

Vícerozměrné statistické metody

Smysl a cíle vícerozměrné analýzy dat a modelování, vztah
jednorozměrných a vícerozměrných statistických metod

Jiří Jarkovský, Simona Littnerová

Průběh výuky

- 13 přednášek doplněných o praktické cvičení v SW
- Obsahem předmětu je přehled a úvod do praktické aplikace vícerozměrných statistických metod:
 - Shluková analýza
 - Ordinační metody
 - Základy vícerozměrné diskriminace
- Předpoklady ukončení
 - Účast na cvičení (první 3 termíny pouze přednášky, následně buď cvičení nebo kombinace přednášky a cvičení)
 - 3 průběžné testy (požadováno dosažení alespoň 50% bodů)
 - Písemná závěrečná zkouška (požadováno dosažení alespoň 50% bodů)

Plán přednášek

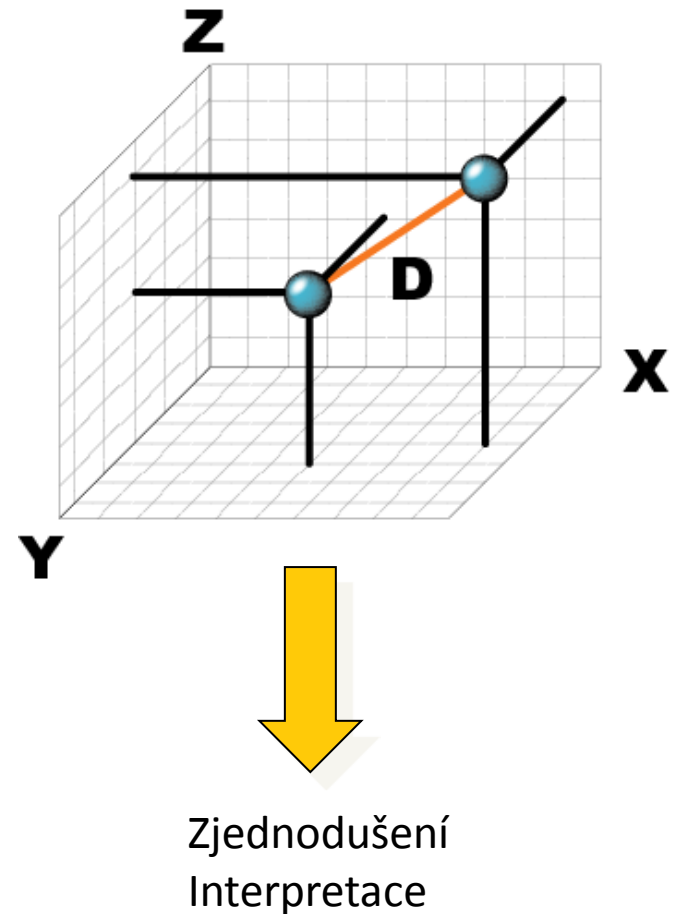
1. Smysl a cíle vícerozměrné analýzy dat a modelování, vztah jednorozměrných a vícerozměrných statistických metod
2. Vícerozměrné statistické rozdělení a testy, operace s vektory a maticemi
3. Podobnosti a vzdálenosti ve vícerozměrném prostoru, asociační matice I
4. Podobnosti a vzdálenosti ve vícerozměrném prostoru, asociační matice II
5. Shluková analýza - hierarchická
6. Shluková analýza - nehierarchická
7. Identifikace optimálního počtu shluků
8. Ordinační analýzy – principy redukce dimenzionality - PCA
9. Ordinační analýzy – FA
10. Ordinační analýzy – CA, DCA
11. Ordinační analýzy – MDS
12. Ordinační analýza – vztah ordinačních prostorů (RDA, CCA, co-inertia, pouze přehled)
13. Diskriminační analýza

Vícerozměrné statistické metody

Smysl a cíle vícerozměrné analýzy dat

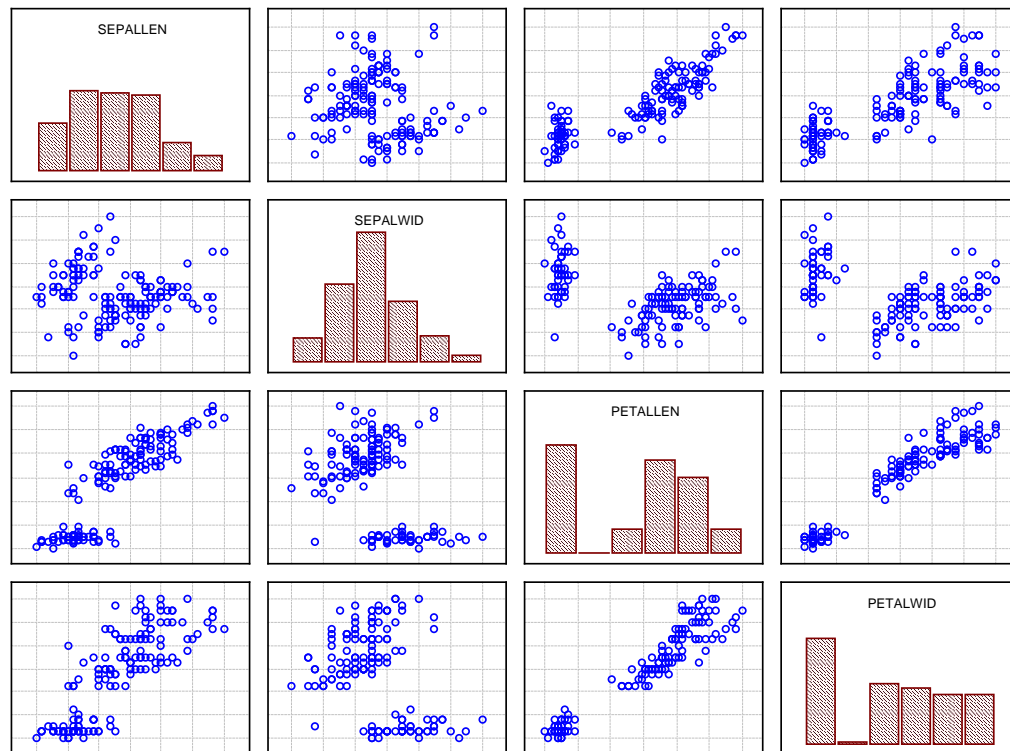
Cíle vícerozměrné analýzy dat

- Každý objekt reálného světa můžeme popsat jeho pozicí v mnohorozměrném prostoru, v extrémním případě jde až o desetitisíce dimenzí
- Více než 3D prostor je pro nás vizuálně neuchopitelný a hledání vztahů ve více než 3 dimenzích je problematické
- Vícerozměrná analýza se tento problém snaží řešit různými přístupy:
 - Redukce dimenzionality dat „sloučením“ korelovaných proměnných do menšího počtu „faktorových“ proměnných
 - Identifikace shluků objektů ve vícerozměrném prostoru a následná redukce vícedimenzionálního problému kategorizací objektů do zjištěných shluků



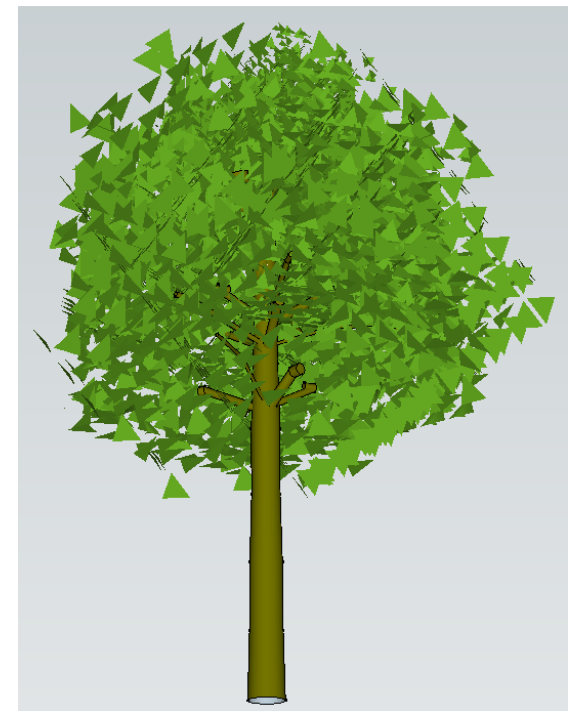
Příklad vícerozměrného popisu objektů

	Dimenze 1	Dimenze 2	Dimenze 3	Dimenze 4
ID objektu	SEPALLEN	SEPALWID	PETALLEN	PETALWID
SETOSA	5.0	3.3	1.4	0.2
VIRGINIC	6.4	2.8	5.6	2.2
VERSCOL	6.5	2.8	4.6	1.5
VIRGINIC	6.7	3.1	5.6	2.4
VIRGINIC	6.3	2.8	5.1	1.5
SETOSA	4.6	3.4	1.4	0.3
VIRGINIC	6.9	3.1	5.1	2.3
VERSCOL	6.2	2.2	4.5	1.5
VERSCOL	5.9	3.2	4.8	1.8
SETOSA	4.6	3.6	1.0	0.2
...



Vícerozměrná analýza dat = pohled ze správného úhlu

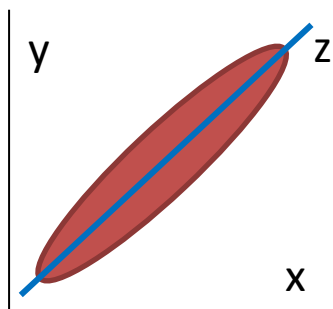
- Vícerozměrná analýza nám pomáhá nalézt v x-dimenzionálním prostoru nejvhodnější pohled na data poskytující maximum informací o analyzovaných objektech



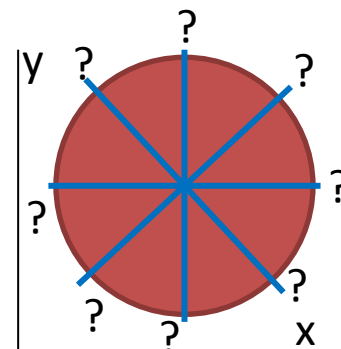
Všechny obrázky ukazují stejný objekt z různých úhlů v 3D prostoru.

Obecný princip redukce dimenzionality dat

- V převážné většině případů existují mezi dimenzemi korelační vztahy, tedy dimenze se navzájem vysvětlují a pro popis kompletní informace v datech není třeba všech dimenzí vstupního souboru
- Všechny tzv. ordinační metody využívají principu identifikace korelovaných dimenzí a jejich sloučení do souhrnných nových dimenzí zastupujících několik dimenzí vstupního souboru
- Pokud mezi dimenzemi vstupního souboru neexistují korelace, nemá smysl hledat zjednodušení vícerozměrné struktury takového souboru !!!



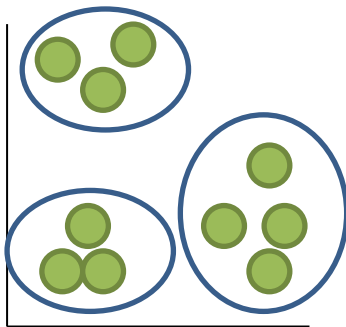
Jednoznačný vztah dimenzí x a y umožňuje jejich nahrazení jednou novou dimenzí z



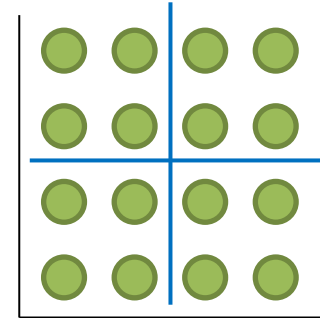
V případě neexistence vztahu mezi x a y nemá smysl definovat nové dimenze – nepřináší žádnou novou informaci oproti x a y

Obecný princip hledání shluků v datech

- Vzájemnou pozici objektů ve vícerozměrném prostoru lze popsat jejich vzdáleností
- Dle vzdálenosti objektů je můžeme slučovat do shluků a přiřazení objektů ke shlukům ve vícerozměrném prostoru následně využít pro zjednodušení jejich x-dimenzionálního popisu
- Smysluplnost výsledků shlukování závisí jednak na objektivní existenci shluků v datech, jednak na arbitrárně nastavených kritériích definice shluků



Jednoznačné odlišení existujících shluků v datech (obdoba multimodálního rozložení)



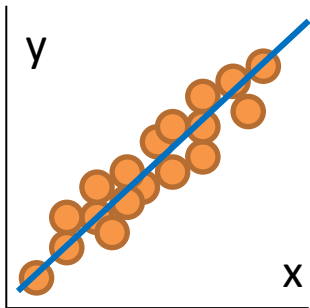
Shluková analýza je možná i v tomto případě, nicméně hranice shluků jsou dány pouze naším rozhodnutím.

