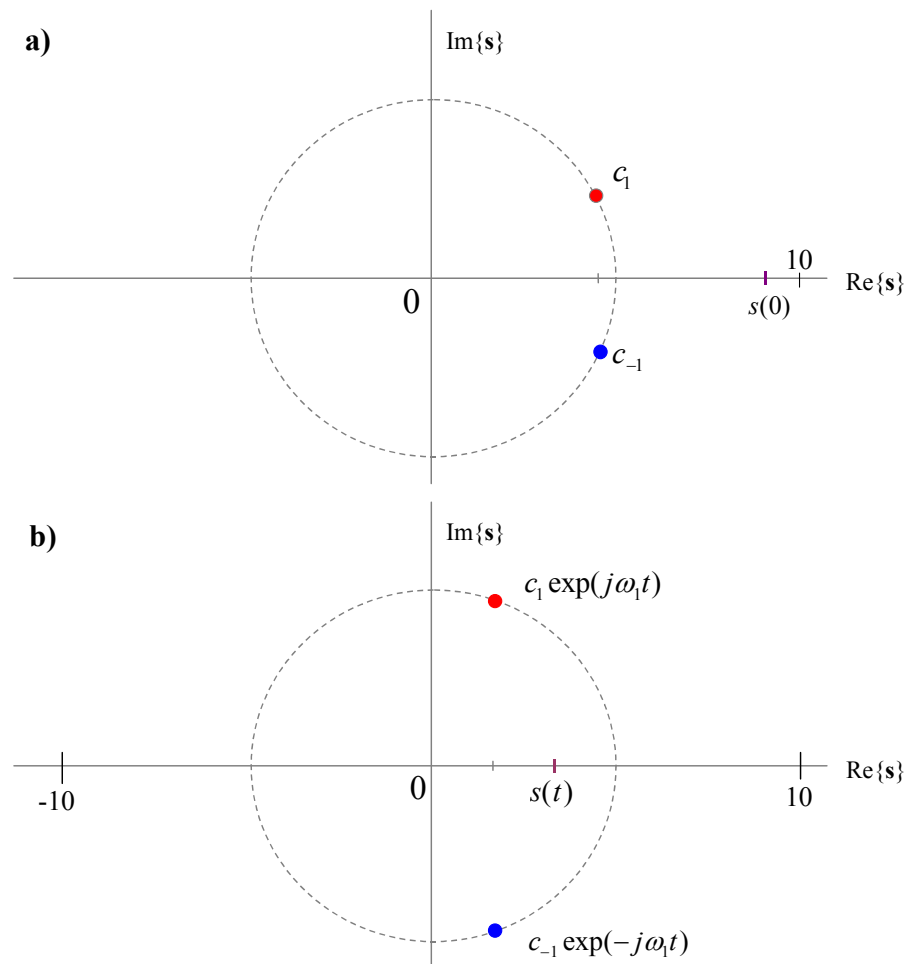
Souvislost mezi amplitudou a počáteční fází harmonického signálu a komplexními koeficienty je popsána vztahy, které ukazují na jednoduchý fyzikální význam komplexních koeficientů:

$$|c_1| = |c_{-1}| = \frac{1}{2} C_1, \quad \arg(c_1) = \varphi_1 \quad a \quad \arg(c_{-1}) = -\varphi_1 \quad (2.8)$$

Opačný přepočítání dovolují vztahy

$$C_1 = 2|c_1| = 2|c_{-1}| \quad a \quad \varphi_1 = \arg(c_1) = -\arg(c_{-1}) \quad (2.9)$$

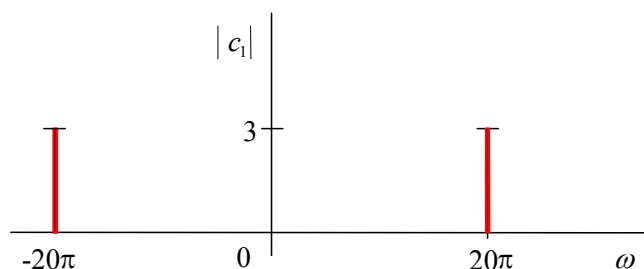
Modul koeficientu c_1 je tedy roven polovině amplitudy a argument koeficientu c_1 je roven počáteční fázi harmonického signálu.



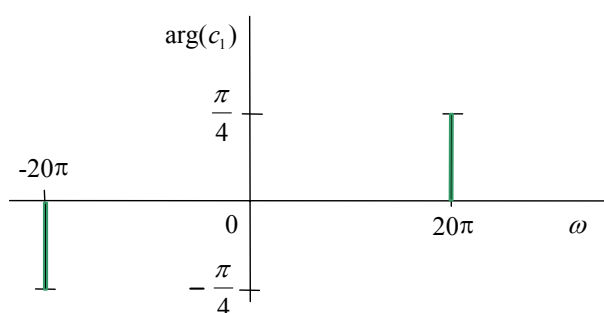
Obrázek 2.1: Model harmonického signálu

Komplexní vyjádření harmonického signálu je znázorněno obrázkem **Obrázek 2.1**. Je ilustrováno pomocí harmonického signálu s amplitudou $C_1=10$, s počáteční fází $\varphi_1=0.144\pi$ a s úhlovým kmitočtem $\omega_1=2\pi \cdot 10^3$. **Obrázek 2.1a)** znázorňuje stav v čase $t=0$ ms, **Obrázek 2.1b)** zobrazuje stav v čase $t=0.12$ ms.

Ve vztahu (2.6) se pracuje se záporným kmitočtem. Někteří studenti se s představou záporného kmitočtu obtížně smiřují, protože skutečné kmitočty jsou vždycky kladné. Zde se musíme dívat na kmitočty jako na parametr matematického modelu. Rozhodující je, že model je plně funkční.



Obrázek 2.2: Spektrum modulů



Obrázek 2.3: Spektrum argumentů

Dokonalé pochopení vztahu (2.6) je nezbytným předpokladem pro úspěšné studium dalšího učiva. Měl by k němu napomoci **Obrázek 2.1**.

2.1.2 Spektrum harmonického signálu

Harmonický signál může být znázorněn dvěma body, jedním v rovině úhlový kmitočty - amplituda, druhým v rovině úhlový kmitočty - počáteční fáze. Zobrazení signálu v kmitočtové oblasti se nazývá spektrum signálu.

Také koeficienty c_1 a c_{-1} můžeme využít pro zobrazení harmonického signálu v kmitočtové oblasti, konkrétně v rovinách úhlový kmitočty - modul koeficientu a úhlový kmitočty - argument koeficientu.

Zjišťujeme, že harmonický signál může být plně reprezentován svým spektrem, viz např. **Obrázek 2.2**, **Obrázek 2.3**. Obdobně tomu bude i u ostatních nenáhodných signálů.

Pojem spektrum se zdá být poněkud tajemný. Je to dáno tím, že existuje velké množství různých typů spekter. Některá spektra dávají úplnou informaci o signálu, jiná jen částečnou. Znovu konstatujeme, že spektrum je zobrazení signálu v kmitočtové oblasti.

2.2 Obecný periodický signál

2.2.1 Definice periodického signálu

Definice periodického signálu je shodná s definicí periodické funkce. Funkce $s(t)$ je periodická, existuje-li kladné číslo T_p takové, že pro všechna reálná t platí:

$$s(t + T_p) = s(t). \quad (2.10)$$

Nejmenší hodnota T_p , pro kterou je splněna předchozí podmínka, se nazývá základní perioda. Budeme ji označovat symbolem T_1 . Znamená to, že každý periodický signál má nekonečné množství period, které jsou rovny celistvým násobkům periody základní. Pokud mluvíme o periodě, máme zpravidla na mysli periodu základní.

V technické praxi se vyskytuje nepřeborné množství signálů, které se jeví jako periodické v intervalu mnohem delším, než je základní perioda. Jako modely takovýchto signálů pak s úspěchem používáme periodické signály. To však není hlavním důvodem, proč se periodickými signály zabýváme. Jak vzápětí uvidíme, periodické signály se dají popsat Fourierovou řadou, a ta nám zprostředkuje další zobrazení různých signálů v kmitočtové oblasti.

2.2.2 Fourierova řada

Zobecněním rovnice (2.6) můžeme snadno získat vyjádření signálu obsahujícího ne jednu harmonickou složku, ale více harmonických složek a případně i složku stejnosměrnou.

U periodického signálu s periodou T_1 je kmitočet základní harmonické složky dán vztahem

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}. \quad (2.11)$$

Základní harmonická složka přitom může mít nulovou amplitudu, nemusí být tedy v uvažovaném periodickém signálu zastoupena. Pokud je periodický signál složen jen z harmonických složek a případně složky stejnosměrné, mají ostatní harmonické složky úhlové kmitočty, které jsou celistvými násobky úhlového kmitočtu základní harmonické složky. Úhlový kmitočet k -té harmonické složky, $k > 1$, je dán vztahem $\omega_k = k\omega_1$. Plyne to z toho, že základní perioda T_1 je vždy jednou z period těchto vyšších harmonických složek. Opět připouštíme, že k -tá harmonická složka může mít i nulovou amplitudu. Zobecněním vztahu (2.6) dostáváme následující vyjádření periodického signálu:

$$s_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(jk\omega_1 t). \quad (2.12)$$

Rovnice (2.12) je známa pod názvem komplexní tvar Fourierovy řady.

Jaká je základní vlastnost koeficientů c_k ? Získáme ji pro $k \neq 0$ zobecněním vztahu (2.7):

$$c_k = c_{-k}^*. \quad (2.13)$$

Koeficient c_0 je vždy reálný a přímo udává hodnotu stejnosměrné složky periodického signálu. Analogicky ke vztahu (2.8) bude pro $k > 0$ platit

$$|c_k| = |c_{-k}| = \frac{1}{2} C_k, \quad \arg(c_k) = -\arg(c_{-k}) = \varphi_k, \quad (2.14)$$

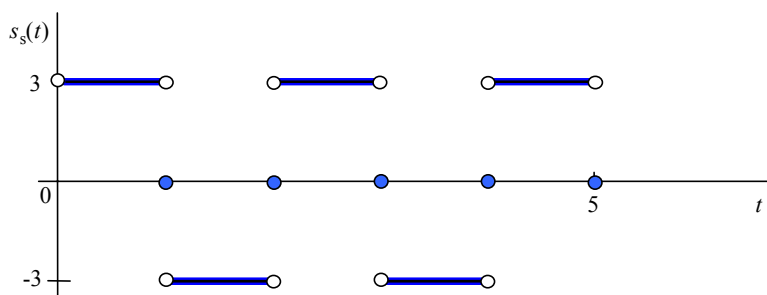
kde C_k je amplituda k -té harmonické složky a

φ_k je počáteční fáze k -té harmonické složky.

Koeficienty Fourierovy řady pro zadaný periodický signál $s(t)$ můžeme spočítat pomocí vzorce

$$c_k = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt. \quad (2.15)$$

Vypočítané koeficienty můžeme dosadit do výrazu na pravé straně rovnice (2.12). Součtem bude signál $s_s(t)$. Pokud by byl periodický signál $s(t)$ složen jen z harmonických složek a případně složky stejnosměrné, bylo by přesně $s_s(t) = s(t)$.



Obrázek 2.4: Součet Fourierovy řady signálu

Obrázek 2.4, nám ukazuje součet odpovídající signálu, který je definován obrázkem **Obrázek 1.8b**). Vidíme, že v daném případě je neshoda mezi původním signálem a součtem jeho Fourierovy řady tam, kde byl původní signál nespojitý. To je známá vlastnost, která však nijak nevádí při používání Fourierovy řady v technické praxi.

Podstatu náhrady periodického signálu $s(t)$ signálem $s_s(t)$ nám také mohou přiblížit částečné součty Fourierovy řady

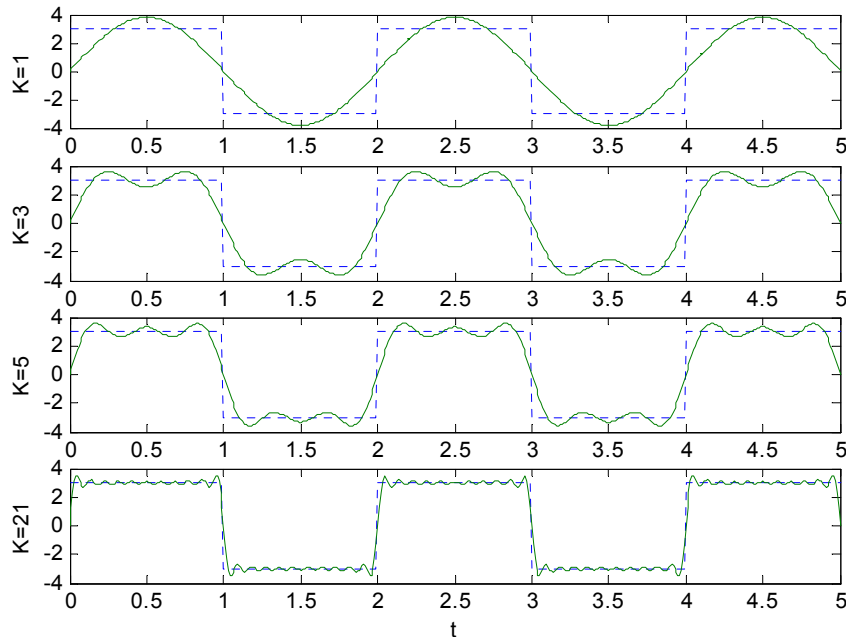
$$s_p(t) = \sum_{k=-K}^{k=+K} c_k \exp(jk\omega_1 t), \quad (2.16)$$

kde K je celé kladné číslo, počet sčítaných harmonických složek.

Dá se dokázat, že částečné součty, při zadaném pevném K , představují optimální aproximaci signálu $s(t)$ ve smyslu minimální střední kvadratické odchylky. Při jiných hodnotách koeficientů c_k než těch, které byly vypočteny podle vzorce (2.15), by byla aproximace méně dokonalá. Částečné součty Fourierovy řady pro signál, který znázorňuje **Obrázek 1.8**, vyjadřuje **Obrázek 2.5** pro $K = 1, 3, 5$ a 21 . V sousedství okamžiků, v nichž má signál $s(t)$ skokové změny, vytváří součtový signál překmity. Výška překmitu při rostoucím K k nule nekonverguje, šířka ano. Výskyt překmitů je znám pod názvem Gibbsův jev (Gibbs' phenomenon).

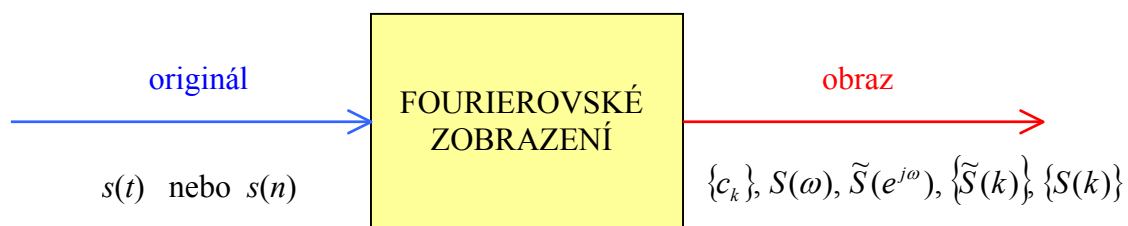
V jakém vztahu jsou obecně signály $s(t)$ a $s_s(t)$? To lze formulovat mnoha způsoby. Je například známo, že když je funkce $s^2(t)$ integrovatelná na intervalu $\langle 0, T_1 \rangle$, řada na pravé straně vztahu (2.12) konverguje, v bodech spojitosti funkce $s(t)$ je $s_s(t) = s(t)$, v bodech nespojitosti platí vztah

$$s_s(t) = \frac{1}{2}[s(t_-) + s(t_+)] \quad (2.17)$$



Obrázek 2.5: Částečné součty Fourierovy řady

Rozumné matematické modely signálů s konečným středním výkonem, signálů fyzikálně realizovatelných, podmínku integrovatelnosti kvadrátu na intervalu $\langle 0, T_1 \rangle$ splňují.



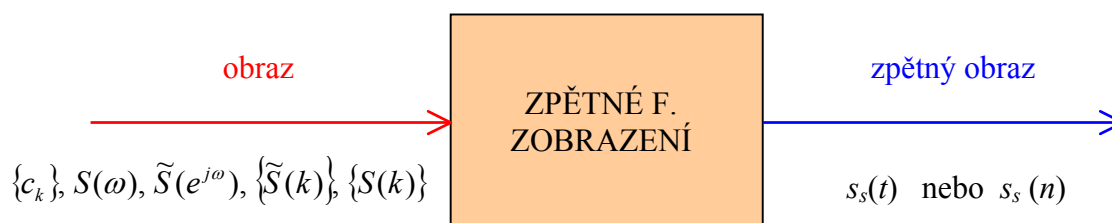
Obrázek 2.6: Fourierovská zobrazení

Bylo by nešťastné, kdyby se čtenář nechal odradit matematickou náročností vztahu (3.12) a zejména pak integrálu (2.15). V tomto kurzu není cílem počítání složitých integrálů, ale pochopení fyzikálního významu jednotlivých veličin ve vztazích vystupujících. U všech Fourierovských zobrazení, počínaje Fourierovou řadou a konče diskretní Fourierovou transformací, můžeme použít schéma, které znázorňuje **Obrázek 2.6**. Při dopředném zobrazení vstoupí do obdélníku označeného **FOURIEROVSKÉ ZOBRAZENÍ** signál. Obdélník z něj vyrobí obraz. Co představuje obdélník, je zpravidla vedlejší. Může to být matematický výpočet, častěji je to ale nalezení výsledku v nějaké tabulce v literatuře, nebo

výpočet na počítači či dokonce výpočet pomocí signálového procesoru. Pro fyzikálně realizovatelné signály obraz existuje. Pro případ Fourierovy řady je obrazem množina koeficientů $\{c_k\}$.

Při zpětném zobrazení vkládáme do obdélníku ZPĚTNÉ F. ZOBRAZENÍ obraz a dostaneme časový průběh signálu,

Obrázek 2.7, který je shodný s původním signálem, nebo se od něj liší jen v nepodstatných detailech.



Obrázek 2.7: Zpětná Fourierovská zobrazení

2.3 Spektra periodických signálů

Abychom si ukázali použití vztahu (2.15), zvolíme si za předmět zkoumání jeden z technicky nejvýznamnějších periodických signálů, periodický sled obdélníkových impulzů. Zkoumáním spekter dalších periodických signálů se zabývat nebudeme. Spektra lze najít v různých příručkách, případně si je student může spočítat pomocí jednoduchého programu. Nám jde hlavně o osvojení si fyzikálního významu koeficientů Fourierovy řady a o pochopení souvislostí mezi změnami v časovém průběhu signálu a v jeho spektru.

Ještě než zahájíme vlastní výpočet, uděláme dva přípravné kroky: zavedeme funkci $\text{sinc}(\cdot)$ a odvodíme vzorec pro výpočet integrálu, který se v teorii signálů a systémů často vyskytuje.

2.3.1 Funkce $\text{sinc}(\cdot)$

Funkce $\text{sinc}(x)$ může být definována vztahem

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{pro } x \neq 0 \text{ a} \\ 1 & \text{pro } x = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

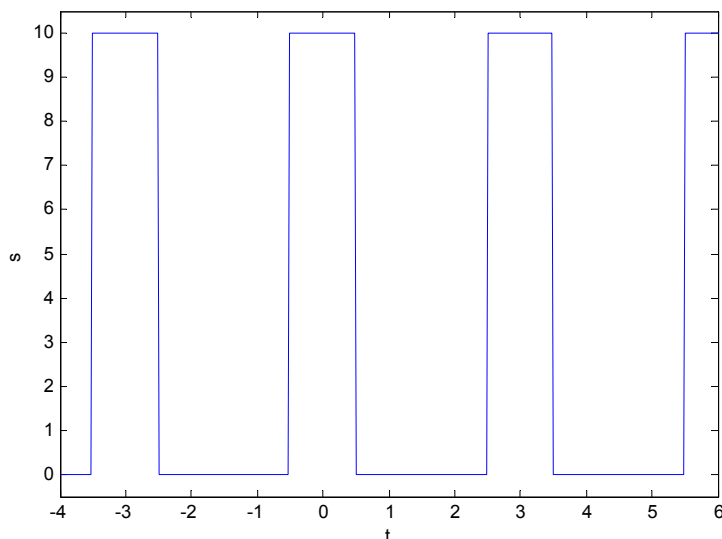
Výraz $\sin x/x$ není pro $x = 0$ definován. Proto byla, jak je obvyklé v matematice v obdobných případech, pro $x = 0$ dodefinována pro funkci $\text{sinc}(\cdot)$ funkční hodnota 1, která je limitou výrazu $\sin x/x$ pro x konvergující k nule.

Můžete se přesvědčit, že v Matlabu je funkce $\text{sinc}(\cdot)$ definována jinak, způsobem, který byl běžný spíše v minulosti. V definičním vztahu (2.18) je totiž na pravé straně místo x použito πx .

2.3.2 Odvození vzorce pro integrál

Vypočteme integrál

$$I(x) = \int_{-b}^b \exp(\pm jxy) dy. \quad (2.19)$$



Obrázek 2.8: Periodicky se opakující obdélníkové impulzy

Pro $x = 0$ je

$$I(0) = 2b. \quad (2.20)$$

Pro případ $x \neq 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} I(x) &= \left[\frac{\exp(\pm jxy)}{\pm jx} \right]_{-b}^b = \frac{\exp(jxb) - \exp(-jxb)}{jx} = \frac{2 \exp(jxb) - \exp(-jxb)}{2j} = \\ &= 2b \frac{\sin bx}{bx}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dílčí výsledky (2.20) a (2.21) lze společně zapsat vztahem

$$\int_{-b}^b \exp(\pm jxy) dy = 2b \operatorname{sinc}(bx). \quad (2.22)$$

Tím je odvození vzorce skončeno. Nyní již přikročíme k výpočtu spektra periodického sledu obdélníkových impulzů.

2.3.3 Spektrum periodických obdélníkových impulzů

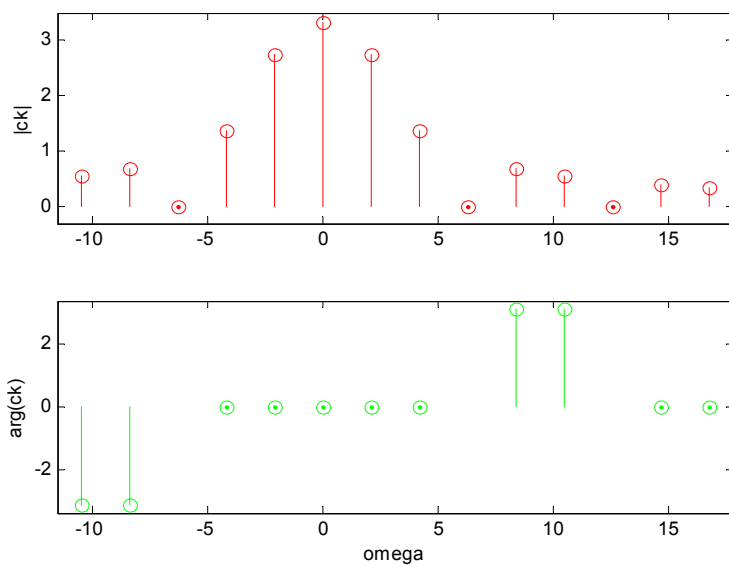
Analyzovaný signál ukazuje **Obrázek 2.8**: Periodicky se opakující obdélníkové impulzy. Signál byl záměrně zvolen tak, aby představoval sudou funkci. Ze vztahu (2.15) lze vyvodit, že v tomto případě koeficienty c_k budou ryze reálné. Výsledek výpočtu to potvrdí. Impulzy mají šířku $\mathcal{G} = 1$, výšku $D = 10$ a opakují se s periodou $T_1 = 3$. Koeficienty c_k Fourierovy řady (2.12) vypočteme pomocí vztahu (2.15):

$$c_k = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} D \exp(-jk\omega_1 t) dt = \frac{D}{T_1} \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \exp(-jk\omega_1 t) dt. \quad (2.23)$$

Pro výpočet integrálu využijeme dříve odvozený vztah (2.22), kde bude $t = y$, $b = g/2$ a $x = k\omega_1$. Díky tomu můžeme pro koeficient c_k Fourierovy řady psát:

$$c_k = \frac{D}{T_1} 2 \frac{g}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{g}{2} k\omega_1\right) = D \frac{g}{T_1} \operatorname{sinc}\left(\frac{g}{2} k\omega_1\right). \quad (2.24)$$

Obrázek 2.9 odpovídá signálu, který znázorňuje **Obrázek 2.8**. Vzhledem k tomu, že koeficienty c_k by obecně mohly být komplexní, je spektrum rozděleno na modulové a argumentové.



Obrázek 2.9: Spektrum modulů a spektrum argumentů periodického sledu obdélníkových impulsů

Pro načrtnutí spektra stačí spočítat úhlový kmitočet ω_1 základní harmonické složky, úhlový kmitočet ω_a určující kmitočtovou souřadnici prvního průchodu funkce $\operatorname{sinc}(\cdot)$ nulou a hodnotu výrazu Dg/T_1 . Úhlový kmitočet ω_a vypočteme z rovnice

$$\omega_a = \frac{2\pi}{g}. \quad (2.25)$$

V našem případě je $\omega_1 = 2\pi/3$, $\omega_a = 2\pi$ a $Dg/T_1 = 3,3$. Pro úhlový kmitočet $\omega = \omega_a$ je funkce $\operatorname{sinc}(\cdot)$ ve vztahu (2.24) rovna nule. Pokud je úhlový kmitočet ω_a celistvým násobkem úhlového kmitočtu ω_1 , není ve spektru obsažena harmonická složka s úhlovým kmitočtem rovným tomuto celistvému násobku. V našem případě, kdy $T_1 = 3g$, neobsahuje signál 3. harmonickou složku. Neobsahuje také 6., 9. a 12. harmonickou složku a vůbec všechny harmonické složky s úhlovými kmitočty rovnými celistvému násobku úhlového kmitočtu $3\omega_1$. Amplitudy harmonických složek jsou úměrné dvojnásobku délek úseček vyjadřujících moduly koeficientů c_k - **Obrázek 2.9a**). Absolutní hodnota stejnosměrné

složky je úměrná délce úsečky na kmitočtu $\omega = 0$, tedy ne jejímu dvojnásobku! Znaménko od nuly různé stejnosměrné složky je určeno hodnotou argumentu koeficientu c_0 . V našem případě je $\arg(c_0) = 0$, stejnosměrná složka je tedy kladná. Pokud by byl argument koeficientu c_0 roven π nebo $-\pi$, byla by stejnosměrná složka záporná. Počáteční fáze jednotlivých harmonických složek jsou dány příslušnými hodnotami argumentů c_k vyneseny na obrázku **Obrázek 2.9b**).

2.3.4 Poučky o spektrech

Jde nám o to zjistit, jak se změny časového průběhu signálu projeví ve spektru signálu. Poučky zde uvedeme bez odvození, které ostatně není příliš obtížné. U všech signálů budeme předpokládat, že jsou periodické s periodou T_1 a že modelují signály s konečnou střední hodnotou výkonu.

2.3.4.1 Spektrum součtu signálů

Nechť je signál $s(t)$ tvořen součtem signálů $s_a(t)$ a $s_b(t)$:

$$s(t) = s_a(t) + s_b(t). \quad (2.26)$$

Koeficienty Fourierovy řady signálu $s(t)$ označíme c_k , koeficienty signálu $s_a(t)$ označíme c_{ak} a koeficienty signálu $s_b(t)$ označíme c_{bk} . Pak pro všechna $k \in \mathbf{Z}$ platí:

$$c_k = c_{ak} + c_{bk}. \quad (2.27)$$

2.3.4.2 Spektrum signálu násobeného konstantou

Nechť jsou koeficienty Fourierovy řady signálu $s(t)$ označeny c_k a nechť a je libovolná konstanta. Pak platí, že koeficienty Fourierovy řady signálu $as(t)$ jsou dány hodnotami výrazů ac_k .

2.3.4.3 Spektrum signálu posunutého v čase

Pro posunutý signál zavedeme označení

$$s_\tau(t) = s(t - \tau), \quad (2.28)$$

τ je reálná konstanta.

Pomocí substituce $x = t - \tau$ je možné ukázat, že koeficienty $c_{\tau k}$ posunutého signálu jsou s koeficienty c_k původního signálu svázány vztahem

$$c_{\tau k} = c_k \exp(-jk\omega_1\tau). \quad (2.29)$$

Z posledního vztahu vyplývá, že moduly koeficientů se posunutím signálu v čase nezmění, zatímco argumenty se změni úměrně kmitočtu složky a posunutí:

$$\arg c_{\tau k} = \arg c_k - k\omega_1\tau. \quad (2.30)$$

Jinak řečeno: při posunutí signálu v čase se nemění amplitudy harmonických složek, počáteční fáze se mění o hodnotu $-k\omega_1\tau$. Takovýto výsledek jsme mohli očekávat, protože víme, že při posunutí periodického signálu v čase se v čase posunou všechny jeho harmonické složky. Všechny složky se posunou o stejný časový úsek τ , aniž by se přitom změnily jejich amplitudy. Fázové posunutí složek stejné není, je úměrné kmitočtu. Výraz $-k\omega_1\tau$ udává fázové posunutí k -té harmonické složky.

2.3.4.4 Spektrum signálu se změněným časovým měřítkem

Stejně jako v odstavci 1.4 i zde bude m kladná konstanta. Byla-li perioda původního signálu T_1 a úhlový kmitočet základní harmonické složky ω_1 , budou odpovídající parametry signálu $s(mt)$ po řadě T_1/m a $m\omega_1$. Koeficient c_{mk} signálu $s(mt)$ bude na koeficient c_k původního signálu $s(t)$ vázán překvapivě jednoduchým vztahem

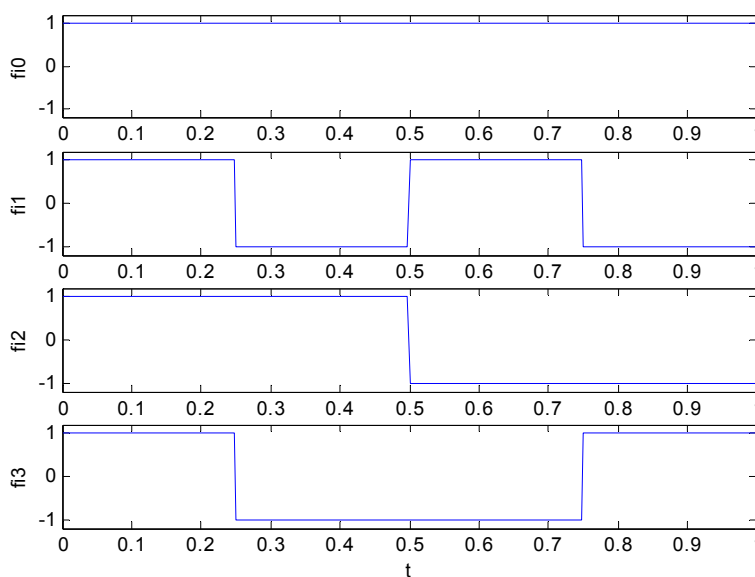
$$c_{mk} = c_k. \quad (2.31)$$

Při změně časového měřítka zůstávají zachovány moduly i argumenty koeficientů Fourierovy řady, nemění se tedy množiny amplitud a množiny počátečních fází. Mění se vůbec něco? Ano. Mění se množina kmitočtů, k nimž se amplitudy a počáteční fáze vztahují.

Změna časového měřítka je operace, se kterou se v technické praxi často setkáváme. Příkladem může být změna přenosové rychlosti při přenosu dat.

2.4 Zobecnění Fourierovy řady

Fourierova řada byla původně určena pro vyjádření signálu definovaného nad konečným intervalem. Periodické chování součtu $s_s(t)$ ale vedlo k jejímu dominantnímu využívání pro zobrazení periodických funkcí a signálů v kmitočtové doméně.



Obrázek 2.10: Hadamardovy funkce

Fourierova řada a částečný součet Fourierovy řady jsou zdařilým řešením úlohy: nahradit funkci $f(t)$ (definovanou na intervalu $\langle 0, T \rangle$ a integrovatelnou s kvadrátem) lineární kombinací $\hat{f}(t)$ předem zvolených funkcí $\varphi_i(t)$ definovaných na intervalu $\langle 0, T \rangle$. V případě Fourierovy řady tvoří množinu $\{\varphi_i(t)\}$ harmonické funkce typu $\cos i\omega_1 t$ a $\sin i\omega_1 t$. V rovnici (2.12) je použita množina funkcí $\{\exp(ji\omega_1 t)\}$.

Lineární kombinaci můžeme zapsat vztahem

$$\widehat{f}(t) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(t), \quad (2.32)$$

kde N je počet prvků množiny $\{\varphi_i(t)\}$ a

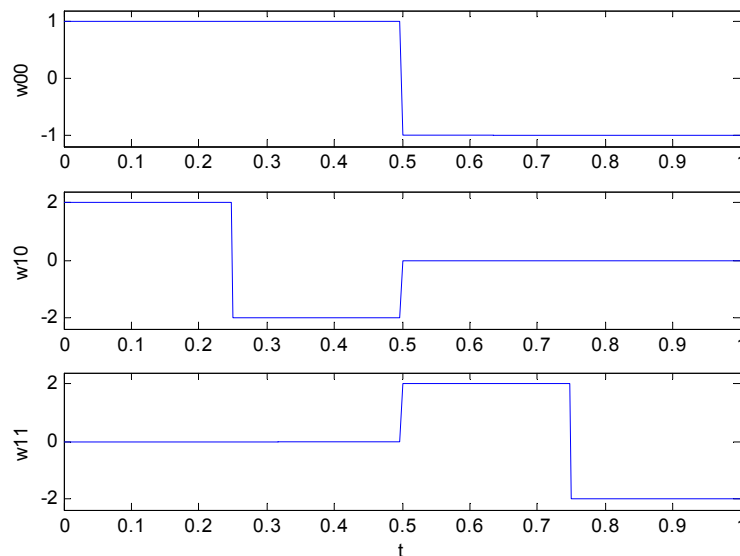
c_i jsou vhodné koeficienty.

Kvalita náhrady bude silně závislá na volbě množiny $\{\varphi_i(t)\}$. Úspěšnost vyjádření funkce řadou na intervalu $\langle 0, T \rangle$ můžeme hodnotit pomocí veličiny

$$P_\varepsilon = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t) - \widehat{f}(t)]^2 dt. \quad (2.33)$$

Veličina P_ε představuje střední kvadratickou chybu náhrady a je v technických vědách často používána při hodnocení blízkosti průběhů dvou funkcí. Souvisí to s tím, že v mnoha případech veličina P_ε představuje výkon. Naší snahou je, aby náhrada byla kvalitní při malém počtu N koeficientů c_i .

Jak volit systém funkcí $\{\varphi_i(t)\}$? Budou-li funkce $\{\varphi_i(t)\}$ lineárně nezávislé, budou koeficienty určeny jednoznačně. Víme, že libovolný systém lineárně nezávislých funkcí lze převést na systém ortogonálních funkcí, případně na systém ortonormálních funkcí. Převodem můžeme dosáhnout toho, že stanovení koeficientů bude méně obtížné.



Obrázek 2.11: Haarovy wavelety

Systém ortonormálních funkcí je úplný, když při N rostoucím nade všechny meze konverguje P_ε k nule.

Kromě systému ortogonálních funkcí použitých Fourierem existuje i řada dalších systémů ortogonálních funkcí definovaných nad intervaly různé povahy. Zajímavé jsou například funkce Hadamardovy, které se používají v moderních rádiových mobilních číslicových komunikacích pro rozlišení kanálů. Každému kanálu je přidělena jedna funkce. Hadamardovy funkce se skládají z konstantních úseků.

V posledních letech se k vyjádření signálů stále více používá nový typ funkcí $\varphi_i(t)$, kterým se česky říká vlnky, anglicky wavelets. Vlnky se odvozují jedna z druhé posouváním a změnou časového měřítka. Jejich základní vlastností, kterou se liší od harmonických signálů, je, že jsou časově lokální, mají konečnou dobu trvání. To může být velkou výhodou při zobrazování některých signálů. Příkladem pomocí vlnek řešených úloh je potlačení šumu (denoising) a redukce obrazových dat. Důležité je, že existují výkonné algoritmy pro realizaci vlnkových transformací.

Příklad 2.1: *Fourierova řada*

Pro okamžik $t = 0,1$ s vypočtete okamžitou hodnotu harmonického signálu, jehož koeficient $c_1 = 3 \exp(j0,2\pi)$ a jehož úhlový kmitočet $\omega_1 = 20\pi$.

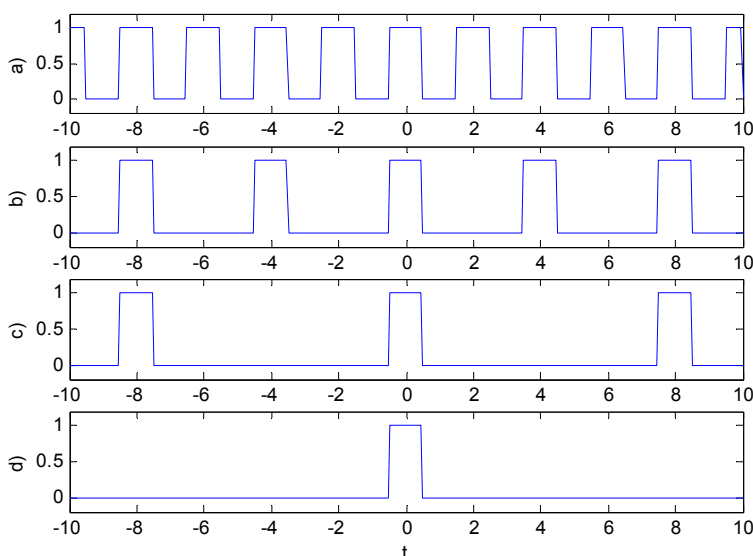
Příklad 2.2: *Základní harmonická*

Pro sudý periodický sled obdélníkových impulzů s šířkou $\mathcal{G} = 1\text{ms}$, výškou $D = 4\text{V}$ a periodou $T_1 = 2\text{ms}$ stanovte a) koeficient c_1 , b) amplitudu základní harmonické složky, c) počáteční fázi základní harmonické složky, d) kmitočet základní harmonické složky a e) stejnosměrnou složku.

3 Signály se spojitým spektrem

3.1 Zavedení Fourierovy transformace

Zatím jsme se zabývali spektry periodických signálů. Zjistili jsme, že se periodické signály skládají z harmonických složek a případně i složky stejnosměrné. Kmitočty všech harmonických složek jsou přitom celistvými násobky kmitočtu základní harmonické složky. Nyní se budeme snažit najít spektrální vyjádření u takových signálů, které zjevně nejsou tvořeny spoččetným nebo konečným počtem harmonických složek. K těmto signálům jistě patří jednorázové signály, jako například jediný osamocený impuls konečného trvání. Někdy se tyto signály označují, asi ne příliš šťastně, jako neperiodické nebo aperiodické signály.



Obrázek 3.1: Periodické signály s narůstající periodou

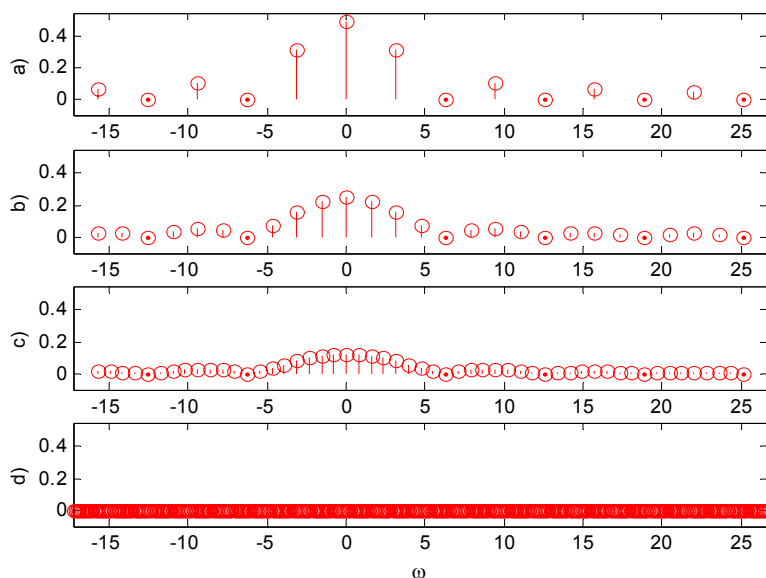
Nástrojem, který nám dovolí vyjádřit v kmitočtové doméně signály všech uvedených typů, je Fourierova transformace. Je to další z Fourierovských zobrazení, **Obrázek 2.6**. Při zavedení Fourierovy transformace vyjdeme z periodického signálu $s(t)$ s periodou T_1 - viz **Obrázek 3.1a**. Periodu T_1 budeme postupně zvětšovat. Víme, že úhlový kmitočet ω_1 základní harmonické složky je nepřímo úměrný periodě T_1 . S rostoucí periodou se tedy úhlový kmitočet základní harmonické složky zmenšuje. To se na grafickém znázornění spektra (**Obrázek 3.2**) projeví zhuštěním spektrálních čar. Vzdálenost sousedních spektrálních čar $\omega_{k+1} - \omega_k = \omega_1$, samozřejmě až na ty případy, kdy některá z čar schází. Pro signál $s(t)$ z obrázku **Obrázek 3.1d** již budou jednotlivé spektrální čáry splývat, namísto diskrétních hodnot úhlových kmitočtů bude nutno zavést spojitě se měnící veličinu ω . Zatímco u periodických signálů nabývají úhlové kmitočty jednotlivých harmonických složek diskrétních hodnot $k\omega_1$, hodnoty úhlových kmitočtů "harmonických složek" signálu $s(t)$ z obrázku **Obrázek 3.1d** na sebe spojitě navazují, viz **Obrázek 3.2d**.

Ze vztahu (2.15) lze vyvodit, že v posloupnosti signálů z obrázku **Obrázek 3.1** budou mít při rostoucí periodě T_1 hodnoty modulů koeficientů c_k klesající tendenci. V mezním případě budou moduly koeficientů c_k nekonečně malé. Z toho plyne, že k vyjádření signálu $s(t)$ z obrázku **Obrázek 3.1d** v kmitočtové oblasti musíme namísto koeficientů Fourierovy

řady zavést něco jiného. Vhodným nástrojem pro tento účel je tzv. spektrální funkce $S(\omega)$. Matematicky představuje spektrální funkce $S(\omega)$ Fourierův obraz signálu $s(t)$. Obraz je originálu $s(t)$ přiřazen vztahem

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt, \quad (3.1)$$

kde ω je úhlový kmitočet.



Obrázek 3.2: Moduly koeficientů Fourierových řad

Vztah (3.1) je vyjádřením lineární integrální transformace nazývané Fourierova transformace (Fourier transform). Je obvyklé předpokládat, že funkce $s^2(t)$ je integrovatelná, nebo že funkce $s(t)$ je absolutně integrovatelná v intervalu $(-\infty, \infty)$. Při jistém zobecnění Fourierovy transformace bude možné uvedené předpoklady opustit - viz dále.

Poznámka: Vztah (3.1) můžeme vyvodit ze vztahu (2.15) s použitím limitního přechodu $T_1 \rightarrow \infty$.

Obdobou vztahu (2.12) je vztah

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (3.2)$$

který je vyjádřením zpětné neboli inverzní Fourierovy transformace (inverse Fourier transform). Umožňuje, na základě spektrální funkce $S(\omega)$ signálu $s(t)$, stanovit časový průběh signálu s tím, že v bodech nespojitosti signálu $s(t)$ konverguje integrál (3.2) k aritmetickému průměru limity zleva a limity zprava.

3.2 Poučky o spektrech

3.2.1 Vlastnosti spektrální funkce

Rozepíšeme-li výraz $\exp(-j\omega t)$ v integrandu na pravé straně rovnice (3.1) na $\cos \omega t - j \sin \omega t$, snadno zjistíme, že reálná část $R(\omega)$ spektrální funkce $S(\omega)$ je dána vztahem

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt \quad (3.3)$$

a imaginární část $X(\omega)$ spektrální funkce je dána vztahem

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt. \quad (3.4)$$

Je zřejmé, že $R(-\omega) = R(\omega)$, $X(-\omega) = -X(\omega)$ a $X(0) = 0$. Z toho také vyplývá, že $S(\omega)$ a $S(-\omega)$ jsou funkce komplexně sdružené.

Je užitečné zjistit, jaké chování mají spektrální funkce sudého a lichého signálu $s(t)$. Pro sudou funkci $s(t)$ je $X(\omega) = 0$ pro všechna ω reálná, což vyplývá z charakteru integrandu integrálu na pravé straně rovnice (3.1). Spektrální funkce je v tomto případě reálná. Obdobně pro lichou funkci $s(t)$ je $R(\omega) = 0$ a spektrální funkce je ryze imaginární.

3.2.2 Linearita zobrazení

Nechť je $S_1(\omega)$ spektrální funkcí signálu $s_1(t)$ a $S_2(\omega)$ spektrální funkcí signálu $s_2(t)$. Nechť a a b jsou konstanty. Pak je funkce

$$S(\omega) = aS_1(\omega) + bS_2(\omega) \quad (3.5)$$

spektrální funkcí signálu

$$s(t) = as_1(t) + bs_2(t). \quad (3.6)$$

3.2.3 Posunutí v čase

Nechť je τ reálná konstanta. Je-li $S(\omega)$ Fourierovým obrazem funkce $s(t)$, pak funkce $S(\omega) \exp(-j\omega\tau)$ je obrazem funkce $s(t - \tau)$.

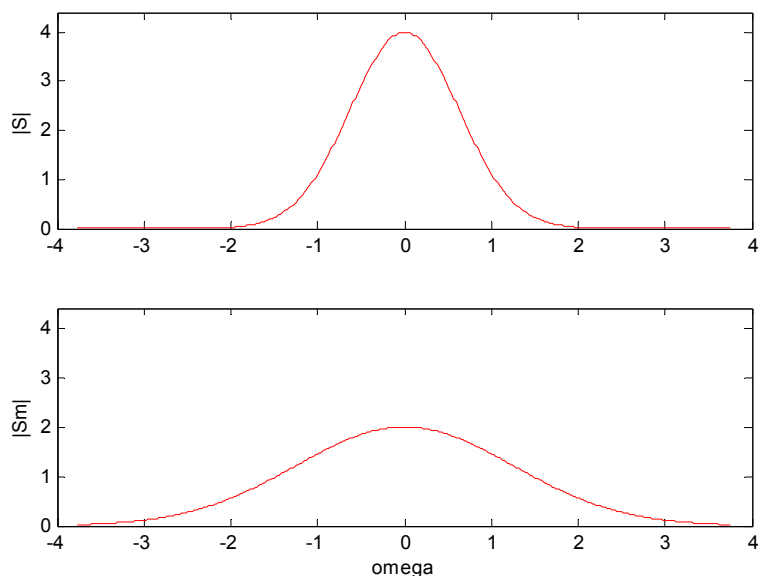
Znamená to, že při posunutí signálu v čase není změněn modul spektrální funkce, argument spektrální funkce je dán součtem argumentu původní spektrální funkce a funkce $-\tau\omega$.

3.2.4 Změna časového měřítka

Nechť je m kladná konstanta. Je-li $S(\omega)$ spektrální funkcí signálu $s(t)$, je funkce popsána výrazem

$$\frac{1}{m} S\left(\frac{\omega}{m}\right)$$

spektrální funkcí signálu $s(mt)$. Z poučky plyne, že roztažení časového měřítka odpovídá stlačení kmitočtového měřítka a naopak.

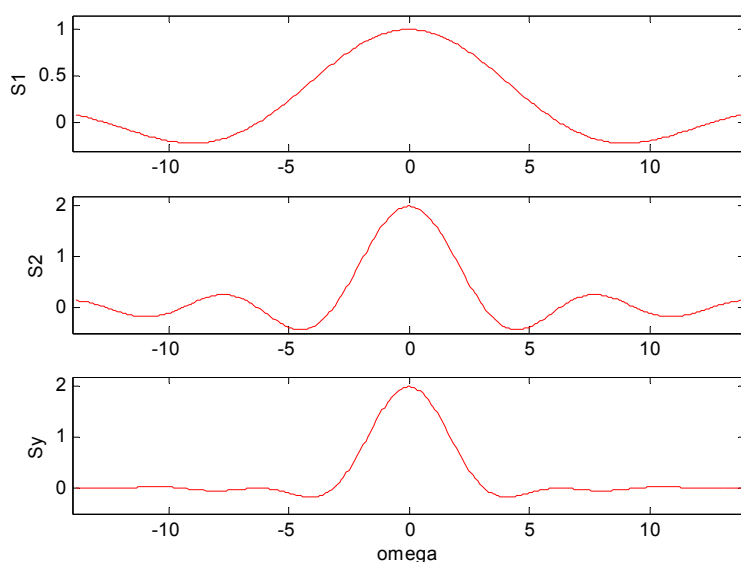


Obrázek 3.3: Změna časového měřítka

3.2.5 Spektrum konvoluce

Konvoluce $y(t)$ signálů $s_1(t)$ a $s_2(t)$ je dána vztahem

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau. \quad (3.7)$$



Obrázek 3.4: Spektrum konvoluce dvou obdélníkových signálů

Příklad odvození konvoluce dvou signálů je ukazuje **Obrázek 1.14**. Pro snazší pochopení obsahu pojmu konvoluce lze doporučit nakreslení si na papír průběhu signálu $s_1(\tau)$ a na proužek papíru průběhu signálu $s_2(0 - \tau)$. Pak je možné proužek papíru vodorovně posouvat a získávat tak průběhy $s_2(t - \tau)$ pro různá t . Po načrtnutí součinu $s_1(\tau)s_2(t - \tau)$ pro každou zvolenou hodnotu t je možné odhadnout hodnotu y integrálu z pravé strany vztahu

(3.7) a zanést výsledek do dalšího diagramu se souřadnicemi t a y . Je vhodné si zvolit za funkce $s_1(t)$ a $s_2(t)$ jednoduché obdélníkové průběhy. Konvolucí dvou pravoúhlých impulsů je lichoběžníkový impuls.