Omezení vícerozměrné analýzy dat

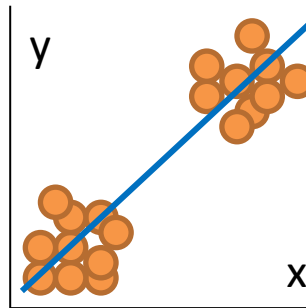
- Vícerozměrná analýza může přinést zjednodušení dimenzionality dat pouze v případě, kdy data skrývají nějakou identifikovatelnou vícerozměrnou strukturu
 - Mezi dimenzemi existují vztahy (korelace) umožňující nahrazení korelovaných dimenzí zástupnou souhrnnou dimenzí
 - Objekty vytváří v x -dimenzionálním prostoru shluky nebo jiné nenáhodné struktury
- Pro náhodně rozmístěné objekty bez korelací mezi dimenzemi jejich x -dimenzionálního prostoru nepřináší vícerozměrná analýza žádné nové informace oproti původním dimenzím
- Důležitý je poměr počtu objektů (řádky tabulky) a dimenzí (sloupce tabulky). Čím je tento poměr menší tím větší je šance, že výsledky analýzy jsou ovlivněny náhodnými procesy. Za minimální poměr pro získání validních výsledků je považováno 10 objektů na 1 dimenzi.
- Pro vícerozměrné analýzy platí obdobné předpoklady jako pro jednorozměrnou statistickou analýzu; vzhledem k jejich možnému porušení na úrovni kombinace několika dimenzí je tyto předpoklady třeba kontrolovat ještě pečlivěji než u jednorozměrné analýzy
- Kromě klasických statistických předpokladů je při vícerozměrných analýzách třeba věnovat pozornost výběru metrik vzdáleností mezi objekty (klíčové ovlivnění interpretace výsledků) a jejich předpokladům
- Pokud výsledky vícerozměrné analýzy nejsou interpretovatelné je třeba zvážit, zda použití vícerozměrné analýzy přináší oproti sadě jednorozměrných analýz nějakou přidanou hodnotou
- Využitelná vícerozměrná analýza by měla být:
 - Vybrána vhodná metoda pro řešení daného problému
 - korektně spočítána za dodržení všech předpokladů
 - Interpretovatelná a přinášející novou informaci oproti analýze původních dimenzí

Korelace jako princip výpočtu vícerozměrných analýz

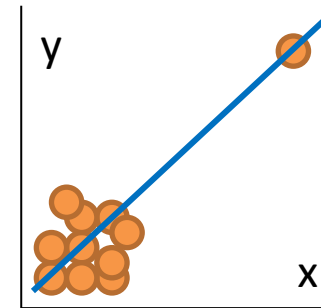
- Kovariance a Pearsonova korelace je základem analýzy hlavních komponent, faktorové analýzy jakož i dalších vícerozměrných analýz pracujících s lineární závislostí proměnných
- Předpokladem výpočtu kovariance a Pearsonovy korelace je:
 - Normalita dat v obou dimenzích
 - Linearita vztahu proměnných
- Pro vícerozměrné analýzy je nejzávažnějším problémem přítomnost odlehlých hodnot



Lineární vztah –
bezproblémové použití
Personovy korelace



Korelace je dána dvěma skupinami
hodnot – vede k identifikaci skupin
objektů v datech



Korelace je dána odlehlou
hodnotu – analýza popisuje
pouze vliv odlehlé hodnoty

Analýza kontingenčních tabule jako princip výpočtu vícerozměrných analýz

- Abundance taxonů (nebo počet jakýchkoliv objektů) na lokalitách lze brát jako kontingenční tabulku a mírou vztahu mezi řádky (lokality) a sloupci (taxony) je velikost chi-kvadrátu

$$\chi^2_{(1)} = \frac{\left[\begin{array}{cc} \text{pozorovaná} & \text{očekávaná} \\ \text{četnost} & \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\text{očekávaná četnost}}$$

Počítáno pro každou buňku tabulky

	☠	😊
A	10	0
B	0	10

Pozorovaná tabulka

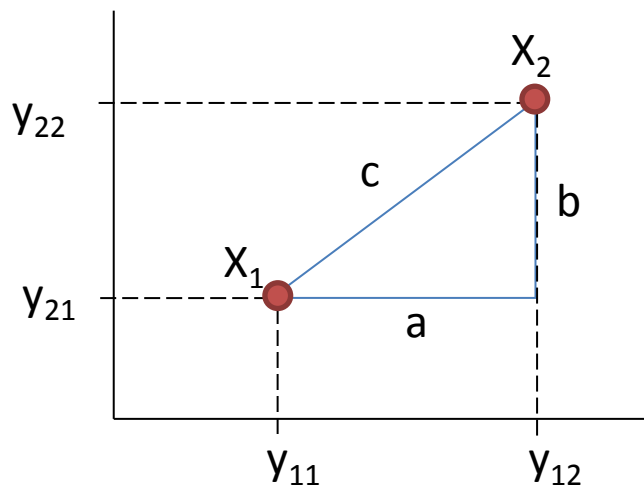
	☠	😊
A	5	5
B	5	5

Očekávaná tabulka

Hodnota chi-kvadrátu definuje míru odchylky dané buňky (v našem kontextu vztahu taxon-lokalita) od situace, kdy mezi řádky a sloupci (taxon-lokalita) není žádný vztah

Euklidovská vzdálenost jako princip výpočtu vícerozměrných analýz

- Nejsnáze představitelným měřítkem vztahu dvou objektů ve vícerozměrném prostoru je jejich vzdálenost
- Nejjednodušším typem této vzdálenosti (bohužel s omezeným použitím na data společenstev) je Euklidovská vzdálenost vycházející z Pythagorovy věty



$$D_1(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{j=1}^p (y_{1j} - y_{2j})^2}$$

Základní typy vícerozměrných analýz

SHLUKOVÁ ANALÝZA

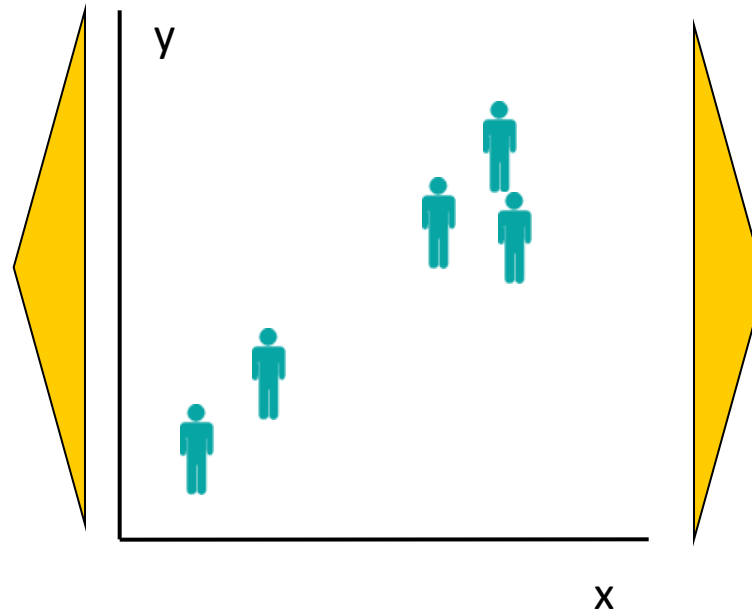
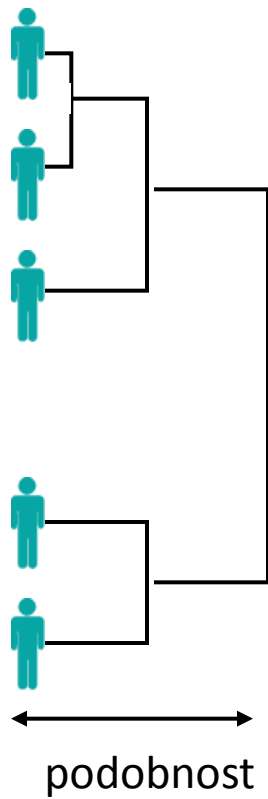
- vytváření shluků objektů na základě jejich podobnosti
- identifikace typů objektů

ORDINAČNÍ METODY

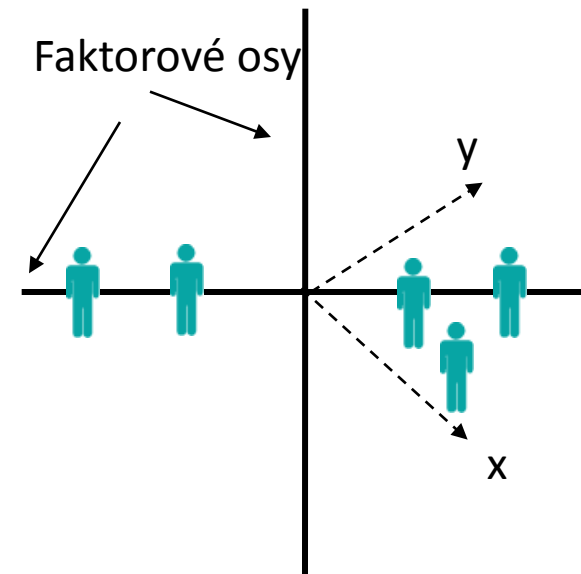
- zjednodušení vícerozměrného problému do menšího počtu rozměrů
- principem je tvorba nových rozměrů, které lépe vyčerpávají variabilitu dat

Typy vícerozměrných analýz

SHLUKOVÁ ANALÝZA



ORDINAČNÍ METODY



Vícerozměrné statistické metody

Jednorozměrná statistická analýza jako předpoklad vícerozměrné
analýzy dat

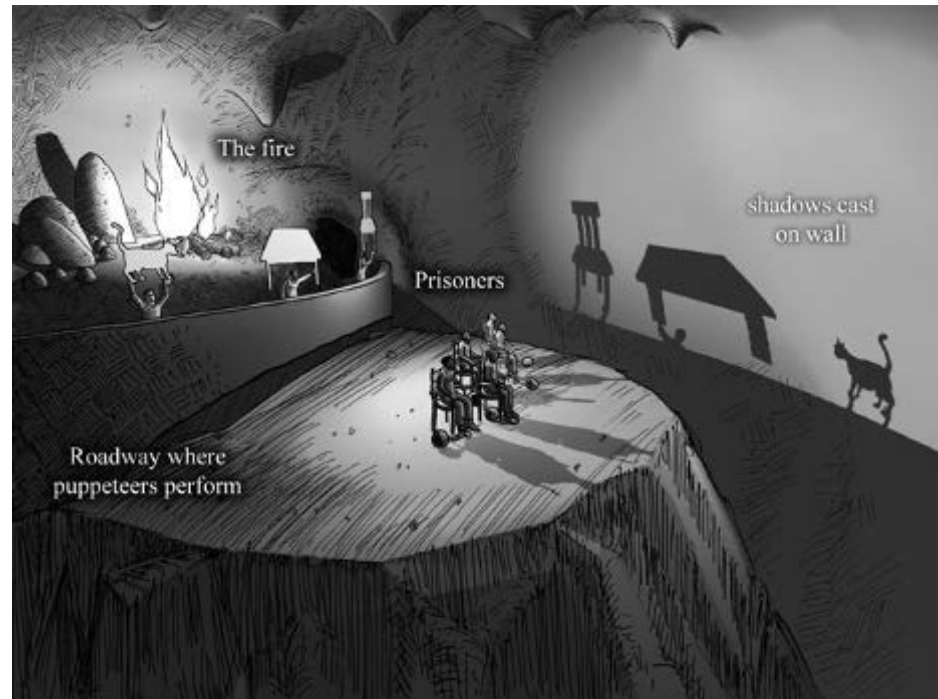
Význam statistické analýzy dat

- Výzkum na základě sběru dat je naším způsobem porozumění realitě
- Ale jak přesné a pravdivé je naše porozumění?



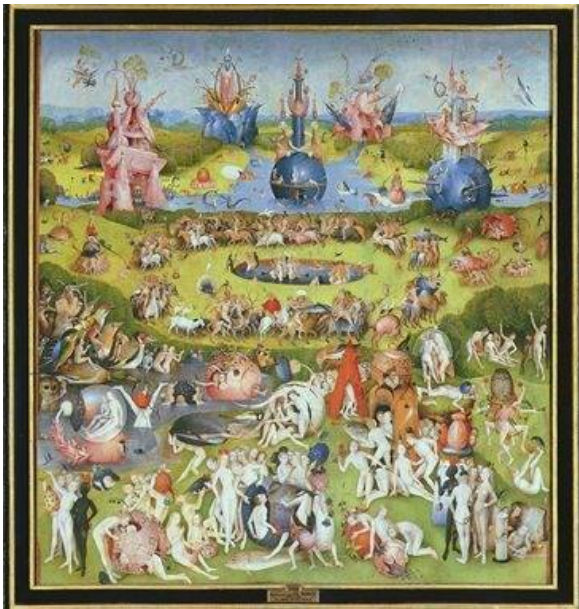
Statistika je jedním z nástrojů vnášejících do našich výsledků určitou spolehlivost.

Statistiku můžeme považovat za ekvivalent k mikroskopu či jinému laboratornímu nástroji



Variabilita jako základní pojem ve statistice

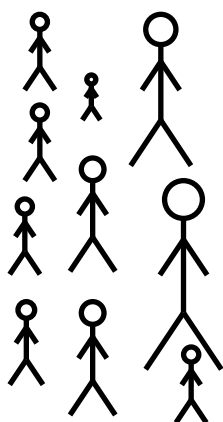
- Naše realita je variabilní a statistika je vědou zabývající se variabilitou
- Korektní analýza variabilita a její pochopení přináší užitečné informace o naší realitě
- V případě deterministického světa by statistická analýza nebyla potřebná



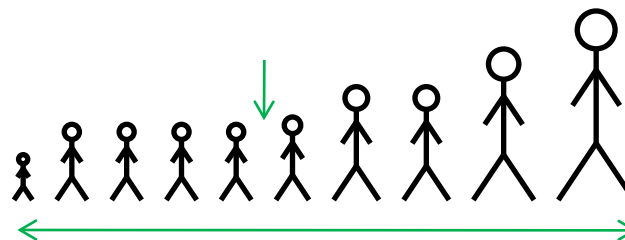
Práce s variabilitou v analýze dat

- V analýze dat existují dva hlavní přístupy k práci s variabilitou

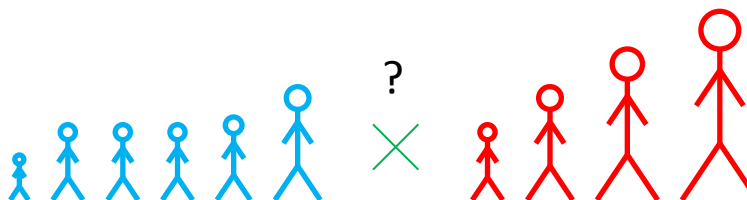
Variabilita dat



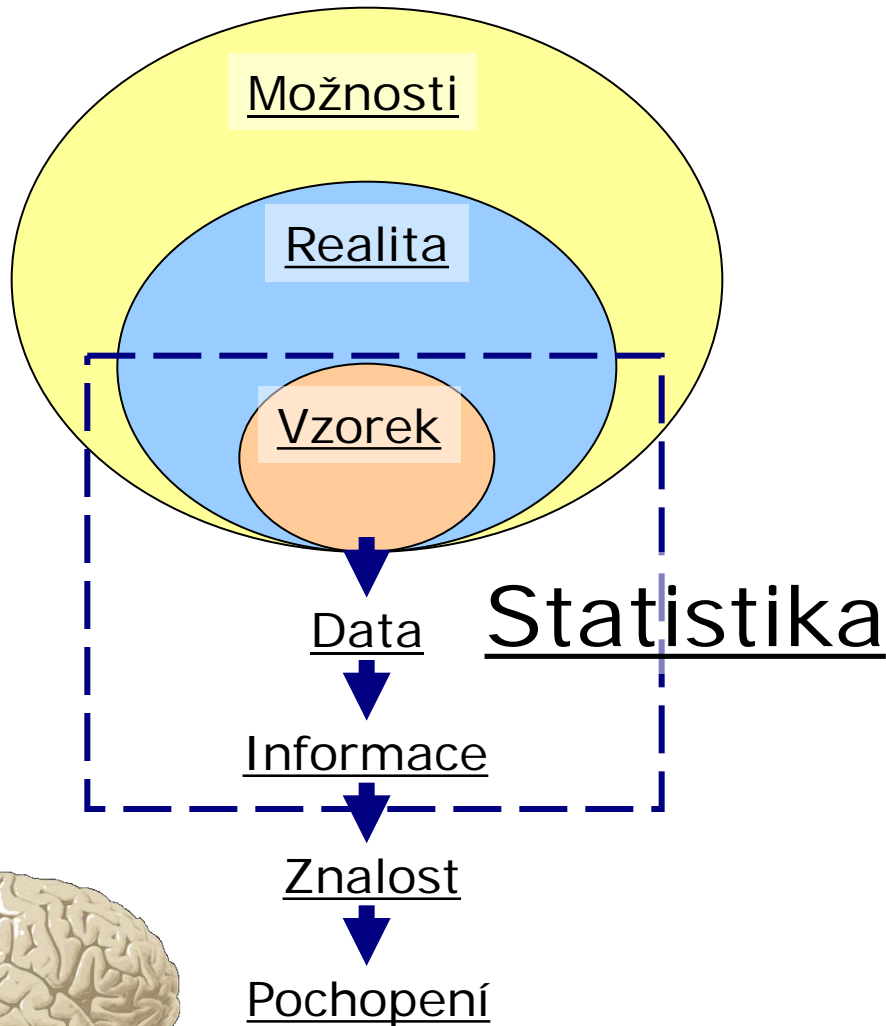
Popisná analýza: charakterizace variability



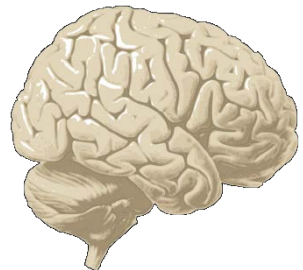
Testování hypotéz: vysvětlení variability



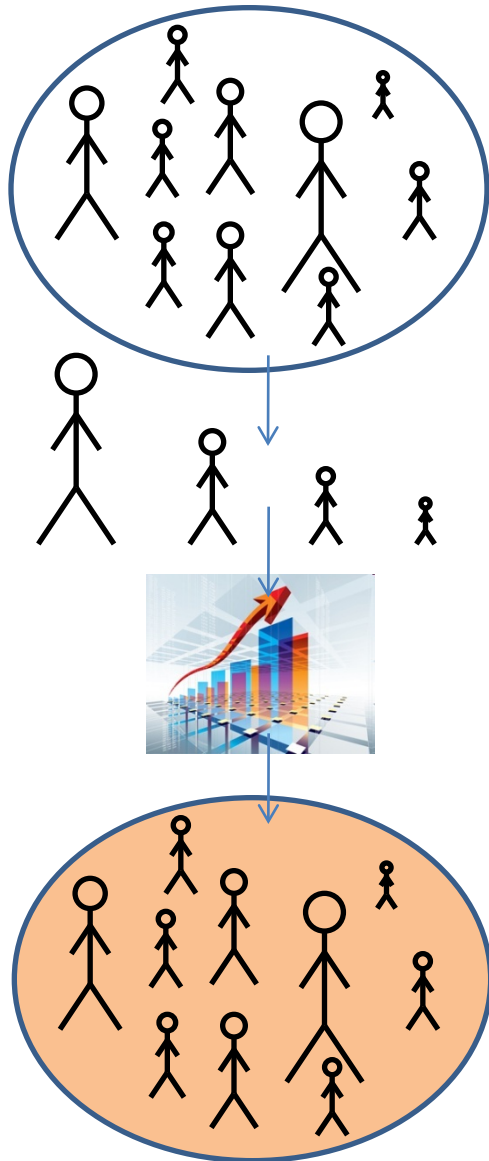
Co může statistika říci o naší realitě?



- Statistika není schopna činit závěry o jevech neobsažených v našem vzorku.
- Statistika je nasazena v procesu získání informací z vzorkovaných dat a je podporou v získání naší znalosti a pochopení problému.
- Statistika není náhradou naší inteligence !!!



Statistika a zobecnění výsledků



***Neznámá
cílová populace***

Vzorek

Analýza

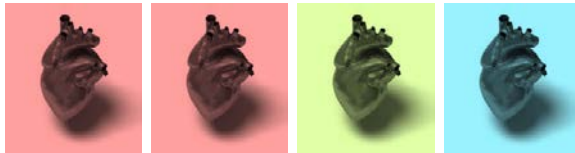
***Díky zobecnění výsledků
známe vlastnosti cílové
populace***

- Cílem analýzy není pouhý popis a analýza vzorku, ale zobecnění výsledků ze vzorku na jeho cílovou populaci
- Pokud vzorek nereprezentuje cílovou populaci, vede zobecnění k chybným závěrům

Vzorkování a jeho význam ve statistice

- Statistika hovoří o realitě prostřednictvím vzorku!!!
- Statistické předpoklady korektního vzorkování je nutné dodržet

- Náhodný výběr z cílové populace
- Representativnost: struktura vzorku musí maximálně reflektovat realitu



- Nezávislost: několikanásobné vzorkování téhož objektu nepřináší ze statistického hlediska žádnou novou informaci



Velikost vzorku a přesnost statistických výstupů

- Existuje skutečné rozložení a skutečný průměr měřené proměnné

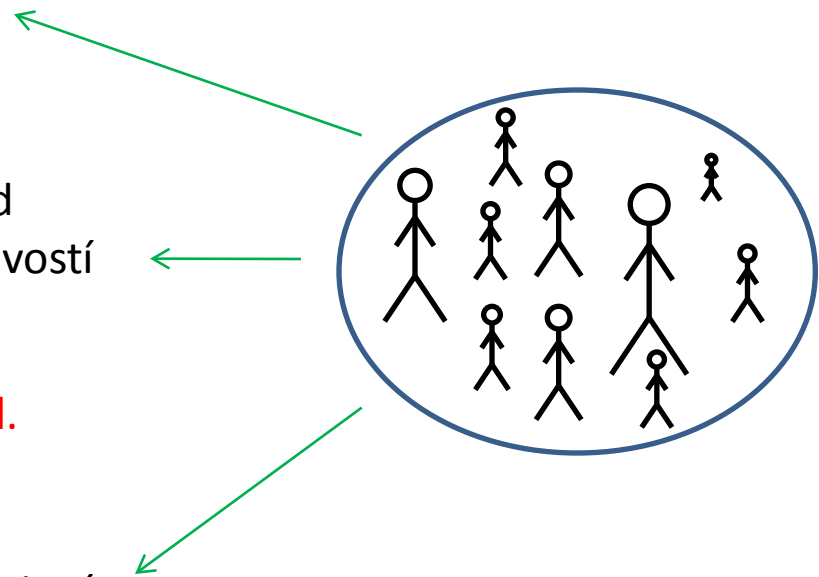
- Z jednoho měření nezjistíme nic



- Vzorek určité velikosti poskytuje odhad reálné hodnoty s definovanou spolehlivostí



- Vzorkování všech existujících objektů poskytne skutečnou hodnotu dané popisné statistiky, nicméně tento přístup je ve většině případech nereálný.



Předpoklady statistické analýzy

- WWW.WIKIPEDIA.ORG:
 - Statistika je matematickou vědou zabývající se shromážděním, analýzou, interpretací, vysvětlením a prezentací dat. Může být aplikována v širokém spektru vědeckých disciplín od přírodních až po sociální vědy. Statistika je využívána i jako podklad pro rozhodování, kdy nicméně může být záměrně i nevědomky zneužita.

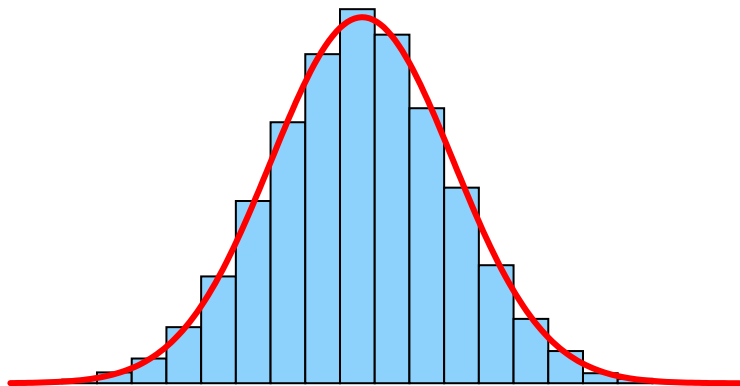


- Statistika využívá matematické modely reality k zobecnění výsledků experimentů a vzorkování.
- Statistika funguje korektně pouze pokud jsou splněny předpoklady jejích metod a modelů.

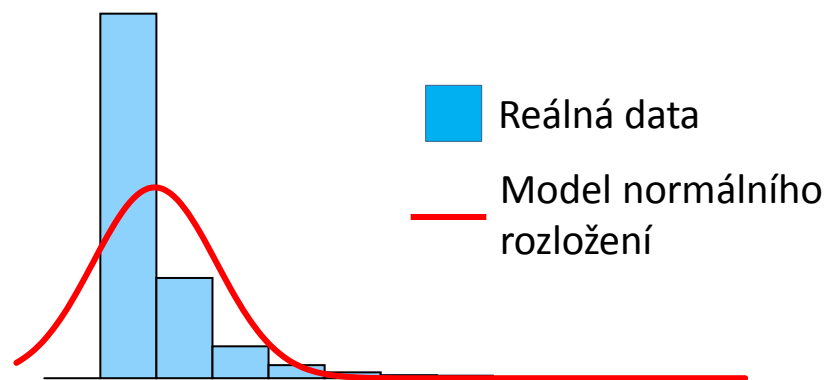
Normální rozložení jako předpoklad statistické analýzy dat

- Normální rozložení (Gaussova křivka) je jedním z hlavních modelů ve statistické analýze dat
- Řada metod popisné statistiky je založena na modelu normálního rozložení
 - Průměr, směrodatná odchylka atd.
- Řada metod testování hypotéz je založena na modelu normálního rozložení
 - T-test, ANOVA, korelace, regrese

Průměr a směrodatná odchylka
dobře popisují realitu

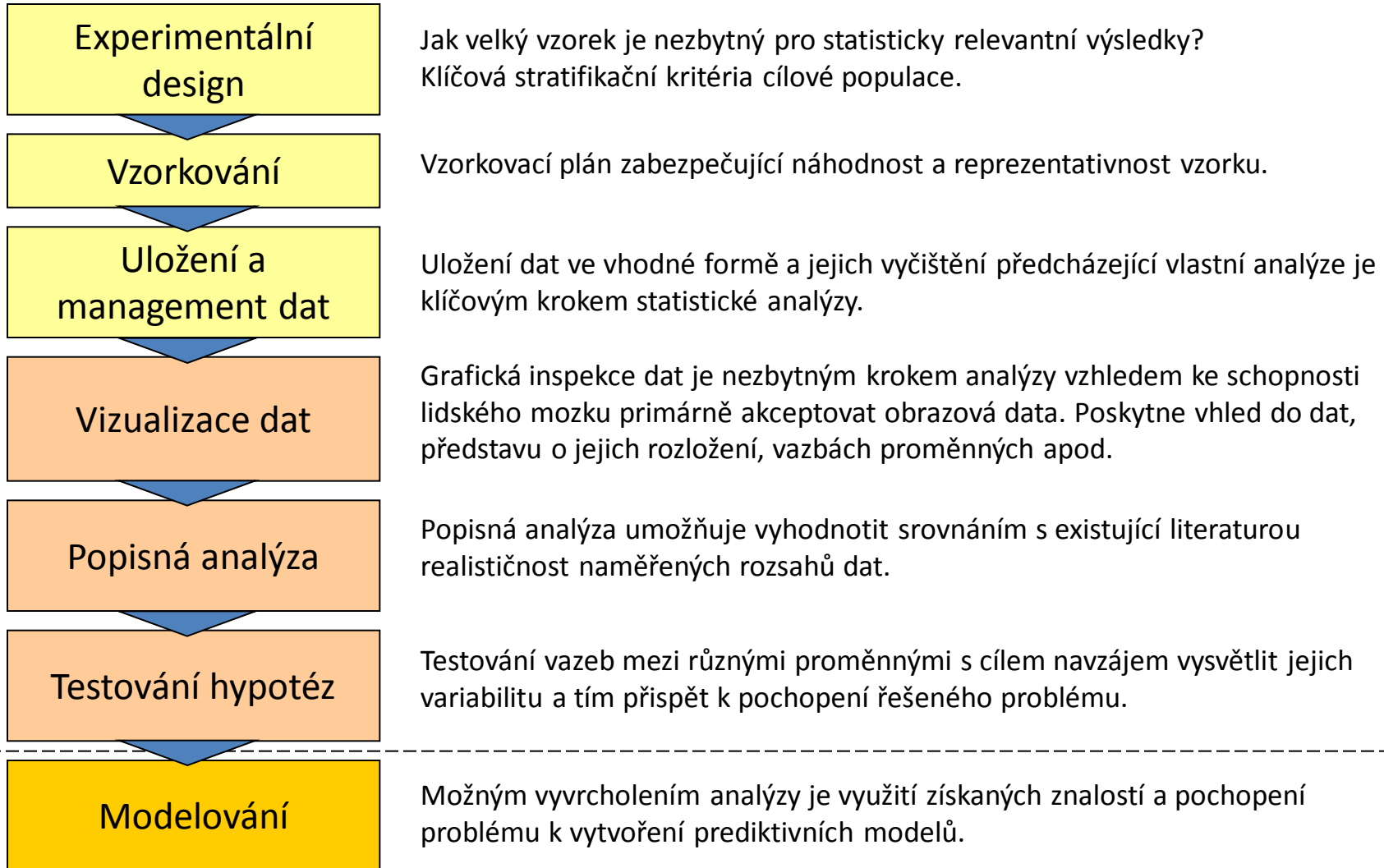


Průměr a směrodatná odchylka
nepopisují realitu



- Použití modelu je možné pouze pokud reálná data odpovídají danému modelovému rozložení