Spektrální funkce konvoluce signálů $s_1(t)$ a $s_2(t)$ je rovna součinu spektrálních funkcí $S_1(\omega)$ a $S_2(\omega)$ těchto dvou funkcí.

3.2.6 Spektrální hustota energie

Je-li signálem $s(t)$ elektrické napětí $u(t)$ nebo elektrický proud $i(t)$, pak výraz $s^2(t)$ představuje okamžitý výkon na jednotkovém odporu $R = 1 \Omega$. Energie signálu je dána integrálem

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt, \quad (3.8)$$

pokud tento integrál konverguje.

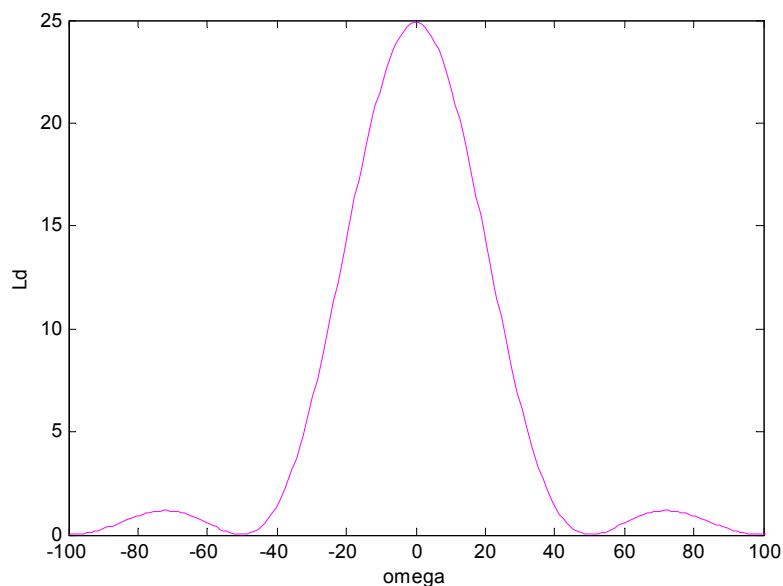
Je možné tuto energii vyjádřit také pomocí spektrální funkce signálu? Na to nám dá odpověď Parsevalův teorém pro neperiodické signály, který můžeme vyjádřit rovnicí

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.9)$$

Rozložení energie signálu v kmitočtové oblasti je popsáno dvojstrannou spektrální hustotou energie $L_d(\omega)$

$$L_d(\omega) = \frac{1}{2\pi} |S(\omega)|^2. \quad (3.10)$$

Příklad průběhu spektrální hustoty energie je ukazuje **Obrázek 3.5**. Je to dvoustranná spektrální hustota energie pravoúhlého impulsu o výšce 100 a šířce 0,125. Na rozdíl od spektrální funkce $S(\omega)$, která je obecně komplexní, je funkce $L_d(\omega)$ vždy reálná, dokonce je nezáporná.



Obrázek 3.5: Spektrální hustota energie

3.3 Spektra vybraných signálů

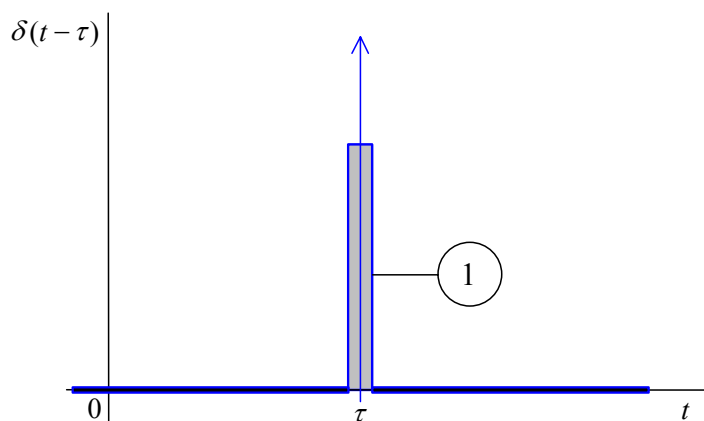
3.3.1 Jednotkový impulz

Jednotkový impulz (unit impulse, delta function), nazývaný také Diracův impulz, není klasická funkce, představuje tzv. zobecněnou funkci neboli distribuci. Je zapotřebí zdůraznit, že používání neklasických funkcí není spojeno s žádným narušením přísné teorie a je jen prostředkem dovolujícím ve zkrácené formě vyjadřovat určité vztahy. Úspora psaní a času, stejně tak jako zpřehlednění výrazů a vztahů jsou vítané, proto se s jednotkovým impulzem často setkáváme.

Definice jednotkového impulzu neurčuje, jak jednotkový impulz probíhá, jakých nabývá hodnot, jak vypadá, definice určuje, jak jednotkový impulz působí. Necht' $f(t)$ je funkce spojitá v bodě $t = \tau$. Jednotkový impulz $\delta(t)$ se vyznačuje vlastností vyjádřenou definičním vztahem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau)dt = f(\tau). \quad (3.11)$$

My většinou vystačíme se zjednodušenou představou, že jednotkový impulz je velmi úzký a velmi vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky. Snadno se můžeme přesvědčit, že v limitním případě, při konvergenci šířky impulzu k nule, je splněn vztah (3.11). Průběh jednotkového impulzu nelze přímo graficky znázornit, protože impulz je nekonečně vysoký a nevejde se ani na velký papír. Pro jeho grafické vyjádření se používá různých smluvených symbolů, jeden z nich ukazuje **Obrázek 3.6**. Číslo v kroužku udává tzv. mohutnost impulzu. Pro $\delta(t)$ je to 1, pro $A\delta(t)$ je to A , když A je konstanta.

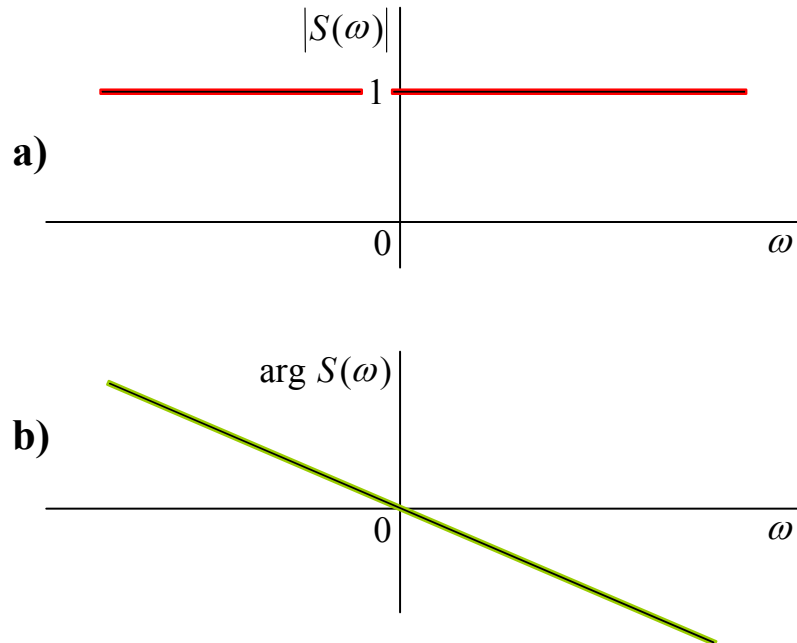


Obrázek 3.6: Jednotkový impulz

Přibližným vyjádřením impulzu $A\delta(t)$ může být úzký impulz, nemusí být obdélníkový, s dobou trvání podstatně kratší, než jsou časové konstanty systému, na který tímto impulzem působíme. Přesná realizace není možná, jednotkový impulz má nekonečnou energii.

Pro jednotkový impulz, stejně jako pro některé další funkce času, jejichž spektrální funkce budeme nyní počítat, využijeme následujícího zobecnění Fourierovy transformace:

K funkcím času $s(t)$, obsahujícím nanejvýš spočetný počet funkcí $a_i\delta(t - t_i)$ a složku $s_a(t)$ takovou, že existuje konečné kladné M , pro které platí $|s_a(t)| < M$ při $|t| \rightarrow \infty$ existuje jediný obraz $F\{s(t)\}$. K tomuto obrazu existuje jediný zpětný obraz $s_s(t)$, který je roven $s(t)$ skoro všude. Zde a_i je reálná konstanta.



Obrázek 3.7: Modul a argument spektrální funkce jednotkového impulsu

S použitím vztahu (3.1) můžeme pro spektrální funkci $S(\omega)$ posunutého jednotkového impulsu $\delta(t - \tau)$ psát:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) \exp(-j\omega t) dt. \quad (3.12)$$

Položíme-li ve vztahu (3.11) funkci $f(t) = \exp(-j\omega t)$, snadno nalézáme spektrální funkci posunutého jednotkového impulsu $\delta(t - \tau)$:

$$S(\omega) = \exp(-j\omega\tau). \quad (3.13)$$

Ve zvláštním případě, když $\tau = 0$, je spektrální funkce dána vztahem

$$S(\omega) = 1. \quad (3.14)$$

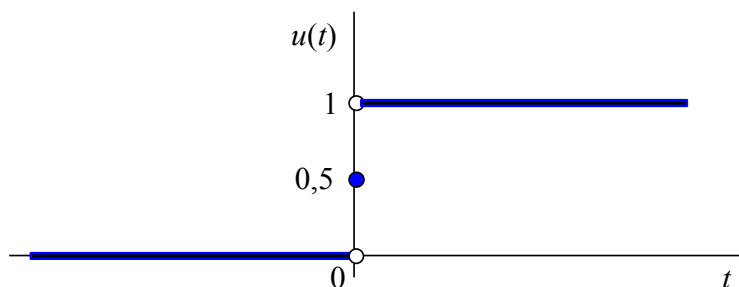
Získané výsledky ukazují, že energie jednotkového impulsu je rovnoměrně rozložena přes všechny kmitočty. Potvrzují také platnost poučky o spektru časově posunutého signálu.

3.3.2 Jednotkový skok

Jednotkový skok (unit step) je jednoduchý, ale velmi významný matematický model signálu. Bývá také nazýván Heavisideova funkce nebo jednotková funkce. Rovněž jeho značení není jednotné. Označuje se nejčastěji $\sigma(t)$ nebo $I(t)$ ale také $u(t)$. Asi se to bude čtenáři zdát již příliš, ale je nutno konstatovat, že ani definice jednotkového skoku není jednotná. Někdy se definuje $u(0) = 0,5$, jindy se definuje $u(0) = 1$. Touto okolností se nemusíme příliš znepokojovat. Hodnota matematického modelu pro jediný okamžik není z hlediska jeho funkce rozhodující, je zde jenom prostředkem k tomu, aby byly jednoduše splněny formální matematické náležitosti při použití Fourierovy nebo Laplaceovy transformace. Definujme si jednotkový skok takto:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ 0,5 & \text{pro } t = 0, \\ 1 & \text{pro } t > 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

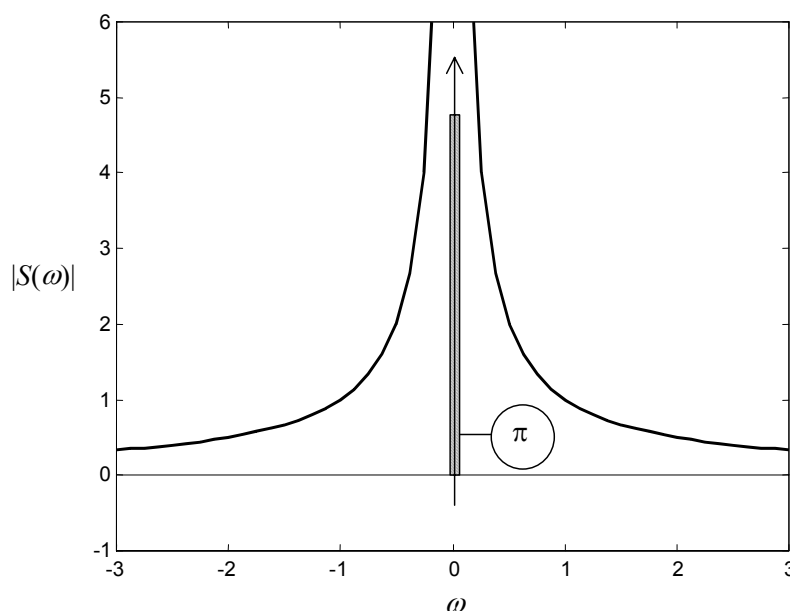
Jeho grafické znázornění dává **Obrázek 3.8**. Jedná se o funkci s jedním bodem nespojitosti. Jednotkový skok řadíme mezi signály s nekonečnou energií, protože integrál na pravé straně (3.8) pro něj nekonverguje.



Obrázek 3.8: Jednotkový skok

Pokud by jednotkový skok představoval průběh elektrického napětí působícího na odpor, byla by energie v odporu strávená nekonečná.

Jednotkový skok je jedním ze standardních signálů pro testování soustav. Z odezvy soustavy na buzení jednotkovým skokem lze zpravidla usuzovat na vlastnosti soustavy. U lineárních soustav neparаметrických je odezvou na jednotkový skok systém plně popsán. Příkladů na testování systémů nejrůznější fyzikální nebo technické povahy bychom jistě dokázali najít celou řadu. Dalším signálem vhodným pro testování soustav je jednotkový impulz.



Obrázek 3.9: Spektrum jednotkového skoku

Spektrální funkce jednotkového skoku $u(t)$ má reálnou část $R(\omega)$ spektrální funkce danu vztahem

$$R(\omega) = \pi\delta(\omega). \quad (3.16)$$

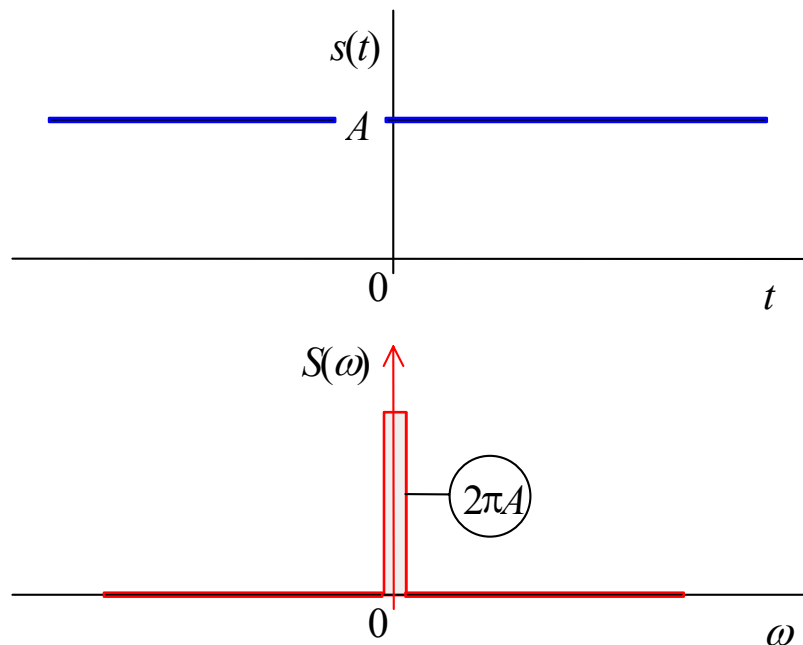
Reálná část spektrální funkce odpovídá sudé části jednotkového skoku $1(t)$, tj. konstantě $A = 1/2$. Imaginární část $X(\omega)$ spektrální funkce $S(\omega)$ je dána vztahem (3.17). Imaginární část $X(\omega)$ spektrální funkce $S(\omega)$ odpovídá liché části signálu $u(t)$. Průběh modulů obou částí spektrální funkce graficky znázorňuje **Obrázek 3.9**. S rostoucím kmitočtem energie připadající na jednotku kmitočtu výrazně klesá.

$$X(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{j\omega} & \text{pro } \omega \neq 0, \\ 0 & \text{pro } \omega = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

3.3.3 Stejnoseměrný signál

Stejnoseměrný signál je zcela běžný a jednoduchý signál. Přesně vzato, ani on není plně fyzikálně realizovatelný, protože má teoreticky nekonečnou energii. Abychom si ušetřili zdlouhavé odvozování, vyjdeme ze spektrální funkce stejnoseměrného signálu. Fyzikální představa nám napovídá, že energie stejnoseměrného signálu je soustředěna na kmitočtu 0. Lze proto očekávat, že spektrální funkce bude rovna nule s výjimkou kmitočtů nekonečně blízkých nule. Je známo, že pro signál $s(t) = A$, kde A je reálná konstanta, je spektrální funkce dána vztahem

$$S(\omega) = 2\pi A\delta(\omega). \quad (3.18)$$

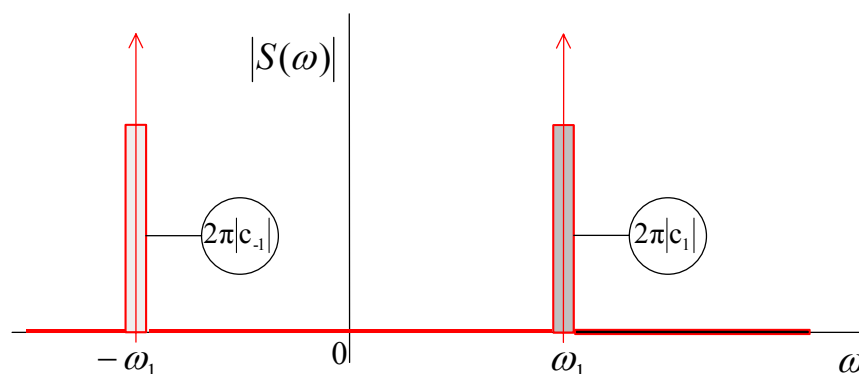


Obrázek 3.10: Stejnoseměrný signál a jeho spektrální funkce

Platnost tohoto tvrzení si lze ověřit pomocí vztahu (3.2):

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} 2\pi A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (3.19)$$

Výpočet integrálu je snadný při použití definiční vlastnosti (3.11) po záměně proměnné ω za proměnnou t .



Obrázek 3.11: Spektrum harmonického signálu

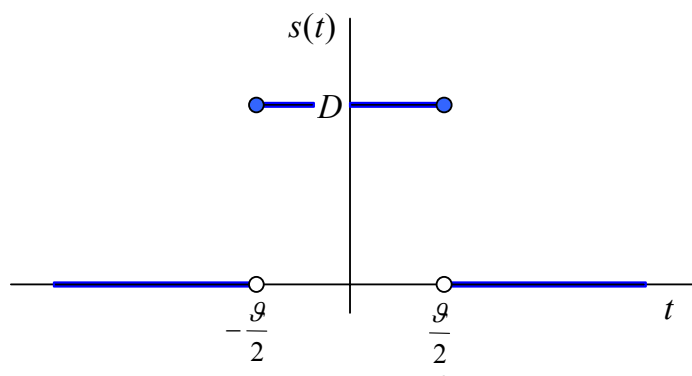
3.3.4 Harmonický signál

Spektrum harmonického signálu umíme vyjádřit pomocí Fourierovy řady. Nalezením jeho spektrální funkce získáme možnost aplikovat Fourierovu transformaci i na všechny signály s periodickou složkou.

Spektrální funkce harmonického signálu vyjádřeného rovnicí (2.6) je dána vztahem

$$S(\omega) = 2\pi c_1 \delta(\omega - \omega_1) + 2\pi c_{-1} \delta(\omega + \omega_1). \quad (3.20)$$

Průběh spektrální funkce, **Obrázek 3.11**, odpovídá očekávanému rozložení energie podél kmitočtové osy.



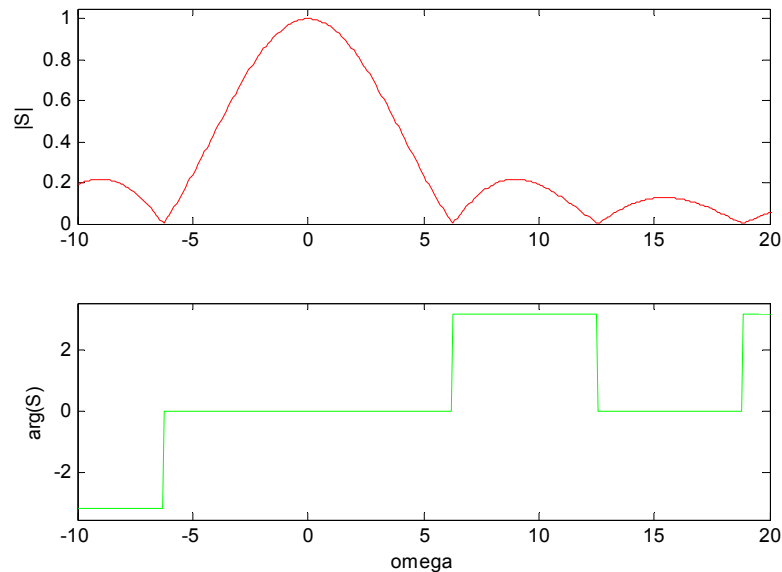
Obrázek 3.12: Obdélníkový impulz

3.3.5 Obdélníkový impulz

Spektrální funkci obdélníkového impulzu snadno vypočteme na základě vztahu (3.1) a vzorce (2.22):

$$S(\omega) = D \int_{-g/2}^{g/2} \exp(-j\omega t) dt = Dg \operatorname{sinc}\left(\frac{g}{2}\omega\right). \quad (3.21)$$

Časový průběh sudého obdélníkového impulsu šířky \mathcal{G} a výšky D znázorňuje **Obrázek 3.12**. Modul a argument jeho spektrální funkce pro $D = 1$ a pro $\mathcal{G} = 1$ zobrazuje **Obrázek 3.13**. Argument je přitom nakreslen zjednodušeně - souvislou čarou.

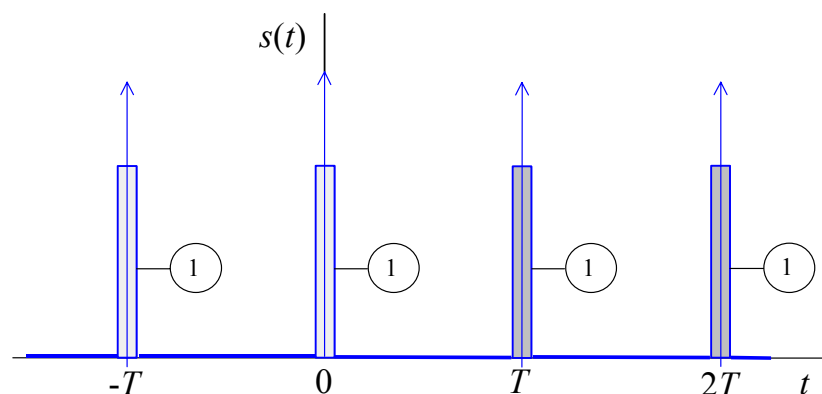


Obrázek 3.13: Spektrum obdélníkového impulsu

Jak již bylo řečeno, **Obrázek 3.5** zobrazuje průběh spektrální hustoty energie $L_d(\omega)$ obdélníkového impulsu. Přibližně 90% energie impulsu je dislokováno v pásmu úhlových kmitočtů od $-2\pi/\mathcal{G}$ do $2\pi/\mathcal{G}$. Uvažujeme-li pouze kladné kmitočty lze říci, že 90% se nachází v pásmu úhlových kmitočtů od 0 do $2\pi/\mathcal{G}$, nebo v pásmu obyčejných kmitočtů od 0 do $1/\mathcal{G}$ [Hz]. Zde můžeme snadno vysledovat závislost, která má širší platnost: čím více je signál soustředěn v čase, tím více je rozprostřen v kmitočtové oblasti. Naopak, čím více je signál koncentrován v kmitočtové doméně, tím více je roztažen v časové oblasti.

3.3.6 Periodický sled jednotkových impulsů

Signál, kterým se nyní budeme zabývat, je poněkud abstraktní. Můžeme si však představit, že vznikl z periodické posloupnosti obdélníkových impulsů, které se postupně zužovaly a zároveň natahovaly do výšky. Význam tohoto signálu je v tom, že umožňuje poměrně jednoduše vysvětlit jevy spojené s převodem signálu se spojitým časem na signál s diskretním časem. To se nám bude hodit později.

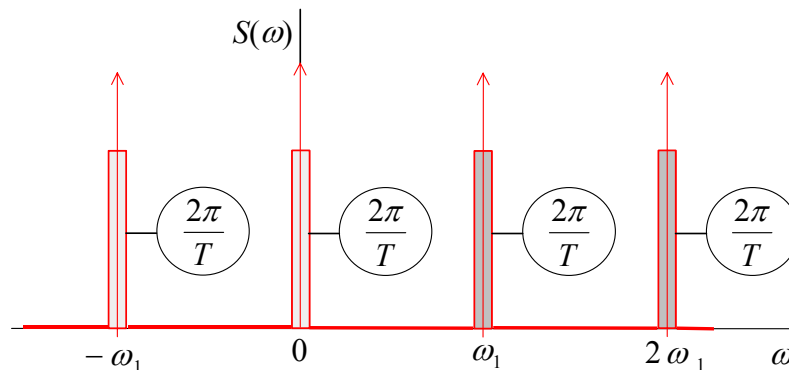


Obrázek 3.14: Periodický sled jednotkových impulsů

Analyzovaný signál, který znázorňuje **Obrázek 3.14**, může být zapsán vztahem

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (3.22)$$

kde T je perioda, reálné číslo a n je pořadí impulzu, celé číslo.



Obrázek 3.15: Spektrální funkce periodického sledu jednotkových impulzů

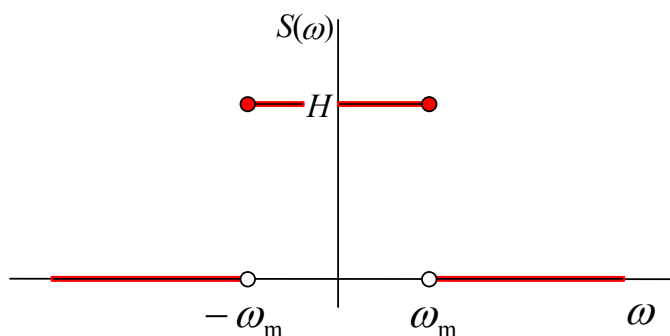
Spektrální funkci uvedeme bez odvození:

$$S(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_1). \quad (3.23)$$

Spektrální funkce periodického sledu Diracových impulzů má rovněž podobu periodického sledu Diracových impulzů.

3.3.7 Zpětný obraz signálu s obdélníkovým spektrem

Až dosud jsme hledali k originálům v časové oblasti jejich obrazy v oblasti kmitočtové. Nyní budeme řešit opačnou úlohu: zadáme si spektrální funkci a budeme hledat odpovídající časový průběh signálu.



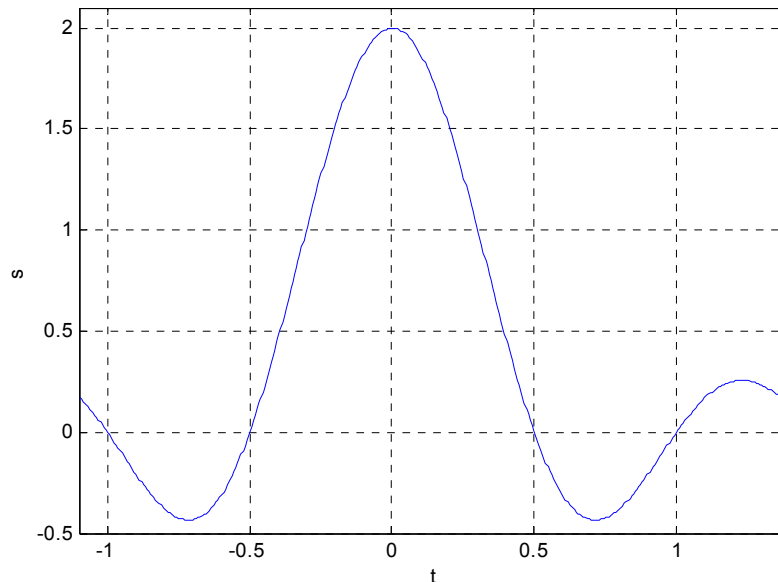
Obrázek 3.16: Obdélníková spektrální funkce

Jakou spektrální funkci si pro ilustraci zvolíme? Bude to obdélníková spektrální funkce - viz **Obrázek 3.16**, popsaná vztahem:

$$S(\omega) = \begin{cases} H & \text{pro } |\omega| \leq \omega_m, \\ 0 & \text{pro } |\omega| > \omega_m, \end{cases} \quad (3.24)$$

kde H a ω_m jsou kladné konstanty.

Přibližně obdélníkovou spektrální funkci by mohla mít odezva dolní propusti na velmi úzký impulz. To je řečeno trochu zjednodušeně, zatím však nelze zabíhat do podrobností, které ostatně budou vysvětleny v kapitole o systémech.



Obrázek 3.17: Časový průběh signálu s obdélníkovým spektrem

Na základě vztahu (3.2) a vzorce (2.22) můžeme vypočítat následující funkci $s(t)$ vyjadřující časový průběh signálu s obdélníkovým spektrem:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} H \exp(j\omega t) d\omega = \frac{H\omega_m}{\pi} \text{sinc}(\omega_m t). \quad (3.25)$$

Průběh této funkce, hrající významnou roli při zkoumání rekonstrukce signálu ze vzorků, zobrazuje pro $H=1$ a $\omega_m = 2\pi$ **Obrázek 3.17**.

Příklad 3.1: *Spektrální funkce*

Spektrální funkce signálu je dána vztahem

$$S(\omega) = 12 \text{sinc}(0,05\omega).$$

Určete okamžitou hodnotu signálu v čase $t = 0,14$ s.

Příklad 3.2: *Obdélníkový impulz*

Vypočtěte spektrální funkci signálu

$$s(t) = \begin{cases} 5 & \text{pro } |t| < 2 \text{ a} \\ 0 & \text{pro } |t| \geq 2. \end{cases}$$

4 Systémy se spojitým časem

4.1 Charakteristiky lineárního neparametrického systému

V kapitole 1 byly definovány vlastnosti systému a bylo ukázáno jejich rozdělení.

Lineární systém byl definován jako systém, který obsahuje pouze lineární prvky a platí pro něj princip superpozice. Neparametrický (stacionální) systém má tu vlastnost, že ani struktura ani parametry jeho prvků nejsou s časem proměnné.

Vlastnosti lineárního neparametrického spojitého systému popisujeme pomocí lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty obecně N -tého stupně

$$\begin{aligned} b_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + b_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = \\ a_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + a_{M-1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pro jednoduchost předpokládáme, že se jedná o systém s jedním vstupem a jedním výstupem a dále, že tento systém je kauzální, tj. platí $M \in N$. Vstupní signál systému je označen $x(t)$ a výstupní signál $y(t)$. Použijeme-li Fourierovu transformaci pro obě strany rovnice (4.1) a využijeme-li vlastnosti linearity, pak dostaneme

$$\begin{aligned} b_N F \left\{ \frac{d^N y(t)}{dt^N} \right\} + b_{N-1} F \left\{ \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} \right\} + \dots + b_1 F \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} + b_0 F \{y(t)\} = \\ a_M F \left\{ \frac{d^M x(t)}{dt^M} \right\} + a_{M-1} F \left\{ \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} \right\} + \dots + a_1 F \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} + a_0 F \{x(t)\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

V rovnici (4.2) jsme použili pro označení Fourierovy transformace symbol $F \{.\}$ a dále její obrazy označíme takto

$$Y(j\omega) = F\{y(t)\} \text{ a } X(j\omega) = F\{x(t)\}. \quad (4.3)$$

Nyní použijeme vlastnost Fourierovy transformace pro derivaci v čase

$$(j\omega)^M X(j\omega) = F \left\{ \frac{d^M x(t)}{dt^M} \right\}, \quad (j\omega)^N Y(j\omega) = F \left\{ \frac{d^N y(t)}{dt^N} \right\}. \quad (4.4)$$

Rovnice (4.2) s využitím vlastností (4.4) pak po úpravě dostane tvar

$$\begin{aligned} Y(j\omega) [b_N (j\omega)^N + b_{N-1} (j\omega)^{N-1} + \dots + b_2 (j\omega)^2 + b_1 (j\omega) + b_0] = \\ X(j\omega) [a_M (j\omega)^M + a_{M-1} (j\omega)^{M-1} + \dots + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Kmitočtová charakteristika lineárního neparametrického systému je pak definována výrazem

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{a_M (j\omega)^M + a_{M-1} (j\omega)^{M-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}{b_N (j\omega)^N + b_{N-1} (j\omega)^{N-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}. \quad (4.6)$$

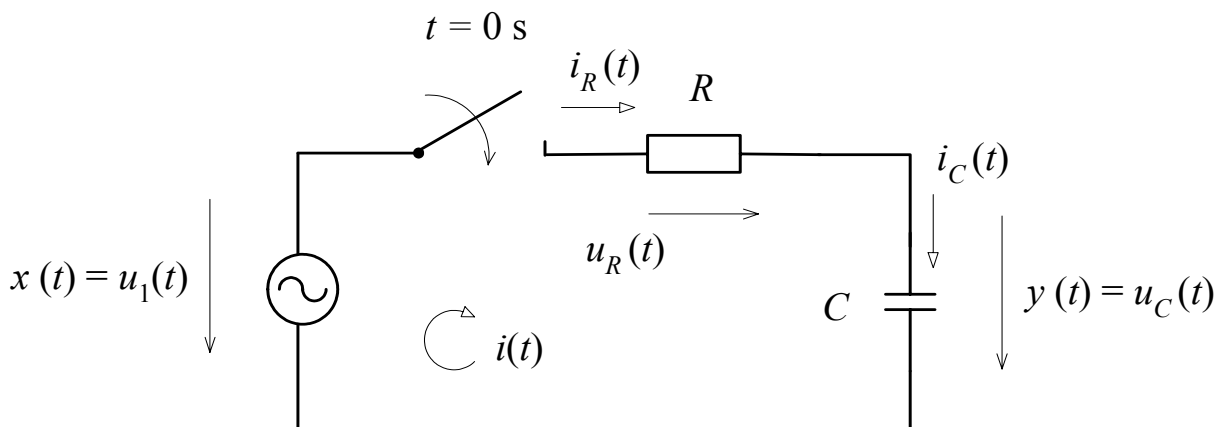
Jestliže máme k dispozici přenosovou funkci lineárního neparаметrického systému v Laplaceově transformaci

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_M p^M + a_{M-1} p^{M-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_N p^N + b_{N-1} p^{N-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (4.7)$$

pak jeho kmitočtovou charakteristiku pro stabilní systém dostaneme jednoduše, když dosadíme $p = j\omega$.

Příklad 4.1: Výpočet kmitočtové charakteristiky

Mějme definován integrační RC článek, který je buzen zdrojem harmonického signálu podle obrázku **Obrázek 4.1**.



Obrázek 4.1: Článek buzený zdrojem harmonického signálu.

Vstupní signál je harmonický signál ve tvaru

$$x(t) = u_1(t) = U_1 \cos \omega_1 t. \quad (4.8)$$

Podle proudového Kirchhoffova zákona platí

$$i(t) = i_R(t) = i_C(t).$$

Řešením elektrického obvodu dostaneme diferenciální rovnici ve tvaru

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U_1 \cos \omega_1 t. \quad (4.9)$$

Dosadíme-li do diferenciální rovnice ze vztahu (4.8) a

$$y(t) = u_C(t), \quad (4.10)$$

obdržíme tento tvar diferenciální rovnice

$$b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_0 x(t), \quad (4.11)$$

kde v našem případě je

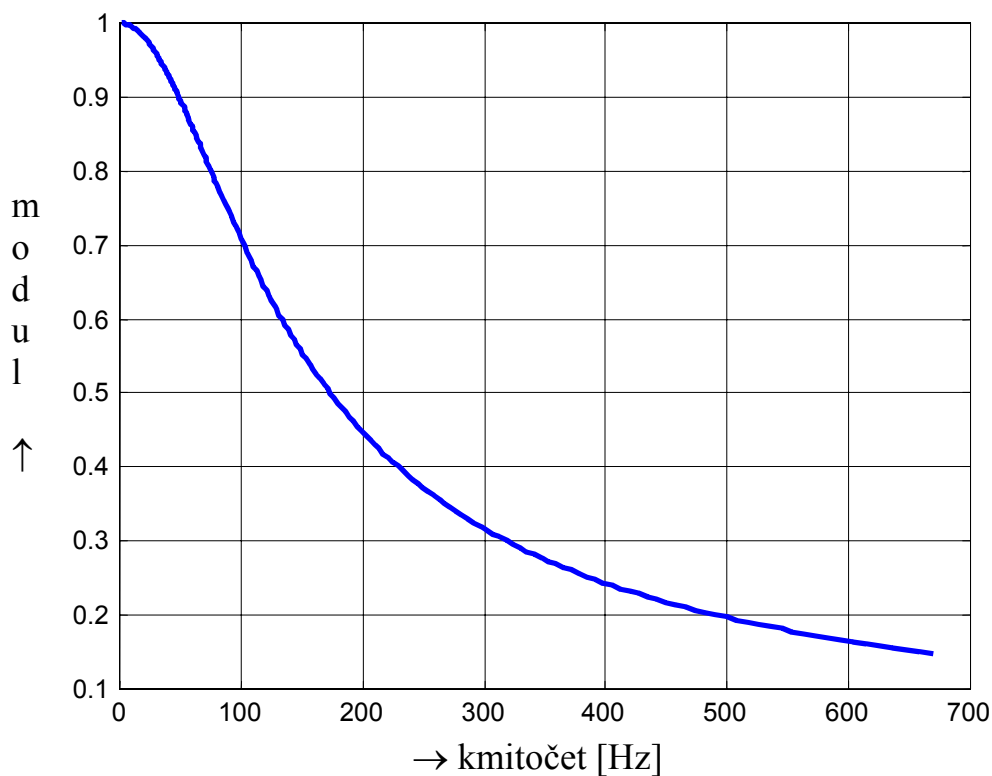
$$b_1 = RC, \quad b_0 = a_0 = 1. \quad (4.12)$$

Použijeme-li Fourierovu transformaci pro obě strany rovnice (4.10), dostaneme

$$b_1 j\omega Y(j\omega) + b_0 Y(j\omega) = a_0 X(j\omega) \quad (4.13)$$

a po úpravě získáme kmitočtovou charakteristiku integračního RC článku

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{a_0}{b_1 j\omega + b_0} = \frac{1}{RCj\omega + 1} \quad (4.14)$$



Obrázek 4.2: Modulová kmitočtová charakteristika

Kmitočtová charakteristika lineárního neparаметrického systému je komplexní funkcí úhlového kmitočtu ω , a proto ji může rozložit do exponenciálního nebo do složkového tvaru.

Exponenciální tvar kmitočtové charakteristiky je

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j \arg(H(j\omega))} = M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (4.15)$$

Modulová kmitočtová charakteristika je pak definována jako absolutní hodnota funkce $H(j\omega)$

$$M(\omega) = |H(j\omega)| \quad (4.16)$$

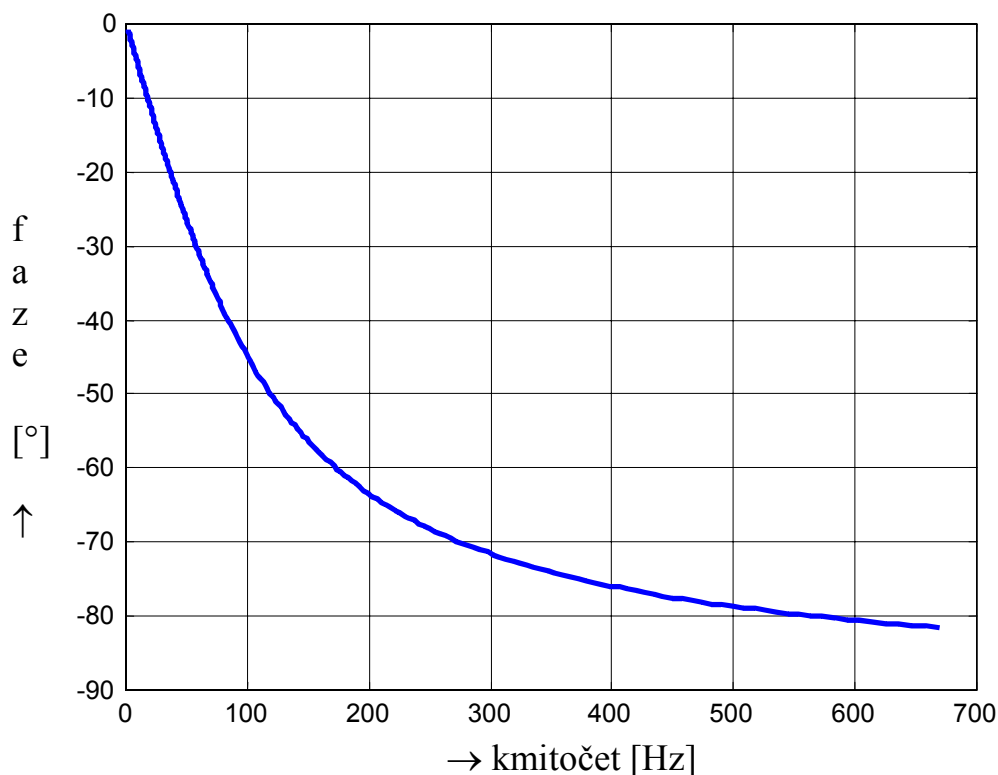
Fázová (argumentová) kmitočtová charakteristika je definována vztahem

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega)) \quad (4.17)$$

Vyjádříme-li kmitočtovou charakteristiku ve složkovém tvaru, tak získáme rovnici

$$H(j\omega) = \text{Re}\{H(j\omega)\} + j \text{Im}\{H(j\omega)\} \quad (4.18)$$

když $\text{Re} \{H(j\omega)\}$ značí reálnou část komplexní funkce $H(j\omega)$ a $\text{Im} \{H(j\omega)\}$ je imaginární částí této funkce. Křivka, která vznikne jako spojnice koncových bodů časových vektorů (fázorů) $H(j\omega)$ v komplexní rovině, se nazývá hodograf.



Obrázek 4.3: Fázová kmitočtová charakteristika

Příklad 4.2: *Graf kmitočtové charakteristiky*

Jestliže kmitočtovou charakteristiku integračního RC článku upravíme do exponenciálního tvaru, tak dostaneme ($R = 5000/\pi \Omega$, $C = 1 \mu F$)

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot e^{-j \arctg \omega RC} \quad (4.19)$$

Modulová kmitočtová charakteristika (**Obrázek 4.2**) je popsána vztahem

$$M(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (4.20)$$

Fázová kmitočtová charakteristika (**Obrázek 4.3**) je

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega RC \quad (4.21)$$

4.2 Ideální přenosový článek

Ideální přenosový článek může vstupní signál pouze zesílit nebo utlumit (nebo také ponechat) a časově zpozdít.

Vztah mezi vstupním a výstupním signálem je definován rovnicí

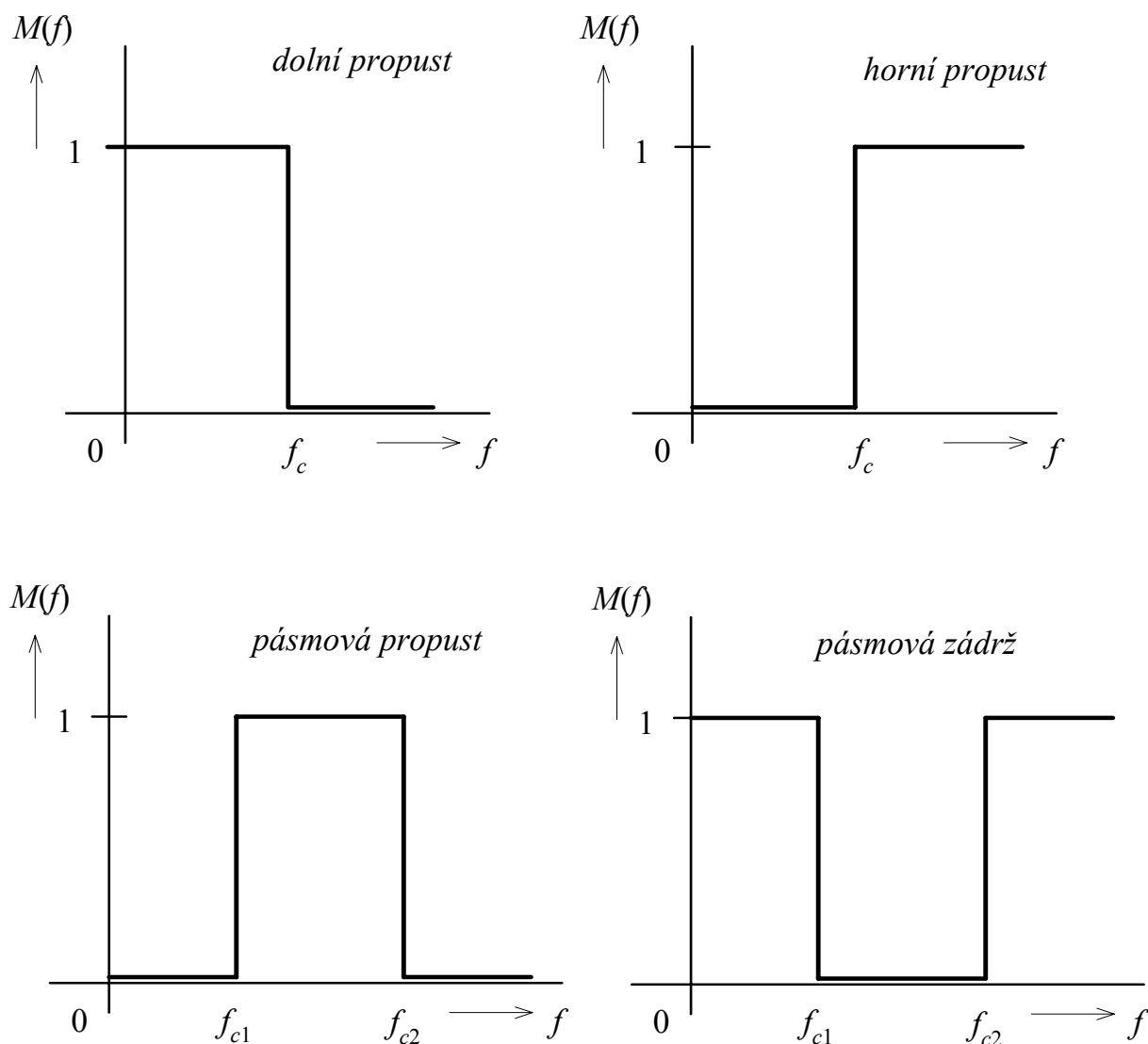
$$y(t) = A \cdot x(t - \tau). \quad (4.22)$$

Míra zesílení či zeslabení je určena reálnou proměnnou A a časové zpoždění τ je také reálné číslo. Podrobíme-li opět obě strany rovnice (4.22) Fourierově transformaci, pak po úpravě dostaneme kmitočtovou charakteristiku ideálního přenosového článku

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = A \cdot e^{-j\tau\omega}, \quad (4.23)$$

Přitom

$$M(\omega) = A \quad a \quad \varphi(\omega) = \tau\omega. \quad (4.24)$$



Obrázek 4.4: Ideální filtry

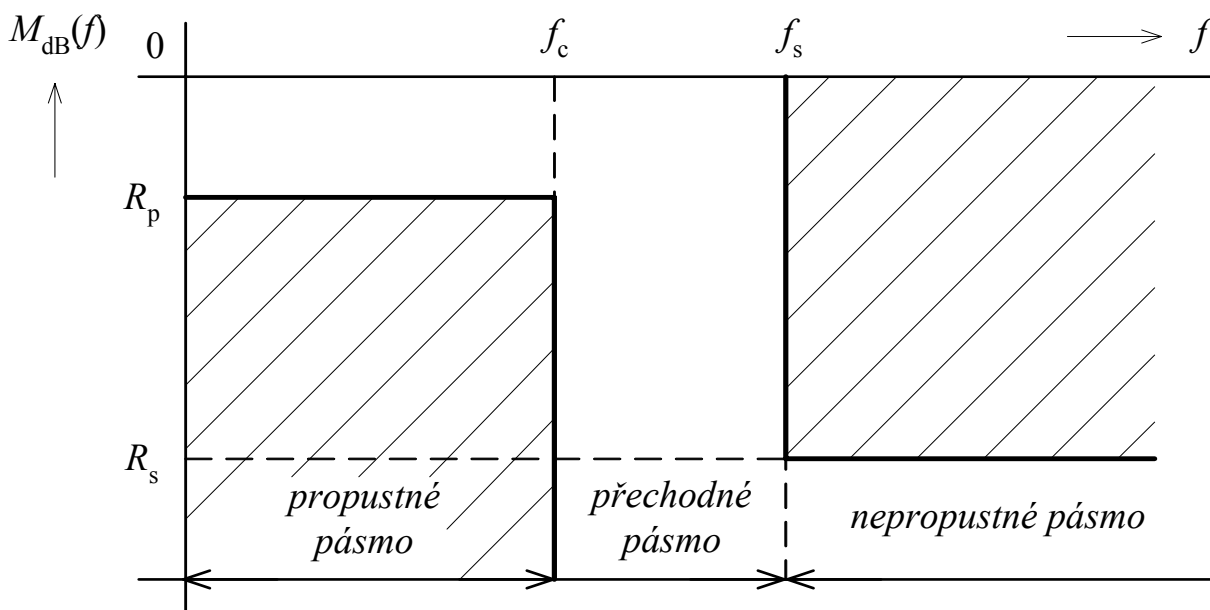
Modulová kmitočtová charakteristika ideálního přenosového článku má konstantní hodnoty pro všechny složky v celém kmitočtovém pásmu od $-\infty$ až do ∞ , tj. všechny složky spektra vstupního signálu jsou upraveny stejně proměnnou A . Fázová kmitočtová charakteristika ideálního přenosového článku je přímka procházející počátkem, má zápornou

směrnici. To znamená, že všechny složky v celém kmitočtovém pásmu jsou zpožděny o stejný časový interval τ .

4.3 Kmitočtové filtry

Kmitočtový filtr představuje jednu z možných realizací lineárního neparаметrického systému. Úkolem kmitočtového filtru je požadovaným způsobem ovlivnit kmitočtové spektrum vstupního signálu. To znamená, že filtr může vybrat část kmitočtového spektra, která má být nezměněna a zbývající část beze zbytku potlačit.

Podle toho, kterou část kmitočtového spektra vybíráme, rozdělujeme kmitočtové filtry na filtry typu dolní propusti – DP, horní propusti – HP, pásmové propusti – PP nebo pásmové zádrže – PZ. Ideální kmitočtové filtry těchto čtyř typů jsou vidět na obrázku **Obrázek 4.4**.



Obrázek 4.5: Toleranční schéma

Jiným požadavkem na kmitočtový filtr může být tvarování kmitočtové charakteristiky pro napodobení kmitočtových vlastností lidského ucha, popř. chceme linearizovat část fázové kmitočtové charakteristiky apod. Ideální kmitočtové filtry na obrázku **Obrázek 4.4** jsou nekauzální, to znamená, že je v praxi neumíme realizovat. Můžeme jejich vlastnosti s určitým přiblížením aproximovat jinou matematickou funkcí, kterou již umíme realizovat. Jsou známy různé typy aproximací, které se pro kmitočtové filtry využívají (Butterworthova aproximace, Čebyšěšova nebo Cauerova aproximace apod.). Z toho důvodu nemůžeme stanovit požadavky tak jednoznačně jak v ideálním případě, ale musíme definovat meze pomocí tolerančního schématu, kde se modul nebo fáze kmitočtového filtru mohou nacházet. Příklad zadání tolerančního schématu pro kmitočtový filtr typu dolní propusti vidíme na obrázku **Obrázek 4.5**. Jedná se o omezení pro modulovou kmitočtovou charakteristiku. Je obvyklé, že se požadavky na modul určují v decibelech. Přitom platí

$$M_{\text{dB}}(f) = 20 \log_{10} M(f). \quad (4.25)$$

V obrázku **Obrázek 4.5** jsou použity symboly

R_p – povolené zvlnění v propustném pásmu,

R_s – minimální útlum v nepropustném pásmu,

f_c – mez propustného pásma,

f_s – mez nepropustného pásma.

Postup návrhu kmitočtového filtru lze rozdělit do několika kroků:

- Stanovení požadavků kmitočtové filtrace a jejich vyjádření např. pomocí tolerančního schématu.

- Aproximace požadavků pomocí matematické funkce a odvození koeficientů impulzní charakteristiky nebo přenosové funkce, z kterých se vychází při realizaci.

- Výběr způsobu realizace pomocí reálných prvků (pasivní nebo aktivní prvky, jako jsou spínané kapacitory, operační zesilovače, proudové konvejory apod.)

- Ověření správné funkce kmitočtového filtru pomocí simulace na počítači nebo měřením v reálném zařízení.

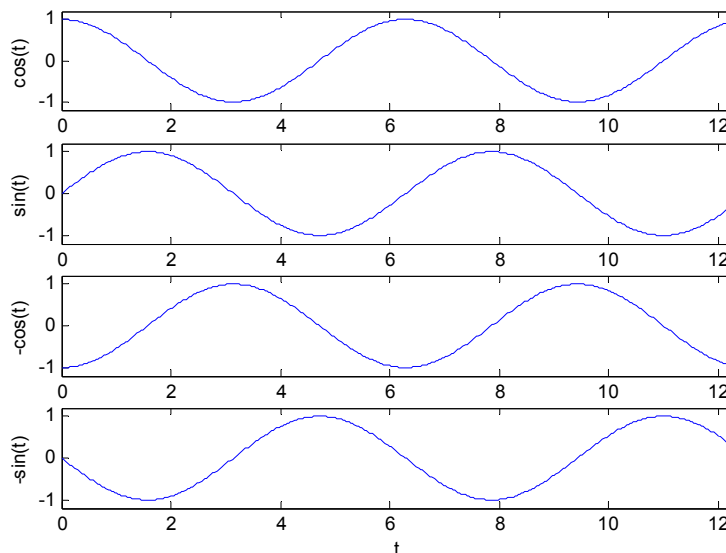
5 Náhodné signály se spojitým časem

5.1 Proč náhodné procesy

Signály, které jsme až dosud v kapitolách 1.3 až 6 probírali, byly prvky množiny determinovaných signálů. Tyto signály byly jednoznačně definované a popsané rovnicemi s konstantními parametry. Každá rovnice signálu nám umožňovala vypočítat okamžitou hodnotu signálu $s(t)$ v libovolném okamžiku t v minulosti či v budoucnosti vzhledem k danému počátku časové osy.

Některé signály mají zjevně nepravidelné chování a pokusy o jejich deterministický popis zřejmě nebudou příliš úspěšné. Příkladem signálu s náhodným chováním je signál hlásky "s", který znázorňuje **Obrázek 1.2a**).

S deterministickými modely signálu se loučíme neradi. Teorie determinovaných signálů je účinným nástrojem pro řešení řady praktických úloh. Výpočty jsou zpravidla rychlé a poměrně snadné, dávají jednoznačný výsledek. Jsou však úlohy, kde s teorií determinovaných signálů nevystačíme. Jednou z úloh je určení pravděpodobnosti chybného přenesení znaku při dálkovém přenosu dat. Důvodem nepoužitelnosti teorie determinovaných signálů je výrazně nepravidelné chování rušivého signálu. Jinou úlohou je určení charakteristik filtru pro zpracování směsi užitečného náhodného signálu a rušivého náhodného signálu. Cílem je dosažení maximálního poměru výkonu užitečné složky a výkonu náhodné složky zpracovávaného signálu. Zde je příčinou nepoužitelnosti teorie determinovaných signálů náhodný charakter jak užitečné, tak i rušivé složky zpracovávaného signálu. Obě shora uvedené úlohy se mohou stát řešitelnými, když jako matematické modely náhodných signálů použijeme náhodné procesy.



Obrázek 5.1: Realizace náhodného procesu

5.2 Definice náhodného procesu

Při definici náhodného procesu můžeme s výhodou využít pojmu náhodná veličina.

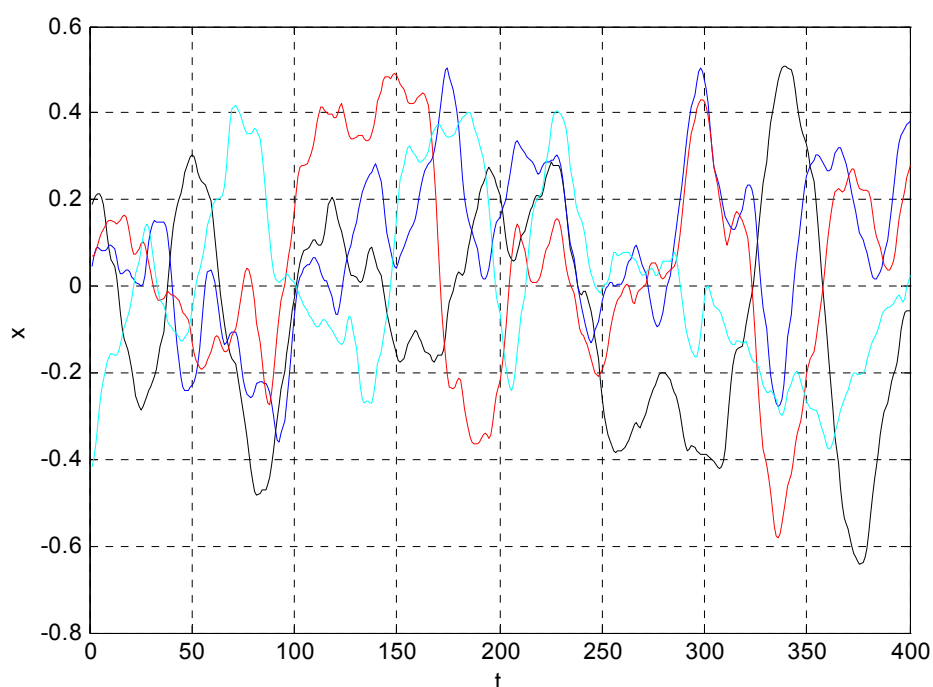
Systém $\{\xi_t\}$ náhodných veličin ξ_t definovaných pro všechna $t \in \mathbf{R}$ se nazývá náhodný proces (continuous - time random process) a označuje se $\xi(t)$. Veličina t přitom zpravidla označuje čas.

Jak mohou být definovány náhodné veličiny ξ_t vytvářející náhodný proces? Musí být plně popsány nejen každá zvlášť, ale definovány musí být i vztahy a souvislosti mezi nimi. Chování jednotlivých náhodných veličin by mohlo být popsáno distribuční funkcí nebo funkcí hustoty rozdělení pravděpodobnosti. Vzájemné závislosti jsou popsány vícerozměrnými distribučními funkcemi, korelačními funkcemi nebo údaji o statistické nezávislosti.

Náhodný proces může být definován například takto: Náhodný proces $\xi(t)$ má normální rozdělení se střední hodnotou nula a směrodatnou odchylkou $\sigma = 4$ pro všechna $t \in \mathbf{R}$, přitom hodnoty náhodného procesu v libovolných dvou různých časových okamžicích jsou nezávislé.

5.3 Množina realizací

Pro náhodný proces bývá kromě označení $\xi(t)$ používáno také označení typu $\xi_t(\omega)$ nebo $\xi(t, \omega)$, kde ω je prvek množiny Ω náhodných jevů. Pro fixní ω je $\xi(t, \omega)$ tzv. realizací nebo trajektorií náhodného procesu. Je to obyčejná determinovaná funkce reálné proměnné t , její analytické vyjádření pro všechna reálná t je však zpravidla obtížné vzhledem k nepravidelnosti jejího průběhu. Pro výklad si nejprve zvolíme realizace se zcela pravidelným průběhem. Poznámka: Zde symboly ω a Ω výjimečně neoznačují úhlové kmitočty, jak je jinak obvyklé.



Obrázek 5.2: Realizace normálního náhodného procesu

Uvažujme přenos zprávy vyjádřené abecedou obsahující právě 4 prvky A, B, C a D. Prvkům A, B, C a D, vyskytujícím se náhodně, odpovídají po řadě signály $\cos t$, $\sin t$, $-\cos t$ a $-\sin t$. Při dostatečně dlouhém trvání těchto signálů můžeme na funkce $\cos t$, $\sin t$, $-\cos t$ a $-\sin t$

$-\sin t$ nahlížet jako na realizace náhodného procesu, matematického modelu signálu sloužícího k přenosu zprávy. Zde $\Omega = \{A, B, C, D\}$. Např. pro $\omega = B$ je $\xi(t) = \xi(t, B) = \sin t$. Zde byl počet realizací konečný. Průběhy všech realizací spolu s pravděpodobnostmi jejich výskytu dávají úplný popis náhodného procesu.

Častěji se setkáváme s případy, kdy počet realizací je nekonečný. Tak tomu je zejména u modelů šumových signálů. I tehdy je však představa vyjádření náhodného procesu množinou realizací velmi užitečná a slouží nám k zavedení řady důležitých pojmů, funkcí a veličin charakterizujících náhodný proces. Nástroje matematické statistiky nám umožňují učinit si alespoň přibližnou představu o chování náhodného procesu i v případě, že je znám průběh jen části realizací.

Úseky pěti realizací náhodného procesu graficky znázorňuje **Obrázek 5.2**. Proces je nízkofrekvenční s mezním kmitočtem asi 0,018 Hz.

Na grafické či jiné záznamy náhodných signálů nahlížíme jako na realizace náhodných procesů.

5.4 Distribuční funkce a funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti

Pro pevné t se náhodný proces $\xi(t)$ stává náhodnou veličinou. To nám umožňuje definovat distribuční funkci (distribution function) náhodného procesu obdobně, jako byla definována distribuční funkce náhodné veličiny.

Distribuční funkci $F(x, t)$ náhodného procesu $\xi(t)$ definujeme vztahem

$$F(x, t) = P\{\xi(t) < x\}, \quad (5.1)$$

kde $P\{\xi(t) < x\}$ označuje pravděpodobnost toho, že náhodný proces $\xi(t)$ v okamžiku t nabude hodnoty menší než x .

Odhad $\hat{F}(x, t)$ hodnoty funkce $F(x, t)$ je pro pevný okamžik t dán vztahem

$$\hat{F}(x, t) = \frac{q_{x,t}}{n}, \quad (5.2)$$

kde $q_{x,t}$ je počet případů, kdy $x_r(t) < x$, n je celkový počet realizací, které máme k dispozici a r je index představující identifikační číslo realizace.

Na základě distribuční funkce můžeme snadno definovat funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti (probability density function) náhodného procesu.

Existuje-li parciální derivace

$$p(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}, \quad (5.3)$$

nazývá se tato funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti náhodného procesu.

Jsou zavedeny i vícerozměrné distribuční funkce a vícerozměrné funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti. Jako příklad nám může posloužit dvourozměrná hustota $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$. Hodnota x_1 se vztahuje k okamžiku t_1 , hodnota x_2 odpovídá okamžiku t_2 . Náhodný proces se nazývá normální, je-li jeho libovolné rozdělení normální.

5.5 Momenty

Popis náhodného procesu pomocí momentů je zpravidla méně úplný, než popis pomocí distribučních funkcí či funkcí hustoty rozdělení pravděpodobnosti, zato ale bývá jednodušší. Výhodou je také snazší stanovení odhadů momentů.

Každá možná hodnota x náhodného procesu $\xi(t)$ v okamžiku t je násobena elementární pravděpodobností $p(x,t)dx$. Součet (integrál je v podstatě součet) těchto příspěvků pak dává průměrnou hodnotu, kterou nazýváme **střední hodnota** (mean, first moment) a označujeme $a(t)$:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,t)dx. \quad (5.4)$$

Odhad $\hat{a}(t)$ střední hodnoty $a(t)$ můžeme stanovit jako aritmetický průměr z hodnot jednotlivých realizací v okamžiku t .

Teoretická hodnota střední hodnoty náhodného procesu, který zadává **Obrázek 5.2**, je rovna nule. Odhad z pouhých čtyř realizací bude velmi nespolehlivý.

Disperze neboli rozptyl (variance, dispersion) $D(t)$ slouží k hodnocení rozptýlenosti hodnot náhodného procesu v okamžiku t kolem střední hodnoty $a(t)$. Může být zavedena vztahem

$$D(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - a(t)]^2 p(x,t)dx. \quad (5.5)$$

Směrodatnou odchylku $\sigma(t)$ zavádíme, stejně jako u náhodných veličin, jako odmocninu z disperze:

$$\sigma(t) = \sqrt{D(t)}. \quad (5.6)$$

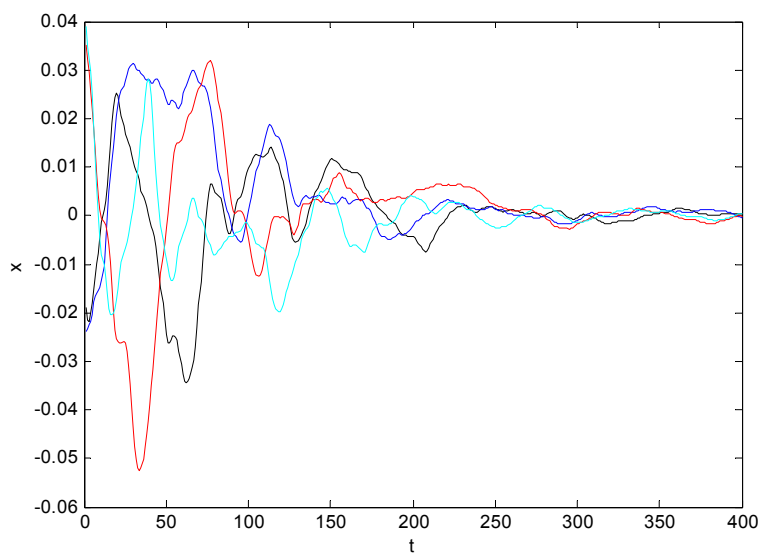
5.6 Stacionarita

Přibližně lze říci, že stacionární náhodný proces (stationary random process) je proces se stálým chováním. Na obrázku **Obrázek 5.3** je znázorněno několik realizací náhodného procesu, který patrně není procesem stacionárním. Zdá se totiž, že jak střední hodnota, tak i směrodatná odchylka procesu se mění s časem. **Obrázek 5.2** průběhem realizací náhodného procesu naznačuje, že by snad mohlo jít o stacionární náhodný proces. Moc jisti si tím ovšem být nemůžeme, počet realizací je malý a doba jejich pozorování je příliš krátká.

Přesněji formulováno, stacionární náhodný proces je takový náhodný proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na libovolném přemístění počátku časové osy. Tato vlastnost se projevuje zjednodušením funkcí popisujících náhodný proces. Funkcím a veličinám $F(x, t)$, $p(x, t)$, $a(t)$, $D(t)$ a $\sigma(t)$ po řadě odpovídají veličiny $F(x)$, $p(x)$, a , D a σ . Dále můžeme v případě zkoumání stacionárního náhodného procesu pro libovolné t_0 reálné psát: $p(x_1, x_2, t_1, t_2) = p(x_1, x_2, t_1 + t_0, t_2 + t_0)$. Při označení $\tau = t_2 - t_1$ můžeme funkci $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$ nahradit funkcí $p(x_1, x_2, \tau)$. I v tomto případě je zjednodušení popisu náhodného procesu dobře patrné.

5.7 Ergodicita

Ani vlastnost stacionarity náhodného procesu nás neosvobodila od nutnosti zpravidla nesnadného získávání početné množiny realizací v případě, že chceme na základě experimentu odhadovat funkce nebo veličiny popisující náhodný proces. Proto často zavádíme předpoklad ergodicity náhodného procesu. Ergodický náhodný proces (ergodic process) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti, stejné chování. To nám pak umožňuje při zkoumání náhodného procesu odhadovat funkce a veličiny náhodný proces popisující z průběhu jediné, a to libovolné realizace.



Obrázek 5.3: Nestacionární náhodný proces

Nejprve si povšimněme odhadu střední hodnoty. U ergodického náhodného procesu můžeme odhad získat jako aritmetický průměr z posloupnosti vzorků realizace:

$$\hat{a}(t) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x(t_i), \quad (5.7)$$

kde K je počet vzorků a $x(t_i)$ je i -tý vzorek, hodnota realizace v okamžiku t_i .

Lze také použít odhadu využívajícího všech hodnot realizace $x(t)$ v určitém intervalu:

$$\hat{a} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (5.8)$$

Odhad bude tím věrohodnější, čím bude úsek T delší. Fyzikálně vzato je odhad vlastně stejnosměrnou složkou realizace $x(t)$ náhodného procesu $\xi(t)$.

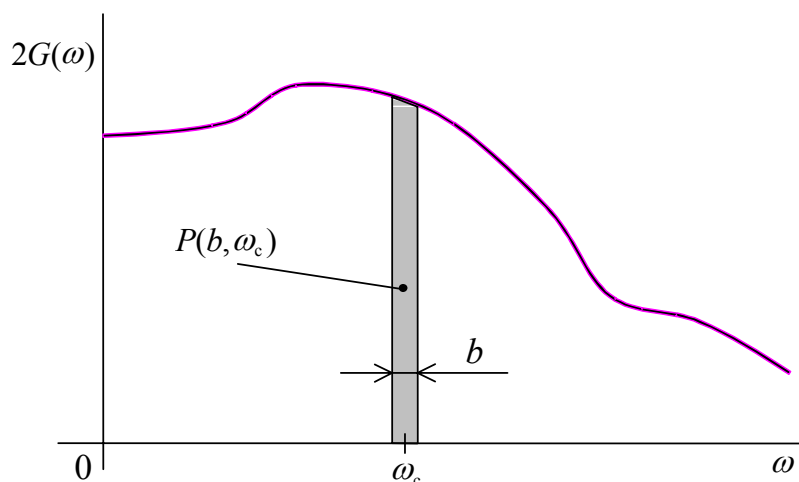
Obdobně lze odhadnout i disperzi D

$$\hat{D} = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - a(t)]^2 dt \quad (5.9)$$

Směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{D}$ má u procesů s nulovou stejnosměrnou složkou význam efektivní hodnoty procesu. Může být v tomto případě měřena voltmetry RMS (root mean square, true root mean square). Tyto voltmetry udávají pravdivou efektivní hodnotu i při neharmonickém průběhu napětí.

5.8 Spektrální hustota výkonu

Vyjádření determinovaných signálů funkcemi kmitočtu se plně osvědčilo. Je proto přirozené, že byla snaha popsat i náhodné procesy jako funkce kmitočtu. Hledání harmonických složek náhodného procesu není perspektivním přístupem. Amplitudy a počáteční fáze složek stanovených z jednoho úseku realizace budou mít jiné hodnoty než amplitudy a počáteční fáze stanovené z jiného úseku. Užitečným nástrojem pro popis stacionárního nebo ergodického náhodného procesu v kmitočtové oblasti se ukázala být spektrální hustota výkonu (power spectral density, psd). Budeme ji označovat $G(\omega)$. Omezíme se na případ procesů stacionárních ergodických.



Obrázek 5.4: Měření spektrální hustoty výkonu

Střední výkon P náhodného procesu připadající na pásmo úhlových kmitočtů $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ může být při platnosti nerovnice $0 < \omega_1 < \omega_2$ stanoven pomocí integrálu

$$P = \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega + \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} G(\omega) d\omega = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega. \quad (5.10)$$

Spektrální hustota výkonu může být definována i jinak, například jako dvojnásobek námi zavedené hustoty s tím, že je používána jen v oblasti kladných úhlových kmitočtů. V praktických aplikacích se navíc místo úhlových kmitočtů používají obyčejné kmitočty a příslušná spektrální hustota výkonu se pak udává ve wattech na hertz.

Průběh spektrální hustoty výkonu je významným nástrojem popisu náhodných procesů. Nejznámějším případem je tzv. bílý šum, u kterého je spektrální hustota výkonu konstantní, $G(\omega) = G$.

Abychom si přiblížili fyzikální význam spektrální hustoty výkonu, seznámíme se s nejjednodušším principem jejího měření. Představme si, že máme k dispozici přeladitelnou pásmovou propust se středním kmitočtem ω_c , s šířkou pásma propustnosti b a s modulem přenosu rovným jedné v pásmu propustnosti. Přivedeme-li na vstup filtru zkoumaný náhodný proces, můžeme na výstupu filtru naměřit výkon $P(b, \omega_c)$ rovný hodnotě výrazu $2G(\omega_c)b$, až na případnou malou chybu způsobenou tím, že uvnitř pásma propustnosti není spektrální hustota výkonu konstantní. Přibližná hodnota spektrální hustoty výkonu je pak dána vztahem

$$G(\omega_c) = \frac{P(b, \omega_c)}{2b}. \quad (5.11)$$

V současné době se pro odhad spektrální hustoty výkonu často používá číslíkové zpracování signálu a diskrétní Fourierova transformace. V Matlabu je k dispozici standardní funkce `psd`.

Příklad 5.1: *Odhad distribuční funkce*

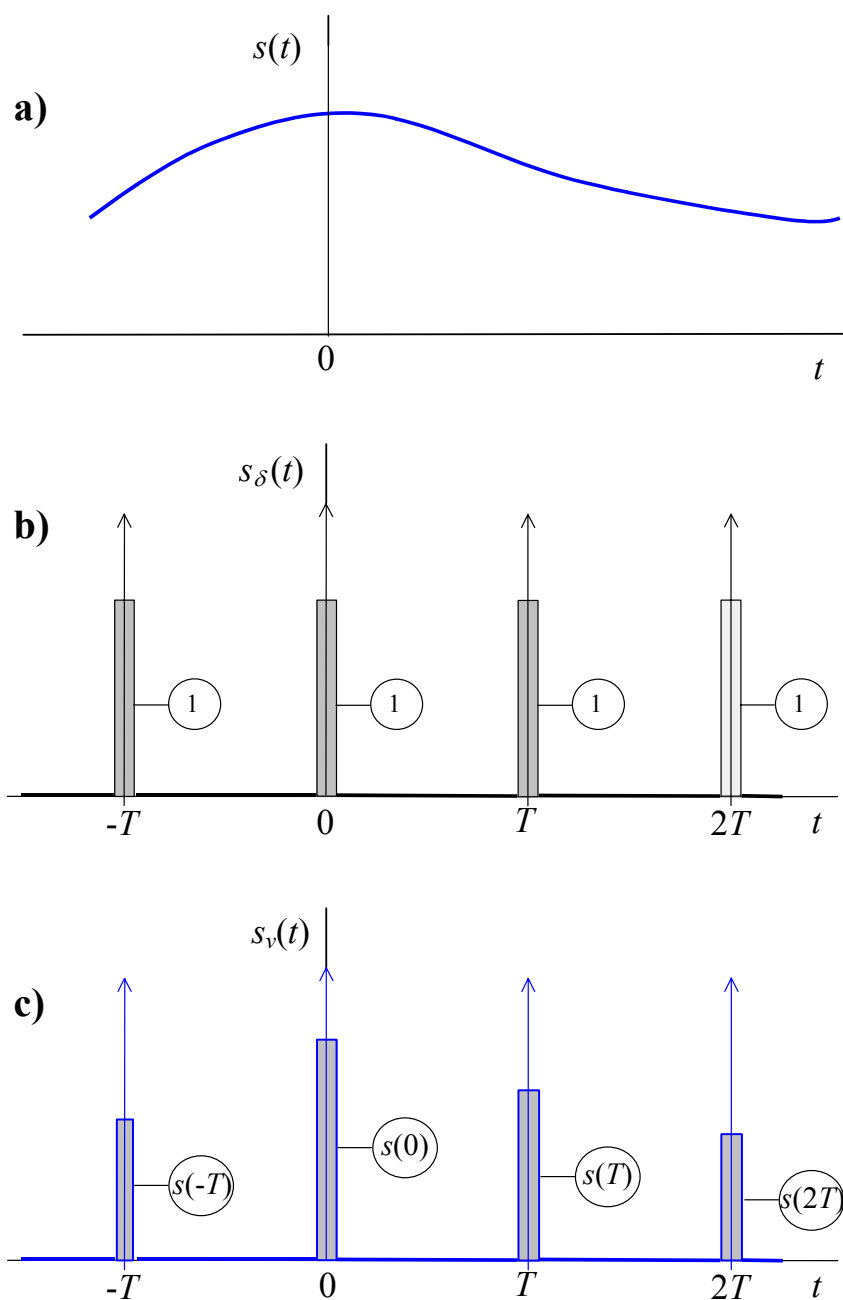
Odhadněte hodnotu $F(-0,2, 300)$ distribuční funkce pro náhodný proces, jehož realizace zobrazuje **Obrázek 5.2**.

Příklad 5.2: *Odhad střední hodnoty*

Odhadněte střední hodnotu $a(300)$ náhodného procesu z téhož obrázku.

6 Analogové a číslicové signály

Cílem této kapitoly je objasnit možnosti a principy přechodu od signálů se spojitým časem a se spojitou množinou hodnot (signálů analogových) k signálům číslicovým a zpět.



Obrázek 6.1: Ideální vzorkování

6.1 Proč?

V této kapitole se budeme zabývat možnostmi vzájemných přechodů od analogových signálů k číslicovým a naopak. Jaký k tomu máme důvod? Většina výchozích signálů jsou signály se spojitým časem a se souvislou množinou možných hodnot. Je to například signál z mikrofону, televizní kamery, elektrického snímače tlaku a pod. Moderní systémy pro přenos,

záznam a zpracování informace jsou však většinou číslicové. Často vyžadujeme aby po zpracování či přenosu byla forma signálu analogová, forma se souvislým časem a se souvislou množinou hodnot. Můžeme uzavřít konstatováním, že v technické praxi se nevyhneme analogově digitálním a digitálně analogovým převodům. Bohatá nabídka převodníků nejrůznějších parametrů v obchodech s elektronickými součástkami to dokládá.

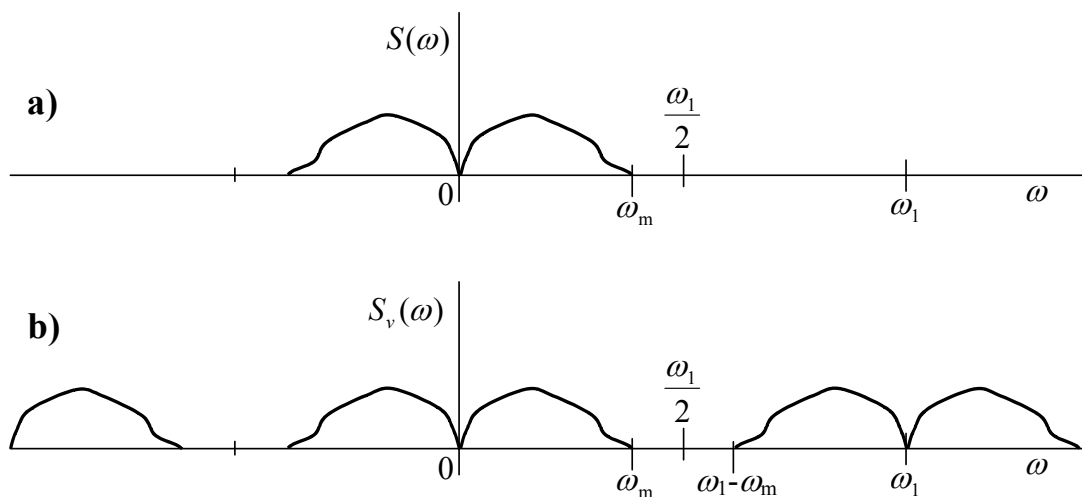
Číslicové signály mají následující dvě vlastnosti:

1. jsou to signály s diskretním časem,
2. jejich množina možných hodnot je konečná.

Takovéto signály můžeme reprezentovat posloupnostmi čísel majících konečný počet číslic. Většinou v technické praxi používáme číslice 0 a 1.

Expanse číslicových metod vyplývá z předností číslicových systémů a číslicových signálů. Používání právě dvou číslic je z technického hlediska velmi výhodné. Jednu číslici můžeme vyjádřit otevřeným tranzistorem, druhou zavřeným tranzistorem. Dá se také říci tak, že tranzistor pracuje ve spínacím režimu. Tento režim se vyznačuje velkou nezávislostí na změnách teploty obvodu, na změnách parametrů prvků obvodu a vykazuje dobrou odolnost vůči rušivým napětím. To je asi hlavní příčina ústupu od jednoduchých a levných analogových systémů a stále větší rozšíření systémů číslicových.

Nejen číslicové systémy, ale i číslicové signály mají své výhodné vlastnosti například z hlediska přenosu zpráv. Jednotlivé číslice jsou dobře rozeznatelné a to i po jejich značném zkreslení a po přidání aditivního šumu. Číslicově vyjádřené zprávy lze snadno utajovat pomocí šifrování nebo zabezpečit proti chybám při přenosu, je možné potlačovat nadbytečnou informaci ve zprávách. Při použití číslicového vyjádření vzorků např. hudebního signálu lze dosáhnout nebývalé dynamiky.



Obrázek 6.2: Ideální vzorkování v kmitočtové oblasti

Analogově číslicové a číslicově analogové převody jsou spojeny s možností určité degradace signálu, kterou je zapotřebí udržet pod kontrolou. Pochodům probíhajícím v převodnicích musíme trochu rozumět, aby u námi navrhovaných či námi zakoupených převodníků byla při zamýšleném použití ztráta informace v přijatelných mezích.

Analogově číslicový převod můžeme pomyslně rozložit do tří etap.

1. Převod signálu se spojitým časem na signál s diskretním časem. Tomuto převodu říkáme vzorkování.

2. Kvantování vzorků s cílem vyjádřit vzorky konečnou množinou čísel. Tento krok je provázen vznikem tzv. kvantovacího šumu. Uvedený jev souvisí s nelineárním zkreslením známým z teorie obvodů.
3. Kódování spočívající zpravidla v binárním vyjádření čísel představujících velikosti vzorků.

Naši pozornost si zaslouží především první a druhá etapa, zajímat nás bude i míra vratnosti uvedených operací. Nejprve se budeme zabývat vztahy mezi signály se souvislým časem a signály s diskretním časem. Signál s diskretním časem získáváme rovnoměrným vzorkováním. Při něm se vždy po uplynutí doby T odebírají vzorky signálu $s(t)$, čímž se v podstatě signál $s(t)$ se spojitým časem převádí na signál $s(nT)$ s diskretním časem. Příkladem vzorkování je výšková impulzová modulace, pokud se zvolí šířka impulzů \mathcal{G} dostatečně malá vůči vzorkovacímu intervalu T . Matematický popis impulzově modulovaného signálu není moc přehledný. Proto si situaci zjednodušíme tím, že zavedeme teoretické vzorkování pomocí Diracových impulzů, tzv. ideální vzorkování. Výsledek bude jednoduchý a přehledný.

6.2 Ideální vzorkování

Předpokládejme, že je dán signál $s(t)$ se spojitým časem - **Obrázek 6.1a**). Vytvoříme periodický sled jednotkových impulzů $s_\delta(t)$ - **Obrázek 6.1b**). Ideální vzorkování spočívá ve vynásobení těchto dvou signálů. Tak je získán signál $s_v(t)$ - **Obrázek 6.1c**), který nese přesně stejnou informaci jako signál $s(nT)$ s diskretním časem, protože reprezentuje posloupnost čísel $\{s(nT)\}$, kde n je celé číslo. Ideální vzorkování je popsáno rovnicí

$$s_v(t) = s(t)s_\delta(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t - nT). \quad (6.1)$$

Velmi nás zajímá, co se při vzorkování stalo se spektrem signálu. Označíme $S(\omega)$ spektrální funkci signálu $s(t)$. Budeme předpokládat, že spektrum $|S(\omega)|$ je omezeno úhlovým kmitočtem ω_m . Zavedeme označení

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.2)$$

Spektrální funkce součinu signálů je dána konvolucí jejich spektrálních funkcí. S využitím tohoto poznatku a výsledku z odstavce 3.3.6 vypočteme spektrální funkci $S_v(\omega)$ signálu $s_v(t)$:

$$\begin{aligned} S_v(\omega) &= F\{s(t)s_\delta(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\delta(\nu)S(\omega - \nu)d\nu = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - k\omega_1) \right] S(\omega - \nu)d\nu = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_1). \end{aligned} \quad (6.3)$$

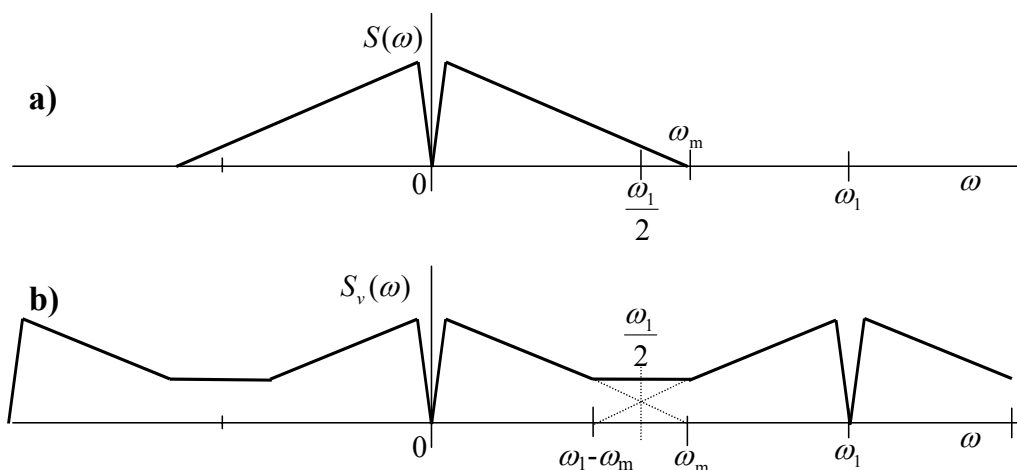
Zjišťujeme, že ideální vzorkování je provázeno periodizací spektra původního signálu. Toto nesmírně důležité zjištění graficky vyjadřuje **Obrázek 6.2**. Vidíme, že pokud je zachován patřičný vztah mezi úhlovými kmitočty ω_m a ω_1 , je až na multiplikativní konstantu $1/T$ spektrální funkce $S(\omega)$ původního signálu oddělitelnou součástí spektrální funkce $S_v(\omega)$. Znamená to, že za daných okolností při vzorkování nedochází ke ztrátě informace. Získané

poznatky můžeme shrnout do poučky, nazývané vzorkovací teorém (sampling theorem), Shannonův teorém, Kotelnikovův teorém, Whittakerův teorém i jinak. O mezinárodně uznávané autory teorému tedy není nouze, bylo však zjištěno, že k obdobným závěrům dospěl již dávno před nimi známý matematik Cauchy. Poučku lze formulovat takto:

Signál $s(t)$ se spektrem omezeným úhlovým kmitočtem ω_m lze vyjádřit posloupností $\{s(nT)\}$ jeho vzorků, pokud vzorkovací krok T splňuje podmínku

$$T < \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m}. \quad (6.4)$$

Zde f_m označuje horní mezní kmitočet spektra signálu $s(t)$.



Obrázek 6.3: Aliasing v kmitočtové oblasti

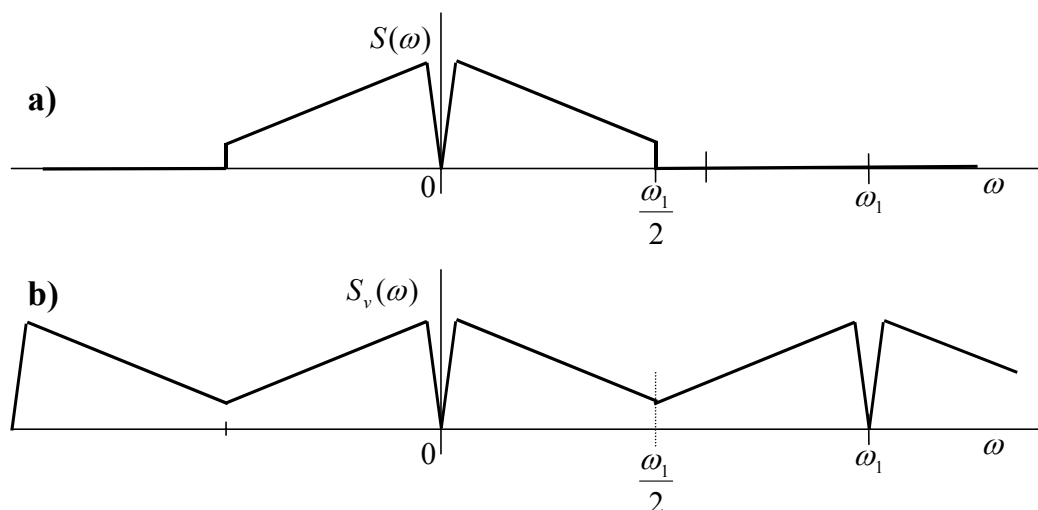
Zdá se tedy, že stačí zvolit vzorkovací interval T co nejkratší a vše bude v pořádku. Co by to ale v praxi znamenalo, kdybychom vždy volili interval T co nejkratší? Asi by nás to finančně vyčerpávalo, protože záznam, přenesení či zpracování každého vzorku vždycky stojí nějaké peníze. Proto si zpravidla při plnění podmínky (6.4) ponecháváme jen takovou rezervu, která je vynucena návaznými technickými problémy. Ty vyplývají z okolnosti, že neumíme sestavit ideální dolní propusti s obdélníkovou modulovou charakteristikou. Zmíněné dolní propusti potřebujeme jednak pro antialiasingovou filtraci před vzorkováním a pak pro vyhlazování v závěru digitálně analogového převodu.

Další, v praxi se většinou neuplatňující problém, je teoretického rázu. Skutečné signály mají konečnou dobu trvání. Dá se dokázat, že signály s konečnou dobou trvání však mají nekonečně široké spektrum. Naštěstí u skutečných signálů, například řečových, zpravidla leží všechny energeticky podstatné složky spektra pod nějakým konečným kmitočtem f_m . U řečových signálů by to mohl být třeba kmitočet 10 kHz, ale i méně.

V praxi se občas stane, že při vzorkování není podmínka (6.4) dodržena. Důsledky jsou nemilé. Vztah (6.3) zůstává v platnosti, **Obrázek 6.2** se však mění. Ve vztahu (6.3) sčítané složky $S(\omega - k\omega_1)$ se částečně překrývají, v oblastech překrytí se komplexně sčítají. Možný výsledek je znázorňuje **Obrázek 6.3** b. Mohl by být i jiný, to záleží na průběhu argumentu spektra původního signálu, který není obrázkem **Obrázek 6.3a** definován. Je zřejmé, že v uvažovaném případě dojde při vzorkování ke ztrátě informace, ztráta by mohla být i podstatná. Uvedený nežádoucí efekt vyvolaný překrýváním se nazývá aliasing.

V praxi obvykle před vzorkovač zařazujeme speciální dolní propust, antialiasingový filtr. Ten odřezává spektrální složky signálu $s(t)$ ležící nad úhlovým kmitočtem $\omega_1/2$.

Spektrum signálu z obrázku **Obrázek 6.3a** po úpravě ideálním antialiasingovým filtrem získává podobu nakreslenou na obrázku **Obrázek 6.4a**. Navzorkovaný signál pak má spektrum znázorněné na obrázku **Obrázek 6.4b**. I v tomto případě došlo k jisté ztrátě informace tím, že spektrum původního signálu bylo shora omezeno. Ztráta však není tak významná, jako při překrytí spekter. Je třeba dodat, že skutečné antialiasingové filtry nebudou ideálními filtry, takže jednak aliasing plně neodstraní, jednak do jisté míry ovlivní i spektrum v kmitočtovém pásmu propustnosti. Jedním z výrobců antialiasingových filtrů a filtrů pro post-DAC filtraci je firma MAXIM (www.maxim-ic.com). Reálné neideální vlastnosti antialiasingových filtrů jsou jedním z důvodů, proč v praxi dodržujeme podmínku (6.4) s jistou rezervou.

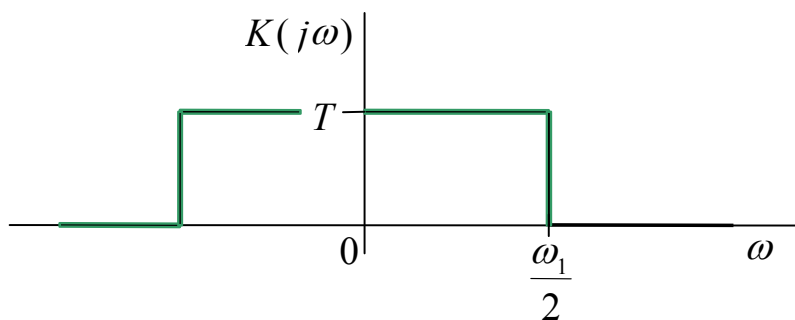


Obrázek 6.4: Vliv antialiasingového filtru

6.3 Návrat od vzorků k původnímu signálu

Z obrázku **Obrázek 6.2b** vyplývá, že rekonstrukci signálu můžeme realizovat pomocí dolní propusti s horním mezním úhlovým kmitočtem ležícím v intervalu $(\omega_m, \omega_1 - \omega_m)$. My budeme dále uvažovat horní mezní úhlový kmitočtet rekonstrukční dolní propusti $\omega_h = \omega_1/2$. V tom případě bude její přenosová funkce popsána rovnicí

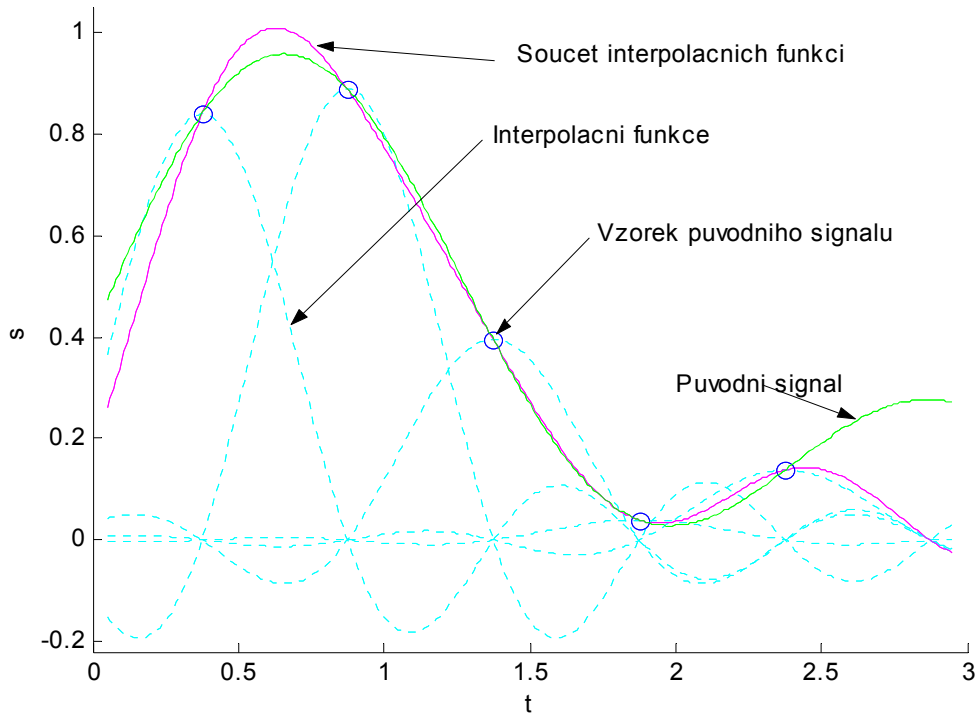
$$K(j\omega) = \begin{cases} T & \text{pro } \omega \in \langle -\omega_1/2, \omega_1/2 \rangle, \\ 0 & \text{pro } \omega \notin \langle -\omega_1/2, \omega_1/2 \rangle. \end{cases} \quad (6.5)$$



Obrázek 6.5: Přenosová funkce rekonstrukčního filtru

Spektrum odezvy této ideální dolní propusti na posloupnost vzorků $s_v(t)$ bude rovno spektrální funkci $S(\omega)$ signálu $s(t)$, výstupním signálem bude tedy žádoucí signál se spojitým časem.

Skutečná rekonstrukční dolní propust by měla ideálně přenášet signály s úhlovými kmitočty pod kmitočty ω_m a dokonale potlačovat složky s kmitočty nad kmitočtem $\omega_1 - \omega_m$. Někdy se dá tomuto požadavku vyhovět jen s velkými potížemi. Neideální vlastnosti rekonstrukčních dolních propustí jsou druhým důvodem, proč dodržujeme podmínku (6.4) s jistou rezervou. Někdy se přechází na vyšší vzorkovací kmitočet těsně před rekonstrukcí.



Obrázek 6.6: Rekonstrukce v časové oblasti

Jak vypadá rekonstrukce filtrem popsaným rovnicí (6.5) v časové oblasti? Dá se ukázat, že je dána vztahem

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \operatorname{sinc} \left[\frac{\omega_1}{2} (t - nT) \right]. \quad (6.6)$$

Tento vztah nám názorně ukazuje, jak v časové oblasti můžeme na základě množiny vzorků $\{s(nT)\}$ stanovit hodnotu signálu $s(t)$ pro libovolný reálný okamžik t . Funkce $\operatorname{sinc}(\cdot)$ ve vztahu (6.6) vystupují jako funkce interpolační. Několik členů řady z pravé strany rovnice (6.6) je nakresleno na obrázku **Obrázek 6.6**.

6.4 Výškové kvantování

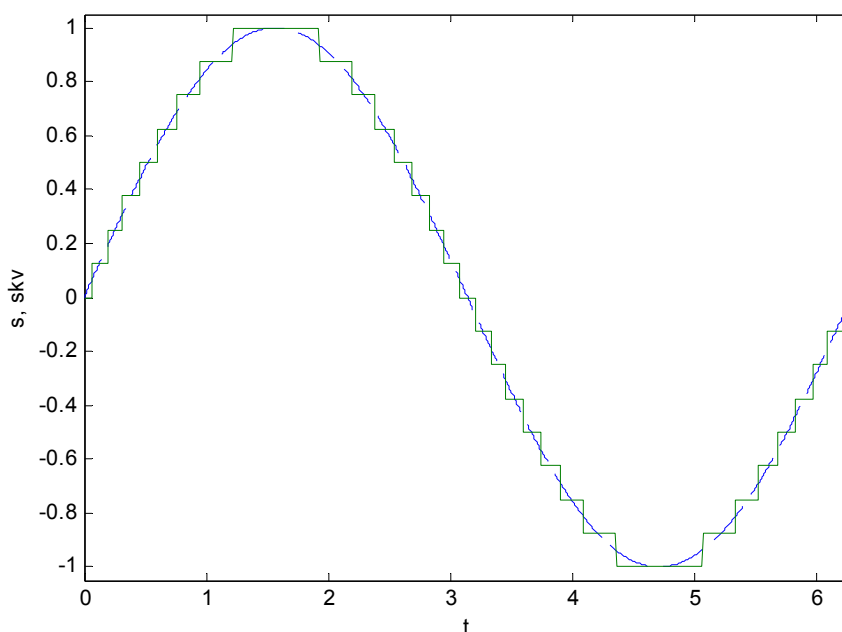
Hlavními představiteli diskretních signálů jsou signály číslicové. Pro přechod od časově spojitého signálu se spojitou množinou hodnot k číslicovému signálu proto potřebujeme zvládnout ještě jednu operaci se signálem, a tou je (výškové) kvantování, kvantování hodnot signálu. To je nutné k tomu, abychom mohli vyjádřit vzorky **konečným** počtem číslic.