Obecné schéma aplikace statistické analýzy



Vícerozměrné statistické metody

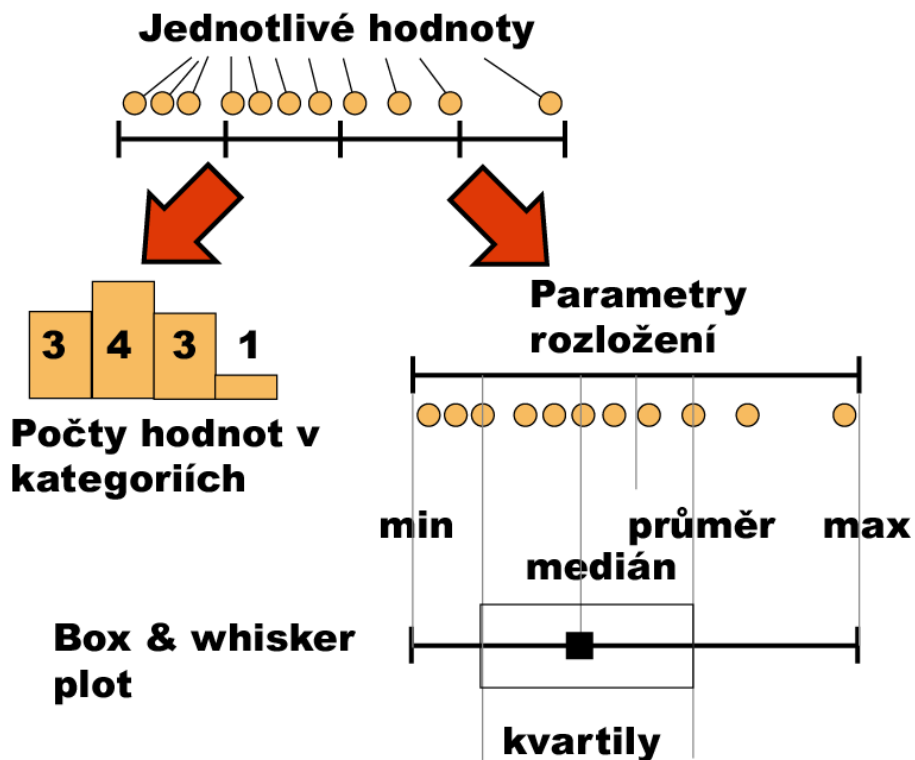
Popisná statistika a její spolehlivost

Typy proměnných a jejich popisné statistiky

- Kvalitativní/kategorická
 - binární - ano/ne
 - nominální - A,B,C ... několik kategorií
 - ordinální - $1 < 2 < 3$...několik kategorií a můžeme se ptát, která je větší
 - **Popis procentuálním zastoupením kategorií**

- Kvantitativní
 - nespojitá – čísla, která však nemohou nabývat všech hodnot (např. počet porodů)
 - spojitá – teoreticky jsou možné všechny hodnoty (např. krevní tlak)
 - **Popis celou řadou deskriptivních statistik (průměr, medián, percentily, směrodatná odchylka, rozsah hodnot apod.)**

Řada dat a její vlastnosti



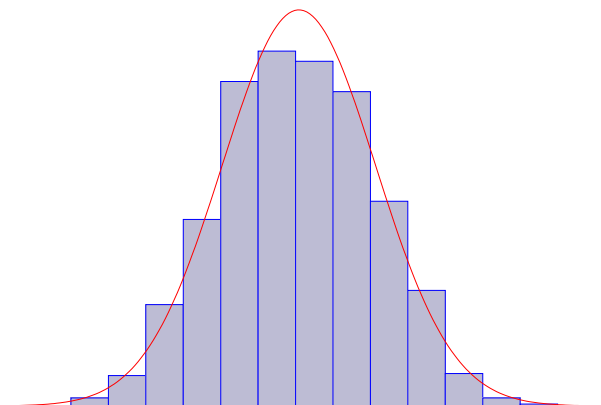
Kvalitativní data

Tabulka s četností jednotlivých kategorií.

Kategorie	Četnost
B	5
C	8
D	1

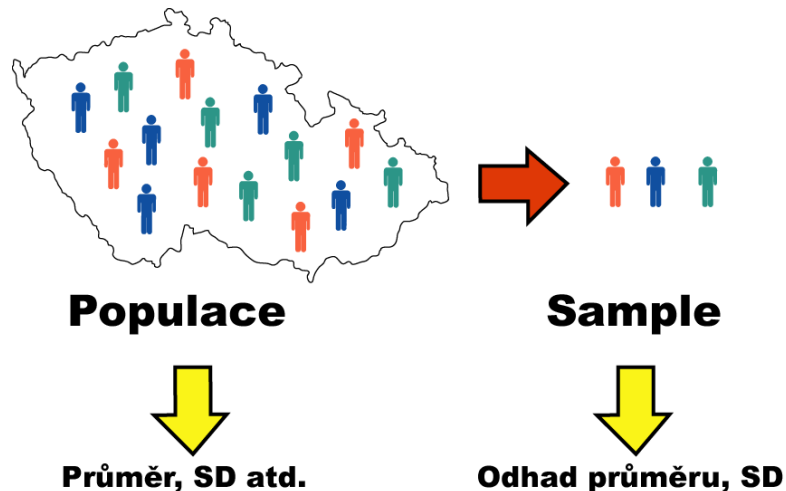
Kvantitativní data

Četnost hodnot rozložení v jednotlivých intervalech.



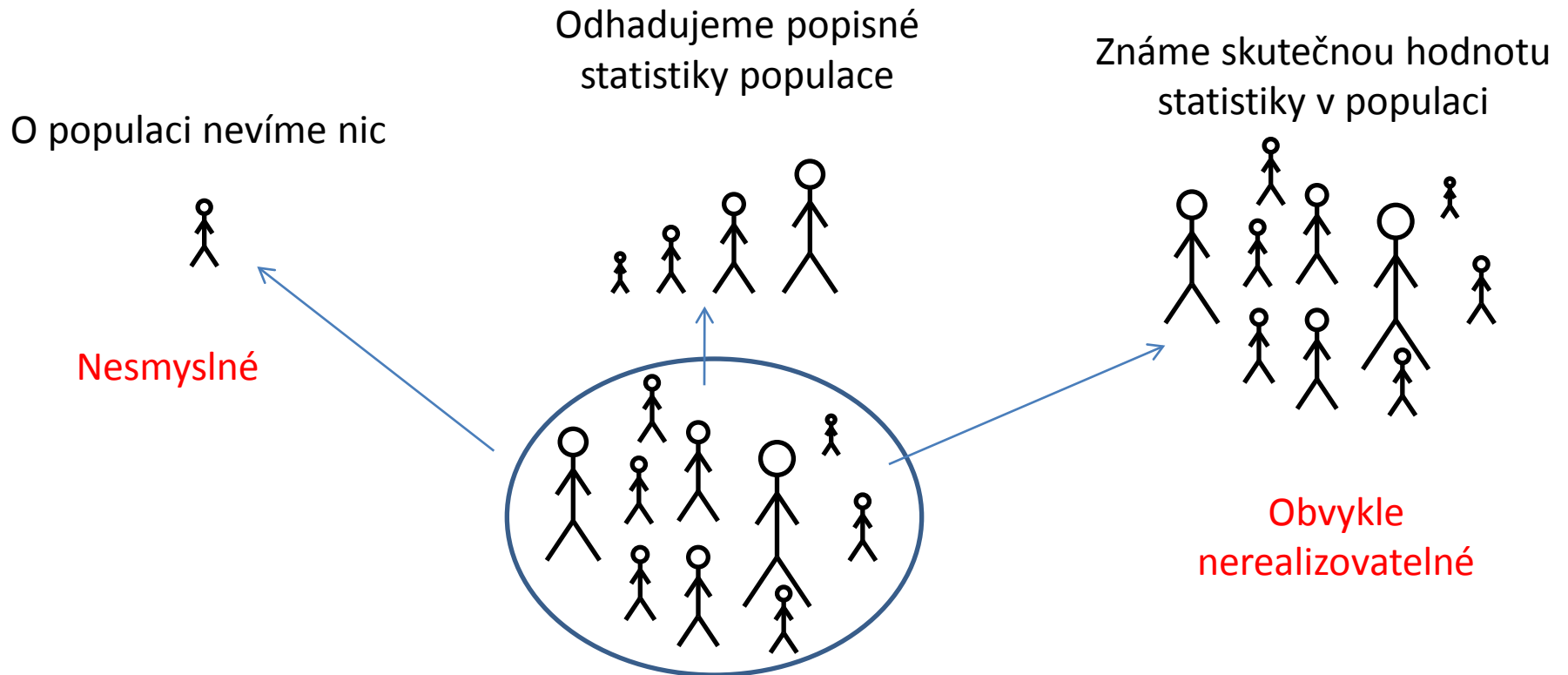
Populace a vzorek

- Populace představuje veškeré možné objekty vzorkování, např. veškeré obyvatelstvo ČR při sledování na úrovni ČR, z populace získáme reálné parametry rozložení
- Z populace je prováděno vzorkování za účelem získání reprezentativního vzorku (sample) populace, toto vzorkování by mělo být náhodné, důležitá je také velikost vzorku, ze vzorku získáme odhady parametrů rozložení



Popisná statistika: odhad reality

- Při výpočtu popisné statistiky počítáme popisnou statistiku vzorku, která je zároveň odhadem pro celou cílovou populaci
- Skutečnou hodnotu statistiky v cílové populaci nemůžeme poznat bez vzorkování celé cílové populace

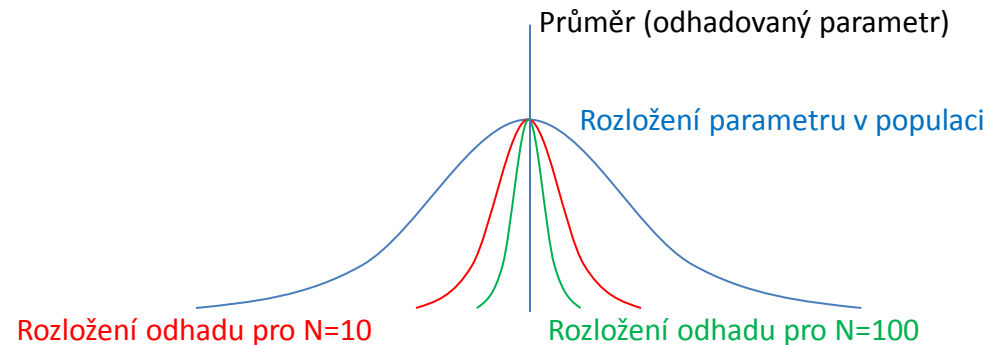


Koncept intervalu spolehlivosti a jeho interpretace

- Při výpočtu odhadu popisné statistiky nás zajímá nejenom její vlastní hodnota (bodový odhad) ale také její rozsah spolehlivosti

- Interval spolehlivosti závisí na:

- Velikosti vzorku
- Variabilitě dat
- Požadované spolehlivosti



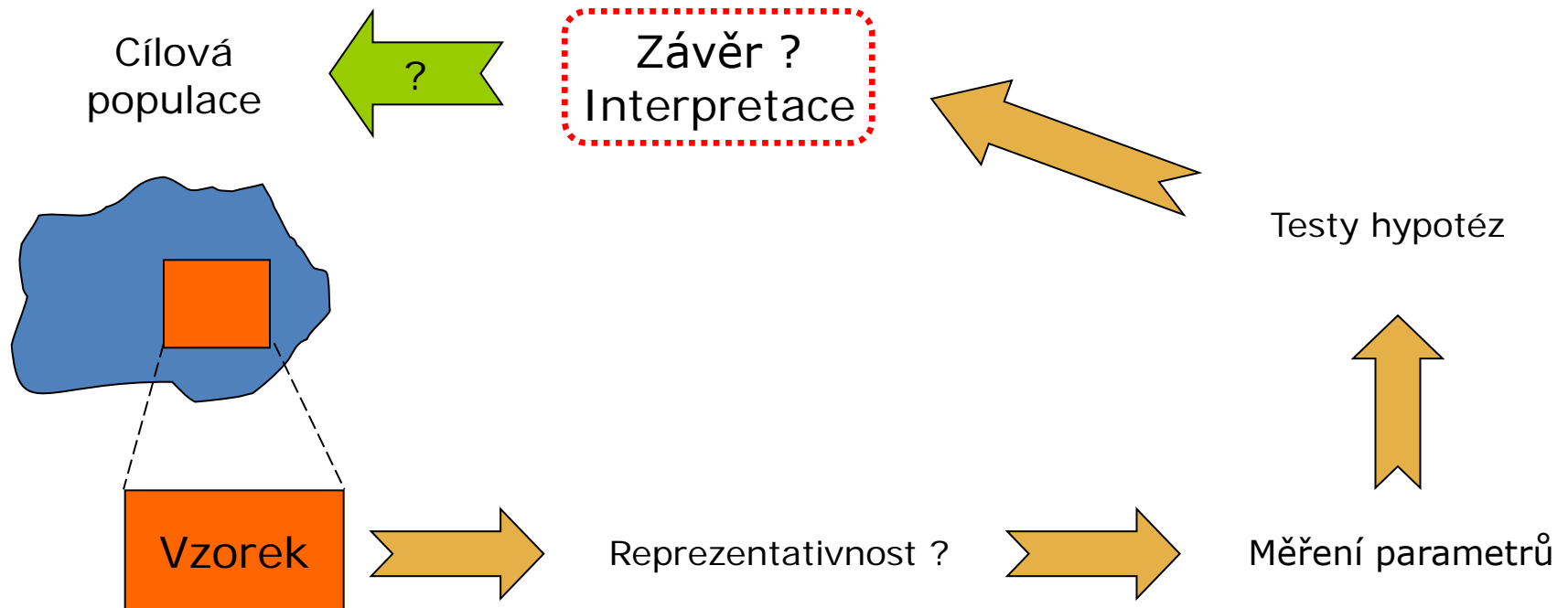
- Interval spolehlivosti lze spočítat pro jakoukoliv statistiku (průměr, směrodatná odchylka, korelace, procentuální zastoupení apod.)
- Interval spolehlivosti poskytuje vodítko jak „spolehlivé“ jsou naše výsledky a s jakou pravděpodobností jich je možné opakovaně dosáhnout
- 95% interval spolehlivosti je rozsah hodnot do něž se při opakování studie trefíme s 95% pravděpodobností
- **Tvrzení, že v rozsahu 95% intervalu spolehlivosti leží s 95% pravděpodobností skutečný průměr populace není pravdivé, skutečný průměr populace neznáme !!!**

Vícerozměrné statistické metody

Testování hypotéz

Testování hypotéz: základní principy

- Formulace hypotézy
- Výběr cílové populace a z ní reprezentativního vzorku
- Měření sledovaných parametrů
- Použití odpovídajícího testu \longrightarrow závěr testu
- Interpretace výsledků