Z metodických důvodů si jako výchozí signál zvolíme signál se spojitým časem, a to harmonický signál

$$s(t) = C_1 \sin(\omega_1 t). \quad (6.7)$$

Jak je znázorněno na obrázku **Obrázek 6.7**, je tento signál kvantován zaokrouhlováním jeho hodnot $s(t)$ na hodnoty $i\Delta s$. Veličina Δs se nazývá kvantovací krok, i je celé číslo. Výsledek kvantovací operace nakreslený na obrázku **Obrázek 6.7** plnou schodovitou čarou budeme označovat $s_{kv}(t)$. Je užitečné pracovat s představou, že kvantovaný signál je dán součtem původního signálu a tzv. kvantovacího šumu $r(t)$. Kvantovací šum je definován jako rozdíl

$$r(t) = s_{kv}(t) - s(t). \quad (6.8)$$



Obrázek 6.7: Kvantování zaokrouhlováním

Kvantovaný signál se svým průběhem liší od původního. Při kvantování tedy dochází ke ztrátě informace. Stupeň narušení původního signálu kvantováním můžeme popsat činitelem kvantovacího zkreslení k , který je definován jako poměr efektivní hodnoty R_{ef} rušivého signálu $r(t)$ a efektivní hodnoty S_{ef} užitečného signálu. Povšimneme si, že kvantovací šum má většinou pilovitý průběh. Jeho efektivní hodnotu můžeme s pro praxi postačující přesností spočítat jako efektivní hodnotu periodického pilovitého signálu. Efektivní hodnota kvantovacího šumu je dána vztahem

$$R_{ef} = \frac{\Delta s}{\sqrt{12}}. \quad (6.9)$$

Činitel zkreslení k je dán poměrem efektivních hodnot signálů $r(t)$ a $s(t)$:

$$k = \frac{R_{ef}}{S_{ef}} = \frac{\Delta s}{\sqrt{6}C_1}. \quad (6.10)$$

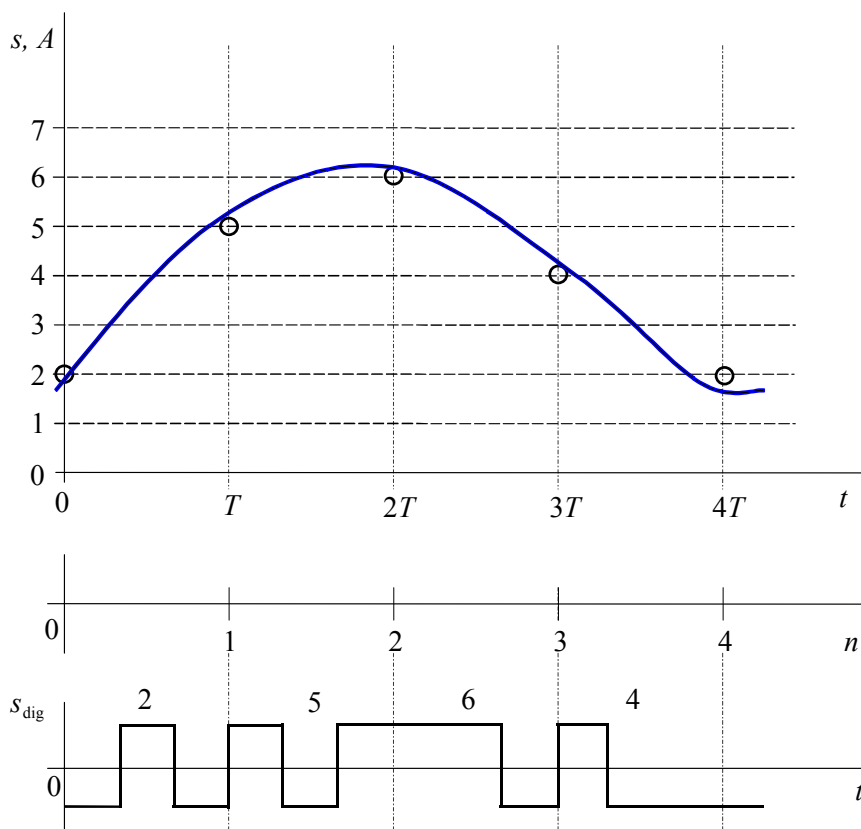
Počet n hladin prořatých signálem je přibližně roven poměru $2C/\Delta s$. Pak je možné vyjádřit činitele zkreslení jako funkci počtu hladin prořatých harmonickým signálem:

$$k \approx \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{n}. \quad (6.11)$$

Obsahuje-li množina hodnot $\{i\Delta s\}$ pouze konečný počet prvků, může se stát, že hodnota signálu $s(t)$ překročí největší z hodnot $i\Delta s$, nebo naopak bude menší, než nejmenší z hodnot $i\Delta s$. S těmito jevy je spojena další možnost ztráty informace při výškovém kvantování signálu, ztráty vyvolané omezením, výškovým oříznutím signálu.

6.5 A/D a D/A převod

V mnoha moderních technických zařízeních se používají analogově digitální převodníky, které periodicky převádějí vstupní signál $s(t)$ se spojitým časem, například signál z mikrofonu, na posloupnost čísel. Jaké operace se signály se v těchto převodnicích uplatňují? Jak jsou fyzikálně vyjádřena čísla výstupní posloupnosti?



Obrázek 6.8: Analogově digitální převod

V A/D převodníku běžného typu se signál vzorkuje a kvantuje. Počet kvantovacích hladin $i\Delta s$ se volí 2^N , kde N je číslo celé. Pokud hladiny očíslováme čísly od 0 do $2^N - 1$, můžeme říci, že převodník produkuje čísla $A(nT) \in \langle 0, 2^N - 1 \rangle$. Hodnoty kvantovaného signálu jsou na tato čísla vázány vztahem

$$s(nT) = \Delta s A(nT) + \frac{\Delta s}{2}. \quad (6.12)$$

Pro jednoduchost předpokládáme, že signál $s(t)$ nabývá pouze nezáporných hodnot.

Čísla $A(nT)$ se vyjadřují pomocí dvojkových číslic, například vyjádřením čísel $A(nT)$ ve dvojkové soustavě. Pro zobrazení jednoho čísla potřebujeme N dvojkových číslic, bitů. Jedná se o vyjádření čísel v soustavě s pevnou řádovou čárkou (fixed point), která je zde trvale vždy za poslední dvojkovou číslicí.

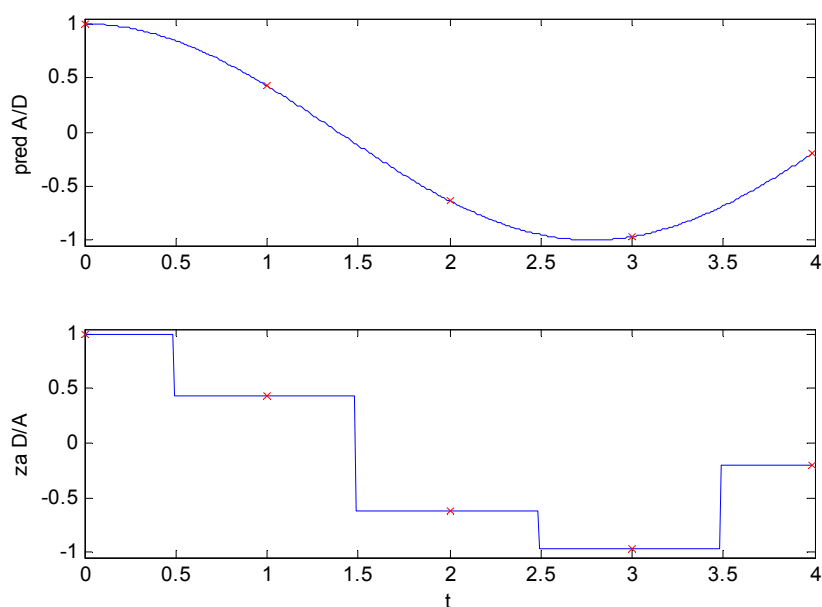
Převod analogového signálu $s(t)$ na posloupnost čísel $A(nT)$ je znázorněn na obrázku **Obrázek 6.8**. Při vyjádření čísel v desítkové soustavě jsou to čísla: $A(0) = 2$, $A(T) = 5$, $A(2T) = 6$ a $A(3T) = 4$. Ve dvojkovém vyjádření jsou to čísla 011, 010, 011 a 100. Počet hladin je 2^3 .

Číslice 0 a 1 jsou vyjadřovány dvěma odlišnými signálovými prvky, viz například **Obrázek 1.4**. N -tice signálových prvků může být vyvedena paralelně N vodiči, pak je doba trvání signálových prvků T . Nebo může být vyvedena sériově (jedním vodičem, jednou dvojicí vodičů), pak je doba trvání jednoho signálového prvku T/N .

Hodnoty $s(nT)$ můžeme také vyjádřit čísla s plovoucí řádovou čárkou (floating point) pomocí mantisy M a exponentu E :

$$s(nT) = M2^E. \quad (6.13)$$

V zařízeních pro číslicové zpracování signálů se například používá systém s 24 bitovou mantisou a 8 bitovým exponentem, mantisa je přitom normovaná, $|M| \in (0,5; 1)$, aby se dosáhlo jednoznačného zobrazení čísel.



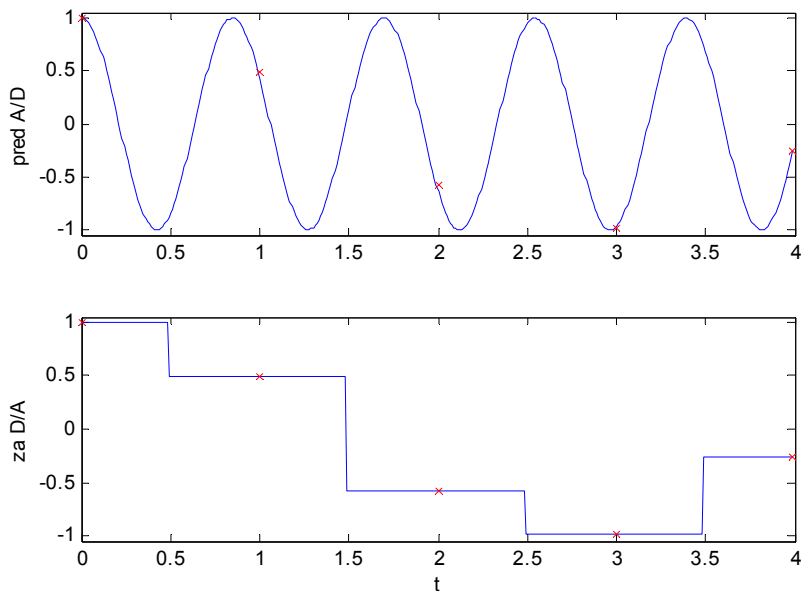
Obrázek 6.9: Digitálně analogový převod

Pro zpětný převod číslicového signálu na signál se spojitým časem se používají různé typy převodníků D/A. Běžné digitálně analogové převodníky jsou nízkovýkonové. Většinou převádějí posloupnost čísel $s_{kv}(nT)$ na posloupnost impulzů výšky $s_{kv}(nT)$ a šířky T . Posloupnost impulzů je pak dále upravována dolní propustí. Výkonové převodníky D/A využívají šířkovou impulzovou modulaci a rekonstrukci dolní propustí.

Převodníky A/D a D/A jsou vyráběny ve velkých sériích mnoha výrobci.

Na závěr si uvedeme dva příklady převodu D/A. V horní polovině obrázku **Obrázek 6.9** je znázorněn spojitou čarou analogový signál před převodem A/D a symboly x jsou

označeny hodnoty vzorků. Ve spodní části obrázku **Obrázek 6.9** je potom signál za převodníkem D/A vytvořený na základě vzorků, které jsou i zde pro kontrolu nakresleny a označeny symboly x . Na osciloskopu by samozřejmě žádné symboly x vidět nebyly. Výsledek se zdá být rozumný a po přídavné analogové filtraci dolní propustí můžeme ze schodovitého signálu za převodníkem D/A získat signál velmi blízký původnímu analogovému signálu.



Obrázek 6.10: Aliasing v časové oblasti

Na obrázku **Obrázek 6.10** je znázorněn jiný analogový signál. Jeho vzorkováním a zpětným převodem jsme však získali výsledek shodný s výsledkem v obrázku **Obrázek 6.9**. To asi není dobře. Máte pro uvedený jev nějaké vysvětlení? Něco nebylo dodrženo.

Příklad 6.1: *Vzorkovací kmitočet*

Řečový signál má spektrum shora omezeno kmitočtem 3 kHz. Navrhněte vzorkovací kmitočet $f_{vz} = 1/T$.

Příklad 6.2: *Aliasing*

Harmonický signál s kmitočtem 5 kHz je vzorkován se vzorkovacím kmitočtem 8 kSa/s. Bude spektrum vzorků obsahovat nějakou složku s kmitočtem v intervalu $\langle 0, 4 \text{ kHz} \rangle$?

Příklad 6.3: *A/D převod*

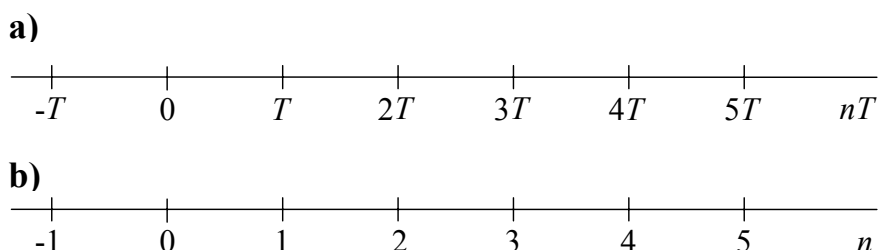
Při telekomunikačním přenosu řečových signálů se používá vzorkovací kmitočet 8 kSa/s a osmibitové vyjádření vzorků. Jaká je doba trvání jednoho signálového prvku?

7 Signály s diskretním časem

7.1 Diskretní čas

Časová osa signálů s diskretním časem je tvořena konečnou nebo spočetnou množinou okamžiků. V technické praxi je to nejčastěji množina $\{nT, n \in \mathbf{Z}\}$, nebo její podmnožina. \mathbf{Z} je množina celých čísel. Pokud položíme $T = 1\text{s}$, bude časová osa tvořena množinou \mathbf{Z} s tím, že n má fyzikální význam času. Můžeme však také zavést relativní čas $nT/T = n$, který je bezrozměrnou veličinou. Normovaný čas n se při popisu signálu s diskretním časem kvůli obecnosti a stručnosti používá standardně.

Diskretní signály budeme podle potřeby označovat $s(n)$ nebo $s(nT)$. Nebude-li řečeno jinak, budeme v této i v následující kapitole předpokládat, že diskretní signály mají konečnou absolutní hodnotu pro všechna přípustná n .



Obrázek 7.1: Časová osa diskretního signálu

7.2 Základní diskretní signály

7.2.1 Jednotkový impulz

Jednotkový impulz s diskretním časem je posloupnost definovaná rovnicí

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n \neq 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Posloupnost je graficky znázorněna na obrázku **Obrázek 7.2a**.

Snadno se můžeme přesvědčit o platnosti vztahu

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\delta(n-m) = s(n) \quad (7.2)$$

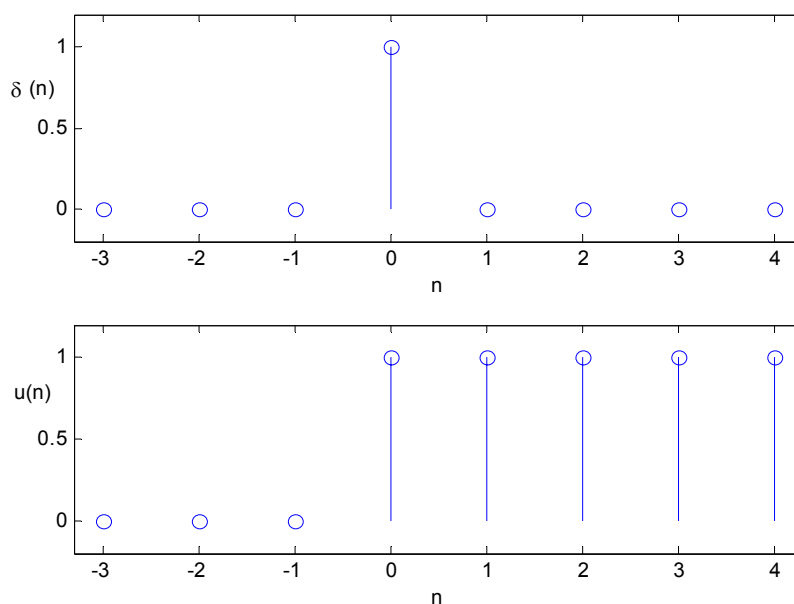
platného pro libovolnou posloupnost $s(n)$.

7.2.2 Jednotkový skok

Jednotkový skok s diskretním časem je definován rovnicí

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0, \\ 0 & \text{pro } n < 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Je graficky znázorněn na obrázku **Obrázek 7.2b**.



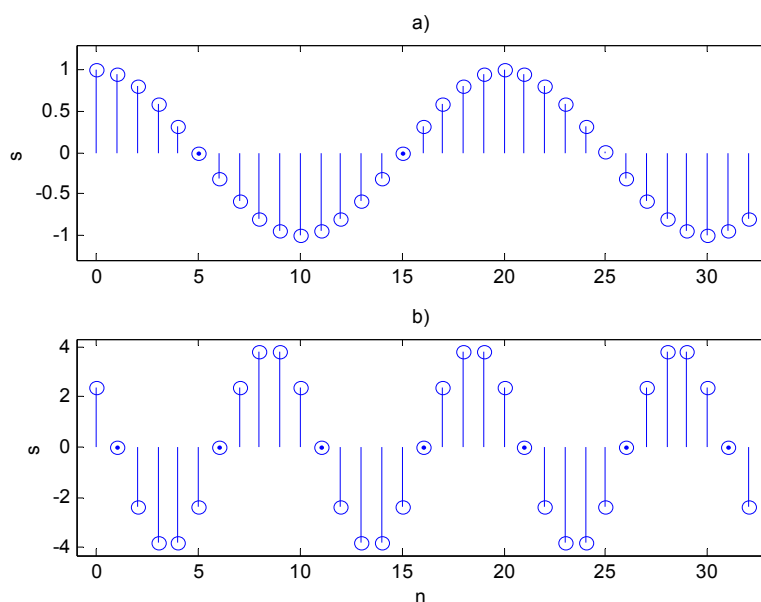
Obrázek 7.2: Jednotkový impulz a jednotkový skok

7.2.3 Harmonický signál

Jestliže existuje celé kladné číslo N takové, že

$$\forall n \in \mathbb{Z} : s(n) = s(n + N), \quad (7.4)$$

říkáme, že posloupnost $\{s(n)\}$ je periodická s periodou N . Nejmenší možnou hodnotu N označíme N_1 a nazveme základní periodou.



Obrázek 7.3: Posloupnosti $\cos(0,1\pi n)$ a $4\cos(0,2\pi n + 0,3\pi)$

Harmonickým signálem s diskrétním časem nazveme posloupnost $\{s(n)\}$ definovanou vztahem

$$s(n) = C_1 \cos(\omega_1 n + \varphi_1), \quad (7.5)$$

kde C_1 je reálná kladná konstanta, amplituda,

ω_1 je reálná kladná konstanta, (normovaný) úhlový kmitočet a

φ_1 je reálná konstanta, počáteční fáze.

Odpovídající signál $s_{\text{sk}}(nT)$ se skutečným časem nT je možné zapsat vztahem

$$s_{\text{sk}}(nT) = C_1 \cos(\omega_1 nT + \varphi_1), \quad (7.6)$$

kde Ω_1 je skutečný úhlový kmitočet. Protože platí $s(n) = s_{\text{sk}}(nT)$ je zřejmé, že skutečný úhlový kmitočet Ω a normovaný úhlový kmitočet ω jsou svázány vztahem

$$\omega = \Omega T. \quad (7.7)$$

7.2.4 Exponenciální posloupnosti

V teorii diskretních signálů a systémů se často setkáváme s posloupností řídicí se vztahem:

$$s(n) = \begin{cases} A \exp(-an) & \text{pro } n \geq 0, \\ 0 & \text{pro } n < 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

a je reálná konstanta.

Vedle ryze reálných posloupností používáme někdy v teorii i v praxi komplexní diskretní signály, které mohou být vyjádřeny dvojicí posloupností reálných. Nejvýznamnějším komplexním signálem je exponenciální posloupnost s ryze imaginárním exponentem

$$s(n) = \exp(j\omega_1 n). \quad (7.9)$$

O její periodicitě a mnohoznačnosti vyjádření platí totéž, co bylo řečeno o posloupnosti harmonické.

7.3 Operace se signály

7.3.1 Přirazení periodické posloupnosti posloupnosti délky N

Posloupnost délky N je posloupnost $\{s(n)\}$, pro kterou platí:

$$s(n) = 0 \quad \text{pro } n \notin \langle 0, N-1 \rangle. \quad (7.10)$$

O hodnotách $s(n)$ při $n \in \langle 0, N-1 \rangle$ se nic nepraví, mohou být různé od nuly i rovny nule.

Nadefinujeme si funkci modulo N : $\text{mod}_N(x)$ je číslo z intervalu $\langle 0, N-1 \rangle$, vzniklé přičtením vhodného celistvého násobku čísla N k číslu x .

Periodickou posloupnost $\{\tilde{s}(n)\}$ s periodou N pak můžeme k posloupnosti $\{s(n)\}$ délky N přiřadit vztahem

$$\tilde{s}(n) = s[\text{mod}_N(n)] \quad (7.11)$$

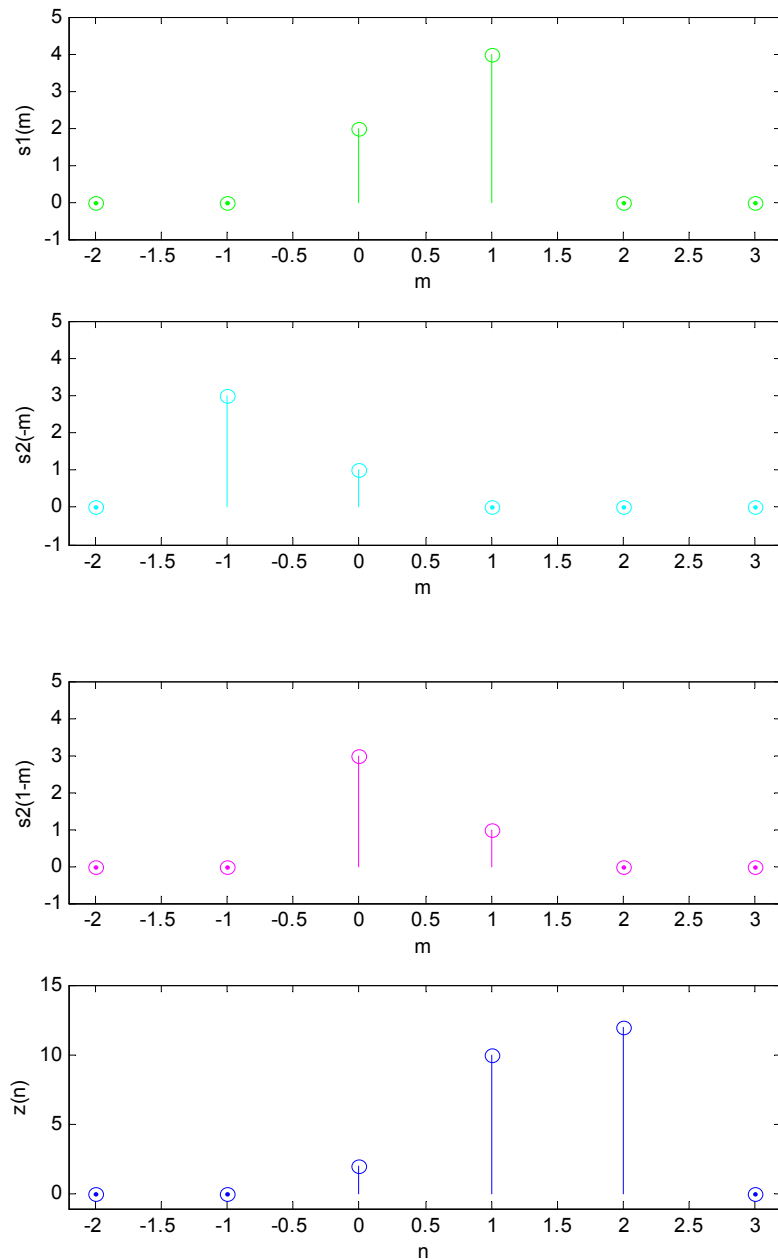
7.3.2 Okno

Pravoúhlá okénková funkce $R_N(n)$ je definována vztahem

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \in \langle 0, N-1 \rangle, \\ 0 & \text{pro } n \notin \langle 0, N-1 \rangle. \end{cases} \quad (7.12)$$

Pomocí této funkce můžeme libovolnou posloupnost převést na posloupnost délky N . Můžeme například periodickou posloupnost $\{\tilde{s}(n)\}$ s periodou N převést na posloupnost $\{s(n)\}$ délky N tím, že původní posloupnost $\tilde{s}(n)$ vynásobíme okénkovou funkcí $R_N(n)$:

$$s(n) = \tilde{s}(n)R_N(n). \quad (7.13)$$



Obrázek 7.4: Lineární konvoluce

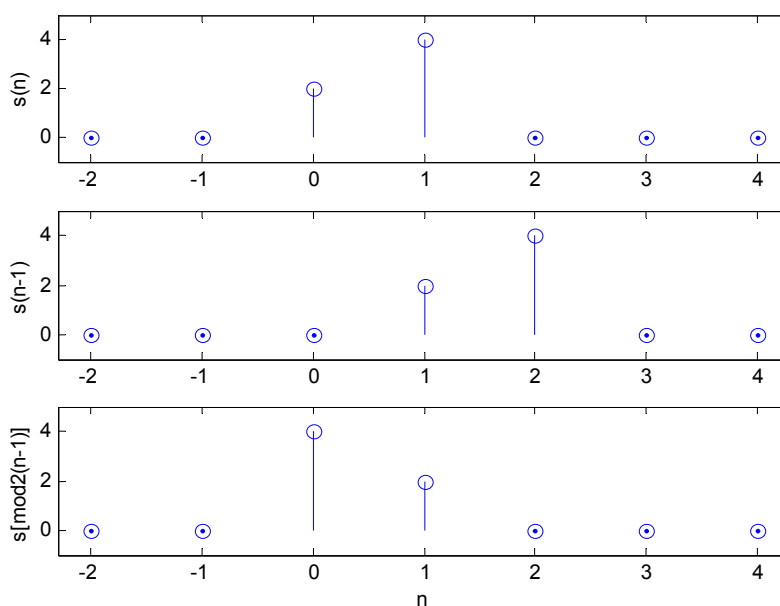
Kromě pravouhlého okna se používá řada dalších. Usnadňují nám návrh některých filtrů a dobře také slouží při spektrální analýze. Tyto záležitosti však nespádají do této kapitoly.

7.3.3 Lineární konvoluce

Lineární konvolucí posloupností $\{s_1(n)\}$ a $\{s_2(n)\}$ rozumíme posloupnost $\{z(n)\}$ danou vztahem

$$z(n) = \sum_{m=0}^{N-1} s_1(m)s_2(n-m). \quad (7.14)$$

Nalezení lineární konvoluce signálů délky 2: $s_1(0) = 2$, $s_1(1) = 4$, $s_2(0) = 1$ a $s_2(1) = 3$. je naznačeno na obrázku **Obrázek 7.4**.



Obrázek 7.5: Lineární a cyklické posunutí

7.3.4 Kruhové posunutí

Kruhovým posunutím o m rozumíme operaci, která posloupnosti $\{s(n)\}$ délky N přiřazuje posloupnost $\{R_N(n)s[\text{mod}_N(n-m)]\}$. Vizualně se nám při posouvání signálu vracejí hodnoty z konce signálu na začátek. Stejněho výsledku dosáhneme, budeme-li se na zperiodizovanou posloupnost dívat okénkem o šířce jedné periody. Z této představy vychází definiční výraz $\{R_N(n)s[\text{mod}_N(n-m)]\}$.

7.3.5 Kruhová konvoluce

Kruhová konvoluce může být pro posloupnosti $\{s_1(n)\}$ délky N a $\{s_2(n)\}$ délky N definována vztahem

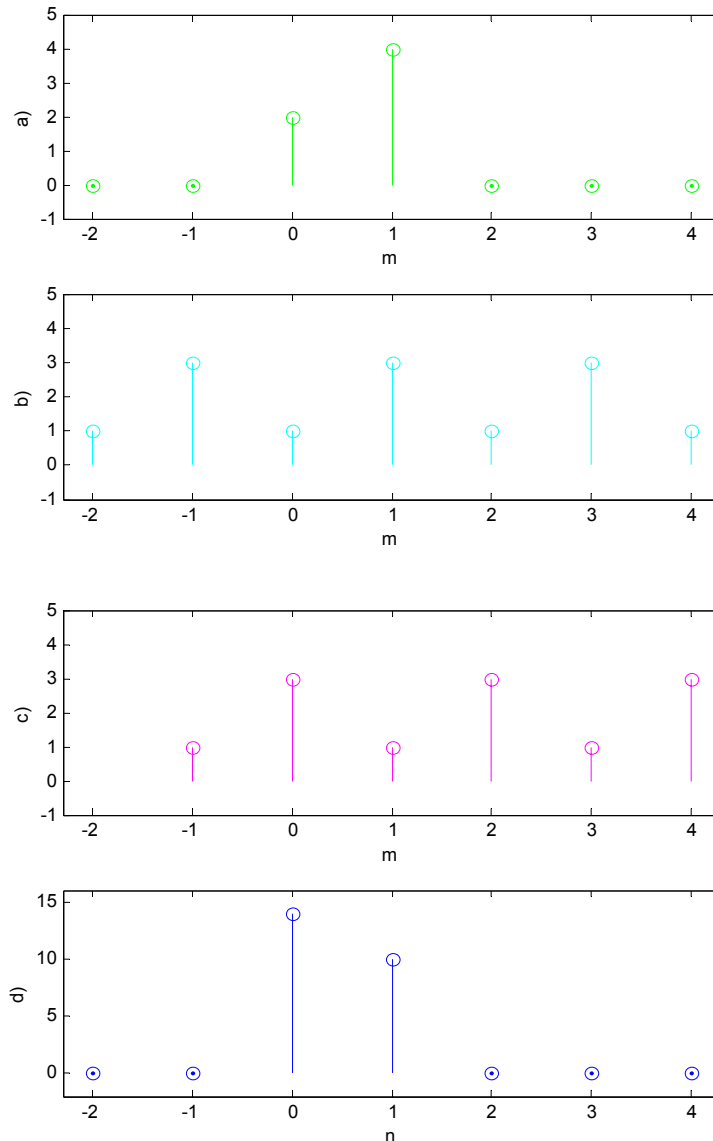
$$z(n) = s_1(n) \circ s_2(n) = R_N(n) \sum_{m=0}^{N-1} s_1(m)s_2[\text{mod}_N(n-m)] \quad (7.15)$$

Nalezneme pro signály délky $N = 2$: $s_1(0) = 2$, $s_1(1) = 4$, $s_2(0) = 1$ a $s_2(1) = 3$ kruhovou konvoluci. Řešení je naznačeno na obrázku **Obrázek 7.6**.

Kruhovou konvoluci můžeme také definovat vztahem

$$s_1(n) \circ s_2(n) = R_N(n) \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{s}_1(m) \tilde{s}_2(n-m), \quad (7.16)$$

kde $\{\tilde{s}_1(m)\}$ a $\{\tilde{s}_2(n-m)\}$ jsou periodické posloupnosti s periodou N , přiřazené posloupnostem $\{s_1(n)\}$ a $\{s_2(n)\}$



Obrázek 7.6: Kruhová konvoluce

Periodickou posloupnost

$$\tilde{z}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{s}_1(m) \tilde{s}_2(n-m) \quad (7.17)$$

nazýváme periodickou konvolucí.

Příklad 7.1: Normovaný kmitočet

Harmonický signál $s(t)$ s kmitočtem 400 Hz je vzorkován se vzorkovacím kmitočtem 8 kSa/s. Určete normovaný úhlový kmitočet ω_1 signálu získaného vzorkováním.

Příklad 7.2: *Modulo*

Určete $\text{mod}_3(x)$ pro $x = 1, 5, -2, 8$ a 3 .

Příklad 7.3: *Lineární konvoluce*

Najděte lineární konvoluci signálu $s_1(n)$ délky 8 a signálu $s_2(n)$ délky 3:

$$s_1(0) = 0, \quad s_1(1) = 1, \quad s_1(2) = 0, \quad s_1(3) = -1,$$

$$s_1(4) = 0, \quad s_1(5) = 1, \quad s_1(6) = 0, \quad s_1(7) = -1,$$

$$s_2(0) = 1, \quad s_2(1) = 1, \quad s_2(2) = 1.$$

Příklad 7.4: *Kruhová konvoluce*

Jsou dány dvě posloupnosti délky 4:

$$s_1(0) = 2, \quad s_1(1) = 1, \quad s_1(2) = 0, \quad s_1(3) = -1,$$

$$s_2(0) = 1, \quad s_2(1) = 2, \quad s_2(2) = 2, \quad s_2(3) = 1.$$

Najděte prvek $z(1)$ jejich cyklické konvoluce.

8 Diskrétní Fourierova transformace

Fourierovská zobrazení signálů se spojitým časem se natolik osvědčila, že byla snaha zobrazit v kmitočtové doméně i signály s diskretním časem. Prvním projevem této snahy bylo zavedení Fourierovy transformace diskretního signálu. Její význam je dán tím, že je užitečným nástrojem pro popis systémů s diskretním časem v kmitočtové oblasti, čili pro zavedení a používání kmitočtových charakteristik systémů s diskretním časem, 10.6.

8.1 Fourierova transformace diskretního signálu

Když jsme se v 6. kapitole snažili zjistit, jaký je charakter spektra diskretního signálu, pomohli jsme si tím, že jsme rovnicí (6.1) zavedli posloupnost ideálních vzorků. Pro $T = 1$ by byla popsána vztahem

$$s_v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\delta(t-n) \quad (8.1)$$

a její spektrum by bylo dáno vztahem

$$S_v(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k2\pi), \quad (8.2)$$

kde $S(\omega)$ je spektrální funkce signálu $s(t)$ se spojitým časem.

Zapišeme si spektrální funkci $S_v(\omega)$ pomocí definičního vztahu Fourierovy transformace:

$$S_v(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\delta(t-n)\exp(-j\omega t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\exp(-j\omega n). \quad (8.3)$$

Funkce $S_v(\omega)$ je periodickou funkcí úhlového kmitočtu ω s periodou 2π .

Fourierovu transformaci signálu s diskretním časem (discrete-time Fourier transform, DTFT) definujeme obdobným vztahem:

$$\tilde{S}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\exp(-j\omega n) \quad (8.4)$$

pro ty posloupnosti $\{s(n)\}$, pro které řada na pravé straně rovnice konverguje.

Funkce $\tilde{S}(e^{j\omega})$ je vůči proměnné ω periodická s periodou 2π . Vyplývá to z periodicity funkce $\exp(-j\omega n)$. Bude nám užitečná při popisu lineárních časově invariantních systémů s diskretním časem.

K funkci $\tilde{S}(e^{j\omega})$ lze zpětně vypočítat posloupnost $\{s(n)\}$ pomocí integrálu:

$$s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(e^{j\omega})\exp(j\omega n)d\omega. \quad (8.5)$$

8.2 Diskrétní Fourierova řada

Hledání efektivního algoritmu pro numerický výpočet koeficientů Fourierovy řady vedl k objevu FFT (Fast Fourier Transform, Rychlá Fourierova transformace). Algoritmus je natolik výkonný, že si vynutil vybudování teoretického aparátu, aparátu diskrétní Fourierovy transformace, DFT. Ta je dalším a ještě významnějším nástrojem pro zobrazení signálu s diskrétním časem v kmitočtové oblasti. My se ale do DFT nepustíme hned, probereme nejprve diskrétní Fourierovu řadu (DFŘ). Ta nám umožní poměrně snadno pochopit vlastnosti a chování diskrétní Fourierovy transformace.

8.2.1 Definice diskrétní Fourierovy řady

Diskrétní Fourierova řada (DFŘ) přiřazuje periodické posloupnosti $\{\tilde{s}(n)\}$ s periodou N obraz $\{\tilde{S}(k)\}$, periodickou posloupnost s periodou N :

$$\tilde{S}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{s}(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right). \quad (8.6)$$

Vlnovkou je označena periodicitata.

Zpětná diskrétní Fourierova řada přiřazuje periodické posloupnosti $\{\tilde{S}(k)\}$ původní posloupnost $\{\tilde{s}(n)\}$

$$\tilde{s}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{S}(k) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} kn\right). \quad (8.7)$$

Rovnost ve vztahu (8.7) je rovností obyčejnou, ne rovností ve smyslu skoro vždy, jak tomu bylo u klasické Fourierovy řady. Co představují veličiny $\tilde{S}(k)$? Jsou to komplexní čísla, prvky spektra posloupnosti $\{\tilde{s}(n)\}$. Veličina k není kmitočet, je to pořadové číslo spektrální složky. Normovaný kmitočet ω_k příslušný k této složce je dán vztahem

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k. \quad (8.8)$$

Skutečný kmitočet ω_k při $T \neq 1$ může být vypočten s využitím vztahu (7.7).

Na obrázku **Obrázek 8.1** je znázorněn signál

$$\tilde{s}(n) = 1 + 2 \sin 0,125\pi n. \quad (8.9)$$

Základní perioda tohoto signálu je $N=16$. Spočítáme diskrétní Fourierovu řadu. Modulové spektrum obsahuje složky s úhlovými normovanými kmitočty $0, 0,125\pi$ a $1,875\pi$. Stejnoseměrná složka posloupnosti $\tilde{s}(n)$ je zobrazena koeficientem $\tilde{S}(0) = 16$, což je N -násobek konstantní (stejnoseměrné) složky signálu $\tilde{s}(n)$. Harmonická složka signálu $\tilde{s}(n)$ je v jedné periodě spektra zobrazena koeficienty $\tilde{S}(1) = 16 \exp(-j\pi/2)$ a $\tilde{S}(15) = 16 \exp(+j\pi/2)$. Jejich moduly jsou rovny poloviční amplitudě vynásobené N , argument $\tilde{S}(1)$ je roven počáteční fázi harmonické složky signálu $\tilde{s}(n)$ a $\tilde{S}(15)$ má argument opačný.

8.2.2 Vlastnosti diskrétní Fourierovy řady

8.2.2.1 Obraz reálné posloupnosti

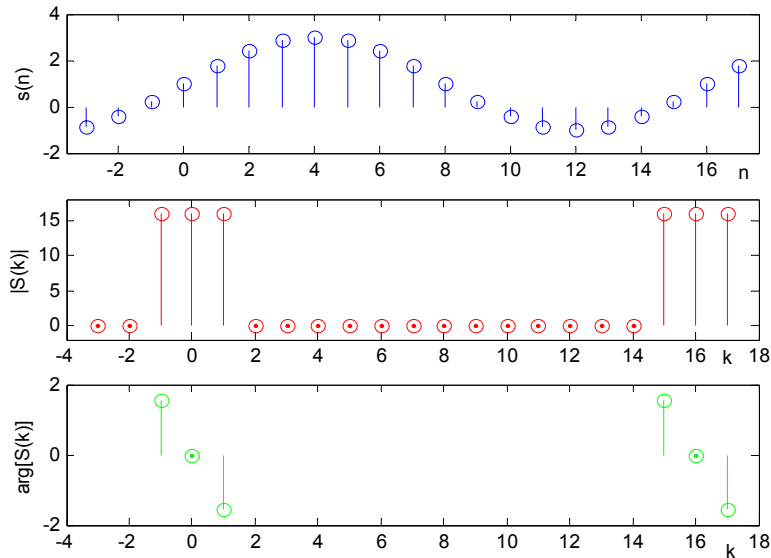
Obecně může být diskrétní Fourierova řada definována pro komplexní posloupnost $\tilde{s}(n)$. Pro reálnou posloupnost $\tilde{s}(n)$ má obraz $\tilde{S}(k)$ následující vlastnost:

$$\tilde{S}(k) = \tilde{S}^*(N - k). \quad (8.10)$$

Tuto vlastnost dokládá **Obrázek 8.1**. Z periodicity $\tilde{S}(k)$ pak dále vyplývá

$$\tilde{S}(k) = \tilde{S}^*(-k). \quad (8.11)$$

Podobnost se vztahem (2.13) není náhodná.



Obrázek 8.1: Diskrétní Fourierova řada

Platí-li pro reálnou posloupnost $\tilde{s}(n)$ navíc $\tilde{s}(n) = \tilde{s}(-n)$, (takže je i $\tilde{s}(n) = \tilde{s}(N-n)$), jsou všechny koeficienty $\tilde{S}(k)$ ryze reálné.

8.2.2.2 Linearita

Obrazem lineární kombinace posloupností s periodou N je lineární kombinace obrazů:

$$\text{DFŘ}\{a\tilde{s}_1(n) + b\tilde{s}_2(n)\} = \{a\tilde{S}_1(k) + b\tilde{S}_2(k)\} \quad (8.12)$$

a a b jsou konstanty, $\{\tilde{S}_1(k)\}$ je obrazem posloupnosti $\{\tilde{s}_1(n)\}$, $\{\tilde{S}_2(k)\}$ je obrazem posloupnosti $\{\tilde{s}_2(n)\}$.

8.2.2.3 Obraz posunuté posloupnosti

Obrazem posunuté posloupnosti $\{\tilde{s}(n-m)\}$, m je číslo celé, je posloupnost

$$\left\{ \tilde{S}(k) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} km\right) \right\}, \quad (8.13)$$

$\{\tilde{S}(k)\}$ je obraz posloupnosti $\{\tilde{s}(n)\}$.

8.2.2.4 Obraz periodické konvoluce

Periodická konvoluce $\{\tilde{z}(n)\}$ periodických posloupností $\{\tilde{s}_1(n)\}$ a $\{\tilde{s}_2(n)\}$ s periodou N je definována vztahem (7.17). Obrazem DFŘ posloupnosti $\{\tilde{z}(n)\}$ je posloupnost s prvky $\tilde{S}_1(k)\tilde{S}_2(k)$.

8.3 Diskrétní Fourierova transformace

8.3.1 Definice diskrétní Fourierovy transformace

Diskrétní Fourierovu transformaci (discrete Fourier transform, DFT) zavedeme prostřednictvím již zavedené diskrétní Fourierovy řady. Nečiní se tak kvůli úspoře psaní, ale proto, aby se ozřejmily některé jinak obtížně vysvětlitelné vlastnosti DFT.

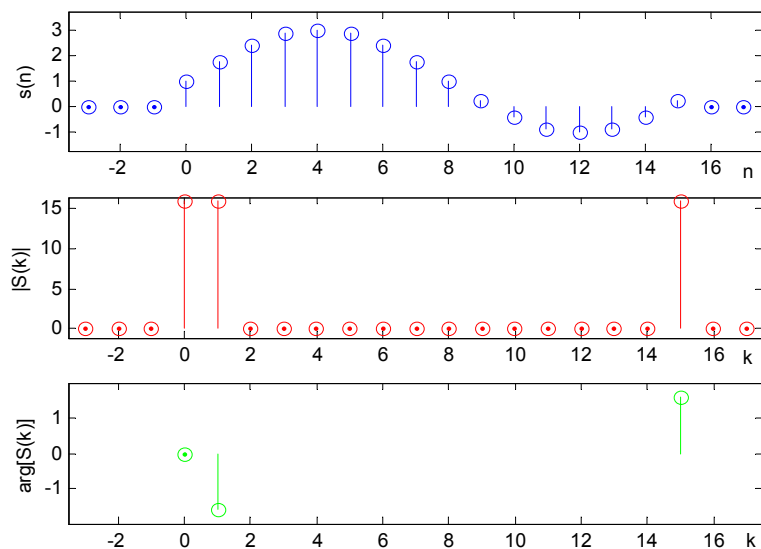
Diskrétní Fourierova transformace přiřazuje posloupnosti délky N jinou posloupnost délky N . Originál je $\{s(n)\}$, obraz je $\{S(k)\}$. Nalezení obrazu DFT posloupnosti $\{s(n)\}$ délky N může být rozděleno do následujících třech kroků:

1. posloupnosti $\{s(n)\}$ délky N přiřadíme periodickou posloupnost $\{\tilde{s}(n)\}$ s periodou N ,
2. nalezneme obraz $\{\tilde{S}(k)\} = \text{DFŘ}\{\tilde{s}(n)\}$,
3. periodické posloupnosti $\{\tilde{S}(k)\}$ přiřadíme posloupnost délky N .

Souhrnně lze napsat následující vztah pro výpočet obrazu DFT posloupnosti $\{s(n)\}$:

$$S(k) = R_N(k) \sum_{n=0}^{N-1} s[\text{mod}_N(n)] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) = R_N(k) \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right). \quad (8.14)$$

Z výpočtářského hlediska je výraz $R_N(k)$ ve vztahu (8.14) prakticky nadbytečný, a proto se v literatuře často vynechává. To může vést k mylnému dojmu, že obraz DFT je periodický.



Obrázek 8.2: Diskrétní Fourierova transformace

V horní části obrázku **Obrázek 8.2** je znázorněn signál

$$s(n) = R_{16}(n) (1 + 2 \sin 0,125\pi n). \quad (8.15)$$

Modulové spektrum a argumentové spektrum jsou nakresleny na dalších dvou částech obrázku **Obrázek 8.2**.

Zpětná (inverzní) diskrétní Fourierova transformace (DFT⁻¹, IDFT) může být rozložena do následujících třech etap:

1. posloupnosti $\{S(k)\}$ délky N přiřadíme periodickou posloupnost $\{\tilde{S}(k)\}$ s periodou N ,
2. k posloupnosti $\{\tilde{S}(k)\}$ vypočteme zpětný obraz DFŘ podle vztahu (8.7),
3. k periodické posloupnosti $\{\tilde{s}(n)\}$ přiřadíme posloupnost $\{s(n)\}$ délky N .

Zpětnou diskrétní Fourierovu transformaci můžeme formálně zapsat vztahem

$$s(n) = R_N(n) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right). \quad (8.16)$$

I v tomto případě bývá v literatuře vynechávána okénková posloupnost $R_N(n)$. Vztah (8.16) je obyčejnou rovností, ne rovností ve smyslu skoro vždy, jak tomu bylo u klasické Fourierovy řady.

8.3.2 Vlastnosti obrazu

8.3.2.1 Obraz reálné posloupnosti

Pro obraz $\{S(k)\}$ reálné posloupnosti $\{s(n)\}$ délky N můžeme psát:

$$\forall k \in \langle 1, N-1 \rangle: S(k) = S^*(N-k). \quad (8.17)$$

Tuto vlastnost si můžeme ověřit pomocí obrázku **Obrázek 8.2**.

Pokud je navíc reálná posloupnost symetrická tak, že

$$\forall n \in \langle 1, N-1 \rangle: s(n) = s(N-n), \quad (8.18)$$

jsou všechny prvky $S(k)$ obrazu ryze reálné.

8.3.2.2 Linearita

Obrazem lineární kombinace posloupností délky N je lineární kombinace obrazů:

$$\text{DFT}\{as_1(n) + bs_2(n)\} = \{aS_1(k) + bS_2(k)\}, \quad (8.19)$$

a a b jsou konstanty, $\{S_1(k)\}$ je obrazem posloupnosti $\{s_1(n)\}$, $\{S_2(k)\}$ je obrazem posloupnosti $\{s_2(n)\}$.

8.3.2.3 Obraz cyklicky posunuté posloupnosti

Obrazem cyklicky posunuté posloupnosti $\{R_N(n)s[\text{mod}_N(n-m)]\}$, m je číslo celé, je posloupnost

$$\left\{ S(k) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} km\right) \right\},$$

$\{S(k)\}$ je obrazem posloupnosti $\{s(n)\}$.

Pro lineárně posunutou posloupnost žádná jednoduchá poučka neplatí!

Definice DFT prostřednictvím DFŘ nám naznačuje, proč se v naší poučce objevilo cyklické posunutí místo obyčejného.

8.3.2.4 Obraz cyklické konvoluce

Obrazem cyklické konvoluce dvou posloupností $\{s_1(n)\}$ a $\{s_2(n)\}$ délky N je posloupnost $\{S_1(k)S_2(k)\}$.

Příklad 8.1: *Diskrétní Fourierova transformace*

Je dán signál délky 4: $s(0) = 1$, $s(1) = 1$, $s(2) = -1$, $s(3) = -1$. Nalezněte obraz DFT signálu.

Příklad 8.2: *Vlastnosti DFT*

Reálná posloupnost $s(n)$ délky $N=1024$ má prvek $S(1) = 5+3j$. Určete prvek $S(1023)$.

8.4 Rychlá Fourierova transformace

V roce 1965 publikovali pánové Cooley, J.W. a Tukey, J.W. zajímavý algoritmus pro výpočet vztahu (8.14). Tento algoritmus, nazývaný FFT (Fast Fourier Transform) neboli rychlá Fourierova transformace, byl velmi efektivní a pomohl prosadit algoritmy číslicového zpracování do praxe. Objev algoritmu byl podnětem k vybudování teorie diskretní Fourierovy transformace. Ukážeme si proč je tento algoritmus tak výhodný.