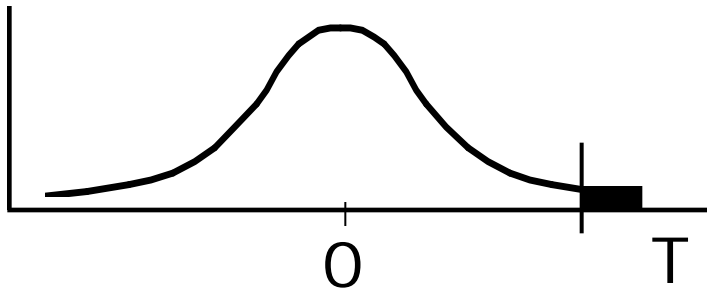


Statistické testování – základní pojmy

- Nulová hypotéza H_0 H_0 : sledovaný efekt je nulový
- Alternativní hypotéza H_A H_A : sledovaný efekt je různý mezi skupinami
- Testová statistika

$$\text{Testová statistika} = \frac{\text{Pozorovaná hodnota} - \text{Očekávaná hodnota}}{\text{Variabilita dat}} * \sqrt{\text{Velikost vzorku}}$$

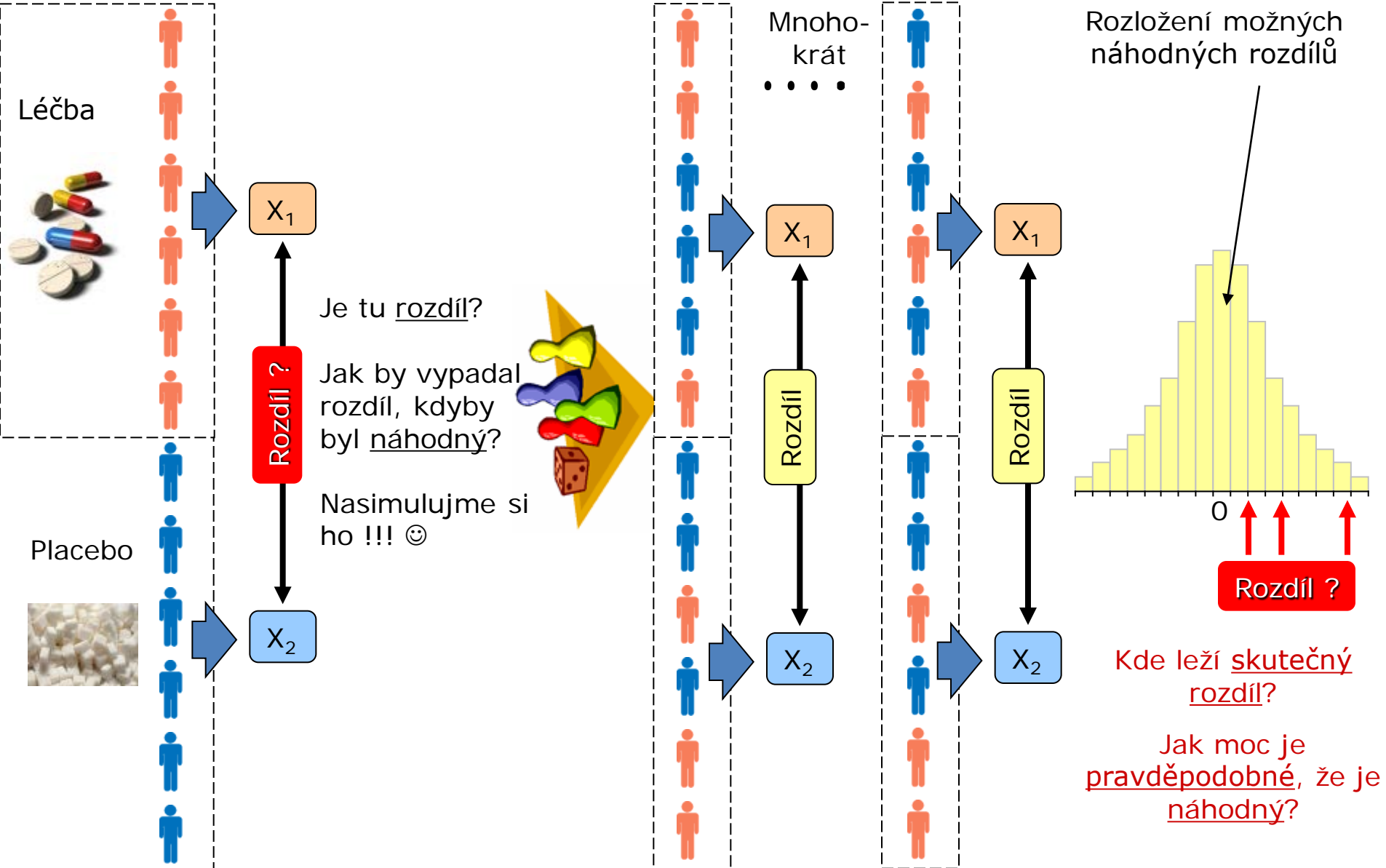
- Kritický obor testové statistiky



Statistické testování odpovídá na otázku zda je pozorovaný rozdíl náhodný či nikoliv. K odpovědi na otázku je využit statistický model – testová statistika.

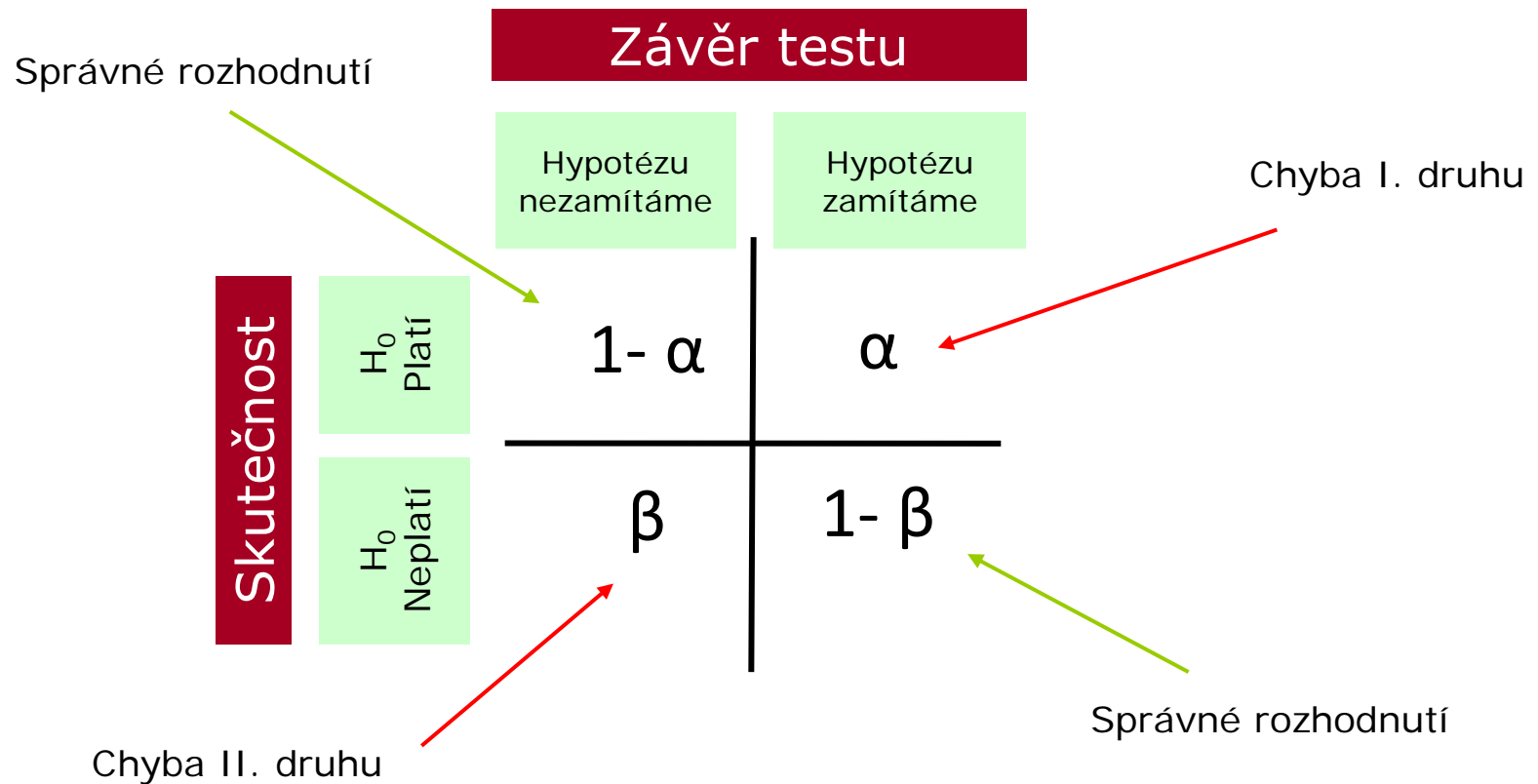
- Statistická významnost (p) – odvozena z testové statistiky a znamená pravděpodobnost, že pozorovaný rozdíl je výsledkem pouhé náhody

Co znamená pravděpodobnost, že pozorovaný rozdíl je výsledkem pouhé náhody ?



Možné chyby při testování hypotéz

- I přes dostatečnou velikost vzorku a kvalitní design experimentu se můžeme při rozhodnutí o zamítnutí/nezamítnutí nulové hypotézy dopustit chyby.

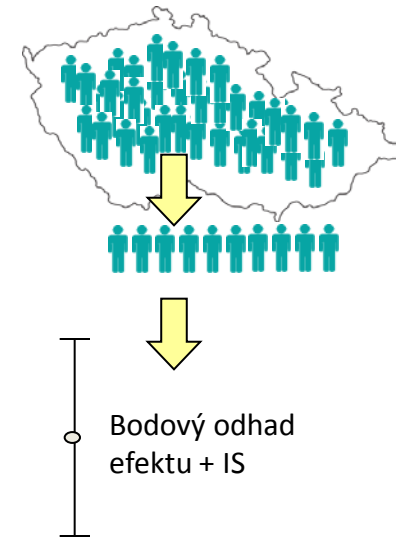
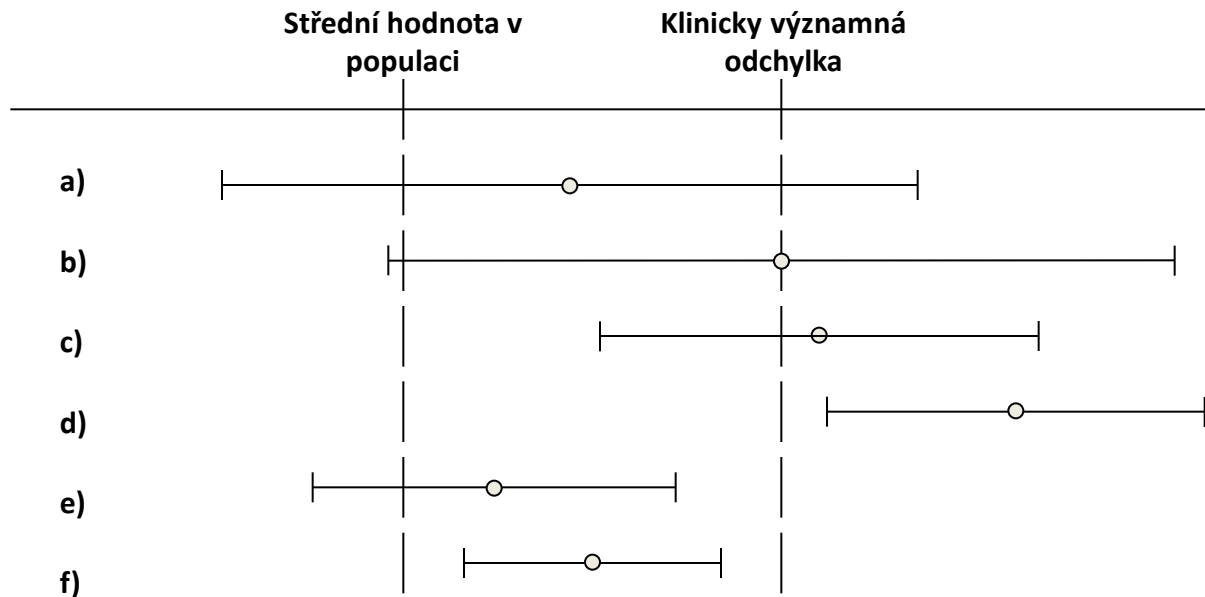


Klinická a statistická významnost

- Samotná statistická významnost nemá žádný reálný význam, je pouze měřítkem náhodnosti hodnoceného jevu
- Pro vyhodnocení reálné významnosti je nezbytné znát i reálně významné hodnoty

		Praktická významnost	
		ANO	NE
Statistická významnost	ANO	OK, praktická i statistická významnost je ve shodě, jednoznačný závěr	Významný výsledek je statistický artefakt velkého vzorku, prakticky nevyužitelné
	NE	Výsledek může být pouhá náhoda, neprůkazný výsledek	OK, praktická i statistická významnost je ve shodě, jednoznačný závěr

Statistická vs. klinická významnost



Možnost	Statistická významnost	Klinická významnost
a)	ne	možná
b)	ne	možná
c)	ano	možná
d)	ano	ano
e)	ne	ne
f)	ano	ne

Parametrické vs. neparametrické testy

Parametrické testy

- Mají předpoklady o rozložení vstupujících dat (např. normální rozložení)
- Při stejném N a dodržení předpokladů mají vyšší sílu testu než testy neparametrické
- Pokud nejsou dodrženy předpoklady parametrických testů, potom jejich síla testu prudce klesá a výsledek testu může být zcela chybný a nesmyslný

Neparametrické testy

- Nemají předpoklady o rozložení vstupujících dat, lze je tedy použít i při asymetrickém rozložení, odlehlých hodnotách, či nedetekovatelném rozložení
- Snížená síla těchto testů je způsobena redukcí informační hodnoty původních dat, kdy neparametrické testy nevyužívají původní hodnoty, ale nejčastěji pouze jejich pořadí

One-sample vs. two sample testy

One – sample testy

- Srovnávají jeden vzorek (one sample, jednovýběrové testy) s referenční hodnotou (popřípadě se statistickým parametrem cílové populace)
- V testu je tedy srovnáváno rozložení hodnot (vzorek) s jediným číslem (referenční hodnota, hodnota cílové populace)
- Otázka položená v testu může být vztažena k průměru, rozptylu, podílu hodnot i dalším statistickým parametrům popisujícím vzorek