Vezměme datovou posloupnost o velikosti $N = 4$. Obraz DFT má tento definiční tvar

$$\begin{aligned} S(k) &= R_N(k) \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) \\ &= R_4(k) \sum_{n=0}^3 s(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{4} kn\right), \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Nyní rozepíšeme vztah (8.20) pro jednotlivé hodnoty $k = 0, 1, 2$ a 3 :

$$k = 0$$

$$S(0) = s(0) + s(1) + s(2) + s(3).$$

$$k = 1$$

$$S(1) = s(0) + s(1) e^{-j\frac{\pi}{2}} + s(2) e^{-j\pi} + s(3) e^{-j\frac{3\pi}{2}}. \quad (8.21)$$

$$k = 2$$

$$S(2) = s(0) + s(1) e^{-j\pi} + s(2) e^{-j2\pi} + s(3) e^{-j3\pi}.$$

$$k = 3$$

$$S(3) = s(0) + s(1) e^{-j\frac{3\pi}{2}} + s(2) e^{-j3\pi} + s(3) e^{-j\frac{9\pi}{2}}.$$

Z matematiky je znám Eulerův vztah:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x. \quad (8.22)$$

Komplexní exponenciální funkce e^{jx} je tudíž periodická, a tak lze provést přepočtení některých členů v (8.21):

$$\begin{aligned} e^{-j\frac{3\pi}{2}} &= e^{-j\pi} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = (-1) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -e^{-j\frac{\pi}{2}}, \\ e^{-j3\pi} &= e^{-j2\pi} \cdot e^{-j\pi} = 1 \cdot e^{-j\pi} = e^{-j\pi}, \\ e^{-j\frac{9\pi}{2}} &= e^{-j\frac{6\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}} = e^{-j3\pi} \cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}} = (-1) e^{-j\frac{3\pi}{2}} = -e^{-j\frac{3\pi}{2}}, \\ e^{-j\pi} &= -1, \quad e^{-j2\pi} = 1, \quad e^{-j3\pi} = -1. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Dosadíme-li vztahy (8.23) do (8.21), obdržíme:

$$S(0) = s(0) + s(1) + s(2) + s(3).$$

$$S(1) = s(0) + s(1)e^{-j\frac{\pi}{2}} - s(2) - s(3)e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

$$S(2) = s(0) - s(1) + s(2) - s(3).$$

$$S(3) = s(0) - s(1)e^{-j\frac{\pi}{2}} - s(2) - s(3)e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

(8.24)

Sdružíme-li některé členy a změním pořadí členů:

$$S(0) = s(0) + s(2) + s(1) + s(3).$$

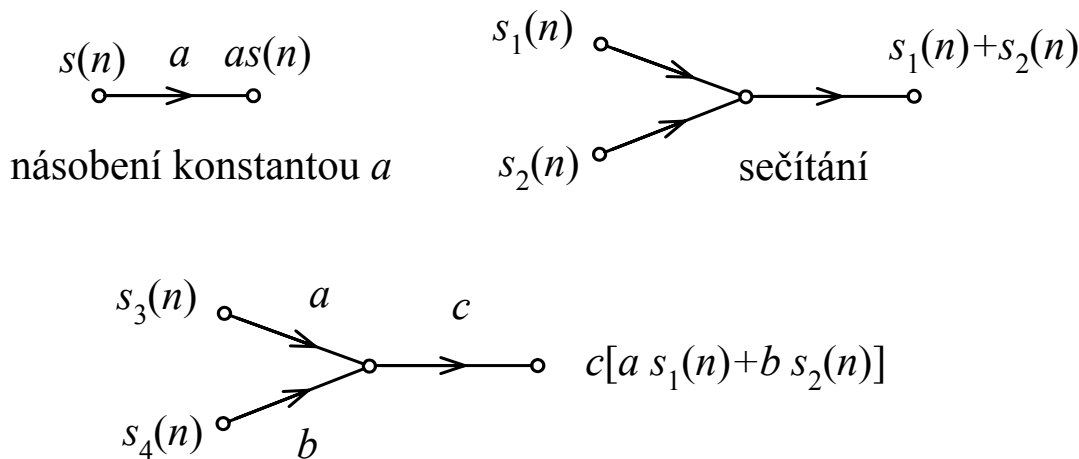
$$S(1) = s(0) - s(2) + [s(1) - s(3)]e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

$$S(2) = s(0) + s(2) - [s(1) + s(3)].$$

$$S(3) = s(0) - s(2) - [s(1) - s(3)]e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

(8.25)

Vidíme, že rovnice (8.25) mají podstatně jednodušší tvar než rovnice (8.21). Pro získání všech čtyř spektrálních složek potřebujeme pouze vypočítat činitel $e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2} = -j$. Na obrázku 8.3 vidíme základní operace násobení a sečítání pro grafy signálových toků, které použijeme pro grafické zobrazení výpočtu algoritmu typu FFT.



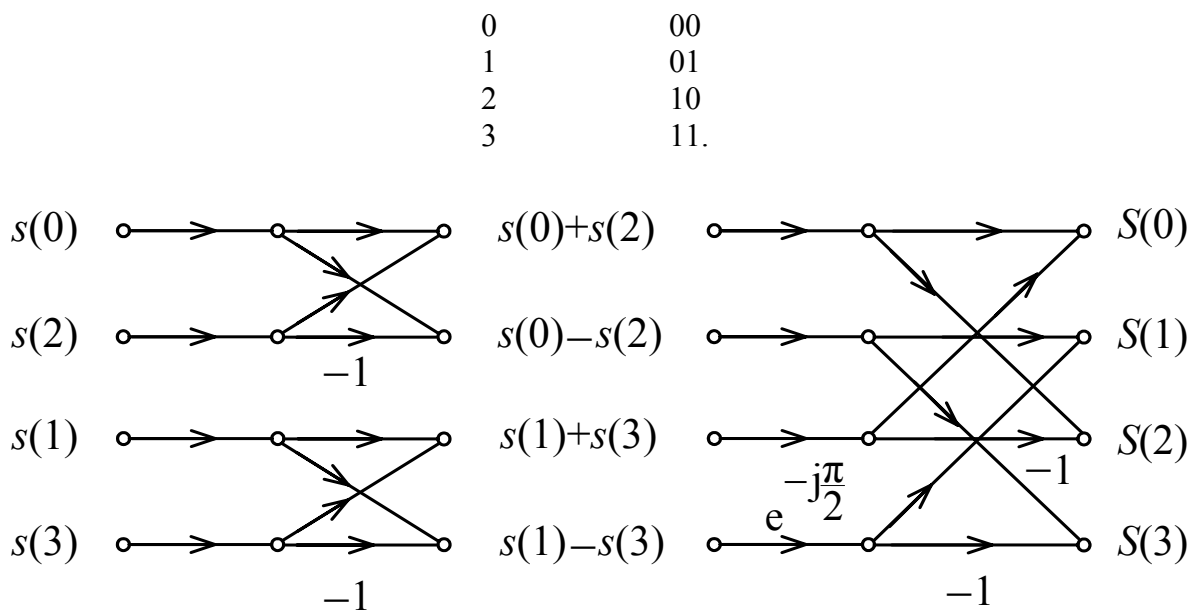
násobení a sečítání

Obrázek 8.3: Operace vyjádřené pomocí grafu signálových toků.

Pomocí symbolů na obrázku 8.3 zapíšeme rovnice (8.25) do grafu signálových toků. Výsledek vidíme na obrázku 8.4.

Protože graf signálových toků pro dvoubodovou posloupnost připomíná svými křídly motýlek (butterfly), tak se této základní operaci také tak říká.

Abychom dostali hodnoty spektra $S(k)$, $k = 0, 1, 2$ a 3 v přirozeném pořadí, tak musíme vstupní posloupnost $s(0)$, $s(1)$, $s(2)$ a $s(3)$ seřadit v tzv. bitově-reverzovaném pořadí. Zapišeme-li indexy vstupní posloupnosti v binárním tvaru, tak dostaneme:

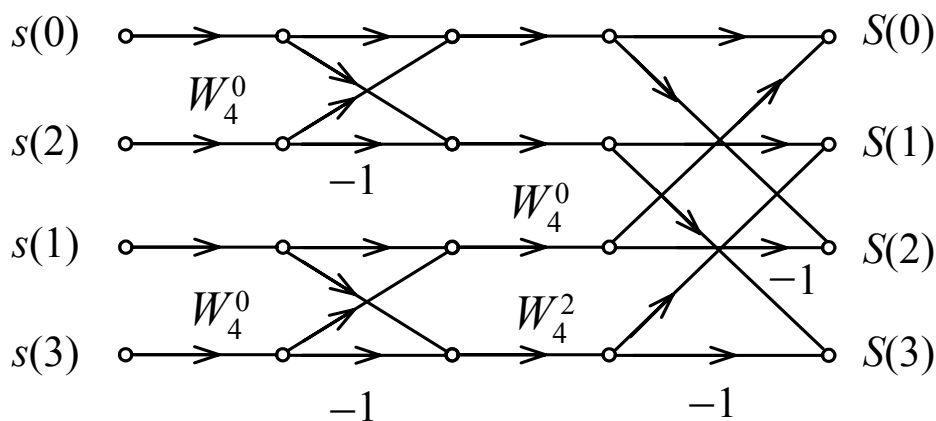


Obrázek 8.4: Rovnice (8.25) zapsané pomocí grafů signálových toků.

Jestliže zapíšeme binární číslo v opačném pořadí, dostaneme indexy ve tvaru bitově – reverzovaného pořadí:

| | |
|----|----|
| 00 | 0 |
| 10 | 2 |
| 01 | 1 |
| 11 | 3. |

V případě $N = 8$ bude bitově-reverzovaná posloupnost indexů vypadat takto: 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7 .

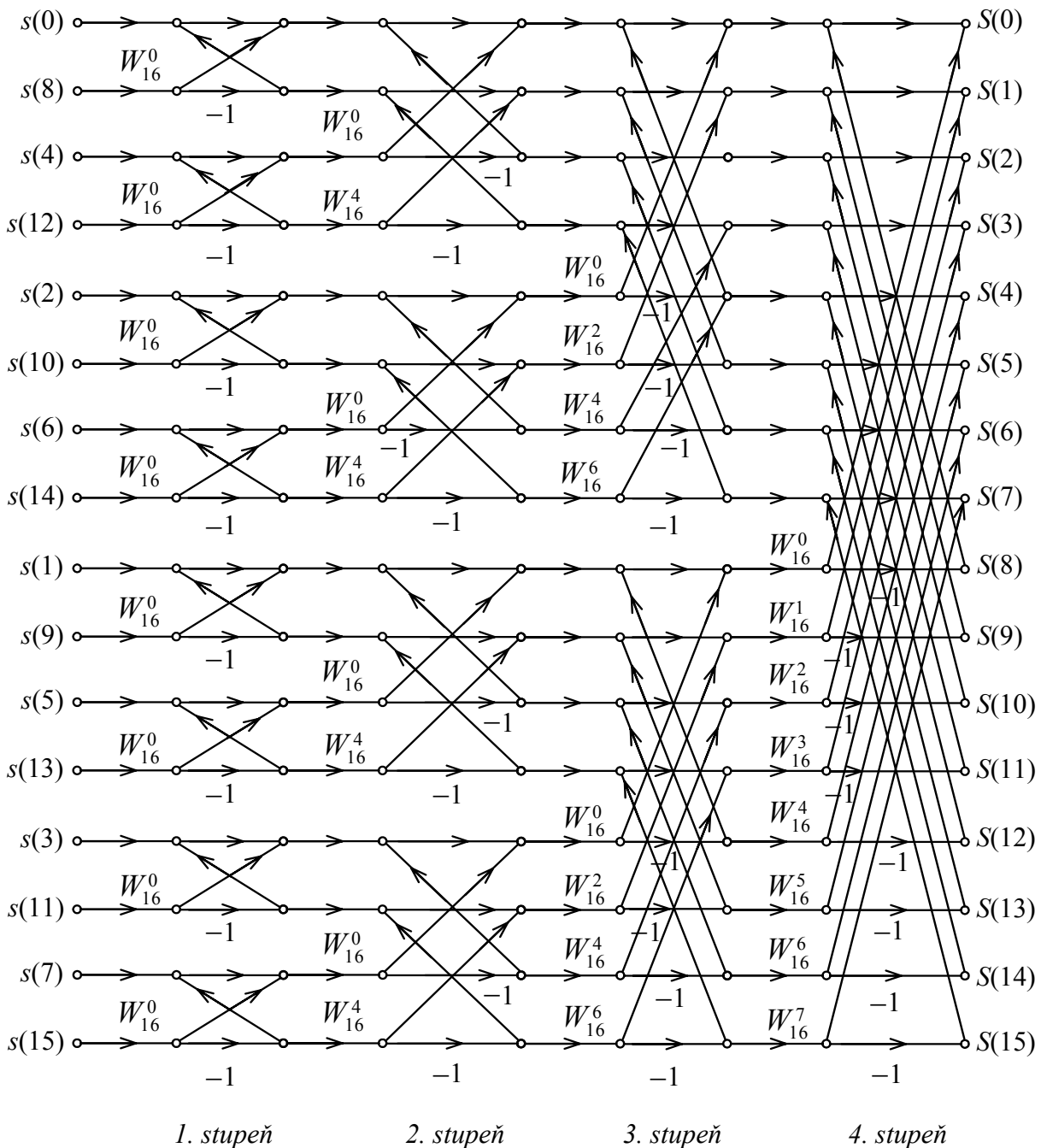


Obrázek 8.5: Algoritmus FFT typu DIT pro $N = 4$.

Komplexní exponenciála $e^{-j\frac{2\pi}{N}r}$ se v oboru číslicového zpracování signálu označuje symbolem:

$$W_N^r = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot r} \tag{ 8.26 }$$

Graf signálových toků na obrázku **Obrázek 8.4** dostane tvar podle obrázku **Obrázek 8.5**.

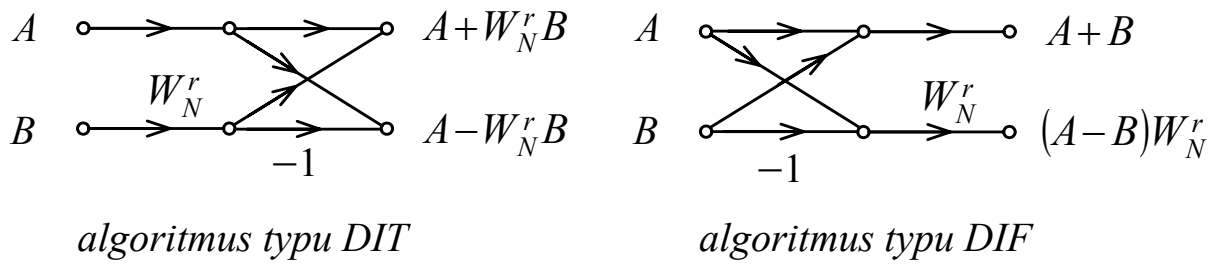


Obrázek 8.6: Algoritmus o základu 2 typu DIT pro $N = 16$.

Algoritmus ukázaný na obrázku **Obrázek 8.5** patří do skupiny algoritmů typu DIT (Decimation In Time). Vychází z toho, že posloupnost vstupních dat dělíme na dvě posloupnosti. První z nich má členy se sudými indexy a druhá posloupnost obsahuje členy s lichými indexy. Tyto dílčí posloupnosti dělíme dále stejným způsobem, až nám zůstanou dvoubodové základní posloupnosti pro realizaci operace motýlku. To platí v případě, že výchozí počet členů posloupnosti N je mocninou čísla 2, jako např. $16 = 2^4$, $1024 = 2^{10}$ apod. Existují také základní motýlky pro 3 bodové nebo 5 bodové posloupnosti apod. Na obrázku **Obrázek 8.6** je ukázan algoritmus typu FFT pro $N = 16$.

Existuje i druhá velká skupina algoritmů FFT, která je označována jako algoritmy typu DIF (Decimation In Frequency). Vstupní datová posloupnost se nedělí podle sudých a lichých

indexů, ale přímo na dvě poloviny. Dílčí posloupnosti se opět dělí na poloviny apod. Porovnání základních operací – motýlku pro algoritmy typu DIT a DIF vidíme na obrázku 8.7.

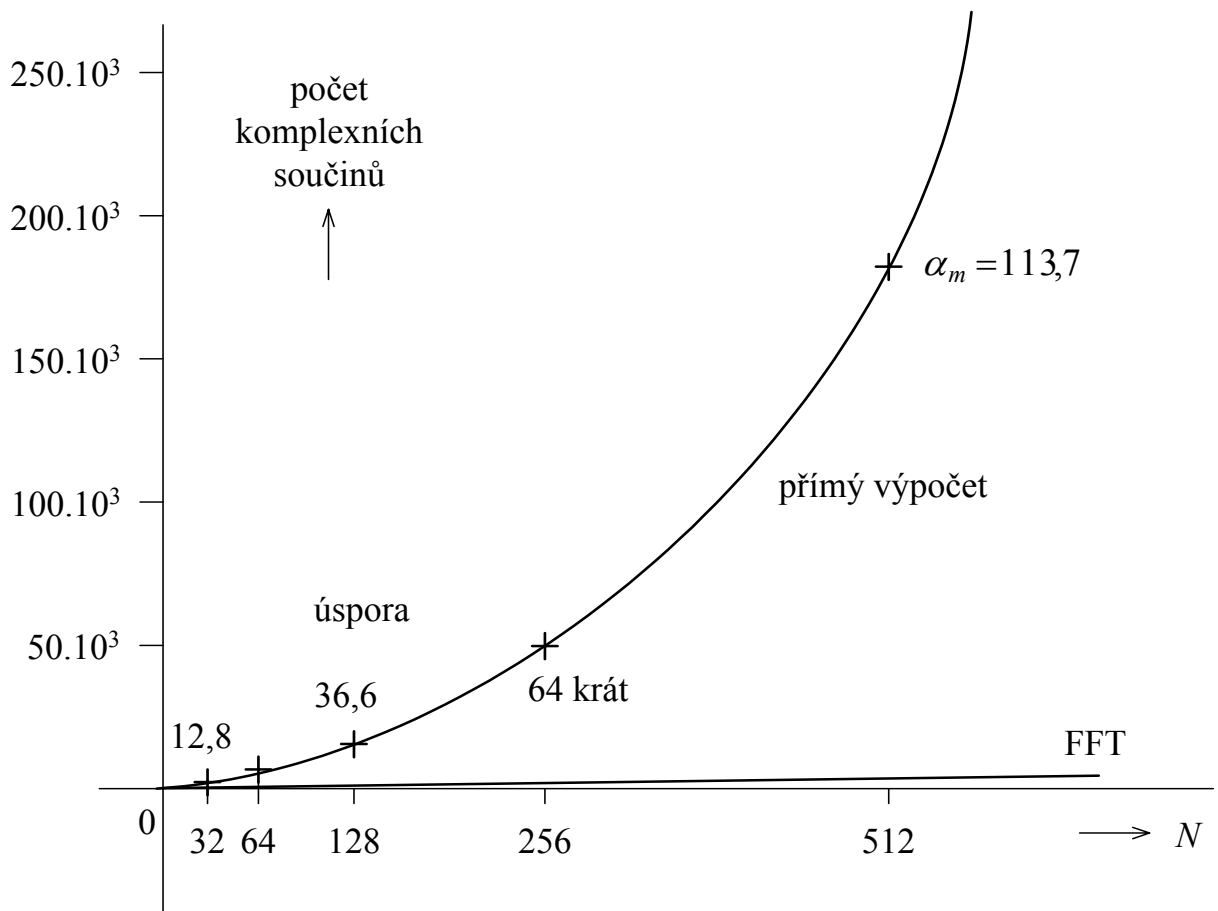


Obrázek 8.7: Motýlek pro dvě skupiny algoritmů

Chceme-li zjistit úsporu počtu součinů a součtů použitím algoritmu typu FFT vůči DFT, pak vypočítáme počet operací motýlku v jednotlivých stupních. Uvažujme algoritmus FFT o základu 2, tj. když N je mocninou čísla 2. Protože operace násobení je při realizaci časově náročnější, budeme srovnávat počet součinů. Počet stupňů algoritmu FFT je dán vztahem

$$m = \log_2 N. \tag{8.27}$$

V každém stupni je provedeno $N/2$ operací motýlku. Operace motýlku obsahuje 2 součiny. Celkový počet součinů při realizaci algoritmu FFT je $mN/2$.



Obrázek 8.8: Porovnání počtu operací

Počet součinů pro přímý výpočet DFT podle definičního vztahu (8.14) je N^2 . Úsporu počtu operací součinu můžeme vyjádřit pomocí činitele

$$\alpha_m = \frac{N^2}{m \cdot N / 2} = \frac{2 \cdot N}{\log_2 N}. \quad (8.28)$$

Například pro $N = 16$ je úspora

$$\alpha_4 = \frac{2 \cdot 16}{\log_2 16} = 8. \quad (8.29)$$

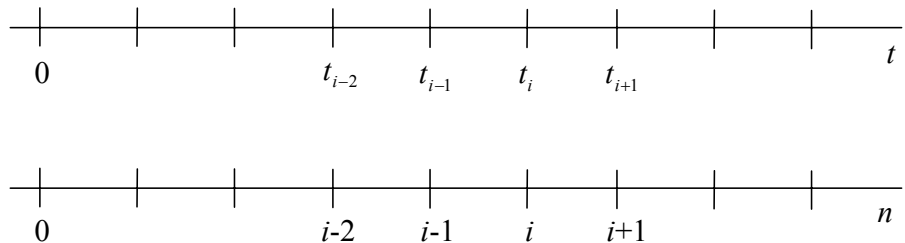
Průběh činitele α_m v závislosti na N je vidět na obrázku **Obrázek 8.8**.

9 Náhodné signály s diskretním časem

9.1 Definice náhodného signálu s diskretním časem

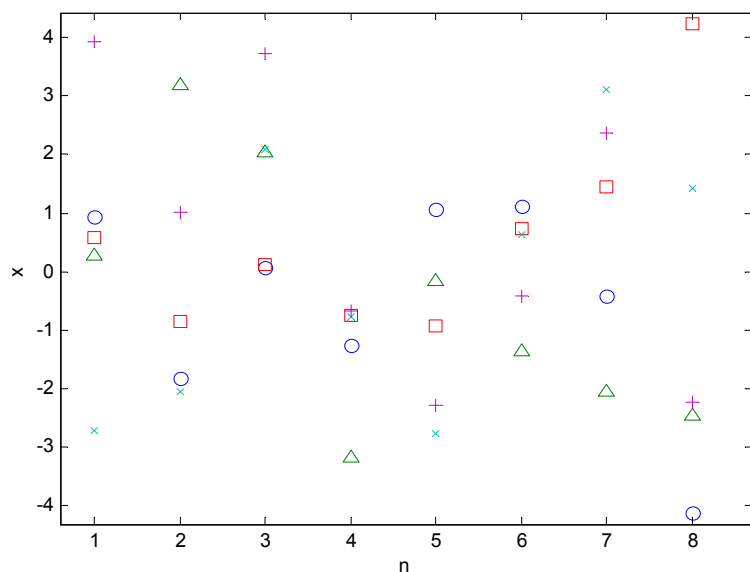
Obdobně jako v páté kapitole budeme se i zde zabývat signály s nepravidelným průběhem. Tentokrát to budou signály s diskretním časem. Uvedeme si tři příklady.

1. Posloupnost vzorků šumového napětí odečítaných vždy po uplynutí jedné mikrosekundy.
2. Záznam výšek povrchu obrobku získaný při ověřování drsnosti povrchu, stanovovaných vždy po posunutí měřidla o jeden mikrometr v přímém směru rovnoběžně s povrchem.
3. Záznam čísel padajících při házení hrací kostkou.



Obrázek 9.1: Rozložení okamžiků t_i na časové ose

U příkladů 1 a 3 jsou posloupnosti čísel vyjadřujících signály vázány na čas t . U příkladu 1 je rozložení časových okamžiků t_i , jimž jsou přiřazeny hodnoty signálu, rovnoměrné. V příkladu 3 se jednotlivá čísla vyskytují v čase za sebou, avšak jejich konkrétní rozmístění na časové ose není rozhodující, záleží v podstatě jen na pořadí čísel plně určeném již indexem i . Příklad 2 je obdobný příkladu 1, čas t je však nahrazen vzdáleností l , tedy jinou fyzikální veličinou.



Obrázek 9.2: Soubor realizací

Matematickým nástrojem pro popis diskretních náhodných signálů jsou diskretní náhodné neboli diskretní stochastické procesy. Při definování diskretního náhodného procesu využijeme, obdobně jako v páté kapitole, pojem náhodná veličina. Diskretní náhodný proces (discrete-time random process) může být zaveden jako systém náhodných veličin $\{\xi_t, t \in \tau_d\}$, kde $\{\tau_d\}$ je spočetná nebo konečná množina okamžiků t_i , tj. množina $\{\dots, t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots\}$.

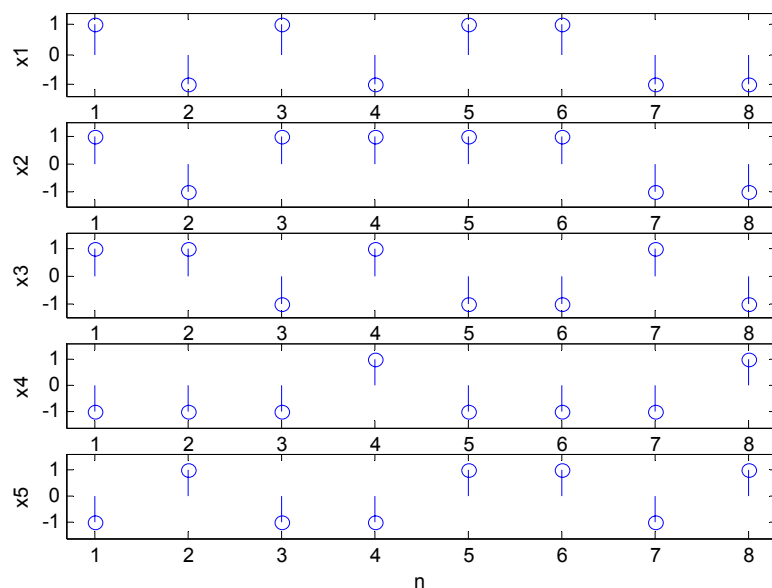
V technických aplikacích jsou okamžiky t_i nejčastěji rozloženy rovnoměrně, $\forall i \in \mathbf{Z}: t_i = iT$, kde T je konstanta, vzorkovací interval, a \mathbf{Z} označuje množinu všech celých čísel. Tento případ je znázorněn na obrázku **Obrázek 9.1**.

Podobně jako u determinovaných signálů s diskretním časem i zde přináší zkrácení matematického popisu předpoklad $T = 1$. Pro tento případ diskretním náhodným procesem, náhodnou posloupností (random sequence), nazveme systém náhodných veličin $\{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$. Náhodný proces označíme $\xi(n)$. Náhodný proces je plně popsán, jsou-li plně popsány náhodné veličiny ξ_n pro všechna $n \in \mathbf{Z}$ a jsou-li zároveň plně popsány všechny vztahy mezi těmito veličinami. Veličina n je pro námi uvažovaný případ normovaným diskretním časem.

9.2 Množina realizací

Tím, že pro všechna $n \in \mathbf{Z}$ nabude každá náhodná veličina ξ_n náhodně, s příslušnou pravděpodobností a při respektování vztahů k ostatním náhodným veličinám, nějaké konkrétní hodnoty $x(n)$, vznikne posloupnost, kterou nazýváme realizace diskretního náhodného procesu. Souběžným získáním několika takovýchto posloupností je vytvořen soubor realizací náhodného procesu.

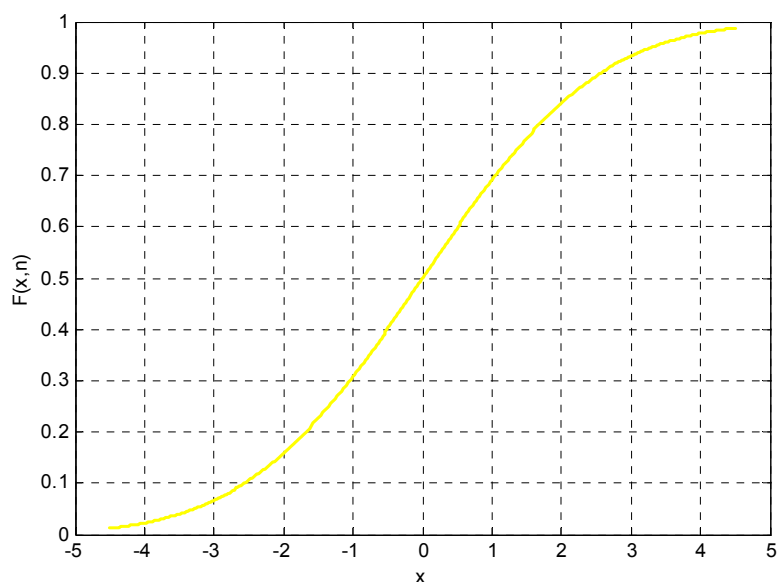
Z experimentálního hlediska může být náhodný signál definován množinou podmínek, komplexem okolností, za kterých vzniká a probíhá. Souběžným několikanásobným uskutečněním souboru podmínek můžeme získat soubor náhodných signálů skutečných, který by byl souborem realizací náhodného procesu, pokud by byly podmínky pro vytváření jednotlivých signálů přesně stejné. Zpravidla předpokládáme, že jsou stejné a na soubor náhodných signálů nahlížíme jako na soubor realizací náhodného procesu.



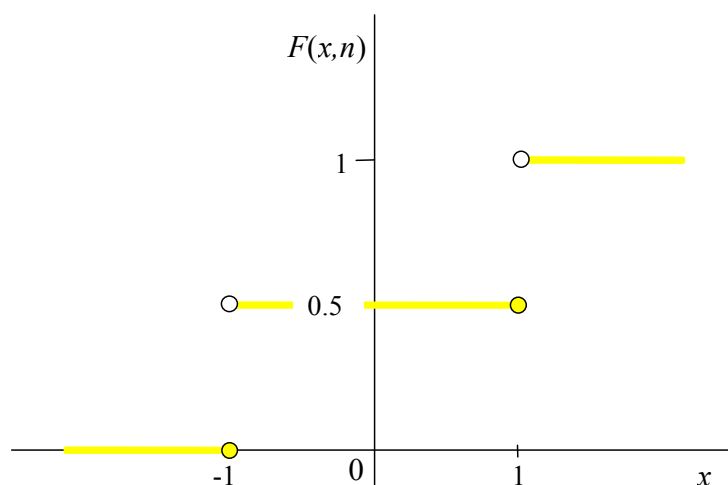
Obrázek 9.3: Realizace náhodného procesu s diskretní množinou hodnot

Uvedeme si dva příklady diskretních náhodných procesů. V prvním případě bude množina hodnot, kterých náhodný proces může nabýt, spojitá, ve druhém případě diskretní. Je nutné zdůraznit, že tato diskretnost není onou diskretností, která figuruje v názvu diskretní náhodný proces.

Náhodné veličiny ξ_n , tvořící první diskretní náhodný proces, mají pro všechna n normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a se směrodatnou odchylkou $\sigma = 2$. Veličiny ξ_{n_1} a ξ_{n_2} jsou pro všechna $n_1 \in \mathbb{Z}$ a $n_2 \in \mathbb{Z}$ při $n_1 \neq n_2$ nekorelované. Realizaci náhodného procesu bychom mohli získat tak, že bychom s relativně dlouhým vzorkovacím intervalem T odebírali vzorky ergodického širokopásmového normálního šumu s nulovou stejnosměrnou složkou a s efektivní hodnotou 2. Pět realizací tohoto náhodného procesu nám ukazuje **Obrázek 9.2**. Jednotlivé realizace jsou odlišeny geometrickým tvarem značek vyznačujících hodnoty, kterých náhodný proces nabyl. Distribuční funkce procesu je nakreslena na obrázku **Obrázek 9.4**. Funkci rozdělení hustoty pravděpodobnosti najde čtenář na obrázku **Obrázek 9.6**.



Obrázek 9.4: Distribuční funkce

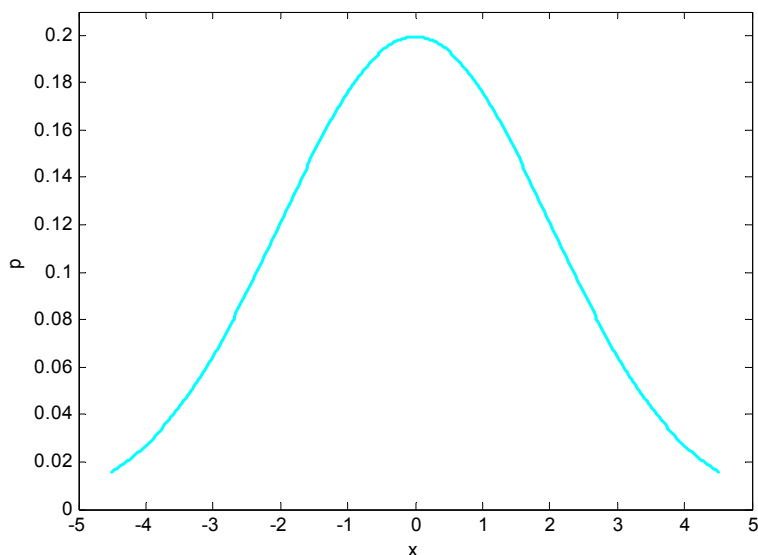


Obrázek 9.5: Distribuční funkce druhého procesu

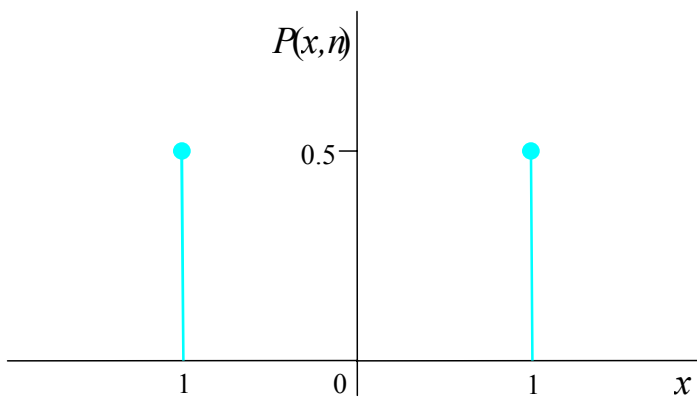
Náhodné veličiny ξ_n , tvořící druhý diskretní náhodný proces, mají pravděpodobnost $P(1)$ výskytu hodnoty 1 rovnu 0,5 a pravděpodobnost $P(-1)$ výskytu hodnoty -1 rovnu také 0,5. Veličiny ξ_{n_1} a ξ_{n_2} jsou pro všechna $n_1 \in \mathbf{Z}$ a $n_2 \in \mathbf{Z}$ při $n_1 \neq n_2$ statisticky nezávislé. Pět realizací tohoto náhodného procesu je znázorněno na obrázku **Obrázek 9.3**. Byly získány na počítači, pomocí generátoru pseudonáhodných čísel. Čtenář si může takovéto realizace snadno vytvořit pomocí házení pěti mincí. Postupným vrháním mincí a zapisováním výsledků získá posloupnosti, které jsou požadovanými realizacemi diskretního náhodného procesu. Teoretická distribuční funkce tohoto procesu je nakreslena na obrázku **Obrázek 9.5**. Funkce má schodovitý charakter způsobený tím, že množina možných hodnot náhodného procesu je diskretní. Rozdělení pravděpodobností výskytu možných hodnot je nakresleno na obrázku **Obrázek 9.7**.

U prvního příkladu je pro všechna $n \in \mathbf{Z}$ množinou možných hodnot množina reálných čísel. Ve druhém případě je množinou možných hodnot množina $\{-1,1\}$.

Obě distribuční funkce, které znázorňují obrázky **Obrázek 9.4** a **Obrázek 9.5**, mají tři shodné vlastnosti: Hodnota v $-\infty$ je rovna nule, hodnota v $+\infty$ je rovna jedné a funkce je neklesající. Tyto tři vlastnosti mají všechny distribuční funkce.



Obrázek 9.6: Hustota pravděpodobnosti



Obrázek 9.7: Rozdělení pravděpodobností

9.3 Momenty

Střední hodnota $a(n) = E\{\xi(n)\}$ diskrétního náhodného procesu $\xi(n)$ popsaného funkcí hustoty rozdělení pravděpodobností $p(x, n)$ může být vypočtena ze vztahu (9.1), který je obdobou vzorce (5.4):

$$a(n) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, n)dx. \quad (9.1)$$

Pro výpočet střední hodnoty diskrétního náhodného procesu s diskrétní množinou možných hodnot použijeme vzorec

$$a(n) = \sum_{i=1}^{Q(n)} x_i(n)P\{x_i(n)\}, \quad (9.2)$$

kde $Q(n)$ je počet možných hodnot náhodné veličiny ξ_n ,

$x_i(n)$ jsou možné hodnoty náhodné veličiny ξ_n a

$P\{x_i(n)\}$ jsou pravděpodobnosti výskytu těchto hodnot.

9.4 Stacionarita a ergodicita

Obdobně jako u náhodných procesů se souvislým časem je i zde možno říci, že u stacionárního diskrétního náhodného procesu je jeho matematický popis nezávislý na libovolném celočíselném posunutí počátku časové osy. Volně řečeno, statistické vlastnosti stacionární diskrétní náhodné posloupnosti jsou stálé, nemění se v průběhu postupného narůstání hodnoty n .

Důsledky stacionarity jsou příjemné. Například střední hodnota stacionárního procesu je nezávislá na n , veličinu $a(n)$ tedy nahrazuje veličina a . Toto představuje vítané zjednodušení popisu diskrétních náhodných procesů. Pro statistické odhady veličiny a a dalších momentů je však i nadále nutno mít k dispozici početnou množinu realizací.

S jedinou realizací vystačíme při zkoumání procesů ergodických, tj. takových, u kterých mají všechny realizace stejné statistické vlastnosti. Odhad střední hodnoty pak může být získán jako aritmetický průměr hodnot $x(n)$ vybraných z dostatečně dlouhého úseku jediné realizace. Pro stanovení odhadu můžeme například použít následující analogii vzorce (5.8):

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n), \quad (9.3)$$

kde N je celé číslo.

9.5 Spektrální hustota výkonu

Snaha vyjádřit dynamické vlastnosti diskrétního náhodného procesu nějakou funkcí kmitočtu iniciovala zavedení spektrální hustoty výkonu diskrétního náhodného procesu. Z teorie signálů se spojitým časem sem byl přenesen pojem, ne však jeho fyzikální smysl, protože signál s diskrétním časem žádný výkon v klasickém smyslu slova nemá. K fyzikálnímu významu spektrální hustoty výkonu $G_d(\omega')$ stacionárního náhodného procesu s

diskrétním časem se můžeme dopracovat hledáním jeho vztahu ke spektrální hustotě $G(\omega)$ signálu se spojitým časem.

Formálně můžeme spektrální hustotu výkonu $G_d(\omega')$ stacionárního diskrétního náhodného procesu definovat vztahem

$$G_d(\omega') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) \exp(-j\omega' m), \quad (9.4)$$

kde ω' je normovaný úhlový kmitočet a

$$R(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, m) dx_1 dx_2 \quad (9.5)$$

kde $R(m)$ je autokorelační funkce, viz 13.3.3,

m je (normovaný) časový rozdíl, zpoždění a

$p(x_1, x_2, m)$ je dvourozměrná hustota rozdělení pravděpodobnosti.

Obdobně bylo možné definovat i spektrální hustotu výkonu $G(\omega)$ stacionárního náhodného procesu se spojitým časem:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{sk}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad (9.6)$$

kde $R_{sk}(\tau)$ je autokorelační funkce signálu se spojitým časem, viz 13.3.2.

Při výpočtu integrálu na pravé straně rovnice (9.6) obdélníkovou metodou s použitím náhrad $d\tau \rightarrow T$ a $\tau \rightarrow mT$ dostáváme přibližný vztah:

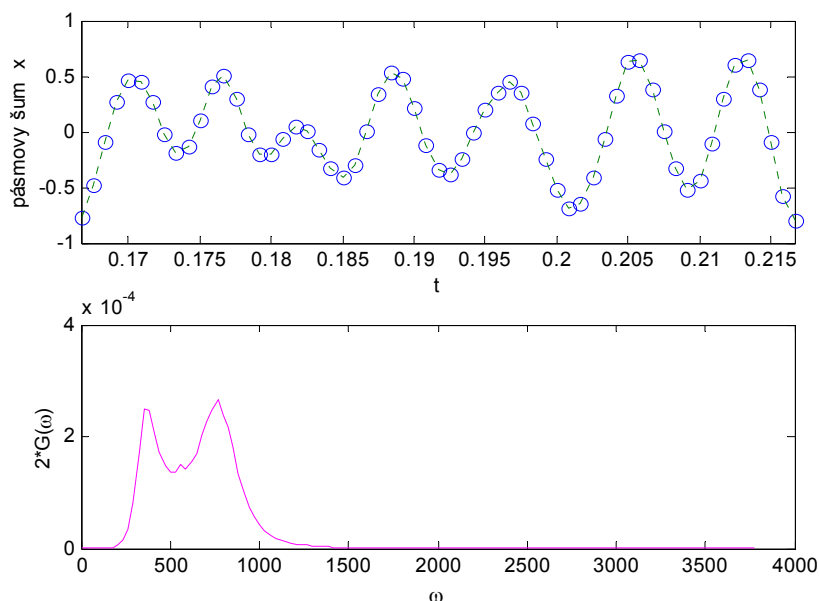
$$G(\omega) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{sk}(mT) \exp(-j\omega mT) = \frac{T}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{sk}(mT) \exp\left(-j \frac{\omega'}{T} mT\right). \quad (9.7)$$

Na posloupnost $R_{sk}(mT)$ můžeme nahlížet jako na autokorelační posloupnost $R(m)$ náhodného procesu $\xi(n)$ získaného z náhodného procesu $\xi(t)$ pomocí vzorkování v okamžicích nT . Díky tomu můžeme napsat následující vztah pro přibližný výpočet spektrální hustoty $G(\omega)$ signálu se spojitým časem prostřednictvím spektrální hustoty výkonu $G_d(\omega')$ náhodného procesu s diskretním normovaným časem:

$$G(\omega) \approx \frac{T}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) \exp(-j\omega' m) = \frac{T}{2\pi} G_d(\omega T). \quad (9.8)$$

Z toho co bylo uvedeno vyplývá, že spektrální hustotu výkonu $G(\omega)$ náhodného procesu se spojitým časem můžeme přibližně stanovit takto:

1. Vytvoříme diskretní náhodný proces navzorkováním procesu se spojitým časem. Vzorkování musí být dostatečně husté ($T \rightarrow 0$).
2. Stanovíme autokorelační posloupnost $R(m)$ diskretního náhodného procesu.
3. Vypočteme spektrální hustotu výkonu $G_d(\omega')$ diskretního náhodného procesu pomocí vzorce (9.4).
4. Spektrální hustotu $G_d(\omega')$ přepočteme na spektrální hustotu $G(\omega)$ pomocí vztahu (9.8).



Obrázek 9.8: Signál a jeho spektrální hustota

Výpočtové postupy používané v praxi bývají jiné. Shora uvedený postup výpočtu nám ale umožňuje získat představu o fyzikálním smyslu spektrální hustoty $G_d(\omega)$ diskrétního náhodného procesu. Funkce $G_d(\omega)$ je, jak jsme ukázali odvozením vztahu (9.8), úzce příbuzná se spektrální hustotou výkonu náhodného procesu se spojitým časem. Předpokládali jsme, že diskrétní náhodný proces vznikl hustým vzorkováním procesu se spojitým časem. Vzorkování musí být tak natolik husté, aby se integrál (9.6) dal úspěšně počítat obdélníkovou metodou.

Pro stanovení spektrální hustoty výkonu je k dispozici řada metod, které zde však nebudeme podrobně probírat. Naším hlavním cílem bylo vysvětlení pojmu.

Vedle spektrální hustoty výkonu diskrétního signálu se běžně používají i pojmy výkon diskrétního signálu a energie diskrétního signálu.

Při numerickém výpočtu funkce $G_d(\omega)$ bude dána posloupnost délky N tvořená úsekem jedné realizace ergodického náhodného procesu $\xi(n)$. Okolnost, že úsek realizace má konečnou délku, je příčinou toho, že hodnoty funkce $G_d(\omega)$ budeme pouze odhadovat. Příklad úseku zkoumaného ergodického náhodného procesu a vzorky tohoto procesu jsou nakresleny v horní části obrázku **Obrázek 9.8**. Jednostranná spektrální hustota výkonu $G_j(\omega) = 2G(\omega)$ je nakreslena ve spodní polovině obrázku **Obrázek 9.8**. Pro její stanovení a nakreslení byly použity příkazy

```
[Pxx, F]=psd(x);
```

a

```
plot(F*pi*fvz, Pxx/pi/fvz); ,
```

kde fvz představuje vzorkovací kmitočet a x je vektor vzorků náhodného signálu $x(t)$. Takže je to vlastně docela jednoduché. Vektor měl délku $N = 131072$. Pro spolehlivé získávání hodnotných výsledků a jejich správnou interpretaci je dobré si o příkazu `psd` přečíst více a odzkoušet si jej na známých signálech.

Příklad 9.1: *Odhad střední hodnoty*

Odhadněte střední hodnotu $a(5)$ na základě realizací z obrázku **Obrázek 9.2**.

Příklad 9.2: *Střední hodnota ergodického signálu*

Předpokládejte, že náhodný proces z obrázku **Obrázek 9.2** je ergodický a odhadněte jeho střední hodnotu z trojúhelníčkové realizace.

10 Systémy s diskretním časem

10.1 Lineární stacionární systém

Systémy pro zpracování signálu můžeme dělit podle toho jaký signál zpracovávají, to znamená diskretní systém zpracovává diskretní signál. Obecně diskretní systém, neboli systém s diskretním časem, lze definovat jako dynamický systém, který provádí jednoznačnou transformaci vstupního diskretního signálu (posloupnosti) $x(n)$ na výstupní diskretní signál (posloupnost) $y(n)$

$$y(n) = T\{x(n)\}, n \in \langle -\infty, \infty \rangle. \quad (10.1)$$

Lineární diskretní systém má tu vlastnost, že pro něj platí princip superpozice. Uvažujeme dva diskretní signály, které jsou podrobeny transformaci (10.1)

$$\begin{aligned} y_1(n) &= T\{x_1(n)\}, \\ y_2(n) &= T\{x_2(n)\}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Pro lineární systém potom platí pro lineární kombinaci těchto vstupních signálů

$$y(n) = T\{a x_1(n) + b x_2(n)\} = a T\{x_1(n)\} + b T\{x_2(n)\} = a y_1(n) + b y_2(n). \quad (10.3)$$

Činitelé a , b jsou obecně komplexní konstanty.

Z teorie diskretních signálů je známo, že obecný diskretní signál je možné reprezentovat jako lineární kombinaci vážených posunutých jednotkových impulzů

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k). \quad (10.4)$$

Symbol $x(n)$ označuje diskretní signál, který má definovány hodnoty pro všechna $n \in \mathbf{Z}$, $\delta(n)$ je jednotný impulz.

Diskretní systém stacionární (neparametrický, časově invariantní) má tu vlastnost, že chování transformace $T\{\}$ nezávisí na časovém posunutí. Platí tedy

$$y(n) = T\{x(n)\} \quad \text{a} \quad y(n-k) = T\{x(n-k)\}. \quad (10.5)$$

To znamená, že v obou případech nezpožděného vstupního signálu $x(n)$ a zpožděného vstupního signálu $x(n-k)$ dostaneme stejnou odezvu $y(n)$, která se v druhém případě liší pouze tím, že je zpožděna o k vzorků, tj. $y(n-k)$.

Pro parametrický systém pak dostaneme dvě odlišné výstupní odezvy.

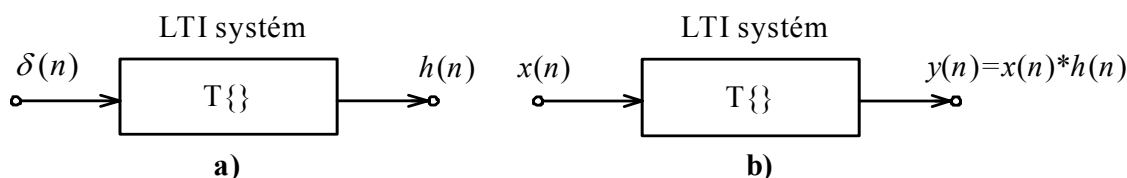
Pro lineární stacionární diskretní systém neboli systém LTI (Linear Time – Invariant) platí obě vlastnosti současně:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= T\{x(n)\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)\right\} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T\{\delta(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \\
 &= x(n) * h(n).
 \end{aligned}
 \tag{10.6}$$

Operace označená symbolem $*$ v rovnici (10.6) se nazývá diskretní konvoluce (viz 7.3.3).

10.2 Impulzní charakteristika

Impulzní charakteristika $h(n)$ je odezva diskretního LTI systému na jednotkový impulz $\delta(n)$ (**Obrázek 10.1a**). Jestliže na vstupu LTI systému je obecný diskretní vstupní signál $x(n)$, pak odezva je diskretní konvoluce vstupního signálu a impulzní charakteristiky (**Obrázek 10.1b**).