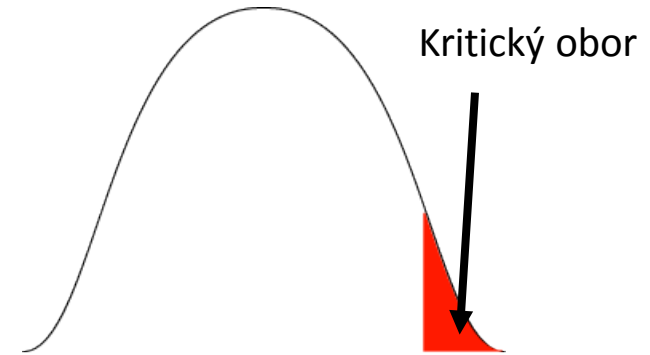
Two – sample testy

- Srovnávají navzájem dva vzorky (two sample, dvouvýběrové vzorky)
- V testu jsou srovnávány dvě rozložení hodnot
- Otázka položená v testu může být opět vztažena k průměru, rozptylu, podílu hodnot i dalším statistickým parametrům popisujícím vzorek
- Kromě testů pro dvě skupiny hodnot existují samozřejmě i testy pro více skupin dat

One-tailed vs. Two-tailed tests

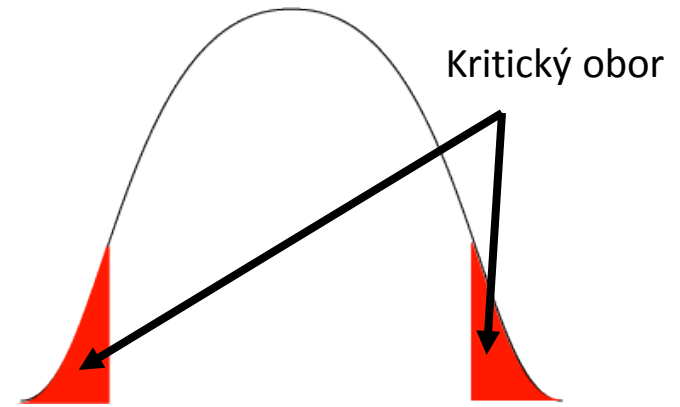
One – tailed testy

- Hypotéza testu je postavena asymetricky, tedy ptáme se na větší než/ menší než
- Test může mít pouze dvojí výstup – jedna z hodnot je větší (menší) než druhá a všechny ostatní případy



Two – tailed testy

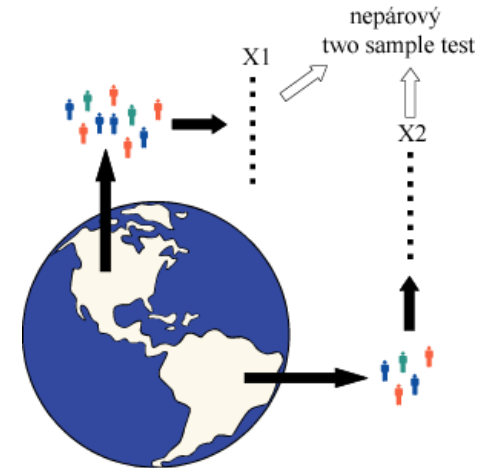
- Hypotéza testu se ptá na otázku rovná se/nerovná se
- Test může mít trojí výstup – menší - rovná se – větší než
- Situace nerovná se je tedy souhrnem dvou možných výstupů testu (menší+větší)



Nepárový vs. párový design

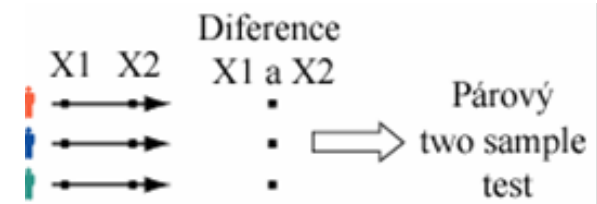
Nepárový design

- Skupiny srovnávaných dat jsou na sobě zcela nezávislé (též nezávislý, independent design), např. lidé z různých zemí, nezávislé skupiny pacientů s odlišnou léčbou atd.
- Při výpočtu je nezbytné brát v úvahu charakteristiky obou skupin dat



Párový design

- Mezi objekty v srovnávaných skupinách existuje vazba, daná např. člověkem před a po operaci, reakce stejného kmene krys atd.
- Vazba může být buď přímo dána nebo pouze předpokládána (v tom případě je nutné ji ověřit)
- Test je v podstatě prováděn na diferencích skupin, nikoliv na jejich původních datech



Statistické testy a normalita dat

- Normalita dat je jedním z předpokladů tzv. parametrických testů (testů založených na předpokladu nějakého rozložení) – např. *t*-testy
- Pokud data nejsou normální, neodpovídají ani modelovému rozložení, které je použito pro výpočet (*t*-rozložení) a test tak může lhát
- Řešením je tedy:
 - Transformace dat za účelem dosažení normality jejich rozložení
 - Neparametrické testy – tyto testy nemají žádné předpoklady o rozložení dat

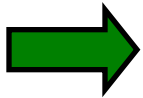
Typ srovnání	Parametrický test	Neparametrický test
2 skupiny dat nepárově:	Nepárový t-test	Mann Whitney test
2 skupiny dat párově:	Párový t-test	Wilcoxon test, sign test
Více skupin nepárově:	ANOVA	Kruskal- Wallis test
Korelace:	Pearsonův koeficient	Spearmanův koeficient

Vícerozměrné statistické metody

Základní statistické testy

One sample t-test

V případě one sample testů jde o srovnání výběru dat (tedy one sample) s cílovou populací. Pro parametrické testy musí mít datový soubor normální rozložení.



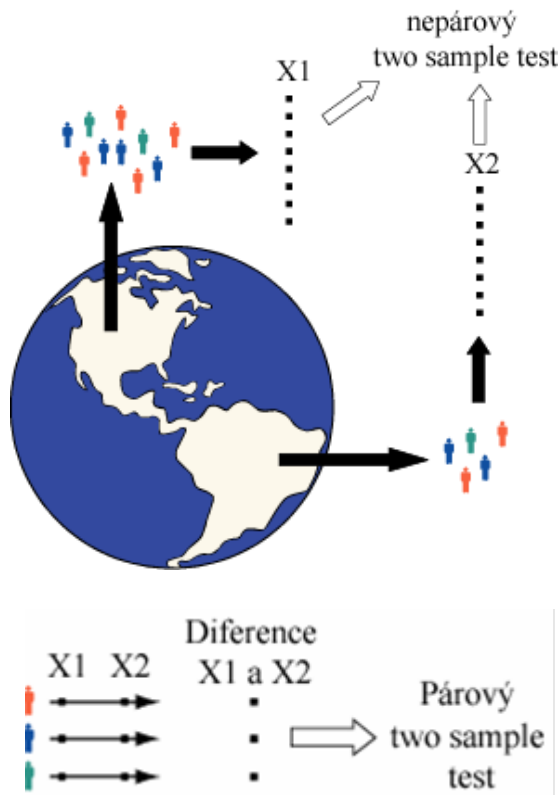
Průměr – cílová vs. výběrová populace

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n}$$

H_0	H_A	Testová statistika	Interval spolehlivosti
$\bar{x} \leq \mu$	$\bar{x} > \mu$	t	t > t_{1-α}⁽ⁿ⁻¹⁾
$\bar{x} \geq \mu$	$\bar{x} < \mu$	t	t < t_α⁽ⁿ⁻¹⁾
$\bar{x} = \mu$	$\bar{x} \neq \mu$	t	 t > t_{1-α/2}⁽ⁿ⁻¹⁾

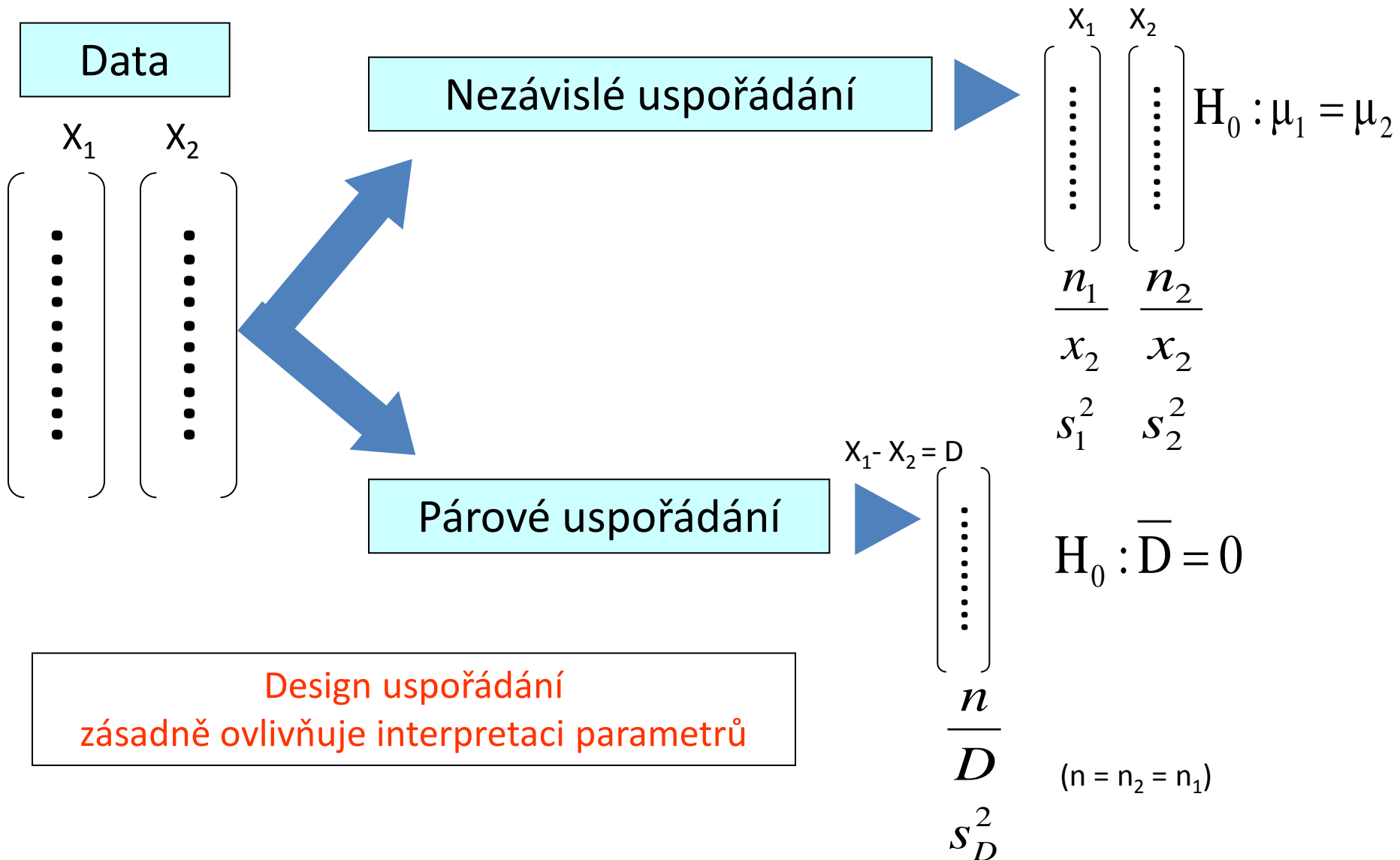
Dvouvýběrové testy: párové a nepárové

- Při použití two sample testů srovnáváme spolu dvě rozložení. Jejich základním dělením je podle designu experimentu na testy párové a nepárové.

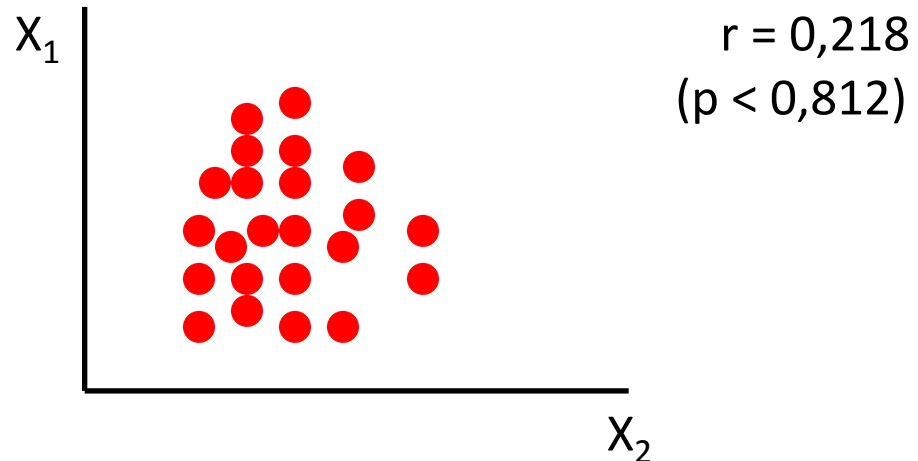
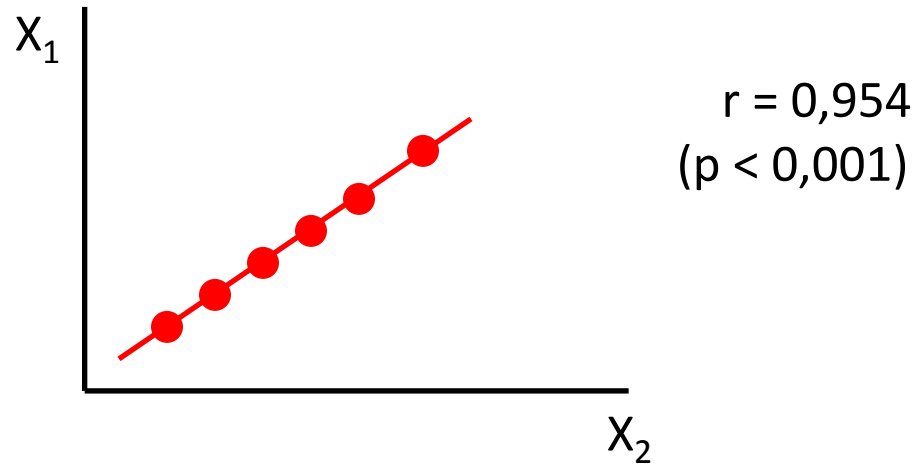
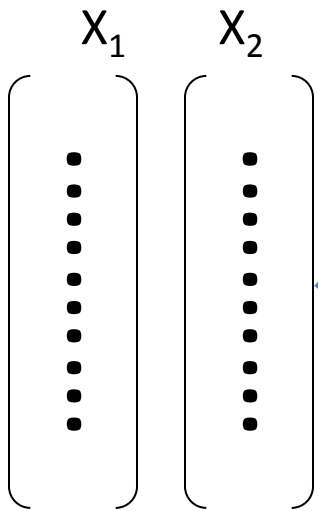


- Základním testem pro srovnání dvou nezávislých rozložení spojitých čísel je nepárový two-sample t-test
- Základním testem pro srovnání dvou závislých rozložení spojitých čísel je párový two-sample t-test