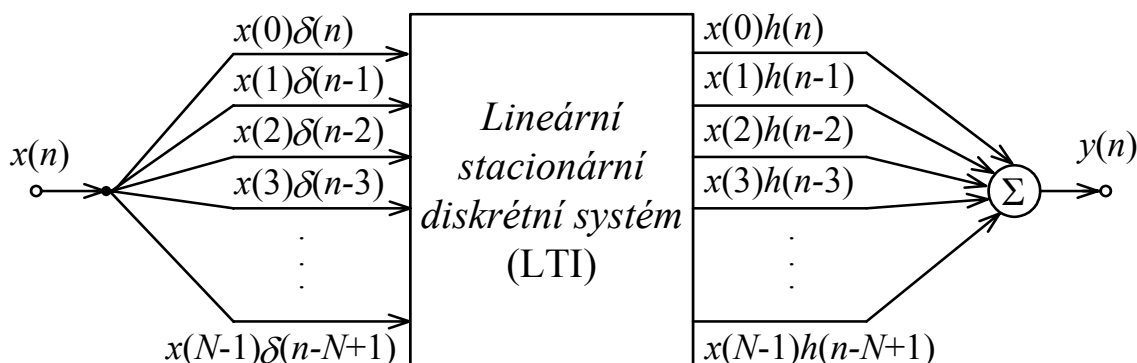


Obrázek 10.1: Odezva na jednotkový impulz a obecný signál

Uvažujeme impulzní charakteristiku LTI systému konečné délky N . Potom můžeme vztah (10.6) rozepsat takto:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) h(n-k) = x(0) h(n) + x(1) h(n-1) \\
 &+ x(2) h(n-2) + x(3) h(n-3) + \dots + x(N-1) h(n-N+1).
 \end{aligned}
 \tag{10.7}$$

Jestliže si uvědomíme, že na základě rovnice (10.4) lze vstupní signál také rozložit na jednotlivé vzorky, tak si můžeme na obrázku **Obrázek 10.2** ukázat jak platí princip superpozice pro LTI systém.



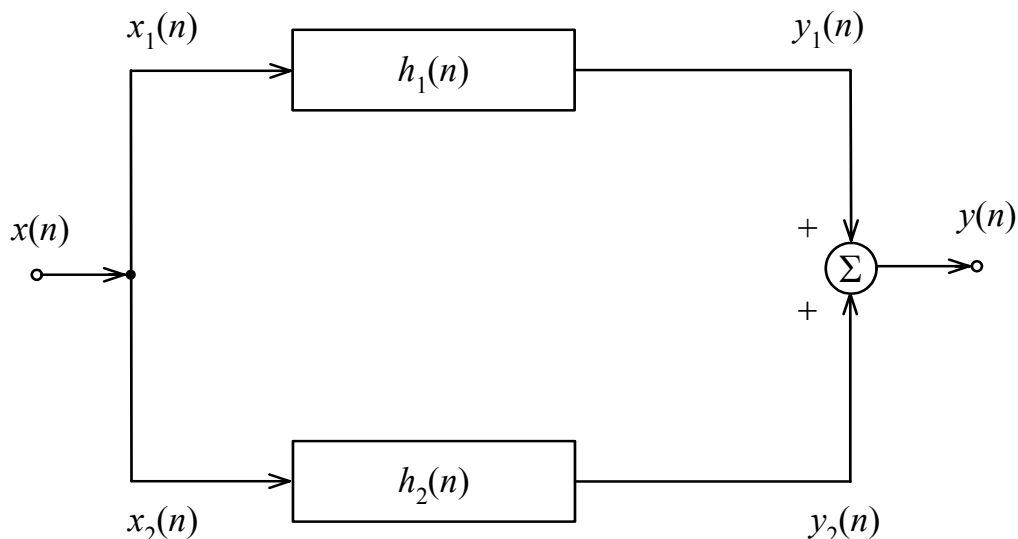
Obrázek 10.2: Metoda superpozice

Diskretní systém, který má konečný počet členů impulzní charakteristiky se nazývá systém typu FIR (Finite Impulse Response), neboli systém s konečnou impulzní charakteristikou.

10.3 Spojování diskrétních systémů LTI

Dílčí LTI diskrétní systémy lze skládat paralelně a sériově a zajímá nás, jaká je impulzní charakteristika výsledného LTI systému.

Paralelní spojení dvou LTI systémů je znázorněno na obrázku **Obrázek 10.3**.



Obrázek 10.3: Paralelní spojení

První LTI systém má impulzní charakteristiku $h_1(n)$ a druhý LTI systém impulzní charakteristiku $h_2(n)$.

Nyní chceme zjistit impulzní charakteristiku ekvivalentního diskrétního systému, který má vstupní signál $x(n)$ a výstupní signál $y(n)$. Pro dílčí LTI systémy platí

$$\begin{aligned} y_1(n) &= h_1(n) * x_1(n), \\ y_2(n) &= h_2(n) * x_2(n), \end{aligned} \quad (10.8)$$

neboť pro diskrétní lineární konvoluci platí komutativní zákon

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n). \quad (10.9)$$

Pro ekvivalentní systém LTI platí

$$\begin{aligned} x(n) &= x_1(n) = x_2(n), \\ y(n) &= y_1(n) + y_2(n) = h_1(n) * x_1(n) + h_2(n) * x_2(n) = \\ &= [h_1(n) + h_2(n)] * x(n) = h(n) * x(n). \end{aligned} \quad (10.10)$$

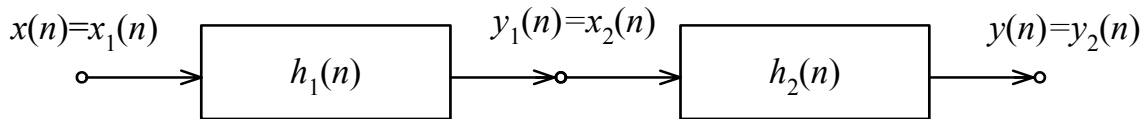
Při odvození jsme využili distributivní zákon

$$(h_1(n) * x(n)) + (h_2(n) * x(n)) = [h_1(n) + h_2(n)] * x(n). \quad (10.11)$$

Impulzní charakteristika ekvivalentního LTI diskrétního systému, který vznikl paralelním spojením dvou dílčích LTI diskrétních systémů, má tvar

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n). \quad (10.12)$$

Sériové spojení dvou dílčích LTI systémů je znázorněno na obrázku **Obrázek 10.4**.



Obrázek 10.4: Sériové spojení

Pro výpočet impulzní charakteristiky $h(n)$ ekvivalentního výsledného LTI systému využijeme asociativní zákon

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \quad (10.13)$$

a komutativní zákon (10.9). Výstupní signál je roven

$$\begin{aligned} y(n) &= y_2(n) = h_2(n) * x_2(n) = h_2(n) * y_1(n) \\ &= h_2(n) * [h_1(n) * x_1(n)] = [h_1(n) * h_2(n)] * x(n) \end{aligned} \quad (10.14)$$

Protože platí

$$y(n) = h(n) * x(n), \quad (10.15)$$

pak impulzní charakteristika ekvivalentního LTI diskrétního systému, který vznikl sériovým spojením dvou dílčích

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n). \quad (10.16)$$

10.4 Přenosová funkce systému LTI

Pro lineární stacionární diskrétní systém (LTI) platí vztah (10.6) mezi vstupním signálem a výstupním signálem

$$y(n) = h(n) * x(n). \quad (10.17)$$

Definujeme jednostrannou transformaci Z , která je dána definičním vztahem

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}, \quad F(z) \Leftrightarrow f(n). \quad (10.18)$$

Jestliže definujeme obrazy transformace Z takto

$$Y(z) \Leftrightarrow y(n), \quad X(z) \Leftrightarrow x(n) \quad \text{a} \quad H(z) \Leftrightarrow h(n), \quad (10.19)$$

pak rovnice (10.5) po transformaci Z dává výsledek

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z), \quad (10.20)$$

Odtud

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (10.21)$$

Funkci $H(z)$ nazýváme systemovou přenosovou funkcí (nebo krátce přenosovou funkcí) a pro LTI systém je definována pomocí racionální lomené funkce

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{A_M(z)}{B_N(z)} = \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \dots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0} \\
 &= z^{M-N} \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{M-1} z^{-M+1} + c_M z^{-M}}{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_{N-1} z^{-N+1} + d_N z^{-N}}.
 \end{aligned} \tag{10.22}$$

Pro koeficienty v rovnici (10.22) platí:

$$\begin{aligned}
 a_M &= c_0, a_{M-1} = c_1, \dots, a_2 = c_{M-2}, a_1 = c_{M-1}, \\
 a_0 &= c_M, b_N = d_0, b_{N-1} = d_1, \dots, b_1 = d_{N-1}, b_0 = d_N.
 \end{aligned} \tag{10.23}$$

Přenosová funkce $H(z)$ v (10.22) má odpovídající charakteristiku nekonečné délky, a proto říkáme, že tato přenosová funkce reprezentuje systém typu IIR (Infinite Impulse Response), neboli systém s nekonečnou impulzní odezvou. Polynomy v čitateli $A_M(z)$ a jmenovateli $B_N(z)$ přenosové funkce $H(z)$ lze rozložit do tvaru součinu kořenových činitelů

$$H(z) = K \frac{\prod_{i=1}^M (z - n_i)}{\prod_{j=1}^N (z - p_j)}, \tag{10.24}$$

K je reálná konstanta.

Kořeny n_i , $i = 1, 2, 3, \dots, M$ se nazývají nulové body přenosové funkce a získáme je řešením rovnice $A_M(z) = 0$. Podobně kořeny jmenovatele získáme řešením rovnice $B_N(z) = 0$ a nazýváme je póly přenosové funkce p_j , $j = 1, 2, \dots, N$.

Existují také LTI systémy, které mají ve jmenovateli přenosové funkce $H(z)$ s výjimkou koeficientu b_N všechny ostatní koeficienty rovny nule, tj. platí $b_j = 0$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. Přenosová funkce daná rovnicí (10.22) má pak tvar

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{b_N z^N} \\
 &= z^{M-N} \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{M-1} z^{-M+1} + c_M z^{-M}}{d_0} \\
 &= z^{M-N} \left[\frac{c_0}{d_0} + \frac{c_1}{d_0} z^{-1} + \frac{c_2}{d_0} z^{-2} + \dots + \frac{c_{M-1}}{d_0} z^{-M+1} + \frac{c_M}{d_0} z^{-M} \right].
 \end{aligned} \tag{10.25}$$

Srovnáme-li rovnice (10.25) s rovnicí (10.7) pak lze dojít k závěru, že přenosová funkce (10.25) patří LTI systému typu FIR, neboli systému s konečnou impulzní charakteristikou. Pro koeficienty impulzní charakteristiky pak platí

$$h(n) = \frac{c_i}{d_0} \delta(n - i - M + N), \quad \text{pro } n = 0, 1, \dots, (2M - N). \tag{10.26}$$

10.5 Realizační možnosti

Pro jednoduchost předpokládejme, že $M = N$ a vezmeme pouze LTI systém 2. řádu, jehož přenosová funkce má tvar

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}. \quad (10.27)$$

Úpravou dostaneme obraz výstupního signálu

$$Y(z)(1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}) = X(z)(c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}).$$

$$Y(z) = c_0 X(z) + c_1 X(z)z^{-1} + c_2 X(z)z^{-2} \quad (10.28)$$

$$- d_1 Y(z)z^{-1} - d_2 Y(z)z^{-2}$$

Po provedení zpětné transformace Z získáme výpočtový algoritmus, na jehož základě je možné určit současnou hodnotu výstupního signálu $y(n)$ diskrétního systému typu IIR prostřednictvím předchozích výstupních hodnot a současných a předchozích vstupních hodnot

$$y(n) = c_0 x(n) + c_1 x(n-1) + c_2 x(n-2) - d_1 y(n-1) - d_2 y(n-2). \quad (10.29)$$

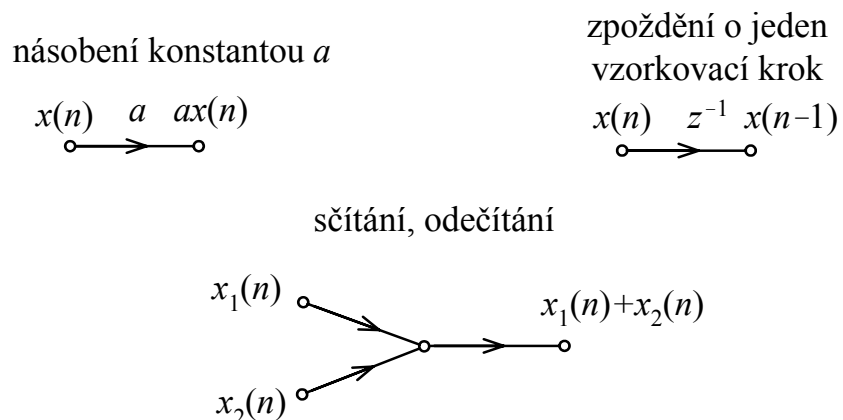
V diferenční rovnici (10.20) bylo využito vlastností transformace Z

$$X(z)z^{-1} \Leftrightarrow x(n-1) \quad X(z)z^{-2} \Leftrightarrow x(n-2). \quad (10.30)$$

Obecný algoritmus, který odpovídá přenosové funkci (10.22) je roven

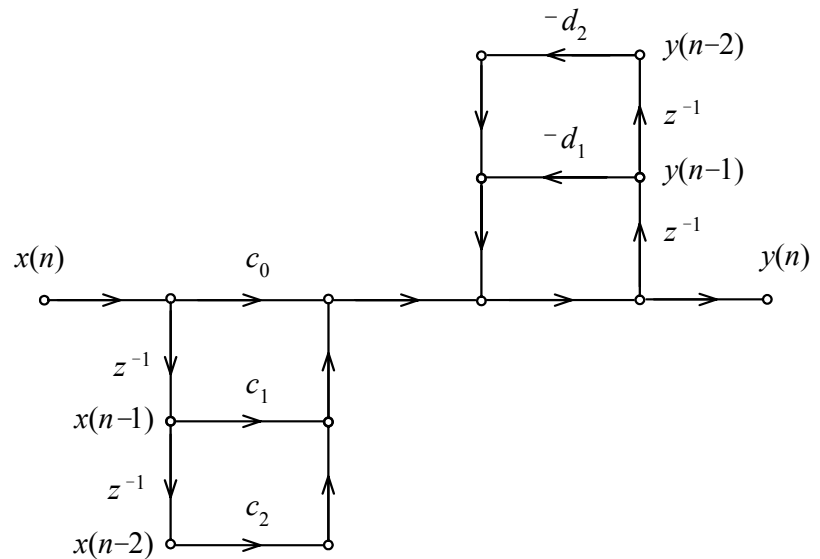
$$y(n) = \sum_{i=0}^M c_i x(n-i) - \sum_{j=1}^N d_j y(n-j). \quad (10.31)$$

Pro postup výpočtu daného algoritmu je vhodné použít graf signálových toků (GST). Souhrn symbolů používaných pro základní operace v LTI systémech je vidět na obr. 10.5.



Obrázek 10.5: Základní operace vyjádřené grafy signálových toků

Na obrázku **Obrázek 10.6** vidíme graf signálových toků algoritmu (10.29). Graf signálových toků na obrázku **Obrázek 10.6** obsahuje zpětné vazby s koeficienty $-d_2$ a $-d_1$, které způsobují, že LTI systém má nekonečnou impulzní charakteristiku (systém typu IIR). Naopak systém typu FIR neobsahuje zpětnovazební členy, ale pouze přímé větve s koeficienty c_0 , c_1 a c_2 , a proto jeho impulzní charakteristika je konečná.



Obrázek 10.6: Graf signálových toků systému IIR druhého řádu

10.6 Kmitočtové charakteristiky

Kmitočtová charakteristika LTI diskrétního systému je definována pomocí jeho ustálené odezvy na harmonický vstupní signál za nulových počátečních podmínek. Jedná se vlastně o ustálenou část partikulárního řešení diferenční rovnice LTI systému při harmonickém buzení.

Pro obraz v transformaci \mathbf{Z} pro výstupní signál platí rovnice (10.21)

$$Y(z) = H(z) X(z). \quad (10.32)$$

Rovnici (10.32) v časové oblasti, tj. po provedení zpětné transformace \mathbf{Z} , odpovídá diskrétní konvoluce

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m). \quad (10.33)$$

Nechť vstupní posloupností je komplexní harmonický signál

$$x(n) = e^{j\omega n} = \cos \omega n + j \sin \omega n. \quad (10.34)$$

Dosadíme-li vstupní signál $x(n)$ do diskrétní konvoluce (10.33), tak obdržíme

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^{\infty} h(m) \cdot e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m) e^{-j\omega m} \\ &= e^{j\omega n} H(e^{j\omega}). \end{aligned} \quad (10.35)$$

Celková ustálená odezva $y(n)$ je rovna součinu původního harmonického vstupního signálu $e^{j\omega n}$ a členu $H(e^{j\omega})$. Tento člen se nazývá komplexní kmitočtová charakteristika:

$$H(e^{j\omega}) = \operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\} + j \operatorname{Im}\{H(e^{j\omega})\} = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (10.36)$$

Funkce $M(\omega)$ značí modulovou kmitočtovou charakteristiku a funkce $\varphi(\omega)$ je fázová kmitočtová charakteristika. $\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\}$ představuje reálnou část komplexní kmitočtové charakteristiky a $\operatorname{Im}\{H(e^{j\omega})\}$ je imaginární část komplexní kmitočtové charakteristiky.

Ustálená odezva LTI diskrétního systému na harmonický vstupní signál je také harmonický signál se stejnou periodou jako vstupní signál, ale s amplitudou a fází určenou LTI systémem. Kmitočtová charakteristika $H(e^{j\omega})$ je periodická s periodou 2π :

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+k2\pi)}), \quad (10.37)$$

k je celé číslo.

Příklad 10.1: *Systém prvního řádu*

Diskrétní LTI systém může být popsán lineární diferencí rovnicí s konstantními koeficienty 1. řádu ve tvaru:

$$y(n+1) = -d_0 y(n) + c_0 x(n), \quad (10.38)$$

kde $y(n)$ je výstupní signál, $x(n)$ je vstupní signál a koeficienty jsou c_0 a d_0 . K řešení této diferencí rovnice použijeme transformaci Z

$$z(Y(z) - y(0)) = -d_0 Y(z) + c_0 X(z), \quad (10.39)$$

když jsme použili obraz první diference z vlastností transformace Z

$$y(n+1) \Leftrightarrow z(Y(z) - y(0)), \quad (10.40)$$

kde $y(0)$ je počáteční podmínka pro $n = 0$. Dále již víme, že obrazy vstupního a výstupního signálu v transformaci Z jsou

$$y(n) \Leftrightarrow Y(z) \quad \text{a} \quad x(n) \Leftrightarrow X(z). \quad (10.41)$$

Další úpravou rovnice (10.39) dostaneme

$$Y(z) = \frac{c_0}{z + d_0} x(z) + \frac{z}{z + d_0} y(0). \quad (10.42)$$

Přenosová funkce systému je

$$H(z) = \frac{c_0}{z + d_0}. \quad (10.43)$$

Příklad 10.2: *Hanojská věž*

Řešení diferencí rovnice ve tvaru (10.29) lze také použít pro řešení algoritmů v informatice. Např. známá Hanojská věž je definována diferencí rovnicí

$$y(n+1) = 2y(n) + 1, \quad y(0) = 0. \quad (10.44)$$

Porovnáme-li tuto diferencí rovnicí s tvarem (10.38) vidíme, že platí $d_0 = -2$, $c_0 = 1$ a vstupní signál $x(n) = 1(n)$ je posloupností jednotkového skoku, který má obraz $X(z) = \frac{z}{z-1}$.

Obraz výstupního signálu pak je

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{c_0}{z + d_0} x(z) + \frac{z}{z + d_0} y(0) \\ &= \frac{1}{z-2} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2} \cdot 0 \\ &= \frac{z}{(z-2)(z-1)}. \end{aligned} \quad (10.45)$$

Pomocí zpětné transformace \mathbf{Z} získáme výsledek

$$y(n) = 2^n - 1 \quad . \quad (10.46)$$

Příklad 10.3: *Algoritmus*

Algoritmus pro výpočet sumy prvních n přirozených čísel lze také zapsat ve formě diferenční rovnice LTI diskrétního systému

$$y(n+1) = y(n) + (n+1), \quad y(0) = 0 \quad (10.47)$$

Porovnáme-li opět tuto diferenční rovnici s rovnicí (10.38) vidíme, že

$$d_0 = -1, \quad c_0 = 1, \quad x(n) = (n+1). \quad (10.48)$$

Obraz $x(n)$ v transformaci \mathbf{Z} je roven

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} \quad . \quad (10.49)$$

Dosazením do rovnice (10.42) získáme obraz výstupního signálu

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{c_0}{z+d_0} X(z) + \frac{z}{z+d_0} y(0) \\ &= \frac{1}{z-1} \left(\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} \right) + 0 \\ &= \frac{z}{(z-1)^3} + \frac{z}{(z-1)^2} \quad . \end{aligned} \quad (10.50)$$

Pomocí zpětné transformace \mathbf{Z} s využitím residuové věty dostaneme výsledek

$$y(n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad . \quad (10.51)$$

V tabulce 10.1 vidíme součty prvních n přirozených čísel pro $n = 0, 1, \dots, 9$.

Tabulka 10.1: Součty přirozených čísel

| | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y(n)$ | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 |

Příklad 10.4: *Harmonický ustálený stav*

Systém je popsán přenosovou funkcí

$$H(z) = 2 + 5z^{-1} + 3z^{-2}$$

Nalezněte amplitudu Y_1 a počáteční fázi φ_1 odezvy systému na harmonický signál

$$x(n) = 4 \cos(0,6\pi n + 0,1\pi)$$

Příklad 10.5: *Kmitočtové charakteristiky*

Harmonický signál

$$s(t) = 0,1 \cos(4\pi \cdot 10^3 t + 0,7\pi)$$

byl vzorkován se vzorkovacím kmitočtem 8 kSa/s. Takto získaný signál $x(n)$ byl zpracován číslicovým filtrem s přenosem

$$H(z) = \frac{0,2z}{z-0,6}.$$

Stanovte amplitudu a počáteční fázi odezvy $y(n)$ číslicového filtru.

Příklad 10.6: *Impulzová charakteristika*

Nalezněte impulzovou charakteristiku systému popsaného přenosovou funkcí

$$H(z) = 2 - 5z^{-1} + 3z^{-2}.$$

Impulzová charakteristika je dána zpětnou transformací Z funkce $H(z)$. Zpětný obraz nalezneme tak, že postupně nalezneme zpětné obrazy k jednotlivým členům na pravé straně a pak je sečteme, viz 13.2. Dostaneme tak

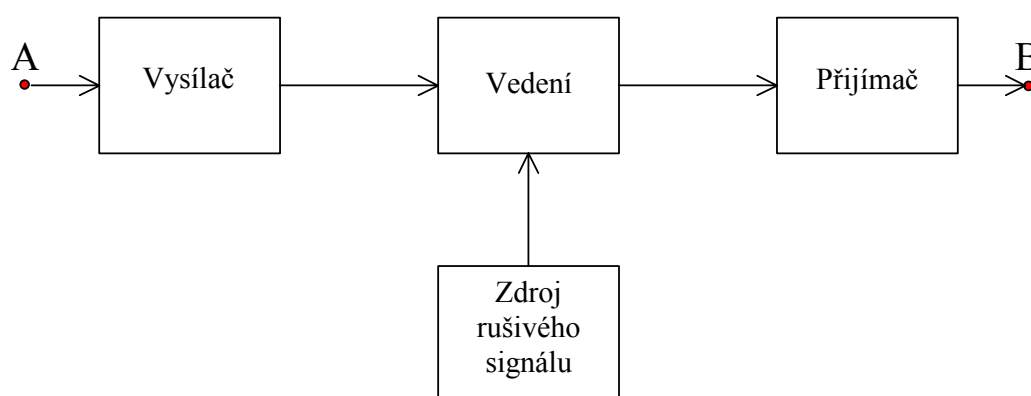
$$h(n) = 2\delta(n) - 5\delta(n-1) + 3\delta(n-2).$$

11 Sdělovací soustava a její charakteristiky

11.1 Sdělovací soustava

Jednosměrná dvoubodová sdělovací soustava je soubor zařízení umožňujících přenos informace z jednoho místa na druhé. V klasických rozhlasových a televizních (broadcast) soustavách se přenáší informace z jednoho místa na více míst. V jiných soustavách se přenáší informace oběma směry současně, například v telefonních systémech. Dílčí prvky sdělovacích soustav mohou být uspořádány do sdělovacích sítí, příkladem jsou počítačové sítě.

Překotný vývoj sdělovací techniky vytvořil řadu sdělovacích soustav, které se vzájemně prolínají. Tak například telefonní hovor se dá uskutečnit pomocí klasické telefonní sítě, systémem ISDN, pomocí internetu, soukromým družicovým spojem, mobilní telefonní sítí. Ve všech těchto systémech se mohou uplatnit nejužnější technické prostředky, například kabelové spoje a rozmanité typy rádiových spojů.



Obrázek 11.1: Dvoubodová soustava

Pro jednoduchost se omezíme na jednosměrnou dvoubodovou sdělovací soustavu, která zajišťuje přenos zpráv z místa A na místo B. Základním prvkem systému je sdělovací vedení. Může to být metalické vedení, jako kroucený pár, koaxiální pár, dále pak světlovod a v neposlední řadě také prostředí, kterým se šíří rádiové vlny. Nositelem zprávy v bodě A sdělovací soustavy je nějaký signál. Zpravidla tento signál není způsobilý pro bezprostřední přenos vedením, a tak musí být upravena jeho fyzikální forma, výkonová úroveň, kmitočtová pozice, atd. Například snaha protlačit signál mající formu časově proměnného akustického tlaku dvojicí měděných vodičů asi nemá moc velkou naději na úspěch. Po převedení akustického signálu na elektrický v mikrofónu je ale přenos měděnými vodiči možný. Při klasickém rozhlasovém vysílání není výkonová úroveň elektrického signálu vyjadřujícího signál akustický, zpravidla 1mW, postačující a my ji upravujeme na hodnotu řádu kW až MW.

Také kmitočtová pozice akustického signálu není vhodná pro rádiové vysílání, signál by se anténou účinně nevyzářil, navíc, všechny vysílače by různé programy vysílaly ve stejném kmitočtovém pásmu, takže by se jejich signály nedaly jednoduše rozlišit. V některých systémech je proto nutná změna kmitočtové pozice signálu. Uvedená přizpůsobení má na starosti blok označený na obrázku **Obrázek 11.1** jako Vysílač. Přeměny signálu ve vysílači jsou doplněny změnami vnesenými vedením. Ty jsou zpravidla negativní. Dochází například ke změně tvaru spektra a k poklesu výkonové úrovně. Výsledkem je signál na výstupu vedení,

kteřý mnohdy není přímo použitelný, signál v místě B nemá potřebnou fyzikální formu a zpráva nemá potřebné vyjádření.

Blok označený Přijímač proto může mít za úkol upravit výkonovou úroveň signálu, vrátit mu jeho původní kmitočtovou pozici a fyzikální formu, kompenzovat změnu spektra apod. V podstatě bychom měli možnost získat v bodě B téměř přesnou repliku signálu z bodu A, kdyby nebylo posledního bloku v systému označeného v obrázku **Obrázek 11.1** Zdroj rušivého signálu. Zdroj rušivého signálu dodává rušivý signál, který reprezentuje všechny nežádoucí rušivé signály, které se mohou k užitečnému signálu přidružovat ve vedení, ale také v přijímači a případně i ve vysílači. Přítomnost rušivých signálů způsobuje, že přenos v principu nemůže být nikdy ideální, zpráva v místě B nemůže obsahovat na sto procent stejnou informaci, jako zpráva v místě A. Nenechme se tím však deprimovat, známe dost prostředků, jak uvedený jev výrazně potlačit volbou vhodných úprav signálu před vysíláním a vhodnými metodami příjmu.

Sdělovací soustavy také můžeme třídit podle charakteru signálů vyjadřujících zprávy, a to na soustavy analogové a číslicové. Příkladem analogové soustavy je soustava přenášející časově souvislý signál z jednoho místa na druhé. Cílem je, aby se časový průběh signálu v bodě B shodoval s časovým průběhem signálu v bodě A. Znamená to tedy také, že průběh spektrální funkce v bodě B musí být shodný se spektrální funkcí v bodě A. Nesmí tedy docházet ke změně tvaru spektra. Ve většině sdělovacích soustav připouštíme, aby signál v bodě B byl opožděn oproti signálu v bodě A. Pak tedy musí být sdělovací soustava lineární a musí mít charakteristiky ideálního zpožďovacího článku (4.2). Pokud by soustava nebyla přesně lineární, docházelo by k obohacení spektra novými složkami, a to by se projevovalo tzv. nelineárním zkreslením. Nelineární zkreslení se kvantitativně popisuje činitelem nelineárního zkreslení. Na zkreslení můžeme nahlížet jako na rušení koherentní s přenášeným signálem. Dalším požadavkem na soustavu určenou k přenosu analogových signálů je nepřítomnost rušivých signálů nekoherentních s přenášeným signálem v místě B. Ani tento požadavek nemůže být splněn stoprocentně, a tak se zpravidla předepisuje určitý odstup mezi výkonem užitečného signálu a výkonem rušivých signálů. Odstup se vyjadřuje v dB. Bez nároků na obecnou platnost lze říci, že vyhovující kvalitě odpovídají hodnoty asi od 40 dB.

Sdělovací soustavu přenášející časově spojitý signál tedy popisujeme následujícími charakteristikami:

- kmitočtovými charakteristikami,
- činitelem nelineárního zkreslení,
- odstupem signál-šum (signal-to-noise ratio).

Kmitočtové charakteristiky někdy zjednodušeně vyjadřujeme šířkou kmitočtového pásma propustnosti. Její hodnoty leží nejčastěji v rozmezí od stovek Hz do desítek MHz.

Jiná je situace u soustavy přenášející zprávy ve formě posloupnosti binárních číslic. Zde nám na zachování tvaru signálu tak moc nezáleží. Jde jen o to, aby se z tvaru přijatého signálového prvku dalo rozeznat, zda představuje nulu nebo jedničku. U vyspělejších systémů stačí, když jsme schopni identifikovat skupiny po sobě jdoucích signálových prvků. V tomto případě nároky na kmitočtové charakteristiky sdělovací soustavy jsou méně přísné.

Sledovaným parametrem číslicové sdělovací soustavy je přenosová rychlost, počet binárních prvků přenesených za sekundu (bit rate). V praxi používané přenosové rychlosti jsou velmi rozmanité, nejčastěji v rozmezí od jednotek bitů za sekundu až po 10Gb/s (10Gb/s Ethernet standard: IEEE 802.3ae). Nároky uživatelů na přenosovou rychlost neustále rostou. V podstatě by byly splnitelné bez problémů, pokud by nebylo bloku Zdroj rušivých signálů v

obrázku **Obrázek 11.1**. Rušivé signály způsobují, že některé prvky zpráv nejsou přeneseny správně, dochází k občasné záměně nul a jedniček. V řadě aplikací to vyvolává nemilé problémy, kterým čelíme různými metodami. Výskyt chyb v přijaté zprávě popisujeme veličinou nazývanou pravděpodobnost chybného příjmu. Tu můžeme teoreticky spočítat. Odhadem pravděpodobnosti chybného příjmu je relativní počet chybných bitů v přijaté zprávě. Ten se nazývá chybovost, chybová rychlost (bit error rate, BER). Může být získán měřením. Obvyklé hodnoty veličiny BER nejsou větší, než 10^{-3} , ale mohou být i mnohem menší, např. 10^{-13} .

Sdělovací soustava přenášející číslicový signál tedy může být popsána následujícími veličinami:

- přenosová rychlost,
- chybovost.

Při podrobnějších analýzách nás zajímá i rozložení chyb v čase. Pro řadu sdělovacích soustav je charakteritické, že v některých úsecích mají velmi nízký výskyt chyb, v jiných, zpravidla krátkých, úsecích se chyby vyskytují hojně.

U přenosu analogových signálů i u přenosu číslicových signálů je sledována i časová stálost parametrů sdělovací soustavy.

Z hlediska třídění na analogové a číslicové jsou skutečné sdělovací systémy často systémy smíšenými. Navenek jsou analogové, ale jako svou součást obsahují číslicovou sdělovací soustavu. Když například telefonujeme přes pevnou linku, je signál jako analogový přiveden do ústředny, kde je převodníkem A/D převeden na číslicový signál. Ten je digitální sítí přenesen k ústředně nejbližší volanému. Zde se převodníkem D/A signál přemění z číslicového na analogový a v analogové podobě je přiveden do telefonního přístroje volaného účastníka.



Obrázek 11.2: Smíšená soustava

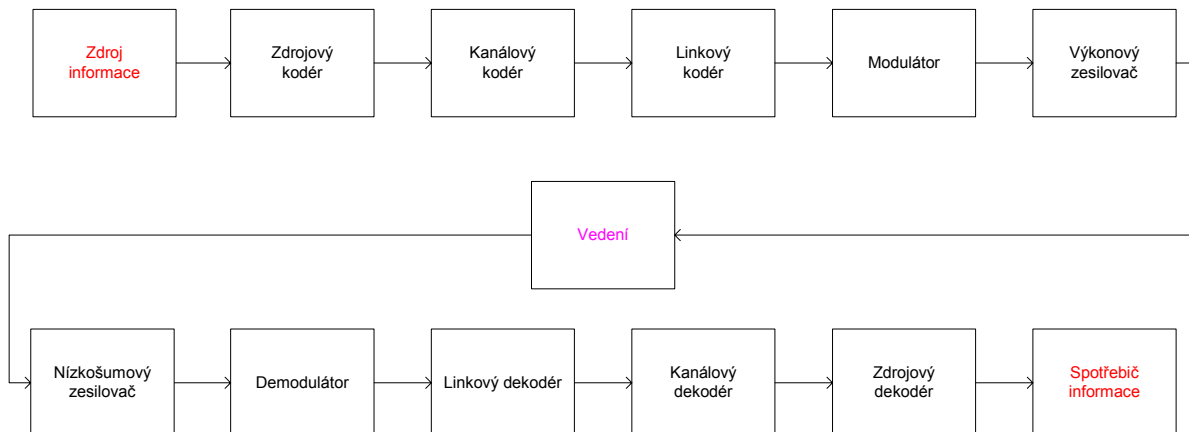
V současné praxi podíl číslicových systémů nezadržitelně narůstá. Pokud je primární signál číslicový, je i sdělovací systém číslicový. Pokud je primární signál analogový, takže přímé použití číslicového sdělovacího systému není možné, převede se analogový signál na číslicový převodníkem A/D (**Obrázek 11.2**). Pak již je použití číslicového sdělovacího systému možné. Máme tedy všechny důvody zabývat se přednostně číslicovými sdělovacími systémy a signály v nich používanými.

Podrobnější schéma číslicové sdělovací soustavy nalezneme na obrázku **Obrázek 11.3**. Skutečný systém nemusí obsahovat právě ty bloky, které jsou nakresleny na obrázku, může jich mít méně, může obsahovat některé jiné bloky, funkce bloků může být provázaná. Popíšeme si funkce jednotlivých bloků z obrázku **Obrázek 11.3**.

Zdroj informace dodává číslicový signál v primární podobě. Primární zpráva může být zbytečně dlouhá. Proto se snažíme zprávy vhodným způsobem zkrátit.

Uživatelé počítačů používají tzv. kompresi velkých souborů před jejich přenosem nebo uložením do paměti. Komprese využívá chytré algoritmy, které zmenšují rozsah souboru a přitom zachovávají možnost tzv. dekompresí získat soubor původní. My se zde jednotlivými

algoritmy nebudeme zabývat, jen si řekneme, že kromě bezeztrátové komprese existuje i komprese ztrátová, která je spojena se snesitelnou ztrátou informace. Komprimace zprávy je úkolem bloku Zdrojový kodér (**Obrázek 11.3**). Zdrojový dekodér má úlohu opačnou, obnovuje ze zkrácené zprávy její původní znění. Zdrojové kódování se používá u vyspělých sdělovacích systémů pro přenos či záznam obrazu a zvuku. Zkracování zpráv odstraňováním nadbytečnosti má velký význam, protože přenesení či záznam každého bitu stojí nějaké peníze, trvá určitou dobu.



Obrázek 11.3: Číslicová sdělovací soustava

Zpráva dodaná zdrojem informace je více či méně citlivá na chyby. Chyby mění znění zprávy, která je pak zkreslenou nebo i zcela nepoužitelnou. Zvláště citlivé na chyby jsou zprávy na výstupu zdrojového kodéru. Vzhledem k tomu, že se výskytu chyb ve sdělovací soustavě nikdy nevyhneme, je obvykle efektivní použít zabezpečovací kód. Kanálový kodér zprávu prodlouží, zvětší počet bitů ve zprávě, a to tak, že v přijaté a rozumným počtem chyb poškozené zprávě je možné chyby buď zjistit, nebo dokonce i opravit. Zjišťování chyb nebo jejich opravování zajišťuje Kanálový dekodér (**Obrázek 11.3**). Zjišťování chyb vyžaduje zpravidla přidání jen malého počtu bitů. Po zjištění chyby se zpětným kanálem vyžaduje opakování zprávy. U systémů bez zpětných kanálů používáme opravné kódy, které však mohou prodlužovat délku zprávy dost výrazně, například o 100% původní délky. Ukazuje se, že použití zabezpečujících kódů je zpravidla efektivní a je levnější než zvýšení výkonu vysílače, je-li vůbec přípustné, položení nového sdělovacího kabelu nebo vynesení nové družice na oběžnou dráhu.

Posledním kodérem je Linkový kodér (**Obrázek 11.3**). I on způsobuje určité prodloužení zprávy, zpravidla ne příliš významné. Má za úkol zajistit dvě věci:

- aby vysílaný signál neobsahoval stejnosměrnou složku a
- aby se ve vysílaném signálu nevyskytovaly dlouhé úseky beze změn.

První požadavek vyplývá z toho, že sdělovací systém zpravidla neumí přenést stejnosměrnou složku signálu. Druhý požadavek plyne z toho, že demodulátor musí znát časový rastr přijímaného signálu. Jinak řečeno, v místě příjmu musí být obnoven takt binárního signálu v základním pásmu. Příjímač musí vědět, ve kterém časovém intervalu se nachází který signálový prvek. Z krátkého úseku přijímaného signálu to nemusí být tak úplně jasné, protože signál bývá lineárně zkreslen a navíc se k němu připojil aditivní šum. Aby se měl obvod pro obnovení taktu čeho chytat, musí se v přijímaném signálu přiměřeně často

vyskytovat změny. Převvedeno do roviny přenášených symbolů, zpráva nesmí obsahovat dlouhé série nul, nebo dlouhé serie jedniček.

Modulátor (**Obrázek 11.3**) má za úkol posunout spektrum signálu po kmitočtové ose. Až na jednu výjimku se nejedná o jednoduché posunutí, ale o složitější úpravu signálu, spojenou se změnou tvaru jeho spektra a zpravidla i se zvětšením šířky spektra. Zvětšení šířky spektra modulací je nežádoucí, a proto se hledají modulace s malými šířkami spektra. To však není jediné kritérium. Požadujeme také, aby modulovaný signál, signál na výstupu modulátoru, byl odolný vůči rušení, aby nebyl citlivý na aditivní šum. U zařízení napájených z baterií se ještě žádá, aby modulovaný signál měl malý poměr špičkového výkonu a středního výkonu. Požadavky nejsou malé. Proto se nelze divit, že jsou moderní způsoby modulace složité.

Úlohu opačnou k modulátoru má demodulátor. Demodulátor (**Obrázek 11.3**) vrací signál do původní kmitočtové pozice. Pro jeho efektivní práci může být užitečná i informace o kmitočtu a počáteční fázi harmonického modulačního signálu použitého v modulátoru. Informace je zpravidla získávána přímo z přijatého signálu, který se ovšem díky modulaci, lineárnímu zkreslení a aditivnímu šumu harmonickému signálu moc nepodobá. V našem obrázku plní demodulátor i další úlohu, na základě přijatého průběhu signálu rozhoduje, zda přijatým symbolem je nula, nebo jednička, viz 11.2.4, k tomu potřebuje výše zmíněnou informaci o taktu, o časovém rastru.

11.2 Přenos v základním pásmu

V tomto odstavci se budeme zabývat číslicovými signály z hlediska jejich přenosu v základním pásmu, tedy bez použití modulace a demodulace.

11.2.1 Binární signál

Příklad binárního signálu naleznete na obrázku 1.5. Necht' jsou u tohoto signálu jedničky zobrazeny kladnými impulzy a nuly impulzy zápornými. Pak na obrázku znázorněný signál představuje zprávu 01000110. Tento typ signálu je vhodný pro dálkové přenosy, protože při stejném počtu jedniček a nul ve zprávě má signál nulovou stejnosměrnou složku. Méně výhodné jsou jeho spektrální vlastnosti. Strmé hrany impulzů znamenají velkou šířku spektra. Proto se v praxi většinou signálové prvky tvarují speciálními filtry, jak se ostatně dozvíme později, 11.2.5.

11.2.2 Čtyřstavový signál

Snaha zvýšit přenosovou rychlost nás přivedla k používání vícestavových signálů. Příklad čtyřstavového signálu naleznete na obrázku **Obrázek 11.4**.

V daném případě jsou pomocí dvou výšek impulzů a dvou polarit vyjádřeny dvojice bitů (dibity) 00, 01, 10 a 11. Přenášená zpráva má znění 0110001110 a obsahuje celkem deset bitů. Kdybychom chtěli použít binární signál, stejnou dobu trvání zprávy a stejný celkový počet bitů, museli bychom pracovat s poloviční šířkou impulzů. Poloviční šířka impulzů ale v podstatě znamená zdvojnásobení praktické šířky spektra oproti praktické šířce spektra čtyřstavového signálu.

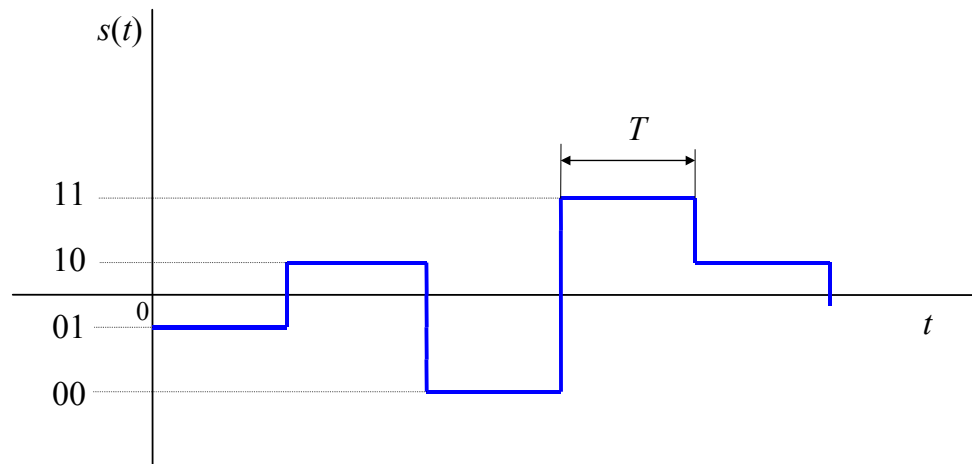
Pro praktickou šířku spektra není přímo určující přenosová rychlost, ale šířka impulzů a s ní svázaná modulační rychlost (modulation rate):

$$M = \frac{1}{T}. \quad (11.1)$$

Udává se baudech (Bd). Modulační rychlost M je s přenosovou rychlostí R svázána vztahem

$$R = M \log_2 Q, \quad (11.2)$$

kde Q je počet možných stavů signálu.



Obrázek 11.4: Čtyřstavový signál

Uvedené pojmy a jednotky se v praxi mnohdy zaměňují, používají se nesprávně buď z nedostatku pečlivosti, nebo dokonce i záměrně, s cílem vytvořit příznivější obraz prodávaného zařízení. Je však třeba říci, že např. v systémech s kódováním jisté názvoslovné problémy objektivně existují.

Pro binární signál je modulační rychlost číselně rovna přenosové rychlosti.

Použití víceúrovňových signálů je limitováno úrovní rušení, protože při stejném středním či špičkovém výkonu signálu jsou dva prvky lépe vzájemně rozeznatelné než 4 a více prvků.

Čtyřstavový signál v základním pásmu se označuje 2B1Q a používá se například na účastnických přípojkách úzkopásmové ISDN.

11.2.3 Šířka spektra

11.2.3.1 Definice šířky pásma

Většina sdělovacích kanálů má charakter dolní propusti nebo pásmové propusti. Parametr, který nejjednodušším způsobem popisuje kmitočtovou charakteristiku dolní nebo pásmové propusti, je šířka kmitočtového pásma propustnosti. Ta se nejčastěji definuje pomocí bodů 3 dB poklesů na okrajích pásma propustnosti.

Šířka kmitočtového pásma propustnosti nedává úplný popis kmitočtových charakteristik kanálu a proto neexistuje jednoznačný přesný vztah mezi šířkou pásma a modulační rychlostí. Abychom získali alespoň přibližný vztah, budeme uvažovat ideální dolní propust s šířkou pásma propustnosti B [Hz]. Šířka pásma propustnosti B je u dolní propusti rovna hornímu meznímu kmitočtu f_h propusti.

11.2.3.2 Modulační rychlost a šířka pásma

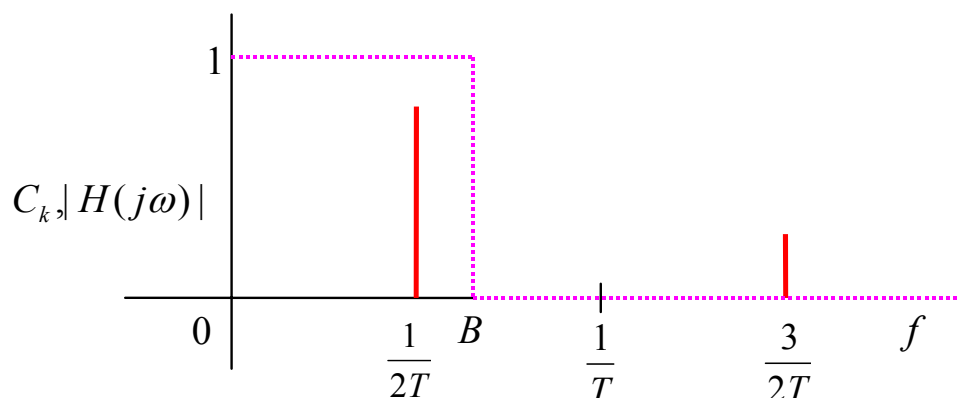
Jako binární signál si zvolíme signál NRZ dvojí polarity. Nejširší spektrum bude mít signál při přenosu periodické binární posloupnosti 01010101..... . Bude tvořeno lichými harmonickými složkami s kmitočty

$$f_k = k f_1, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \quad (11.3)$$

kde základní kmitočet

$$f_1 = \frac{1}{2T}. \quad (11.4)$$

Zvolíme-li dobu trvání signálového prvku T dostatečně velkou, bude několik harmonických složek binárního signálu ležet uvnitř kmitočtového pásma propustnosti. Odezva dolní propusti na vysílaný binární signál bude blízka obdélníkovému průběhu.

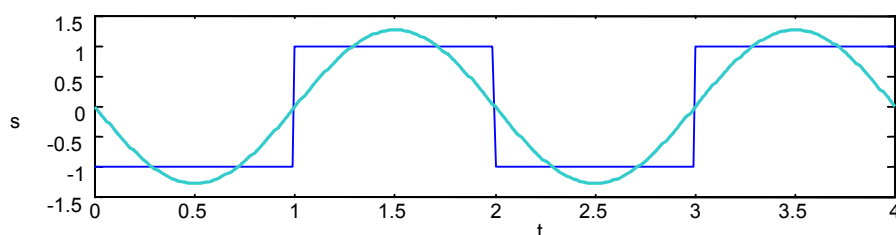


Obrázek 11.5: Spektrum amplitud a přenosová funkce

Postupným zvětšováním přenosové rychlosti (a tudíž zmenšováním doby T trvání signálového prvku) může být dosaženo stavu (**Obrázek 11.5**, **Obrázek 11.6**), kdy bude

$$f_1 < B < 3f_1. \quad (11.5)$$

V tomto případě bude odezvou ideální dolní propusti právě základní harmonická složka budoucího NRZ signálu. Tato odezva nám ještě umožňuje rozeznat, ve kterém časovém intervalu byla vysílána nula a ve kterém byla vysílána jednička.



Obrázek 11.6: Signál před a za dolní propustí

Další postupné zvyšování přenosové rychlosti nás dovede k meznímu stavu, kdy bude $f_1 = B$, tj., kdy bude modulační rychlost vázána na šířku pásma jednoduchým vztahem

$$M = 2B. \quad (11.6)$$

Pokud bychom tuto hranici překročili, tj. pokud by bylo $M > 2B$, za dolní propustí by již nebylo nic, přenos signálu a tudíž i přenos informace by skončil.

Vztah (11.6) je nutno chápat jako první přiblížení, i když mnohdy zcela postačující, při základních systémových úvahách. U skutečných kanálů může být dosažitelná přenosová rychlost ovlivněna úrovní rušení, nelineárním zkreslením, průběhem celé kmitočtové

charakteristiky, zejména však nelinearitou fázové kmitočtové charakteristiky uvnitř pásma propustnosti.

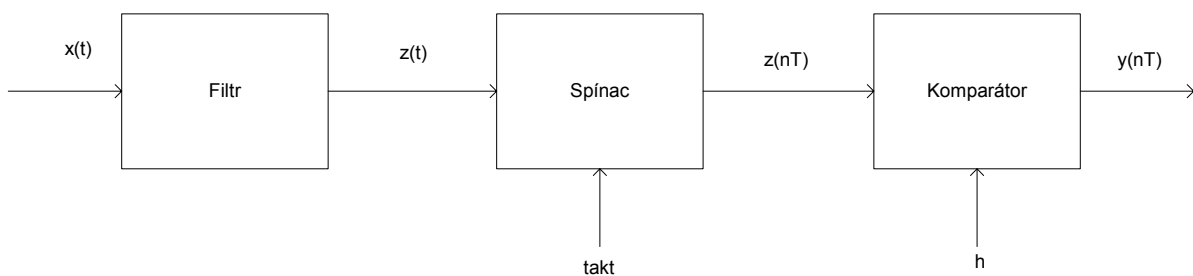
Přenos číslicových signálů sdělovacím kanálem je spojen s řadou navzájem provázaných problémů. Jsou to zejména aditivní rušení, mezisymbolové přeslechy jako důsledek konečné šířky pásma propustnosti kanálu, nedokonalost taktové synchronizace. My se při jejich popisu zpočátku budeme snažit nahlížet na ně jako na problémy vzájemně izolované a ukážeme si na obvyklá řešení prvních dvou problémů pro binární signál.

11.2.4 Signál a rušení

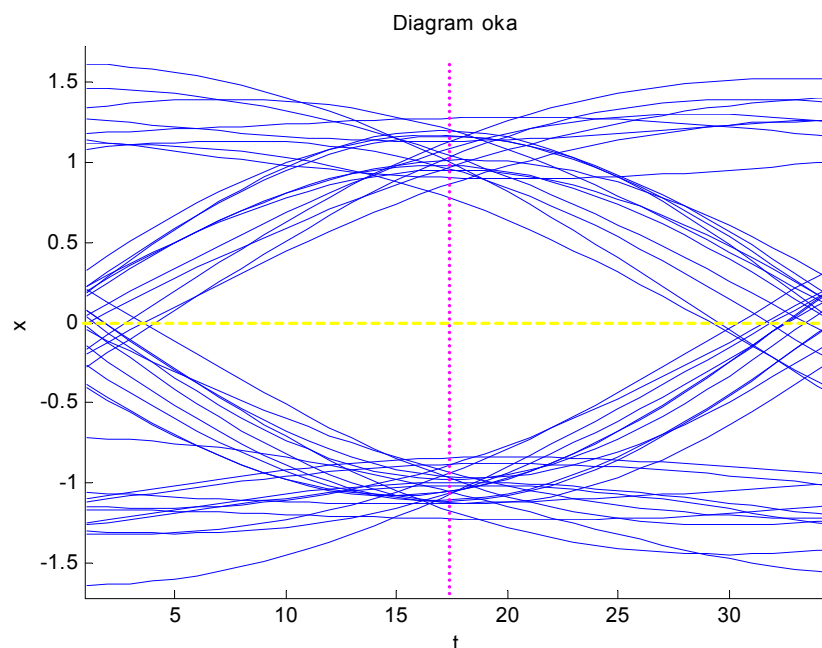
Začneme s problémem přenosu binárního signálu v základním pásmu (baseband channel) kanálem s rušením. Budeme předpokládat, že je znám tvar signálových prvků, a že je známa jejich pozice na časové ose. Detekovat budeme každý prvek zvlášť (single-symbol detection). Systém pro rozpoznávání binárních signálových prvků je znázorněn na obrázku **Obrázek 11.7**. Předpokládáme, že signál $x(t)$, signál na vstupu systému, je dán následujícím vztahem:

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad (11.7)$$

kde $s(t)$ je užitečný signál a $n(t)$ je rušivý signál, šum.



Obrázek 11.7: Příjem binárního signálu



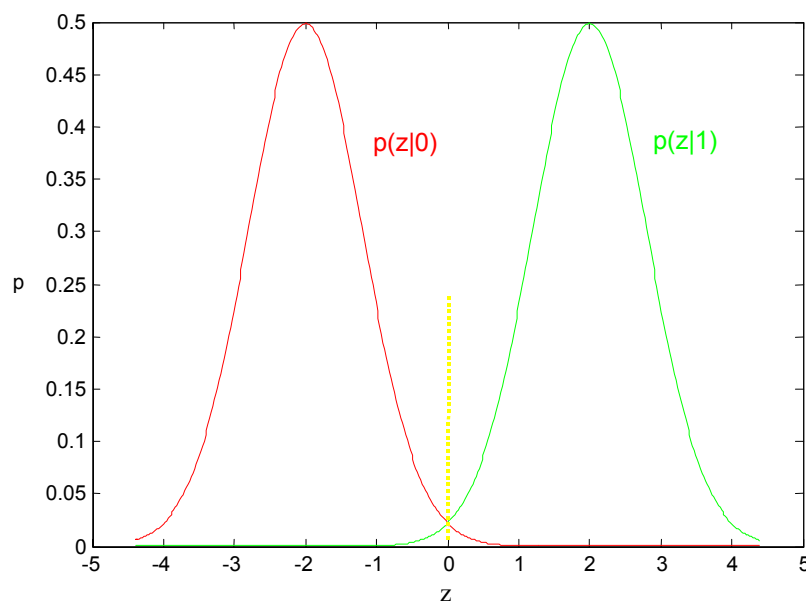
Obrázek 11.8: Diagram oka

Signál $x(t)$ je nejprve upraven filtrem. Ten má za úkol potlačit rušivou složku signálu a zvýraznit užitečnou složku signálu tak, aby bylo usnadněno rozhodování v následující části obvodu. Příklad signálu z výstupu filtru je nakreslen na obrázku **Obrázek 11.8**. Je na něm nakreslen časový úsek odpovídající době trvání T jednoho signálového prvku a modrými křivkami několik průběhů signálu, tak jak by je zobrazil osciloskop s příslušně nastavenou periodikou základnou. Žlutou čarou je znázorněna rozhodovací hladina h , svislou fialovou čárkovanou čarou je vyznačen okamžik, ve kterém jsou odebírány vzorky.

Spínač (**Obrázek 11.7**) je spínán v okamžicích rozhodnutí a odebírá vzorky $z(nT)$ signálu $z(t)$ na výstupu filtru. T je doba trvání signálového prvku. Okamžiky rozhodnutí jsou odvozovány z v přijímači obnoveného taktového signálu. V komparátoru jsou hodnoty $z(nT)$ porovnávány s vhodně volenou hranicí h . Na obrázku jsou hodnoty $z(nT)$ dány průsečíky modrých křivek se svislou fialovou čarou. Pro výstup komparátoru platí

$$y(nT) = \begin{cases} +1 & \text{pro } z(nT) > h \\ -1 & \text{pro } z(nT) \leq h. \end{cases} \quad (11.8)$$

Signál $y(nT)$ je tedy signálem binárním. Rozdělení hodnot signálu $z(nT)$ je popsáno dvěma podmíněnými hustotami pravděpodobnosti, $p(z|0)$ a $p(z|1)$. Jejich příklad naleznete na obrázku **Obrázek 11.9**, kde střední hodnota užitečného signálu při vysílání nuly byla $-2V$, střední hodnota užitečného signálu při vysílání jedničky byla $+2V$ a efektivní hodnota šumu byla $1V$.

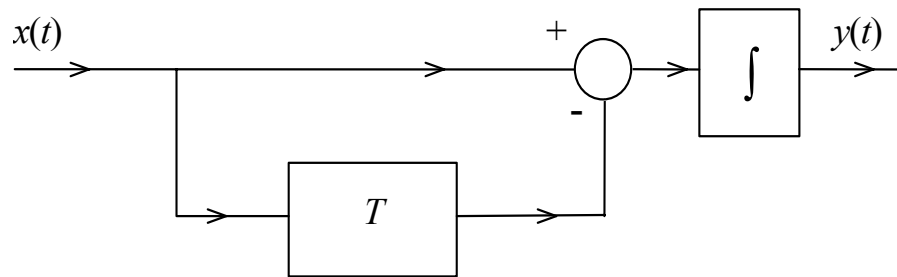


Obrázek 11.9: Podmíněné hustoty

Žlutá čára vyznačuje rozhodovací hladinu $0V$. Je viditelné, že zelená křivka zasahuje do oblasti vlevo od žluté čáry a červená křivka zasahuje napravo od žluté čáry. Tyto dva jevy ukazují, že při přenosu bude občas docházet k chybám.

System na obrázku **Obrázek 11.7** je nakreslen jako analogový, bývá však spíše realizován jako číslicový.

Pokud by užitečná složka přijímaného signálu byla signálem NRZ dvojí polarity a aditivní rušivý signál měl charakter bílého šumu, byl by optimálním filtrem pro příjem signálu filtr s impulzovou charakteristikou ve tvaru jednoho signálového prvku. Filtr je znázorněn na obrázku **Obrázek 11.10**.



Obrázek 11.10: Přizpůsobený filtr

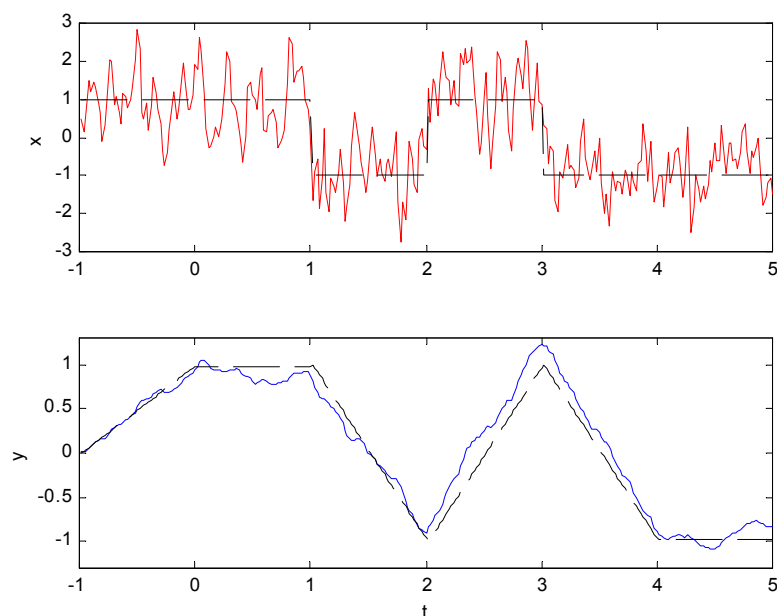
Obrázek **Obrázek 11.11** znázorňuje zpracování zarušeného signálu. Průběhy odpovídající nezarušeným signálům jsou zakresleny černě čárkovaně. Rozhodovací úroveň je 0V, okamžiky rozhodnutí jsou 0s, 1s, 2s, 3s, 4s, 5s, Okamžiky rozhodnutí leží vždy na konci signálového prvku.

Je zřejmé, že pravděpodobnost chyby je velmi malá.

Poznamenejme, že obecně mají tzv. přizpůsobené filtry impulzovou charakteristiku rovnou časově posunutému užitečnému signálu s obrácenou časovou osou. Časovým posunutím se zajišťuje, aby byl filtr kauzální. Vlastnosti přizpůsobených filtrů vyniknou u užitečných signálů se složitým tvarem.

Přizpůsobený filtr je možné s výhodou realizovat jako číslicový.

Poznámka: nejedná se o výkonové či impedanční přizpůsobení, ale o přizpůsobení vlastností filtru zpracovávanému signálu.

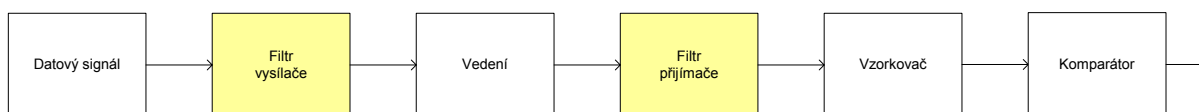


Obrázek 11.11: Signály v přizpůsobeném filtru

11.2.5 Mezisymbolové přeslechy

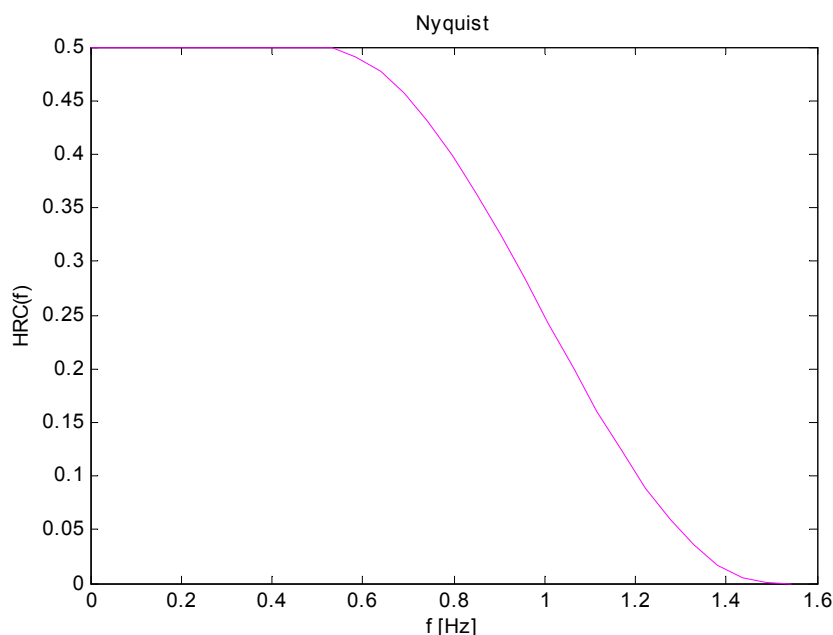
Možné uspořádání sdělovací soustavy s vysílacím filtrem a přijímacím filtrem je nakresleno na obrázku **Obrázek 11.12**. Datový signál je upraven vysílacím filtrem, aby se zmenšila šířka spektra vysílaného signálu. Další lineární zkreslení přenášeného signálu může způsobit blok označený Vedení. Toto zkreslení může být i velmi výrazné a určující. My

budeme předpokládat, že vedení je ideálně širokopásmové, nebo že jsou kmitočtové charakteristiky skutečného bloku Vedení zahrnuty do charakteristik vysílače nebo přijímače. Úkolem přijímače je omezit vliv aditivního rušení. To jsme již ostatně poznali v odstavci 11.2.4.



Obrázek 11.12: Vysílačí a přijímačí filtr

Přítomnost filtrů se projeví tím, že se doba trvání signálových prvků prodlouží. Jednotlivé signálové prvky se budou překrývat v čase, což v obecném případě způsobí, že se v okamžicích rozhodnutí bude uplatňovat nejen aktuální signálový prvek, ale i doznívání či náběh sousedních signálových prvků. Odezvy sousedních signálových prvků se jeví komparátoru (**Obrázek 11.12**) jako signály rušivé a znehodnocují více či méně jeho rozhodování. Pro zmíněné odezvy se používá název mezisymbolové přeslech (intersymbol interference, ISI). Filtrace se vzdát nechceme, nutným důsledkem je prodloužení signálových prvků. Řeší se to tak, že se volí taková filtrace, při které se sice signálové prvky prodlouží, ale právě v okamžicích rozhodování příslušných sousedním signálovým prvkům je jejich odezva na aktuální signálový prvek rovna nule. Filtrace s touto vlastností pak nezavádí mezisymbolové přeslech.



Obrázek 11.13: Kmitočtová charakteristika filtru RC

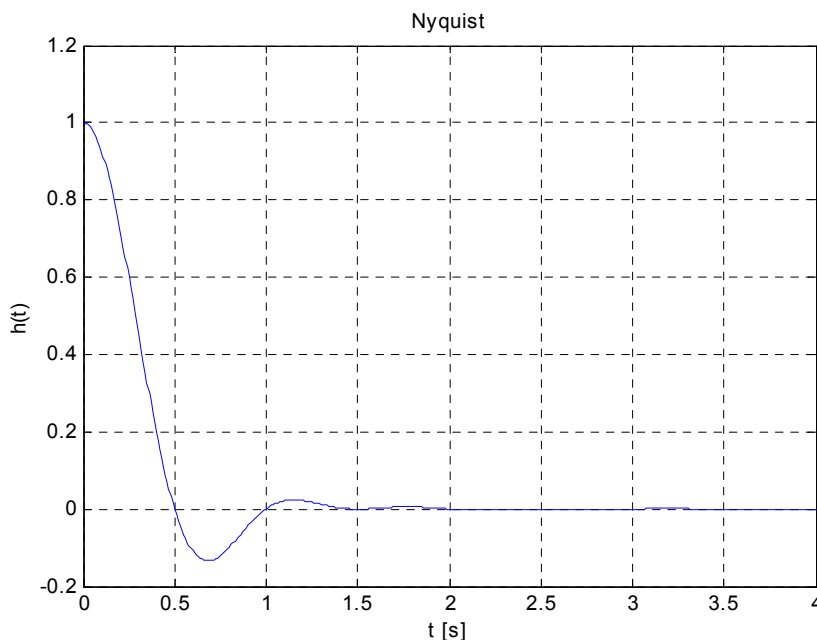
Aby byl popis ideální filtrace jednoduchý, budeme předpokládat, že zdroj datového signálu dodává signálové prvky ve formě jednotkových impulzů. Kaskáda filtru vysílače a filtru přijímače představuje jediný pomyslný filtr s kmitočtovou charakteristikou popsanou rovnicí

$$\begin{aligned}
 H_{RC}(j\Omega) &= 1 && \text{pro } 0 < \Omega < 1 - \alpha, \\
 H_{RC}(j\Omega) &= 0,5 + 0,5 \cos \left[\frac{\Omega - 1 + \alpha}{2\alpha} \pi \right] && \text{pro } 1 - \alpha < \Omega < 1 + \alpha, \\
 H_{RC}(j\Omega) &= 0 && \text{pro } \Omega > 1 + \alpha,
 \end{aligned}
 \tag{11.9}$$

kde Ω je normovaný úhlový kmitočet

$$\Omega = \frac{\omega T}{\pi}.
 \tag{11.10}$$

Pomyslný filtr popsáný rovnicí (11.9) se nazývá Nyquistův filtr, nebo také, podle tvaru kmitočtové charakteristiky, raised-cosine filtr (RC filtr). Symbol α označuje tzv. roll-off faktor. Roll-off faktor nabývá hodnot od 0 do 1 a určuje plynulost přechodu kmitočtové charakteristiky z pásma propustnosti do pásma nepropustnosti, a tím také rozšíření spektra. V USA se v buňkové telefonii používá hodnoty 0,35, v Japonsku 0,5. Hodnota 0,15 se ve spojení s klíčováním 64QAM používá při kabelovém přenosu televizního signálu. Impulzová charakteristika Nyquistova filtru prochází nulami při $t = \dots, -2T, -T, T, 2T, 3T, 4T, \dots$.



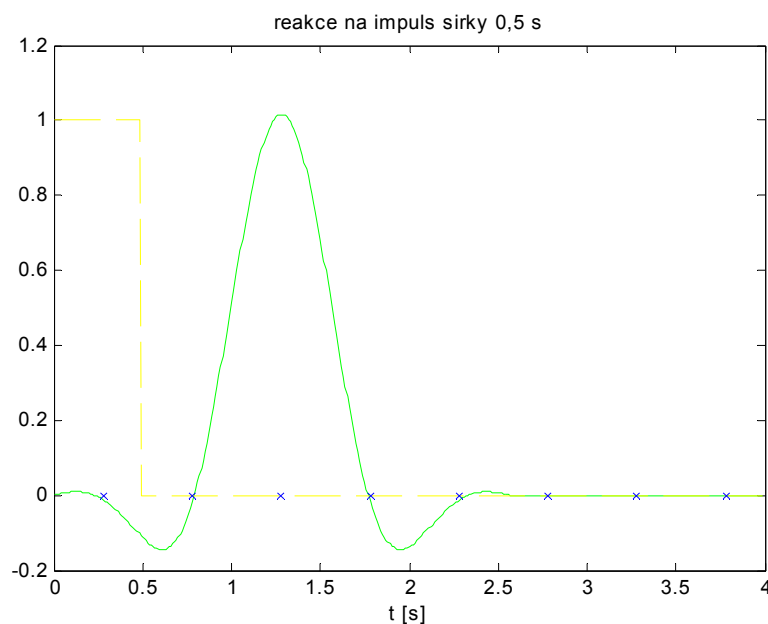
Obrázek 11.14: Impulzová charakteristika filtru RC

Příklad kmitočtové charakteristiky RC filtru je nakreslen na obrázku **Obrázek 11.13**, impulzová charakteristika je znázorněna na obrázku **Obrázek 11.14**. Odezvu filtru na jeden signálový prvek najdete na obrázku **Obrázek 11.15**. Okamžiky rozhodnutí jsou zde označeny symboly x.

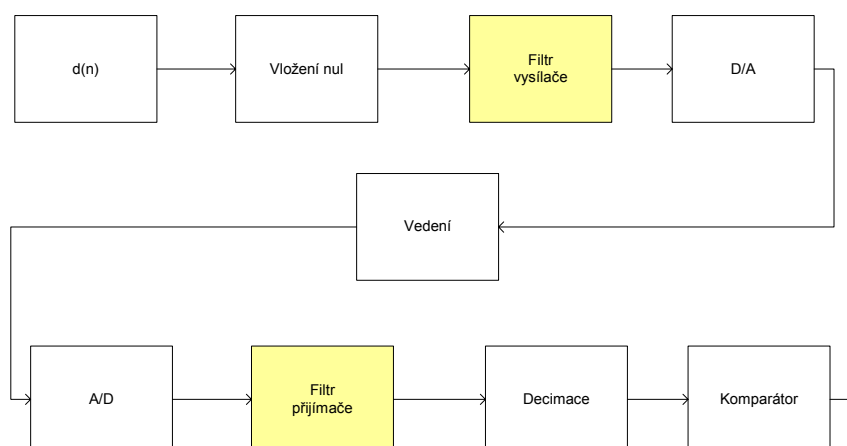
Zpravidla je optimální rozdělit filtrační účinek pomysleného filtru RC mezi vysílací filtr a přijímací filtr. Pak mají filtr vysílače a filtr přijímače stejnou kmitočtovou charakteristiku popsanou vztahem

$$H_{SRRC}(\Omega) = \sqrt{H_{RC}(\Omega)}.
 \tag{11.11}$$

Filtr s touto kmitočtovou charakteristikou se nazývá square root raised-cosine filter (SRRC), half-Nyquist, případně root Nyquist. Používá se mnoha sdělovacích soustavách.



Obrázek 11.15: Odezva na signálový prvek



Obrázek 11.16: Číslicová filtrace

Číslicová realizace obou filtrů je znázorněna na obrázku **Obrázek 11.16**. Datový signál $d(nT)$ má formu číslicového signálu. Vložení $M-1$ nul mezi každé dva prvky posloupnosti $d(nT)$ je získána posloupnost $d(mT_{vz})$, kde $T_{vz} = T/M$. Při rozumně velkých hodnotách M představuje signál $d(mT_{vz})$ sérii diskrétních jednotkových impulzů, násobených hodnotami prvků posloupnosti $d(nT)$. Tím jsou vytvořeny dobré podmínky pro konstrukci a činnost číslicového vysílacího filtru. Jeho impulzovou charakteristiku $h(mT_{vz})$ můžeme získat navzorkováním významné části impulzové charakteristiky analogového square root raised - cosine filtru, navrženého pro modulační rychlost $1/T$. Číslicový square root raised - cosine filtr vyplní mezery mezi impulzy v signálu $d(mT_{vz})$ plynule se měnícími čísly. Posloupnost čísel produkovaná vysílacím filtrem je přeměněna převodníkem D/A na elektrický signál, který je transportován dál. Za blokem Vedení je elektrický signál opět převeden na posloupnost čísel převodníkem A/D pracujícím se vzorkovacím intervalem T_{vz} . Číslicový signál je zpracován

číslicovým filtrem přijímače. Signál na výstupu filtru je vzorkován se vzorkovacím intervalem T . Tento postup vede ke zmenšení počtu prvků v posloupnosti a nazývá se decimace. Vzorky jsou vyhodnoceny číslicovým komparátorem, který na svém výstupu dává binární posloupnost představující zprávu.

Příklad 11.1: Přenosová rychlost

Binární zpráva je přenášena binárním signálem. Doba T trvání signálového prvku je $2,083 \cdot 10^{-4}$ s. Jaká je přenosová rychlost R a jaká je modulační rychlost M .

Příklad 11.2: Modulační rychlost

Binární zpráva je přenášena čtyřstavovým signálem. Přenosová rychlost $R = 9,6$ kbit/s. Jaká je modulační rychlost M ?

12 Signály pro přenos v přeloženém pásmu

12.1 Analogové modulace

Modulace je ovlivňování parametru nosného signálu signálem modulačním. V našem případě je nosným signálem harmonický signál

$$s_c(t) = S_c \cos(\omega_c t + \varphi_c). \quad (12.1)$$

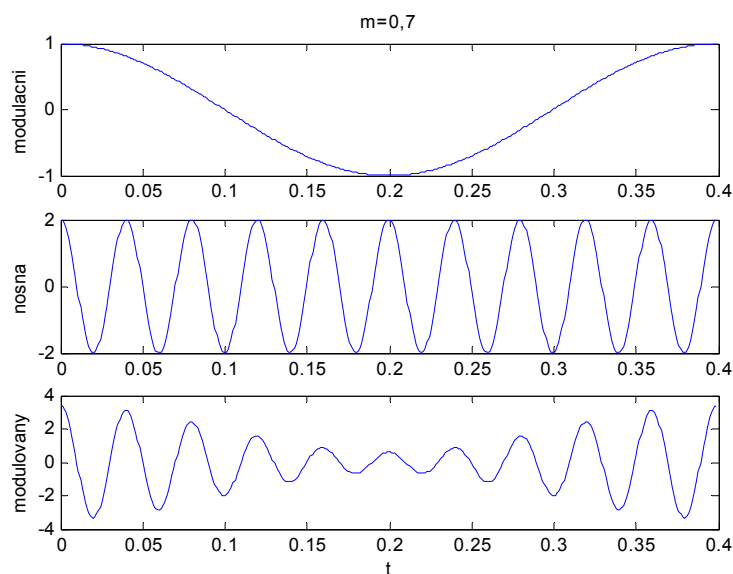
Signál má tři parametry. Amplitudu S_c , úhlový kmitočet ω_c a počáteční fázi φ_c . Tomu odpovídají tři základní druhy modulací: amplitudová (AM), kmitočtová (FM) a fázová (PM).

Modulační signál je signál v základním pásmu. Může to být například analogový signál z mikrofonu, televizní kamery, nebo číslicový signál v základním pásmu, například signál NRZ dvojí polarity. Je-li modulačním signálem signál číslicový, používáme často pro označení modulace slova klíčování (keying).

12.1.1 Amplitudová modulace

Amplitudově modulovaný signál $s(t)$ je popsán rovnicí

$$s(t) = [S_c + \Delta S f(t)] \cos \omega_c t = S_c [1 + m f(t)] \cos \omega_c t \quad (12.2)$$



Obrázek 12.1: Amplitudová modulace

kde S_c je amplituda nosných kmitů,

ΔS je amplitudový zdvih,

ω_c je úhlový kmitočet nosných kmitů,

t je čas a

$f(t)$ je modulační funkce, normovaný modulační signál,

$$f(t) = \frac{s_{\text{mod}}(t)}{\max |s_{\text{mod}}(t)|}, \quad (12.3)$$

m je hloubka modulace,

$$m = \frac{\Delta S}{S_c}. \quad (12.4)$$

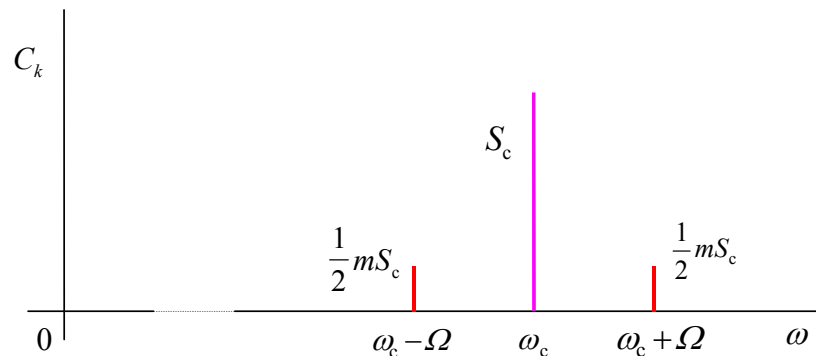
Hloubka modulace u obyčejné amplitudové modulace nabývá hodnot od nuly do jedné. V praxi se udává v procentech.

Pro vyšetření spektrálních vlastností amplitudově modulovaného signálu volíme za modulační funkci funkci harmonickou

$$f(t) = \cos \Omega t. \quad (12.5)$$

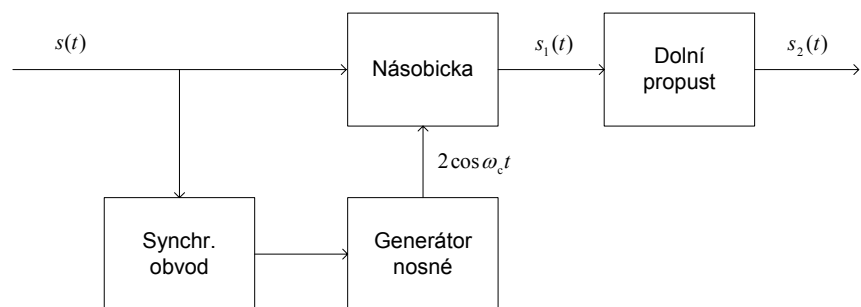
Skutečný modulační signál většinou harmonický nebude. S námi uvažovaným harmonickým signálem se však analýza stává jednoduchou. Její výsledky přitom budou do značné míry obdobné výsledkům, které bychom získali s jinými modulačními signály. Pro modulovaný signál můžeme psát

$$\begin{aligned} s(t) &= S_c [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_c t = \\ &= S_c \cos \omega_c t + \frac{1}{2} m S_c \cos(\omega_c + \Omega)t + \frac{1}{2} m S_c \cos(\omega_c - \Omega)t. \end{aligned} \quad (12.6)$$



Obrázek 12.2: Spektrum AM signálu

V uvažovaném případě tedy modulovaný signál obsahuje 3 harmonické složky: nosnou (harmonickou složku), horní postranní (harmonickou) složku a spodní postranní (harmonickou) složku. Šířka spektra amplitudově modulovaného signálu je rovna dvojnásobku horního mezního kmitočtu spektra modulačního signálu. To platí i při neharmonickém modulačním signálu.



Obrázek 12.3: Součinný demodulátor

Pro demodulaci amplitudově modulovaného signálu můžeme použít součinný demodulátor (viz **Obrázek 12.3**). Signál za násobičkou je popsán rovnicí

$$s_1(t) = \{S_c[1 + mf(t)]\cos \omega_c t\}2 \cos \omega_c t = S_c[1 + mf(t)] + S_c[1 + mf(t)]\cos 2\omega_c t \quad (12.7)$$

Dolní propustí projde pouze signál

$$s_2(t) = S_c[1 + mf(t)]. \quad (12.8)$$

Po oddělení stejnosměrné složky dostáváme signál shodný, až na velikost, s původním modulačním signálem.

Právě popsaná amplitudová modulace obyčejná se používá při rozhlasovém vysílání na středních a dlouhých vlnách. Konceptně je zastaralá, její úloha při rozvoji oboru však byla obrovská. Levné přijímače umožnily rychlý rozvoj radiotechniky v jejich počátcích. Amplitudová modulace má, oproti signálu v základním pásmu, dvojnásobnou šířku spektra. Ještě horší je, že většina výkonu modulovaného signálu připadá na signál nosný, který se u AM přímo nezúčastňuje přenosu informace. V důsledku toho jsou systémy s obyčejnou AM málo odolné proti rušení.

Obyčejná amplitudová modulace se někdy označuje zkratkou DSB (double-sideband). Částečným nebo úplným potlačením jednoho z postranních pásem nebo nosné můžeme získat nové typy modulací, které již většinou nejsou čistě amplitudové. Podnětem pro zavádění nových modulací byla snaha zúžit spektrum modulovaného signálu a přerozdělit výkon tak, aby jeho podstatná část ležela na postranních pásmech, protože nosná složka se u AM přenosu informace nezúčastňuje.

Modulace SSB (single-sideband) má jen jedno postranní pásmo. Pro případ harmonického modulačního signálu můžeme psát pro modulovaný signál

$$s(t) = S_c \cos \omega_c t + S_1 \cos(\omega_c + \Omega)t. \quad (12.9)$$

Modulace SSB-SC (single-sideband suppressed carrier) má jedno postranní pásmo a úplně potlačenou nosnou:

$$s(t) = S_1 \cos(\omega_c + \Omega)t. \quad (12.10)$$

Šířka spektra modulovaného signálu je stejná, jako šířka spektra signálu modulačního. Veškerý výkon připadá na složky nesoucí informaci. Modulace SSB je tedy relativně výhodná, jak z hlediska šířky spektra, tak i z hlediska odolnosti vůči šumu. Operace realizovaná up-convertorem je v podstatě také modulací SSB.

12.1.2 Kmitočtová modulace

Při kmitočtové modulaci (frequency modulation, FM) je modulačním signálem řízen okamžitý kmitočet modulovaného signálu. Kmitočtová modulace se používá při rozhlasovém vysílání. Šířka spektra je několikrát větší než šířka spektra modulačního signálu. Smiřujeme se s tím, protože kmitočtová modulace má velmi dobrou odolnost proti vlivu rušivých signálů. Pod jistou prahovou hodnotou poměru signál šum, asi 12 dB, však kvalita výstupního signálu demodulátoru prudce klesá. Říká se tomu prahový jev. Kmitočtová modulace se také používá při přenosu televizního signálu přes družici. I o kmitočtové modulaci lze říci, že je konceptně zastaralá a je na ústupu.

12.2 Číslicové modulace

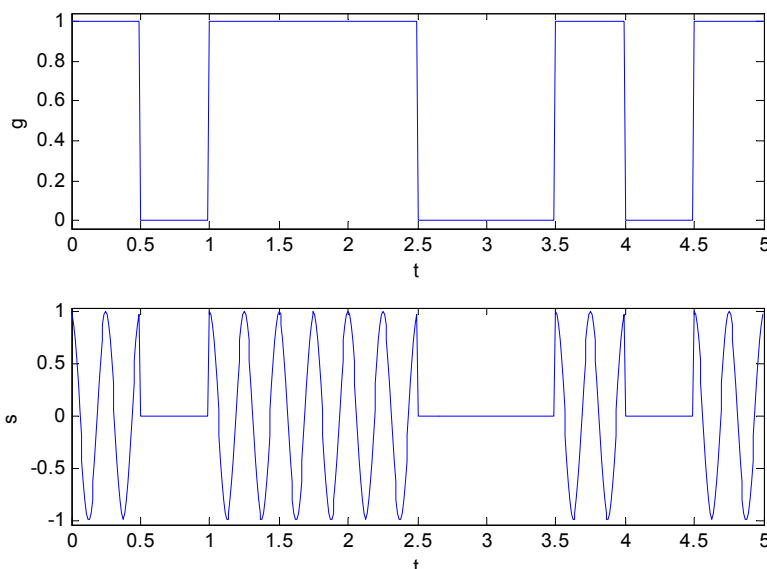
12.2.1 Amplitudové klíčování

Amplitudové klíčování se označuje zkratkou ASK (Amplitude Shift Keying). Amplitudové klíčování nepatří mezi moderní modulační metody. Do skript je zařazeno především z metodických důvodů, ušetří nám práci při zkoumání kmitočtového klíčování. Nosný signál zapíšeme ve tvaru

$$s_c(t) = \frac{1}{2} S_c \exp(j\omega_c t) + \frac{1}{2} S_c \exp(-j\omega_c t). \quad (12.11)$$

Při modulačním signálu typu unipolárního NRZ zobrazujícího posloupnost 010101.... a orientovaného jako sudá funkce budou koeficienty Fourierovy řady tohoto periodického signálu dány vztahem (2.24)

$$c_k = D \frac{g}{T_1} \operatorname{sinc}(k\omega_1 \frac{g}{2}) = 1 \frac{T}{2T} \operatorname{sinc}(k \frac{2\pi T}{2T} \frac{T}{2}) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(k \frac{\pi}{2}). \quad (12.12)$$



Obrázek 12.4: ASK – časové průběhy

Modulační signál $g(t)$ proto může být zapsán vztahem

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(k \frac{\pi}{2}) \exp(jk\omega_1 t). \quad (12.13)$$

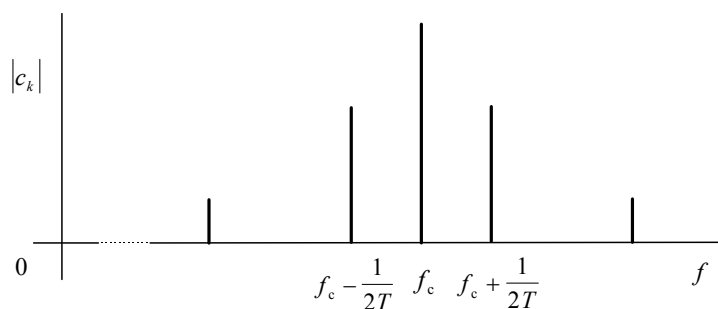
Klíčovaný signál lze zapsat jako součin

$$s(t) = g(t)s_c(t). \quad (12.14)$$

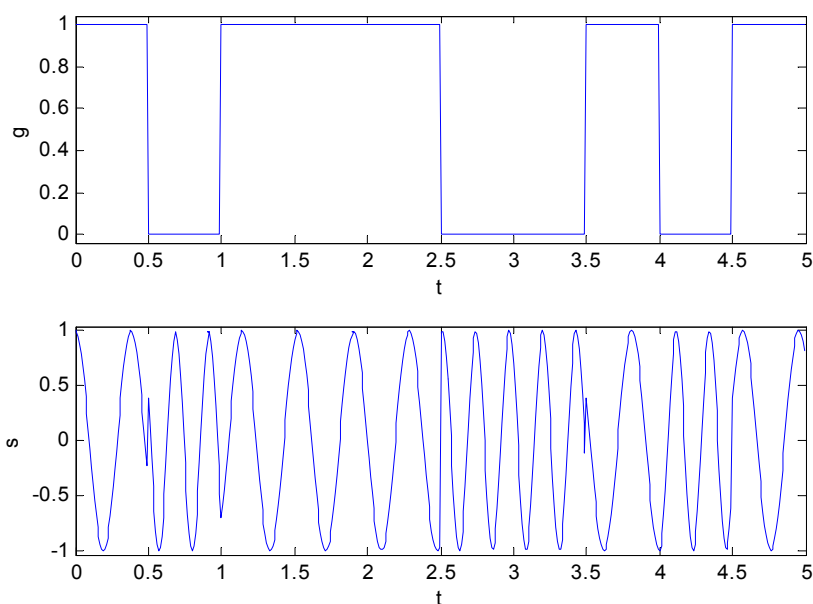
Po dosazení z (12.13) a (12.11) za $g(t)$ a $s_c(t)$ do (12.14) dostáváme

$$s(t) = \frac{1}{4} S_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(k \frac{\pi}{2}) \exp[j(\omega_c + k\omega_1)t] + \frac{1}{4} S_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(k \frac{\pi}{2}) \exp[j(\omega_c - k\omega_1)t]. \quad (12.15)$$

Praktická šířka spektra signálu ASK v Hz je číselně rovna přenosové rychlosti v bitech za sekundu.



Obrázek 12.5: Spektrum ASK



Obrázek 12.6: Kmitočtové klíčování

12.2.2 Kmitočtové klíčování

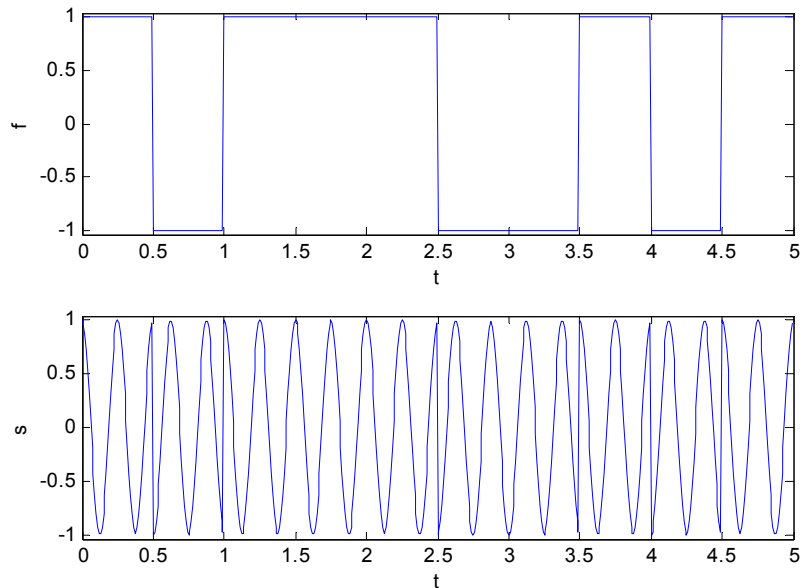
Kmitočtové klíčování se označuje se zkratkou FSK (Frequency Shift Keying). Signálové prvky jsou tvořeny úseky délky T kosinusovky. Nule může odpovídat signálový prvek s vyšším kmitočtem, jedničky signálový prvek s nižším kmitočtem. Číselně se praktická šířka spektra přibližně rovná přenosové rychlosti zvětšené o rozdíl kmitočtů obou signálových prvků. Vyplývá to z pomocné představy, že kmitočtově klíčovaný signál přenášející posloupnost 010101... je v podstatě součtem dvou amplitudově klíčovaných signálů.

Na rozhraních signálových prvků mohou vznikat ostré špičky a strmé hrany. Takovýto jev je provázen rozšířením spektra klíčovaného signálu. Ostré přechody lze odstranit vhodnou volbou kmitočtů nuly a jedničky.

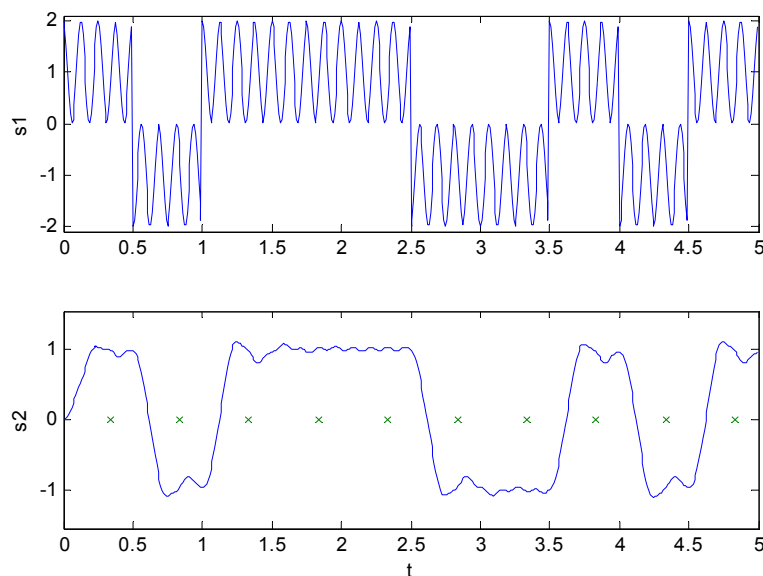
V praxi se používá i vícecestavové kmitočtové klíčování. Pro demodulaci signálu FSK můžeme použít dvojici pásmových propustí následovanou dvojicí amplitudových demodulátorů (ty mohou být i obálkové, tj. nekoherentní) a obvodu pro porovnávání velikosti výstupních signálů demodulátorů.

12.2.3 Fázové klíčování

Fázové klíčování (PSK, Phase Shift Keying) je v praxi používáno často. Budeme se mu proto věnovat podrobněji.



Obrázek 12.7: Fázové klíčování



Obrázek 12.8: Signály v součinném demodulátoru

Dvoustavové fázové klíčování BPSK (Binary Phase Shift Keying), klíčování reverzací fáze, patří k základním druhům klíčování. Označuje se také 2PSK. Nula je vyjádřena signálovým prvkem

$$s_0(t) = -S_c \cos \omega_c t = S_c \cos(\omega_c t + \pi), \quad t \in \langle 0, T \rangle, \quad (12.16)$$

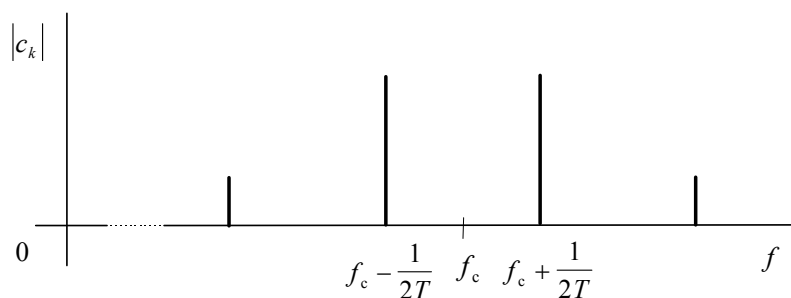
kde t je čas, S_c je amplituda nosného harmonického signálu a ω_c je úhlový kmitočet nosného signálu. Signálový prvek má dobu trvání T . Jednička se vyjadřuje signálovým prvkem

$$s_1(t) = S_c \cos \omega_c t, \quad t \in \langle 0, T \rangle. \quad (12.17)$$

Signálové prvky nuly a jedničky se liší znaménkem, proto jsou dobře rozlišitelné. Díky tomu se BPSK vyznačuje dobrou odolností vůči rušení.

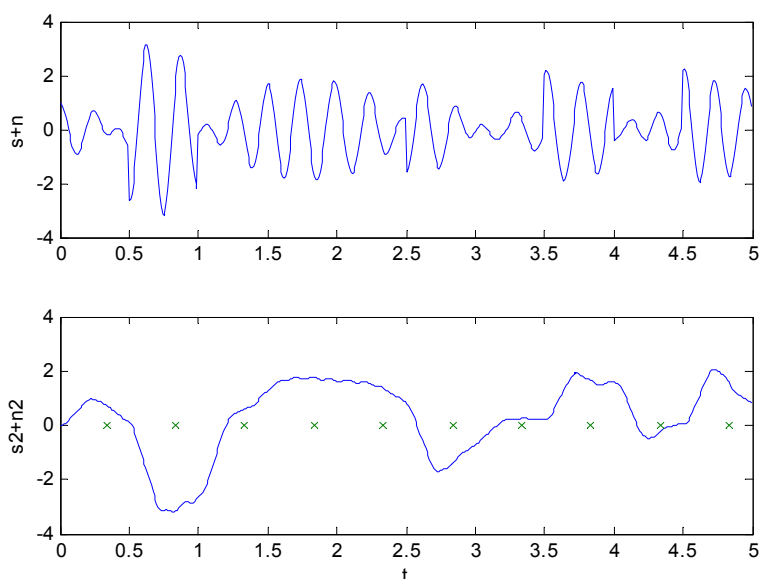
Modulovaný signál $s(t)$ můžeme získat tak, že modulačním signálem NRZ nabývajícím hodnot $+1$ a -1 násobíme nosnou $S_c \cos \omega_c t$.

Příklad časových průběhů modulačního signálu $f(t)$ a jemu odpovídajícího fázově klíčovaného signálu $s(t)$ je uveden na obrázku **Obrázek 12.7** pro případ $T = 0,5$ s a $f_c = 4$ Hz. Na některých rozhraních signálových prvků jsou patrné skokové změny počáteční fáze o π .



Obrázek 12.9: Spektrum signálu BPSK

Praktická šířka spektra B je u BPSK, při jistém zjednodušení, číselně rovna modulační rychlosti M i přenosové rychlosti R . Spektrum amplitud signálu BPSK je pro případ periodické datové posloupnosti $010101010\dots$, ta představuje nejhorší případ, znázorněno na obrázku **Obrázek 12.9**. Teoreticky je spektrum nekonečně široké. Šířka kmitočtového pásma obsahujícího nezbytné složky je $B = 1/T$. Je zjevné, že spektrální složky modulovaného signálu ležící mimo pásmo šířky B působí jako rušivé signály v kmitočtově sousedních kanálech.



Obrázek 12.10: Příjem zarušeného signálu

Demodulaci signálu BPSK nám může zajistit součinný demodulátor. Jeho schéma je nakresleno na obrázku **Obrázek 12.3**. Vstupním signálem je v tomto případě signál BPSK. Signál za násobičkou je popsán rovnicí

$$s_1(t) = f(t) \cos(\omega_c t) 2 \cos(\omega_c t) = f(t) + f(t) \cos(2\omega_c t). \quad (12.18)$$

Za dolní propustí pak signál $s_2(t)$ nabývá v ideálním případě v intervalech délky T jedné ze dvou možných hodnot $+1$ a -1 . Časové průběhy signálů za násobičkou a za dolní propustí jsou nakresleny na obrázku **Obrázek 12.8**. Na vstup demodulátoru byl v daném případě přiveden modulovaný signál s z obrázku **Obrázek 12.7**. V okamžicích označených "x" můžeme porovnávat hodnoty signálu s_2 s rozhodovací hladinou $h = 0$, a tak zjišťovat, zda vyslaným symbolem byla nula nebo jednička.

Příklad zašuměného signálu BPSK a odpovídajícího signálu za demodulátorem je nakreslen na obrázku **Obrázek 12.10**.

12.3 Signály mnohokanálových soustav

12.3.1 Multiplexy

Úkolem multiplexu je zajistit, aby více signálů bylo možné přenášet společnou sdělovací cestou, tj., aby bylo možné na výstupu sdělovací cesty signály od sebe oddělit.

12.3.1.1 Kmitočový multiplex

Princip kmitočového multiplexu (FDM, frequency division multiplex) je jednoduchý. Každý zdroj signálu má na kmitočtové ose přidělen svůj úsek, úseky se nepřekrývají. Pro transpozici spekter můžeme použít některou z probraných modulací. Signály s nepřekrývajícím se spektrem můžeme bez obav sečíst a pak součtový signál přenést společnou sdělovací cestou. Na jejím výstupu pomocí filtrů (obecně pásmových propustí) znovu separujeme signály s přeloženými spektry. Demodulace nám potom pomůže získat signály se spektry v základním pásmu.

Všechny multiplexní systémy vykazují více či méně významné rušení signálu daného kanálu signály ostatních kanálů. Tento druh rušení se nazývá přeslech. U systému s kmitočtovým dělením vzniká přeslech v případě, že společná cesta není čistě lineárním systémem, tj. vykazuje určitou nelinearitu.

12.3.1.2 Časový multiplex

Časový multiplex (TDM, time division multiplex) je obdobou kmitočového multiplexu, jen je v tomto případě kmitočtová osa nahrazena osou časovou. Jednotlivým kanálům jsou přiděleny vzájemně se nepřekrývající úseky na časové ose.