Dvouvýběrové testy: párové a nepárové

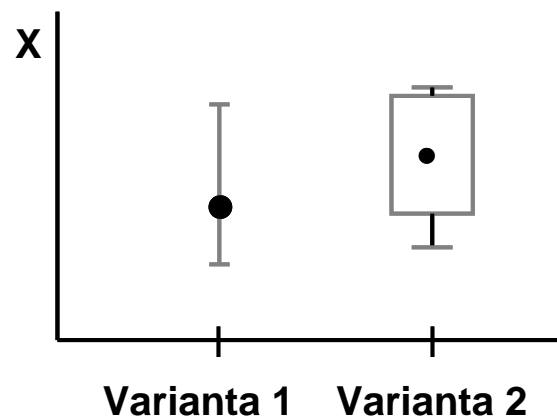
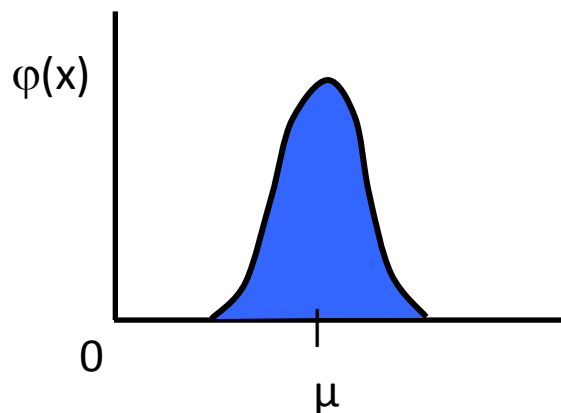


Dvouvýběrové testy: párové a nepárové



Předpoklady nepárového dvouvýběrového t-testu

- Náhodný výběr subjektů jednotlivých skupin z jejich cílových populací
- Nezávislost obou srovnávaných vzorků
- Přibližně normální rozložení proměnné ve vzorcích, drobné odchylky od normality ovšem nejsou kritické, test je robustní proti drobným odchylkám od tohoto předpokladu, normalita může být testována testy normality
- Rozptyl v obou vzorcích by měl být přibližně shodný (homoscedastic). Tento předpoklad je testován několika možnými testy – Levenův test nebo F-test.
- Vždy je vhodné prohlédnout histogramy proměnné v jednotlivých vzorcích pro okometrické srovnání a ověření předpokladů normality a homogenity rozptylu – nenahradí statistické testy, ale poskytne prvotní představu.



Nepárový dvouvýběrový t-test – výpočet I

1. nulová hypotéza: průměry obou skupin jsou shodné, alternativní hypotéza je, že nejsou shodné, two tailed test
2. prohlédnout průběh dat, průměr, medián apod. pro zjištění odchylek od normality a nehomogenita rozptylu, provést F –test

H_0	H_A	Testová statistika
$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$
$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \frac{s_2^2}{s_1^2}$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \frac{\max(s_1^2; s_2^2)}{\min(s_1^2; s_2^2)}$

F-test pro srovnání dvou výběrových rozptylů

- Používá se pro srovnání rozptylu dvou skupin hodnot, často za účelem ověření homogenity rozptylu těchto skupin dat.

- V případě ověření homogenity je testována hypotéza shody rozptylů (two tailed); v případě shodných rozptylů je vše v pořádku a je možné pokračovat ve výpočtu t-testu, v opačném případě není vhodné test počítat.

Nepárový dvouvýběrový t-test – výpočet II

3. Výpočet testové statistiky (stupně volnosti jsou):

$$\nu = n_1 + n_2 - 2$$

$$t = \frac{\text{Rozdíl}_{\text{průměr}}}{SE(\text{rozdílprůměrů})} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{vážený odhad rozptylu}$$

4. výsledné t srovnáme s tabulární hodnotou t pro dané stupně volnosti a α (obvykle $\alpha=0,05$)
5. Lze spočítat interval spolehlivosti pro rozdíl průměrů (např. 95%), počet stupňů volnosti a s^2 odpovídají předchozím vzorcům

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{0,975} SE(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{0,975} \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

Dvouvýběrový t-test - příklad

Průměrná hmotnost ovcí v čase páření byla srovnávána pro kontrolní skupinu a skupinu krmenou zvýšenou dávkou potravy. Kontrolní skupina obsahuje 30 ovcí, skupina se zvýšeným příjmem potravy pak 24 ovcí.

- Vlastní experiment byl prováděn tak, že na začátku máme 54 ovcí (ideálně stejného plemene, stejně staré atd.), které náhodně rozdělíme do dvou skupin (náhodné rozdělování objektů do pokusných skupin je objektem celého specializovaného odvětví statistiky nazývaného randomizace). Poté co experiment proběhne, musíme nejprve ověřit teoretický předpoklad pro využití nepárového t-testu. Pro obě proměnné jsou vykresleny grafy (můžeme též spočítat základní popisnou statistiku), na kterých můžeme posoudit normalitu a homogenitu rozptylu, kromě okometrického pohledu můžeme pro ověření normality použít testy normality, pro ověření homogenity rozptylu pak F-test
- Pokud platí všechny předpoklady Two sample nepárového t-testu, můžeme spočítat testovou charakteristiku, výsledné t je 2,43 s 52 stupni volnosti, podle tabulek je $t_{0,975(52)} = 2,01$, tedy $t > t_{0,975(52)}$ a nulovou hypotézu můžeme zamítnout, skutečná pravděpodobnost je pak 0,018. Rozdíl mezi skupinami je 1,59 kg ve prospěch skupiny s lepší výživou.

$$t = \frac{\text{Rozdíl} - \text{průměr}}{SE(\text{rozdílprůěrů})} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \nu = n_1 + n_2 - 2$$

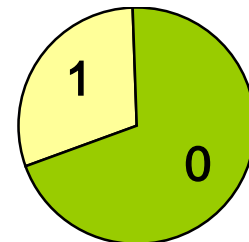
- Pro rozdíl mezi oběma soubory jsou počítány 95% konfidenční intervaly jako $1,59 \pm 2,01 \cdot (0,655)$ kg, což odpovídá rozsahu 0,28 až 2,91 kg. To, že konfidenční interval nezahrnuje 0 je dalším potvrzením, že mezi skupinami je významný rozdíl – jde o další způsob testování významnosti rozdílů mezi skupinami dat – nulovou hypotézu o tom, že rozdíl průměrů dvou skupin dat je roven nějaké hodnotě zamítáme v případě, kdy 95% konfidenční interval rozdílu nezahrnuje tuto hodnotu (v tomto případě 0).

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{0,975} SE(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{0,975} \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

Test dobré shody - základní teorie

Binomické jevy (1/0)

$$\chi^2_{(1)} = \frac{\left[\begin{array}{c} \text{pozorovaná} \\ \text{četnost} \end{array} - \begin{array}{c} \text{očekávaná} \\ \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\underbrace{\text{očekávaná četnost}}_{\text{I. jev 1}}} + \frac{\left[\begin{array}{c} \text{pozorovaná} \\ \text{četnost} \end{array} - \begin{array}{c} \text{očekávaná} \\ \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\underbrace{\text{očekávaná četnost}}_{\text{II. jev 2}}}$$



Příklad



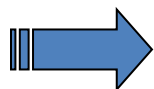
10 000 lidí hází mincí $\begin{cases} \rightarrow \text{rub: 4 000 případů (R)} \\ \rightarrow \text{líc: 6 000 případů (L)} \end{cases}$



Lze výsledek považovat za statisticky významně odlišný (nebo neodlišný) od očekávaného poměru R : L = 1 : 1 ?

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(4000 - 5000)^2}{5000} + \frac{(6000 - 5000)^2}{5000} = 400$$

Tabulková hodnota: $\chi^2_{(0,95)} (v = 1) = \underline{\underline{3,84}} \quad (0,95 = 1 - \alpha)$



Rozdíl je vysoce statisticky významný ($p \ll 0,001$)

Kontingenční tabulky - 0 : Nezávislost dvou jevů A a B

**Kontingenční
tabulka
2 x 2**

↘ ↓ B \ → A	+	-	Podíl (+)
+	a	b	$\frac{a}{(a+b)}$ p₁
-	c	d	$\frac{c}{(c+d)}$ p₂
Podíl (+)	$\frac{a}{(a+c)}$	$\frac{b}{(b+d)}$	

$$N = a + b + c + d$$

$$P(B^+) = \frac{(a+b)}{N}$$

$$P(B^-) = \frac{(c+d)}{N}$$

Očekávané četnosti:

$$F_{(A)} = \frac{(a+b)(a+c)}{N}$$

$$F_{(C)} = \frac{(a+c)(d+c)}{N}$$

$$\chi^2_{\nu=1} = \sum_{i=1}^4 \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i}$$

$$F_{(B)} = \frac{(a+b)(b+d)}{N}$$

$$F_{(D)} = \frac{(b+d)(c+d)}{N}$$

$$\nu = 1 = (r-1) * (c-1)$$

$$P_{(A)}; P_{(B)}$$

$$\chi^2_c = \sum \sum \frac{(|f_{ij} - F_{ij}| - 0,5)^2}{F_{ij}}$$

Kontingenční tabulky: příklad

gen \ †	Ano	Ne	Σ
Ano	20	82	102
Ne	10	54	64
Σ	30	136	166

$$F_A = 102 * 30 / 166 = 18,43$$

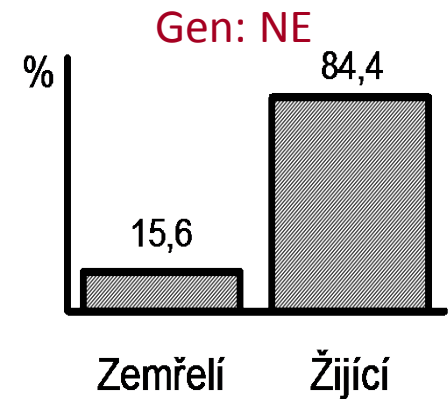
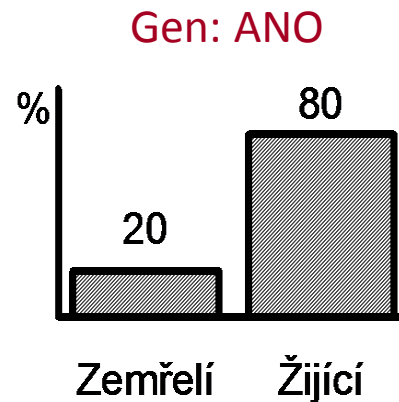
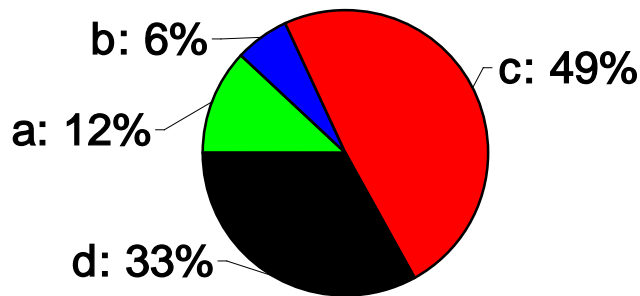
$$F_B = 102 * 136 / 166 = 83,57$$

$$F_C = 11,57$$

$$F_D = 52,43$$

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(20 - 18,43)^2}{18,43} + \frac{(82 - 83,57)^2}{83,57} + \frac{(10 - 11,57)^2}{11,57} + \frac{(54 - 52,43)^2}{52,43} = 0,423 \quad 0,423 < \chi^2_{0,95}^{(1)} = 3,84$$

Kontingenční tabulka v obrázku



ANOVA – základní výpočet

- Základním principem ANOVY je porovnání rozptylu připadajícího na:
 - Rozdělení dat do skupin (tzv. effect, variance between groups)
 - Variabilitu objektů uvnitř skupin (tzv. error, variance within groups), předpokládá se, že jde o náhodnou variabilitu (=error)

1. Variabilita mezi skupinami

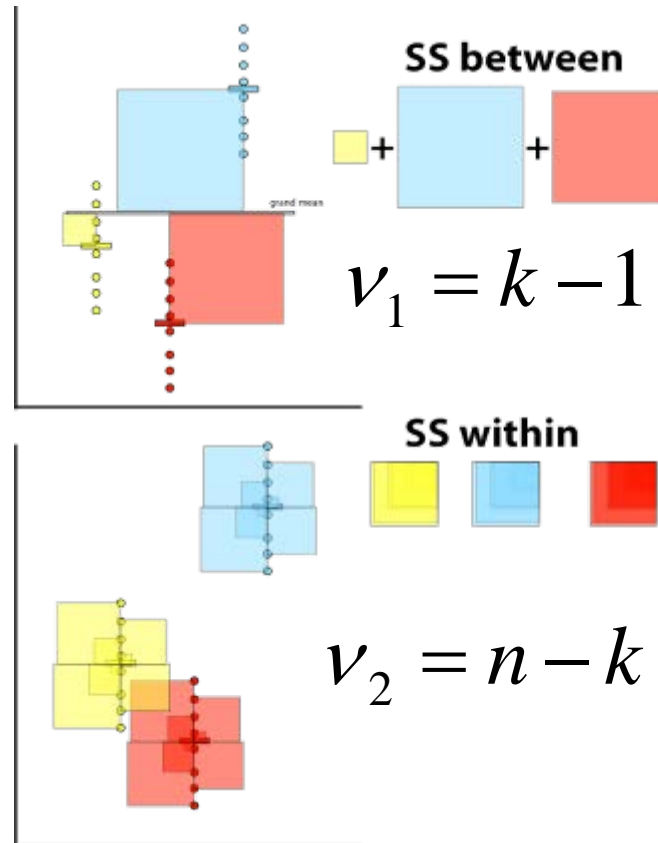
Rozptyl je počítán pro celkový průměr (tzv. grand mean) a průměry v jednotlivých skupinách dat

Stupně volnosti jsou odvozeny od počtu skupin (= počet skupin - 1)

2. Variabilita uvnitř skupin

Rozptyl je počítán pro průměry jednotlivých skupin a objekty uvnitř příslušných, celková variabilita je pak sečtena pro všechny skupiny

Stupně volnosti jsou odvozeny od počtu hodnot (= počet hodnot - počet skupin)



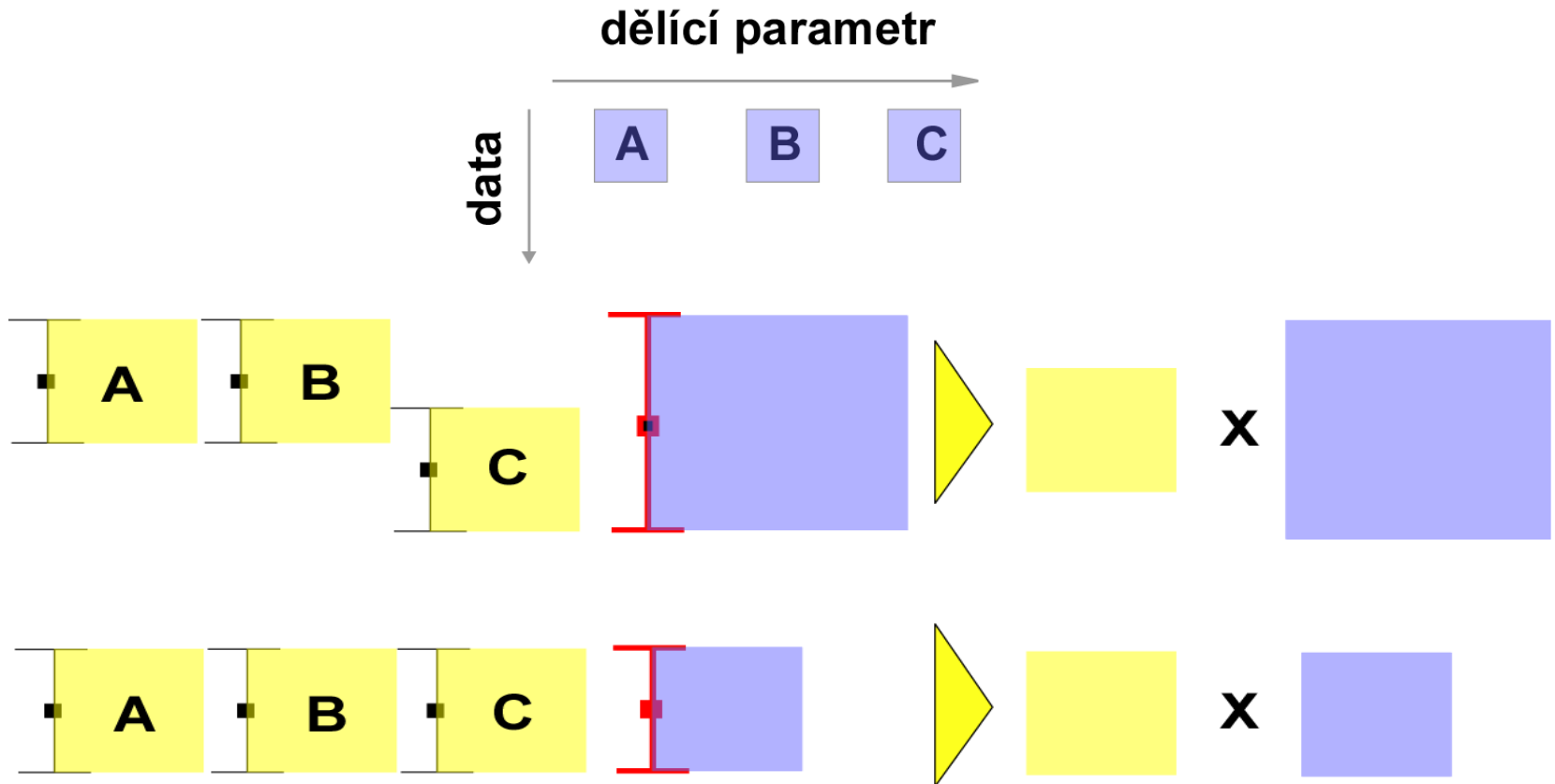
$$F = \frac{\text{between_groups}}{\text{within_groups}}$$

Výsledný poměr (F) porovnáme s tabulkami F rozložení pro v_1 a v_2 stupňů volnosti

SS=sum of squares

Jednoduchý ANOVA design

Nejjednodušším případem ANOVA designu je rozdělení na skupiny podle jednoho parametru.



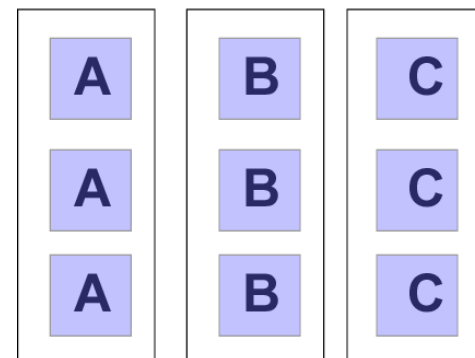
Nested ANOVA

- Rozdělení skupin na náhodné podskupiny (např. opakování experimentu)
- Cílem je zjistit, zda data v jedné skupině nejsou pouhou náhodou
- Nejprve je testována shoda podskupin v hlavních skupinách,
 - pokud jsou shodné, je vše v pořádku
 - pokud nejsou, stále lze zjišťovat, zda se variabilita uvnitř hlavních skupin liší od celkové variability

jednoduchá ANOVA



nested ANOVA

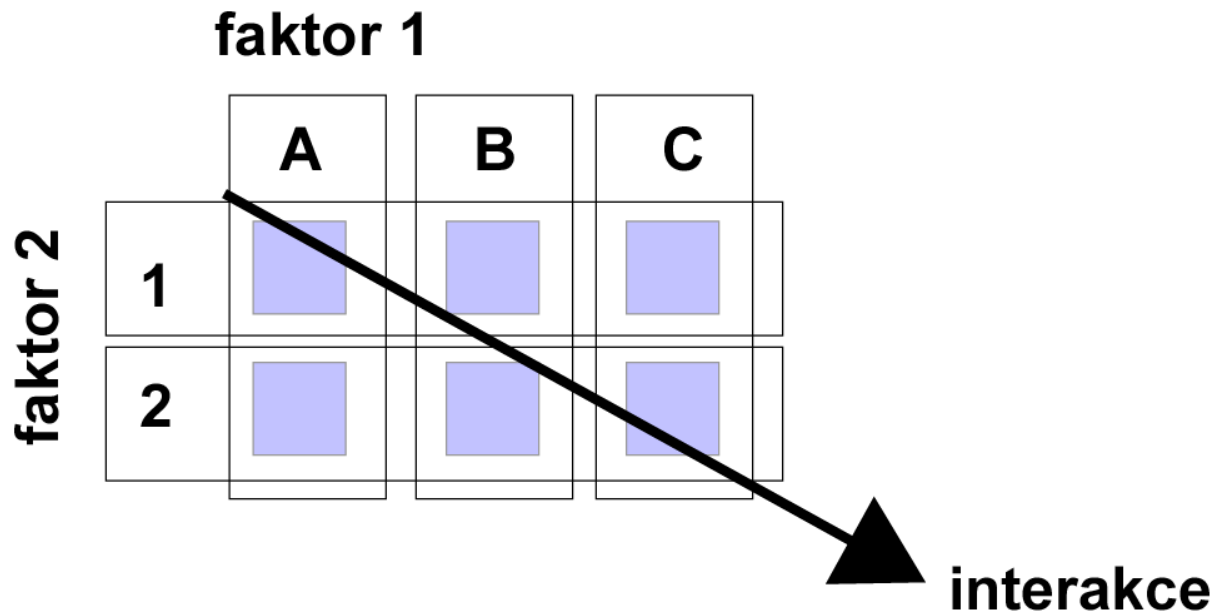


Two way ANOVA

Pro rozdělení do kategorií je zde více parametrů

Na rozdíl od nested ANOVY nejde o náhodná opakování experimentu, ale o řízené zásahy (např.vliv pH a koncentrace O₂)

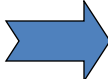
Kromě vlivu hlavních faktorů se uplatňuje i jejich interakce



Modely analýzy rozptylu - základní výstup

Základním výstupem analýzy rozptylu je
Tabulka ANOVA - frakcionace komponent rozptylu

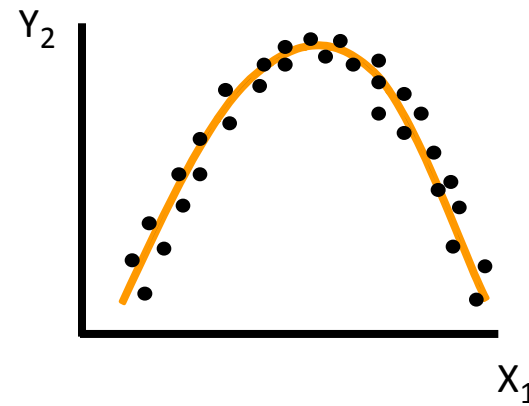
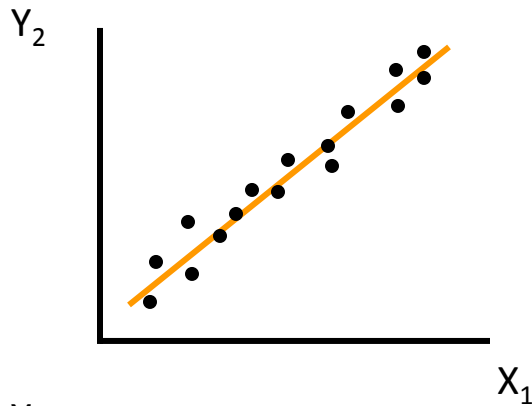
Zdroj rozptylu	St. v.	SS	MS	F
Pok. zásah (mezi skupinami)	$a - 1$	SS_B	$SS_B / (a - 1)$	MS_B / MS_E
Uvnitř skupin	$N - a$	SS_E	$SS_E / (N - a)$	
Celkem	$N - 1$	SS_T		

SS_B / SS_T  Kvantifikovaný podíl rozdílu mezi pokusnými zásahy na celkovém rozptylu

MS_B / MS_T  Statistická významnost rozdílu

Základy korelační analýzy I

Korelace - vztah (závislost) dvou znaků (parametrů)



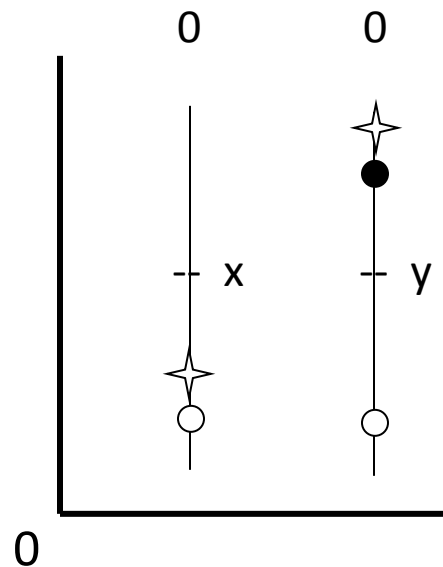
$X_2 \backslash X_1$	ANO	NE
ANO	a	b
NE	c	d

Základy korelační analýzy II

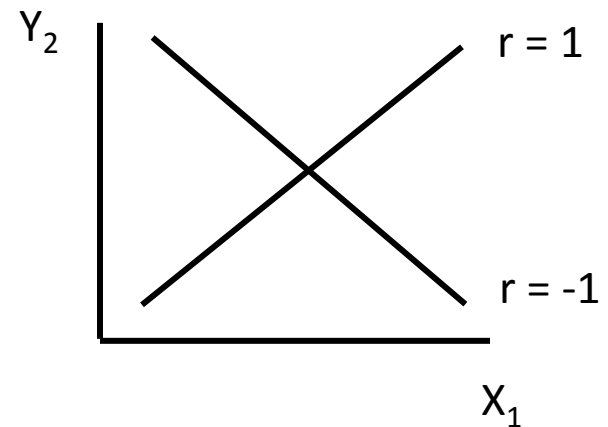
Parametrické míry korelace

Kovariance

$$\text{Cov}(x, y) = E(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$



Pearsonův koeficient korelace



Základy korelační analýzy III

P_i (zem)	10	14	15	32	40	20	16	50
P_i (rostl.)	19	22	26	41	35	32	25	40

$I = 1, \dots, n; n = 8; v = 6$

$$r = \frac{Cov(x, y)}{S_x \cdot S_y} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n} \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[\sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2 \right] \left[\sum y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum y_i)^2 \right]}} = 0,7176$$

I. $H_0 : \rho = \phi : \alpha = 0,05$

tab : $r(v = 6) = 0,7076$

II. $H_0 : \rho = \phi$

$$t = \left[\frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \right] \cdot \sqrt{n - 2} \quad v = n - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{0,7176}{0,6965} \cdot \sqrt{6} = 2,524 \\ \text{tab : } t_{0,975}^{(n-2)} = 2,447 \end{array} \right\} P \leq 0,05$$

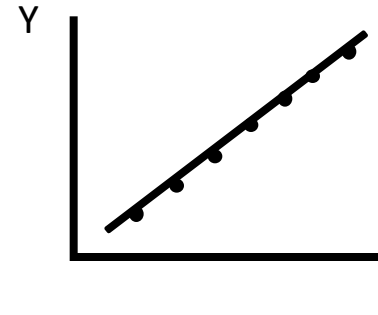
Základy regresní analýzy

Regrese - funkční vztah dvou nebo více proměnných

Jednorozměrná
 $y = f(x)$

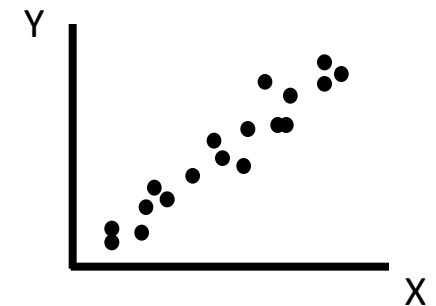
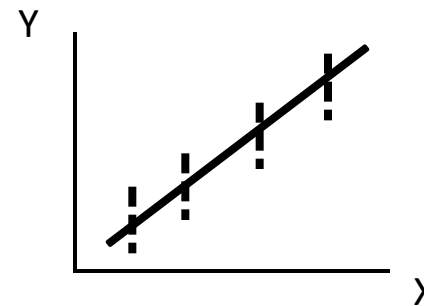
Vícerozměrná
 $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p)$

Deterministický



Vztah x, y

Regresní, stochastický



Pro každé x existuje pravděpodobnostní rozložení y

Regresní analýza přímky: lineární regrese

$$Y = a + b \cdot x + e \quad \approx \quad \alpha + \beta \cdot X + \varepsilon$$

y — $\alpha \approx a$ (**intercept**): $a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$

y — $\beta \cdot X \approx b \cdot x$ (**sklon; slope**)

y — $\varepsilon \approx e$ - **náhodná složka**: $N(0; \sigma_e^2) = N(0; \sigma_y^2 x)$

Komponenty
tvořící y se
sčítají

ε - náhodná složka modelu přímky = rezidua přímky

$$\sigma_e^2 \left(\sigma_{y \cdot x}^2 \right) \Rightarrow \text{rozptyl reziduí}$$