Signály jednotlivých kanálů musí být proto časově přetržité. Časové přetržitosti můžeme dosáhnout použitím číslicového vyjádření signálů pomocí signálových prvků s omezenou dobou trvání.

U systému TDM se vyskytují přeslechy způsobené neideálními kmitočtovými charakteristikami společné sdělovací cesty. Je zde jistá příbuznost s mezisymbolovými přeslechy.

12.3.2 Mnohokanálové přístupy

Mnohonásobné přístupy umožňují více uživatelům používat jedno širokopásmové zařízení, např. transpondér na telekomunikační družici. Je nutno zajistit, aby se uživatelé vzájemně nerušili. Prostředkem pro dosažení tohoto cíle může být ortogonalita signálů jednotlivých uživatelů.

12.3.2.1 FDMA

Mnohonásobný přístup s kmitočtovým dělením (FDMA, Frequency-Division Multiple Access). FDMA je nejstarším používaným principem mnohonásobného přístupu. Kmitočtové pásmo, které je k dispozici, je rozděleno na dílčí vzájemně se nepřekrývající pásma, která jsou pak přidělena jednotlivým uživatelům. Dílčí pásma nemusí být stejně široká. Nepožaduje se žádná synchronizace mezi vysíláními jednotlivých uživatelů. Mezi dílčími pásmy se ponechávají bezpečnostní mezery, které omezují možnost vzájemného rušení při nedodržení správné hodnoty nosného kmitočtu nebo při příliš širokém spektru signálu vysílaného kmitočtově sousedním uživatelem.

12.3.2.2 TDMA

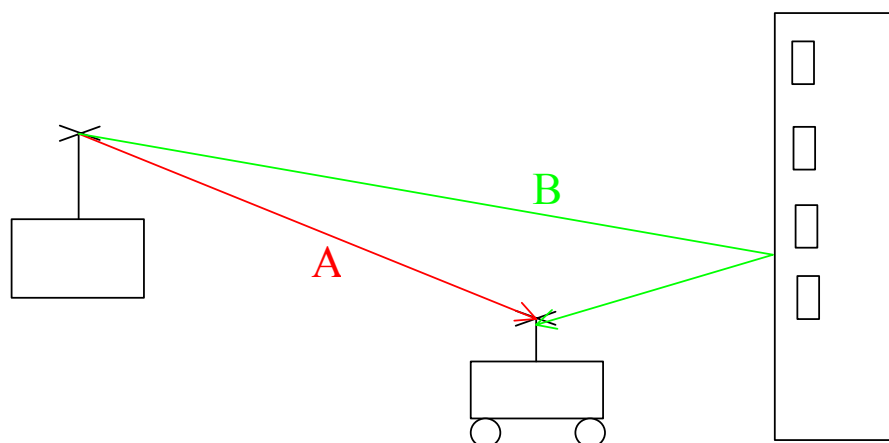
Mnohonásobný přístup s časovým dělením (TDMA, Time-Division Multiple Access) vyžaduje synchronizaci mezi vysíláními jednotlivých uživatelů. Jednotlivým uživatelům jsou přiděleny periodicky se opakující intervaly pro vysílání. Mezi sousedními intervaly pro vysílání opět bývají vloženy bezpečnostní mezery, tentokrát časové.

Signály jednotlivých uživatelů musí být proto časově přetržité.

12.3.2.3 SSMA

Mnohonásobný přístup s rozprostřeným spektrem (SSMA, Spread Spectrum Multiple Access).

Systémy s rozprostřeným spektrem používají dodatečné klíčování s cílem rozprostřít signál do širokého kmitočtového pásma. Použití systémů s rozprostřeným spektrem není omezeno jen na mnohonásobné přístupy. Signály s rozprostřeným spektrem se obtížně identifikují, což předurčuje jeden druh jejich použití.



Obrázek 12.11: Vícecestné šíření

My se omezíme na rozprostření typu DS-CDMA, které je vhodné pro mnohonásobné přístupy.

V systému CDMA se modulační číslicový signál upravuje tak, že se násobí rozprostíracím binárním signálem. Rozprostírací signál má prvky několikrát, spíše mnohokrát, kratší, než je doba T trvání původního signálového prvku. Takové počínání se zdá být nesmyslné, vždyť vede k podstatnému rozšíření spektra modulačního signálu, a tím i

modulovaného signálu. S tím se ale počítá. Každý účastník používá svou specifickou rozprostírací posloupnost. To umožňuje přenášet signály všech ve stejném čase a ve stejném kmitočtovém pásmu. Pro modulaci můžeme použít BPSK.

V místě příjmu se přijatý signál násobí replikou specifického rozprostíracího signálu. Tím se rozprostření odstraní. Podmínkou je, aby replika byla správně synchronizována.

System CDMA se používá v mobilní síti IS-95 v USA. Bude se používat (wideband CDMA, WCDMA) v mobilních sítích 3. generace a zřejmě i čtvrté generace.

V mobilních i stacionárních rádiových spojích nás často trápí vícecestné šíření. Signál se od vysílače dostává šířením po různě dlouhých drahách. Na přijímací anténě se pak vytvoří součet těchto různě silných a hlavně různě zpožděných signálů. Výhodou systému CDMA je to, že se dokáže vypořádat s problémy vyvolanými vícecestným šířením. Obdobnou schopnost, i když založenou na jiném principu, má systém OFDM.

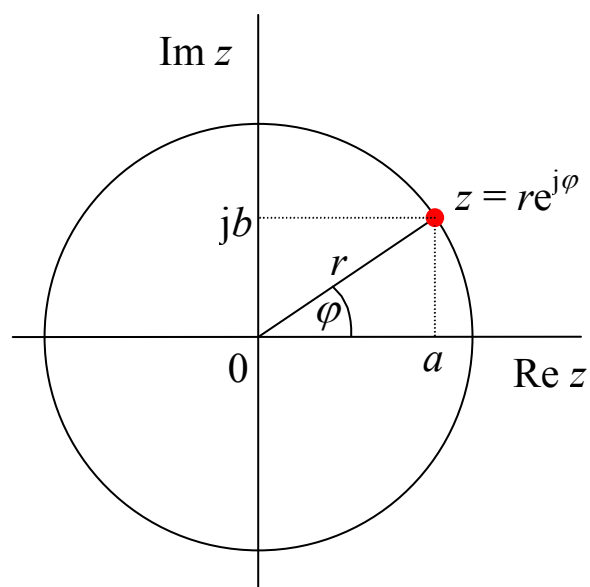
12.3.2.4 OFDM

System OFDM pracuje s velkým počtem nosných. Jeho technická realizovatelnost je založena na použití algoritmů FFT a IFFT. Aplikován je v rozhlasovém a televizním vysílání. Výhodou je, mimo jiné, možnost pracovat s jednofrekvenční sítí, ve které všechny vysílače s daným programem vysílají ve stejném pásmu, všechny vysílají synchronně prakticky stejný signál. Tím je dosaženo podstatně lepšího využití kmitočtového pásma přiděleného pro rozhlasové nebo televizní vysílání. Vysvětlení principu tohoto systému se vymyká rozsahu a zaměření těchto skript. V následujících letech se naprostá většina čtenářů s tímto systémem setká, ať už na pracovišti, nebo doma. Na rozdíl od jiných smrtelníků ovšem budou schopni pochopit princip systému OFDM, protože budou ovládat algoritmus FFT (8.4) a vlastnosti DFT (8.3).

13 Dodatky

13.1 Operace s komplexními čísly

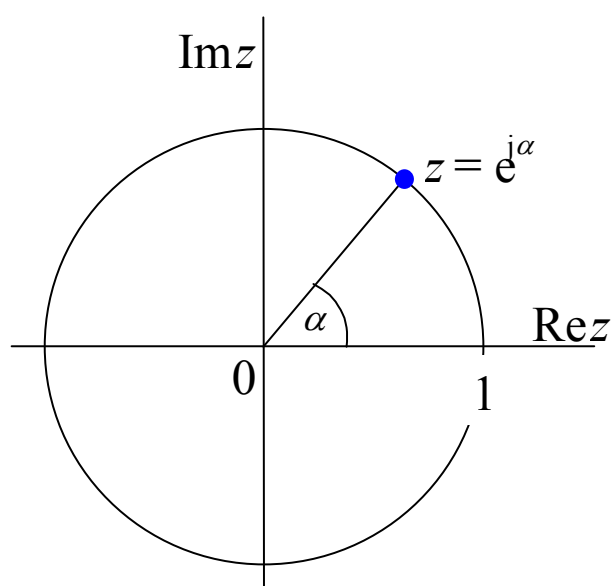
Ve skriptech se používá několik běžných operací s komplexními čísly. Tento dodatek má pomoci těm, kteří již na práci s komplexními čísly poněkud pozapomněli.



Obrázek 13.1: Komplexní rovina

Každé komplexní číslo z lze zapsat ve tvaru $z = a + jb$,

kde $a, b \in \mathbf{R}$ jsou reálná část a imaginární část komplexního čísla, $j = \sqrt{-1}$.



Obrázek 13.2: Jednotková kružnice

Pro operace násobení a dělení je výhodnější použít druhou formu zápisu komplexního čísla: $z = r \exp(j\varphi)$,

kde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ je modul komplexního čísla a

$\varphi = \arg z$ je argument komplexního čísla, definovaný v případě, že $r \neq 0$.

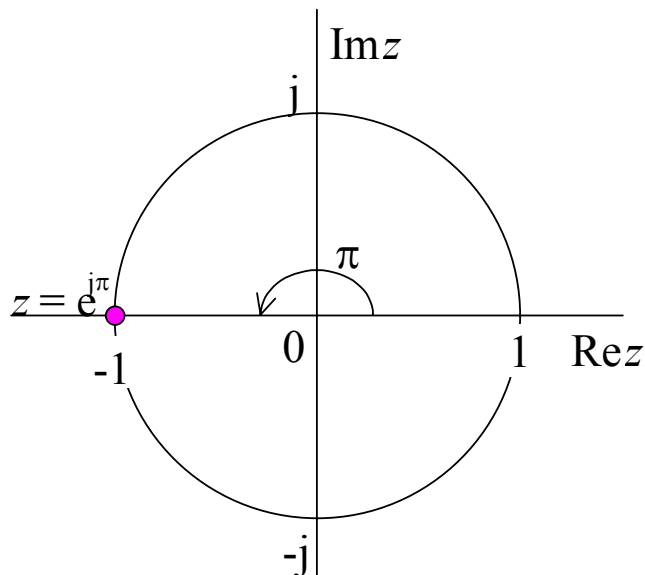
Pro $r = 0$ není argument komplexního čísla definován. Geometrické znázornění komplexního čísla najdete na obrázku **Obrázek 13.1**.

Příklad 13.1: Vyjádření komplexního čísla

$z = -3 + j4$. Určete r a φ .

Významným útvarem v komplexní rovině je jednotková kružnice, viz **Obrázek 13.2**. Pro komplexní čísla zobrazující se jako body na jednotkové kružnici můžeme psát

$$z = \exp(j\alpha) = \cos \alpha + j \sin \alpha.$$



Obrázek 13.3: Zobrazení čísla $\exp(j\pi)$

Často při úpravách výrazů uplatňujeme rovnosti

$$\exp(j\pi) = -1, \quad \exp(-j\pi) = -1, \quad \exp(j\frac{\pi}{2}) = j \quad \text{a} \quad \exp(-j\frac{\pi}{2}) = -j.$$

Ke komplexnímu číslu z můžeme přiřadit číslo komplexně sdružené z^* :

$$z^* = a - jb = r \exp(-j\varphi).$$

Platí: $z + z^* = 2a$. Součet dvou čísel komplexně sdružených je číslo reálné.

Sčítání komplexních čísel z_1 a z_2 můžeme uskutečnit pomocí složkového vyjádření

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2)$$

Pro násobení a dělení můžeme použít vztahy

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp[j(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad \text{a} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \exp[j(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Na závěr uvedeme často používaný vztah

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \exp(j\alpha) + \frac{1}{2} \exp(-j\alpha).$$

13.2 Transformace Z

Laplaceova transformace umožňuje zobrazit signály se spojitým časem jako funkce komplexní proměnné p . Transformací, která hraje obdobnou roli v případě signálů s diskretním časem, se nazývá transformace Z. Má dvě základní modifikace, jednostrannou transformaci Z a dvojstrannou transformaci Z . Cílem tohoto dodatku je seznámit čtenáře s druhou z nich.

13.2.1 Zavedení transformace Z

V definičním vztahu DTFT (8.4) nahradíme výraz $e^{j\omega}$ komplexní proměnnou z . Tak dostaneme vztah

$$S(z) = Z\{s(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n},$$

který je definičním vztahem transformace Z. Oblast konvergence, pokud je neprázdná, je popsána nerovností

$$R_- \langle |z| \rangle R_+,$$

kde R_- může nabýt hodnoty 0, R_+ může dosáhnout hodnoty $+\infty$.

13.2.2 Vlastnosti transformace Z

13.2.2.1 Linearita

Linearita transformace je očekávanou vlastností vzhledem k příbuznosti transformace Z k dříve probraným lineárním transformacím. Necht' a a b jsou reálné konstanty. Linearita transformace pak může být vyjádřena vztahem

$$Z\{as_1(n) + bs_2(n)\} = aS_1(z) + bS_2(z),$$

kde $S_1(z)$ je obraz posloupnosti $\{s_1(n)\}$ a $S_2(z)$ je obraz posloupnosti $\{s_2(n)\}$. Oblast konvergence $S(z)$ je přinejmenším průnikem oblastí konvergence obrazů $S_1(z)$ a $S_2(z)$.

13.2.2.2 Obraz posunuté posloupnosti

Necht' je $S(z)$ obrazem posloupnosti $\{s(n)\}$. Obrazem posunuté posloupnosti $\{s(n+m)\}$, m je číslo celé, je funkce

$$S_m(z) = Z\{s(n+m)\} = z^m S(z).$$

Oblast konvergence se při posunutí zachovává s výjimkou bodů $z=0$ a $z=\infty$, ve kterých se může konvergence lišit. U číslicových systémů se nejčastěji setkáváme s případem $m=-1$. Pak je obraz $Y(z)$ opožděné posloupnosti $\{y(n)\}$ vázán na obraz $X(z)$ posloupnosti $\{x(n)\}$ vztahem

$$Y(z) = z^{-1}X(z).$$

13.2.3 Výpočty obrazů

13.2.3.1 Obraz jednotkového impulzu

S použitím definičního vztahu transformace Z nalézáme:

$$S_\delta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = \delta(0)z^{-0} = 1.$$

Oblastí konvergence je celá rovina z kromě bodu $z = 0$.

13.2.3.2 Obraz jednotkového skoku

Opět vyjdeme z definičního vztahu:

$$S_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n}.$$

Jedná se o geometrickou řadu s kvocientem z^{-1} a prvním členem 1. Oblast konvergence je dána podmínkou $|z| < 1$. Obraz jednotkového skoku je v oblasti konvergence dán vztahem

$$S_1(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Funkce definovaná výrazem na pravé straně posledního vztahu má nulový bod $z_n = 0$ a pól $z_p = 1$. Je správné psát zde o nulovém bodu $z_n = 0$, když obraz pro $z = 0$ nekonverguje? Je k tomu dobrý důvod. Rozložení nulových bodů a pólů, a to i mimo oblast konvergence, nám umožňuje vytvořit si rychle přibližnou představu o průběhu modulu obrazu (v oblasti jeho konvergence). Funkce definovaná výrazem na pravé straně je pro z z množiny $C - \{1, 0\}$ analytickým prodloužením obrazu jednotkového skoku.

13.2.3.3 Obraz exponenciální posloupnosti

Obraz $S_e(z)$ exponenciální posloupnosti

$$s(n) = 1(n)Aa^n,$$

kde A a a jsou reálné konstanty, je dán vztahem

$$S_e(z) = \frac{Az}{z-a}.$$

Oblast konvergence obrazu je popsána nerovností $|z| < |a|$. Jedná se o oblast ležící vně kružnice o poloměru $|a|$. Analytické prodloužení obrazu na celou oblast $C - a$ má pól $z_p = a$ a nulový bod $z_n = 0$.

Od obrazu $S(z)$ se k Fourierově obrazu posloupnosti $\{s(n)\}$ můžeme dostat dosazením $z = e^{j\omega}$, pokud ovšem jednotková kružnice leží v oblasti konvergence obrazu $S(z)$. Pro náš případ je při $|a| < 1$

$$S_e(e^{j\omega}) = \frac{Ae^{j\omega}}{e^{j\omega} - a}.$$

13.3 Korelace

Základním nástrojem pro kvantitativní hodnocení vztahu mezi dvěma signály je korelační funkce. Ta je však definována různě pro různé typy signálů. A tak budeme mít příležitost zopakovat si řadu pojmů probraných v předcházejících kapitolách. Korelační funkce jsou významnými nástroji pro popis a zpracování signálů. Hloubaví studenti si možná povšimnou, že existuje nějaká souvislost mezi korelací a konvolucí.

13.3.1 Korelační funkce periodického signálu

Význam korelační funkce vynikne zejména při její aplikaci na náhodné signály a na směs náhodných a periodických signálů. Z metodického hlediska je však účelné začít se seznamovat s tímto pojmem u signálů periodických.

Vzájemnou neboli křížovou korelační funkcí (cross - correlation function) dvou periodických signálů $s_1(t)$ a $s_2(t)$ o stejné periodě T_1 nazýváme funkci

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} s_1(t) s_2(t + \tau) dt. \quad (13.1)$$

Vzájemná korelační funkce dvou periodických signálů se stejnou periodou T_1 svým způsobem popisuje podobnost průběhů těchto dvou signálů v závislosti na jejich vzájemném posunutí. Funkce je periodická s periodou T_1 .

Příklad 13.2: *Vzájemná korelace periodických signálů*

Vypočtěte vzájemnou korelační funkci signálů

$$s_1(t) = 2 \cos 2\pi t \quad \text{a} \quad s_2(t) = \sin 2\pi t.$$

Korelační analýzu můžeme uplatnit i v případě, že oba signály $s_1(t)$ a $s_2(t)$ jsou totožné a mohou proto být společně označeny $s(t)$. Korelační funkce se v tomto případě nazývá funkce autokorelační. Autokorelační funkce $R(\tau)$ periodického signálu $s(t)$ může být definována vztahem

$$R(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} s(t) s(t + \tau) dt. \quad (13.2)$$

Příklad 13.3: *Autokorelační funkce periodického signálu*

Vypočtěte autokorelační funkci signálu $s(t) = C \cos(\pi t + \varphi)$.

Autokorelační funkce vypočtená v příkladu 13-3 má následující vlastnosti:

1. je sudá,
2. je periodická s periodou T_1 ,
3. $R(0)$ je rovno kvadrátu efektivní hodnoty signálu,
4. $\forall \tau \in \mathbf{R} : R(0) \geq R(\tau)$.

Tyto čtyři vlastnosti mají autokorelační funkce všech periodických signálů.

Bez odvození uvedeme vztah, kterým je autokorelační funkce vyjádřena na základě koeficientů Fourierovy řady periodického signálu

$$R(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \exp(jk\omega_1\tau). \quad (13.3)$$

Zajímavé je, že argumenty koeficientů Fourierovy řady nemají na autokorelační funkci žádný vliv. To se projevilo i ve výsledku příkladu **Příklad 13.3**. Znamená to, že signály s různými časovými průběhy mohou mít stejné autokorelační funkce.

Ze vztahů (13.2) a (13.3) při dosazení $\tau = 0$ můžeme odvodit rovnici

$$\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} s^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \quad (13.4)$$

Levá strana rovnice představuje kvadrát efektivní hodnoty signálu (nebo také střední výkon na jednotkovém odporu, je-li signálem napětí nebo proud), pravá strana tedy musí vyjadřovat totéž. Vyjadřuje, tentokrát ale ne na základě časového průběhu signálu, ale na základě jeho spektra. Rovnice je zápisem Parsevalova teorému pro periodické signály.

13.3.2 Náhodný proces se spojitým časem

Korelační funkce (correlation function, autocorrelation function) $R(t_1, t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi hodnotami náhodného procesu v okamžiku t_1 a hodnotami náhodného procesu v okamžiku t_2 . Může být vypočítána pomocí integrálu

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (13.5)$$

Kovarianční funkce (covariance function) $K(t_1, t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi odchylkami náhodného procesu v okamžiku t_1 od střední hodnoty $a(t_1)$ a odchylkami náhodného procesu v okamžiku t_2 od $a(t_2)$. Může být vypočítána pomocí integrálu

$$K(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (13.6)$$

V případě zkoumání stacionárního náhodného procesu můžeme pro libovolné $t_0 \in \mathbb{R}$ psát:

$$p(x_1, x_2, t_1, t_2) = p(x_1, x_2, t_1 + t_0, t_2 + t_0). \quad (13.7)$$

Při označení $\tau = t_2 - t_1$ můžeme funkce $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$, $R(t_1, t_2)$ a $K(t_1, t_2)$ nahradit funkcemi $p(x_1, x_2, \tau)$, $R(\tau)$ a $K(\tau)$. Zjednodušení popisu náhodného procesu spojené se zavedením předpokladu stacionarity je zjevné.

Ergodický náhodný proces (ergodic process) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti, stejné chování. To nám pak umožňuje při zkoumání náhodného procesu odhadovat funkce a veličiny náhodný proces popisující z průběhu jediné a to libovolné realizace.

Korelační funkce $R(\tau)$ ergodického náhodného procesu může být odhadována pomocí vzorce

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt. \quad (13.8)$$

Tento vztah se již podobá vztahu (13.2). Průměrování součinu $x(t)x(t + \tau)$ probíhá na intervalu $\langle 0, T \rangle$, který musí být dostatečně dlouhý, aby byl odhad autokorelační funkce věrohodný.

Odhadnout lze i vztah mezi dvěma vzájemně ergodickými procesy $\xi(t)$ a $\eta(t)$ s realizacemi $x(t)$ a $y(t)$, a to pomocí tzv. vzájemné korelační funkce (cross-correlation function)

$$\widehat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt. \quad (13.9)$$

13.3.3 Náhodný proces s diskretním časem

Členy $R(n_1, n_2) = E\{\xi(n_1)\xi(n_2)\}$ dvourozměrné autokorelační posloupnosti můžeme zavést vztahem

$$R(n_1, n_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2. \quad (13.10)$$

U stacionárních náhodných procesů jsou členy korelační posloupnosti pouze funkcí rozdílu

$$m = n_2 - n_1,$$

takže namísto $R(n_1, n_2)$ píšeme $R(m)$:

$$R(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, m) dx_1 dx_2. \quad (13.11)$$

Pro statistické odhady $R(m)$ je však i nadále nutno mít k dispozici početnou množinu realizací stacionárního náhodného procesu.

Odhad $\widehat{R}(m)$ členu $R(m)$ korelační posloupnosti ergodického náhodného procesu můžeme stanovit na základě dostatečně dlouhé realizace (o délce $N + m$) s použitím vztahu:

$$\widehat{R}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)x(n + m). \quad (13.12)$$

Hodnoty $R(m)$ nás do určité míry informují o tom, jaká je vzájemná souvislost mezi hodnotami náhodného procesu časově vzdálenými od sebe o m .

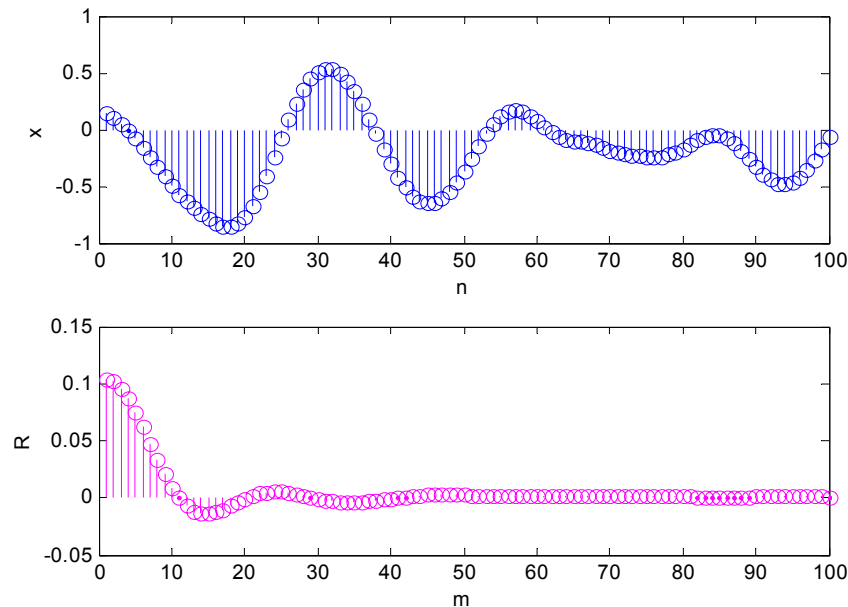
Pokud je k dispozici vektor \mathbf{x} konečné a pevné délky N , musíme pro odhadování vzorec (13-12) modifikovat:

$$\widehat{R}(m) = \frac{1}{N - m} \sum_{n=1}^{N-m-1} x(n)x(n + m) \quad (13.13)$$

Při velkých hodnotách m může být odhad málo věrohodný.

Příklad náhodného procesu $x(n)$ s diskretním časem vzniklého vzorkováním nízkofrekvenčního šumu a autokorelační posloupnost $R(m)$ tohoto náhodného diskretního signálu jsou názorněny na obrázku **Obrázek 13.4**. Hodnoty autokorelační posloupnosti nabývají významných hodnot pro malé hodnoty posunutí, zpoždění, m . To ukazuje, že existuje souvislost mezi sobě časově blízkými hodnotami signálu $x(n)$. Pro velké hodnoty m jsou hodnoty autokorelační posloupnosti $R(m)$ blízké nule. To ukazuje, že není významná souvislost mezi časově více vzdálenými hodnotami signálu $x(n)$. Průběh autokorelační funkce

$R(m)$ ukazuje, jak do jaké časové vzdálenosti mezi prvky signálu $x(n)$ příbuznost hodnot sahá. Okolnost, že pro velké hodnoty m hodnoty autokorelační posloupnosti $R(m)$ konvergují k nule ukazuje, že náhodný proces $x(n)$ má nulovou střední hodnotu. Pokud by měl obecně střední hodnotu rovnu a , konvergovala by posloupnost $R(m)$ pro $m \rightarrow \infty$ k a^2 .



Obrázek 13.4: Autokorelační posloupnost diskrétního procesu

Autokorelační funkce periodického signálu je periodická. Autokorelační funkce šumu s nulovou střední hodnotou pro rostoucí τ nebo m konverguje k nule. Tohoto rozdílu ve vlastnostech můžeme využít pro potlačení důsledku přítomnosti šumu.

Ještě častější je v praxi využití vzájemné korelace. Je založeno na tom, že vzájemná korelace mezi šumem a mezi očekávaným a známým průběhem přijímaného signálu je rovna nule. Vzájemná korelace se používá například v družicovém navigačním systému GPS a v číslicových komunikačních systémech CDMA. Také součinnový demodulátor je svou funkcí blízký korelátoru.

13.4 Výsledky testů

Příklad 1.1

V intervalu $\langle -4, 4 \rangle$ jsou to tyto posloupnosti čísel:

a) 0 0 0 0 1 3 0 0 0

b) 0 0 0 0 0 1 3 0

c) 0 0 1 3 0 0 0 0 0

d) 0 0 0 3 1 0 0 0

e) 0 0 0 0 0 3 1 0 0

f) 0 3 1 0 0 0 0 0

g) 0 0 0 0 2 6 0 0 0

Příklad 2.1

$s(0,1) = 4,854$.

Příklad 2.2

a) $c_1 = \frac{4}{\pi} \doteq 1,2732$, b) amplituda $C_1 \doteq 2,5465\text{V}$, c) počáteční fáze $\varphi_1 = 0$ rad, d) kmitočet základní harmonické složky $f_1 = 1\text{kHz}$, e) stejnosměrná složka $c_0 = 2\text{V}$.

Příklad 3.1

$s(0,14) = 0$.

Příklad 3.2

$S(\omega) = 20 \text{sinc}(\omega)$.

Příklad 5.1

$\hat{F}(-0,2, 300) = 0,25$.

Příklad 5.2

$\hat{a} = 0,1275$.

Příklad 6.1

Aby bylo vyhověno podmínce (6.4), musí být vzorkovací kmitočet nejméně 6 000 vzorků za sekundu. V telekomunikační technice se pro řečové signály většinou používá vzorkovací kmitočet 8 000 vzorků za sekundu, tj. $f_{vz} = 8 \text{ kSa/s}$.

Příklad 6.2

Ano. Existence takové složky vyplývá ze vztahu (6.3). Její kmitočet je 3 kHz. Podmínka (6.4) nebyla dodržena.

Příklad 6.3

Přenosová rychlost R v bitech za sekundu je dána součinem vzorkovacího kmitočtu a počtu bitů na vzorek. Zde je $R = 8 \text{ kSa/s} \times 8 \text{ bit/Sa} = 64 \text{ kbit/s}$. Doba trvání signálového prvku $T_b = 1/R = 15,625\mu\text{s}$.

Příklad 7.1

$$\omega_1 = \Omega_1 \frac{1}{f_{vz}} = 2\pi 50 \frac{1}{500} = 0,2\pi.$$

Příklad 7.2

1, 2, 1, 2, 0.

Příklad 7.3

$z(n)$ má pro $n \in \langle 0, 10 \rangle$ prvky

0, 1, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, -1, 0.

Příklad 7.4

$z(1) = 4$.

Příklad 8.1

$S(0) = 0$, $S(1) = 2 - 2j$, $S(2) = 0$, $S(3) = 2 + 2j$.

Příklad 8.2

$$S(1023) = 5 - 3j.$$

Příklad 9.1

Pro množinu realizací z obrázku **Obrázek 9.2** dostáváme:

$$\hat{a}(2) = \frac{1}{5}(-2,10 - 1,90 - 0,95 + 1,00 + 3,15) \doteq -0,16$$

Teoretická hodnota $a(5)$ je rovna nule. U procesu z příkladu **Příklad 9.1** je to řečeno v jeho popisu.

Příklad 9.2

$$\hat{a} = \frac{1}{8}(0,2 + 3,1 + 2,0 - 3,1 - 0,1 - 1,3 - 2,0 - 2,3) = -0,44.$$

Příklad 10.4

a) Vyšetříme, zda je systém stabilní

$$H(z) = \frac{2z^2 + 5z^1 + 3}{z^2}$$

Žádný pól neleží vně jednotkové kružnice. Systém je stabilní.

b) Výpočet amplitudy výstupního signálu

$$\begin{aligned} Y_1 &= |H(e^{j\omega})|X_1 = |2 + 5e^{-j0,6\pi} + 3e^{-j1,2\pi}| \cdot 4 = \\ &= 3,584 = 14,33 \end{aligned}$$

c) Výpočet počáteční fáze výstupního signálu

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \arg[H(e^{j\omega})] + \varphi_1 = \arg[2 + 5e^{-j0,6\pi} + 3e^{-j1,2\pi}] + 0,1\pi = \\ &= -0,686\pi + 0,1\pi = -0,586\pi \end{aligned}$$

Příklad 10.5

a) Vyšetříme, zda je systém stabilní

Žádný pól neleží vně jednotkové kružnice. Systém je stabilní.

b) Stanovení normovaného úhlového kmitočtu

$$\omega = \frac{\Omega}{f_{vz}} = \frac{4\pi \cdot 10^3}{8 \cdot 10^3} = 0,5\pi$$

c) Výpočet amplitudy výstupního signálu

$$\begin{aligned} Y_1 &= |H(e^{j\omega})|X_1 = \left| \frac{0,2e^{j0,5\pi}}{e^{j0,5\pi} - 0,6} \right| \cdot 0,1 = \\ &= 0,1715 \cdot 0,1 = 0,0172 \end{aligned}$$

d) Výpočet počáteční fáze výstupního signálu

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \arg[H(e^{j\omega})] + \varphi_1 = \arg\left[\frac{0,2e^{j0,5\pi}}{e^{j0,5\pi} - 0,6}\right] + 0,7\pi = \\ &= -0,172\pi + 0,7\pi = -0,528\pi\end{aligned}$$

Příklad 11.1

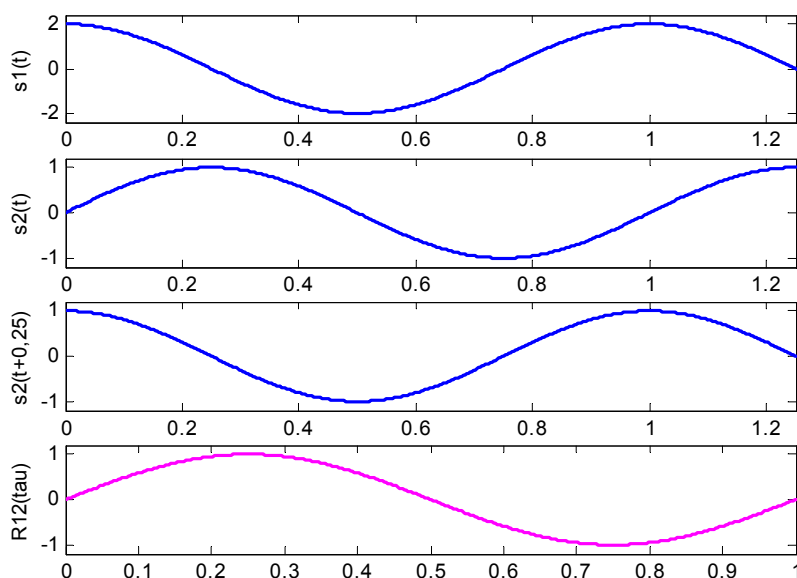
Přenosová rychlost je 4,8 kb/s, modulační rychlost je 4,8kBd.

Příklad 11.2

Modulační rychlost je 4,8 kBd.

Příklad 13.1

$$r = 5, \quad \varphi \doteq 2,214 \text{ rad} \ddot{}$$



Obrázek 13.5: Vzájemná korelační funkce

Příklad 13.2

Oba signály mají stejnou základní periodu $T_1 = 1$. S použitím vztahu (13.1) můžeme psát:

$$\begin{aligned}R_{12}(\tau) &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} s_1(t) s_2(t + \tau) dt = \frac{1}{1} \int_0^1 2 \cos 2\pi t \sin 2\pi(t + \tau) dt = \\ &= \int_0^1 [\sin(4\pi t + 2\pi\tau) + \sin 2\pi\tau] dt = 0 + \sin 2\pi\tau.\end{aligned}\tag{ 13.14 }$$

Signály $s_1(t)$ a $s_2(t)$ jsou graficky znázorněny na obrázku **Obrázek 13.5**. Je zde také nakreslen posunutý signál $s_2(t + 0,25)$. Průběh korelační funkce najdeme ve spodním dílu obrázku **Obrázek 13.5**. Lze doporučit, aby signál $s_2(t)$ byl nakreslen na proužek papíru, který je pak možné položit pod graf signálu $s_1(t)$. Posouváním proužku ve vodorovném směru lze

modelovat jeho časové posunutí a sledovat jednak podobnost průběhů funkce $s_1(t)$ a $s_2(t + \tau)$, jednak příslušnou hodnotu vzájemné korelační funkce $R_{12}(\tau)$.

Příklad 13.3

Po dosazení za $s(t)$ do vztahu (13.2) můžeme psát

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} C \cos(\omega t + \varphi) C \cos[\omega(t + \tau) + \varphi] dt = \\ &= \frac{C^2}{2T_1} \int_0^{T_1} [\cos(2\omega t + 2\varphi + \omega\tau) + \cos(\omega\tau)] dt = \\ &= C_{\text{ef}}^2 \cos \omega\tau. \end{aligned}$$

Ve výsledku C_{ef} označuje efektivní hodnotu signálu $s(t)$.

13.5 Vlastnosti zobrazení v tabulkách

Poučky o spektrech periodických signálů

| | |
|---------------------|-----------------------------|
| $s(t)$ | c_k |
| $as_a(t) + bs_b(t)$ | $ac_{a,k} + bc_{b,k}$ |
| $s(t - \tau)$ | $c_k \exp(-jk\omega_1\tau)$ |
| $s(mt)$ | c_k |

Poučky o spektrech aperiodických signálů

| | |
|---|--|
| $s(t)$ | $S(\omega)$ |
| $as_a(t) + bs_b(t)$ | $aS_a(\omega) + bS_b(\omega)$ |
| $s(t - \tau)$ | $S(\omega) \exp(-j\omega\tau)$ |
| $s(mt) \quad m > 0$ | $\frac{1}{m} S\left(\frac{\omega}{m}\right)$ |
| $\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau$ | $S_1(\omega) S_2(\omega)$ |

Vlastnosti DFŘ

| Originál | Obraz |
|---|--|
| DFŘ $\{a\tilde{s}_1(n) + b\tilde{s}_2(n)\} = \{a\tilde{S}_1(k) + b\tilde{S}_2(k)\}$ | $a\tilde{S}_1(k) + b\tilde{S}_2(k)$ |
| $\tilde{s}(n-m)$ | $\tilde{S}(k) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} km\right)$ |
| $\tilde{z}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{s}_1(m) \tilde{s}_2(n-m)$ | $\tilde{S}_1(k) \tilde{S}_2(k)$ |

Vlastnosti DFT

| Originál | Obraz |
|---|--|
| $as_1(n) + bs_2(n)$ | $aS_1(k) + bS_2(k)$ |
| $R_N(n) s[\text{mod}_N(n-m)]$ | $S(k) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} km\right)$ |
| $s_1(n) ** s_2(n)$ (cyklická konvoluce) | $S_1(k) S_2(k)$ |

Vlastnosti transformace Z

| Originál | Obraz |
|---------------------|---------------------|
| $as_1(n) + bs_2(n)$ | $aS_1(z) + bS_2(z)$ |
| $s(n-m)$ | $z^{-m} S(z)$ |

V tomto dodatku byly formou tabulek zjednodušeně uvedeny základní vlastnosti Fourierovských zobrazení a transformace Z.

13.6 Úvod do Matlabu

MATLAB je vyspělý programovací prostředek, který disponuje početnými a mimořádně mocnými příkazy pro práci s maticemi. Je doplněn souborem tzv. toolboxů, obsahujících neméně mocné příkazy pro různé speciální účely. My budeme pracovat se

základními příkazy a s příkazy Signal Processing Toolboxu. V oblasti zpracování signálů je práce s MATLABEM velmi efektivní a přináší výraznou úsporu času uživateli.

Psaní příkazů a programů

Příkazy je možné zadávat jednotlivě přímo z klávesnice jejich zapsáním do příkazového okna a odesláním. V okně dříve zapsaný příkaz lze znovu vyvolat pomocí klávesy ↑, případně editovat a znovu odeslat.

Užitečné je vytváření souborů s příponou **m**. Jsou dva typy těchto souborů: *skript file* a *function*. *Skript file* je posloupnost příkazů vykonávaných po zavolání souboru jménem (bez přípony) obdobně, jako kdyby byly zadávány z klávesnice. Funkce mohou mít argumenty. Jejich vnitřní proměnné jsou lokální.

Některé příkazy

Pro ukončení práce s programem MATLAB slouží příkaz `exit`

Vysvětlení příkazu `xzy` získáme zadáním příkazu `help xzy`

Příklad: `help exp`

Konstanty

Vestavěné konstanty jsou: `pi` a `eps`

`eps` je velmi malé číslo, zpravidla 2^{-52}

Přiřazení konstanty proměnné

Příklad: Napíšeme `a=2.1` a odešleme.

Objeví se: `a=`
`2.1000`

Uvedený zápis příkazu `a=2.1` bez ukončení středníkem umožňuje, aby se hodnota proměnné hned vypsala. Obyčejný příkaz je vždy zakončen středníkem.

Příklad: `a=2.1;`

Chceme-li zjistit hodnotu `a`, napíšeme `a` a odešleme.

Objeví se: `a=`
`2.1000`

Chceme-li proměnnou `a` vymazat, napíšeme

`clear a;`

Chceme-li vymazat všechny proměnné, použijeme příkaz `clear`

Je vhodné tak učinit např. před novým spuštěním programu s novými parametry, protože by se nám v některých případech mohly staré hodnoty a typy veličin dostávat do kolísí s novými.

Komplexní konstanty

Příklad: `z=2.1+4*i;`

Modul a argument získáme pomocí příkazů `abs(z)` a `angle(z)`

Znaménka pro základní operace

Znaménka pro základní operace s jednoduchými reálnými a komplexními proměnnými jsou :

+ - * / ^

Matic

Přiřazení matice proměnné.

Příklad: Příkaz

```
a=[1 2 3*4
    4 5 sqrt(2)];
```

vytvoří matici

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 4 & 5 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Mohu si ji nechat vypsat na stínítku napsáním a a jeho odesláním.

Extrakce submatice

Extrakce prvku

Extrakce sloupce

Extrakce řádku

Příklady : $b=a(1,2)$

$b=a(:,3)$

$c=a(1,:)$

Maticové operace

Transpozice. Transponovanou maticí k matici A je matice A´

Příklad: Po napsání a odeslání $X = [1 \ 2]´$ se vypíše:

X=

1

2

Další možné operace s maticemi A a B:

$C = A+B;$ $C = A-B;$ $D = A*B;$

Při zadaných maticích A a B lze najít matici X vyhovující rovnici $A*X=B$ pomocí příkazu $X=A\B;$

Operace "prvek po prvku": $.*$ $./$ $.^$ jsou příslušné operace aplikované na dvojice odpovídajících si prvků matic či vektorů.

Příklad: Necht' $x = [1 \ 2]$ a

$y = [3 \ 4]$. Pak příkazem

$z=x.*y;$

získáváme matici $z = [3 \ 8]$.

Některé vestavěné funkce

real, imag, round, sin, cos, tan, exp, log, log10, sqrt.

Funkce pracují i s komplexními argumenty. Argumentem může být i výraz. Je-li argumentem matice, je její funkce maticí funkčních hodnot.

Funkce pro vytváření matic: rand, ones.

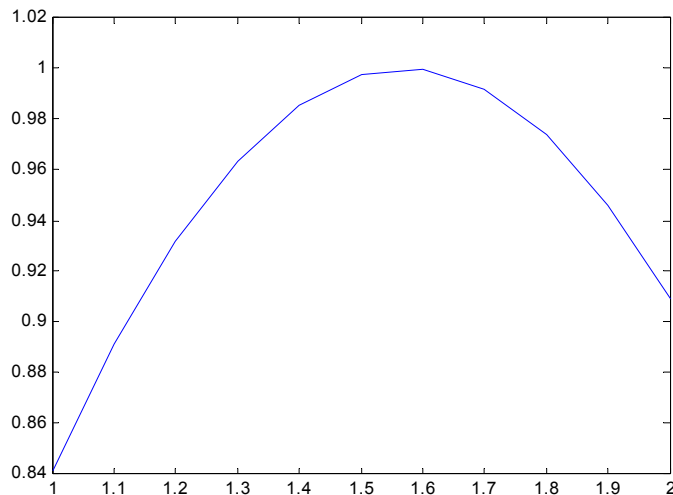
Časová osa

Vytvoření časové nebo jiné osy umožňuje příkaz ilustrovaný následujícím příkladem:

Příklad: Příkaz

```
t=1:0.1:2;
```

dává výsledek $t = [1.0 \quad 1.1 \quad 1.2 \quad \dots \quad 2.0]$.



Obrázek 13.6: Graf signálu se spojitým časem

Zobrazení funkce grafem

Při zavedení časové osy způsobem uvedeným v předchozím odstavci můžeme získat řádkový vektor hodnot funkce sinus pomocí příkazu

```
y=sin(t);
```

Zobrazení grafu funkce (chápané jako signálu se spojitým časem) čarou získáme pomocí příkazu

```
plot(t,y);
```

Do příkazového pole Matlabu se vrátíme např. stisknutím klávesy Esc. Zobrazení funkce (chápané jako signál s diskretním časem) jedenácti body dosáhneme zadáním příkazu

```
plot(t,y,'o');
```

Nejde-li o první použití příkazu plot, musíme myší kliknout na Figure No.1, abychom něco viděli.

Popis os umožňují příkazy xlabel a ylabel zařazené po příkazu plot.

Příklad:

```
xlabel('t');          ylabel('y');
```

Příklady dalších obměn příkazu plot:

```
plot(t,y,'*',t,y.*y,'--');    plot(y,'+');
```

Obrázky lze různě upravovat.

Příkaz subplot

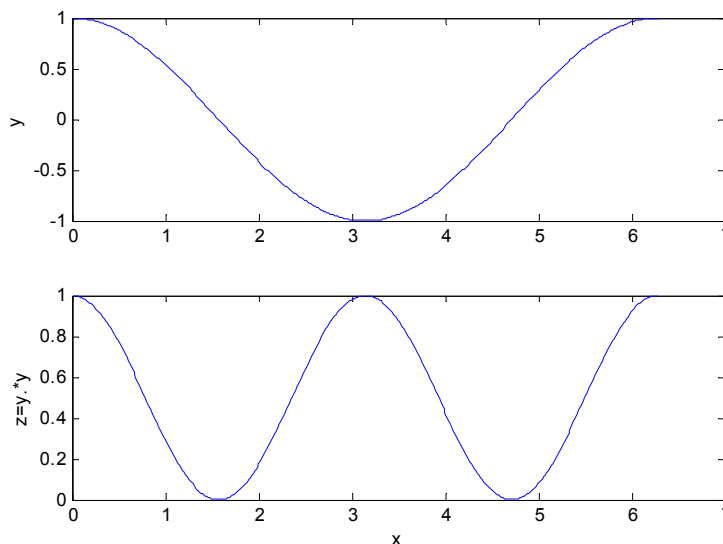
Příkaz `subplot` umožňuje nakreslit několik menších obrázků uspořádaných do řádků a sloupců v jediném obrázku. Syntaxe příkazu je jednoduchá. `subplot(m,n,p)` označuje p -tý prvek v matici obrázků (čteno po řádcích), matice má m řádků a n sloupců.

Příklad použití:

```
figure(1);
subplot(2,1,1);
plot(t,y);
ylabel('y');
subplot(2,1,2);
plot(t,z);
ylabel('z');
xlabel('t');
```

Budou nakresleny dva vodorovně podlouhlé obrázky nad sebou.

Rozsahy proměnných lze vymezit příkazem `axis` zařazeným po příkazu `plot`.



Obrázek 13.7: Příkaz `subplot`

Příkaz for

Příkaz `for` umožňuje opakované provádění nějakého příkazu nebo posloupnosti příkazů.

Příklad: `g=1;`

`m=10;`

`for k=1:m,`

`g=g+k*2;`

`end`

Zde, při $m=10$, bude hodnota g desetkrát zvětšena, její konečná hodnota je 111.

Poznámka: Doporučuje se dávat přednost operacím s maticemi před používáním cyklů. Výpočty jsou pak rychlejší.

Relační operátory

<, <=, >, >=, ==, ~=.

Podmíněné příkazy

Běh programu může být řízen příkazy s `if`.

Příklad: `if i==k`

`a=b+c;`

`else`

`a=b.*c;`

`end`

Funkce

Uživatel si může zapsat libovolnou funkci. Klikne myší na File, New, M-file a píše například:

```
function y=prumer(a,b)
```

```
y=(a+b)/2;
```

Funkci je nutno uložit kliknutím na File, Save a vlastním uložením pod jménem `prumer.m`

Návrat do příkazového pole je možný např. kliknutím do příkazového okna (MATLAB Command Window). Nyní již lze funkci používat.

Příklad:

```
x=2; y=4;
```

```
z=prumer(x,y)
```

```
z=
```

```
    3
```

Obdobným způsobem lze vytvářet, ukládat a volat i libovolné posloupnosti příkazů - skriptfilů.

Seznam použité literatury

- [1] BAUDOIN, G. – BERCHER, J.-F: Èlément de traitement du signal. Chambre de commerce et d'industrie de Paris, 1998.
- [2] BRIGHAM, E. O.: The Fast Fourier Transform. Englewood Cliffs, Prentice - Hall 1974.
- [3] COOLEY, J. W. – TUKEY, J. W.: An algorithm for the machine computation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 19, pp. 297-301, April 1965.
- [4] ČÍŽEK, V.: Diskrétní Fourierova transformace a její použití. Praha, Matematický seminář SNTL, 1981.
- [5] DUŠEK, F.: MATLAB a SIMULINK, úvod do používání. Skriptum ČVUT. Pardubice 2000.
- [6] HRDINA, Z. - VEJRAŽKA, F.: Signály a soustavy. Praha, Vydavatelství ČVUT 2000.
- [7] KAMEN, E. W.: Introduction to Signals and Systems. Second Edition. New York, Mac Millan Publ. Comp. 1990.
- [8] KWAKERNAAK, H.-SIVAN, R.: Modern Signals and Systems. Englewood Cliffs, Prentice Hall 1991.
- [9] LYNN, P. A.: The Analysis and Processing of signals. 3rd ed. MacMillan Education LTD. 1989.
- [10] McCLELLAN, J. H., SCHAFER, R. W., YODER, M. A.: DSP FIRST. A multimedia approach. Prentice-Hall 1998.
- [11] MITRA, S. K.: Digital Signal Processing. A Computer-Based Approach. McGraw-Hill 1998. New York.
- [12] ONDRÁČEK O.: Signály a sústavy. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 1999.
- [13] OPPENHEIM, A. V. - SCHAFER, R. W.: Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, Prentice Hall, Inc. 1975.
- [14] OPPENHEIM, A. V. - WILLSKY, A. S. - Nawab, S. H.: Signals and Systems. Second Edition, Prentice Hall, 1997.
- [15] SIEBERT, W.M.: Circuits, Signals, and Systems. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press 1986.
- [16] TRACHTMAN, A. M.: Vvedenie v obobščenuju spektralnuju teoriju signalov. Moskva, 1972.
- [17] VÍCH, R.: Transformace Z a některá její použití. Praha, Matematický seminář SNTL 1979.