Kapitola 6

Interakce částic v plazmatu

6.1 Úvod

Slova *srážka* a *interakce* mohou být používány v mikroskopickém světě jako synonyma. Srážky dělíme na

- *elastické, tj. pružné* - platí zákon zachovaní hmotnosti, hybnosti a energie takovým způsobem, že nedochází ke změnám vnitřních stavů částic, vzniku ani zániku částic.
- *neelastické, tj. nepružné* - změna vnitřního stavu několika nebo všech zúčastněných částic, možnost vzniku nebo zániku částic; *rekombinace* nabitých částic za vzniku částice neutrální; *záchyt* nabité částice částicí neutrální za vzniku větší nabité částice; energie elektronu atomu se může zvýšit $\Rightarrow$ *excitace* elektronu do vyššího stavu nebo dokonce oddělení elektronu od atomu, tj. *ionizace*.

V plazmatu musí především rozlišovat

- interakce mezi nabitými částicemi: podle Coulombova zákona, tj. závislost $1/r^2$ $\Rightarrow$ *dalekodosahové interakce* $\Rightarrow$ *mnohonásobné* interakce
- interakce mezi nabitou částicí a neutrálem nebo dvěma neutrály: silové pole neutrální částice dostatečně silné pouze v oblasti elektronového obalu $\Rightarrow$ *krátkodosahové interakce* $\Rightarrow$ neutrální částice neinteragují často s dalšími částicemi a naprosto zřídka s více částicemi zaráz $\Rightarrow$ především *binární* srážky

Mnoha-částicové Coloumbovské interakce můžeme popsat také jako současné binární interakce, v praxi jako sérii následných binárních interakcí s malým úhlem. Tyto interakce jsou důležité pro chování plazmatu. Nicméně ve *slabě ionizovaném plazmatu* nehrají několikanásobné interakce velkou roli a jednoduché binární srážky adektávně popisují jevy v plazmatu. Největší roli v těchto typech plazmatu pak hrají elektrony, protože rychle reagují na el. a mg. pole.

6.2 Binární srážky

Uvažujme pružnou srážku dvou částic o hmotnosti m a m_1 o rychlostech $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v_1}$ před srážkou a $\mathbf{v}'$ a $\mathbf{v_1}'$ po srážce. V následujícím textu budou veličiny s *čárkou* označovat veličiny po srážce.

Můžeme pracovat v *laboratorním* systému souřadnic, ale konvečně spíše v systému, kde částice m je v klidu a částice m_1 se přibližuje *relativní rychlostí*

$$\mathbf{g} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v}. \tag{6.1}$$

Po srážce je relativní rychlost

$$\mathbf{g}' = \mathbf{v_1}' - \mathbf{v}'. \tag{6.2}$$

Záměrná vzdálenost b je definována jako definována jako minimální vzdálenost příblížení, pokud by nedošlo k interakci. *Úhel rozptylu* je χ a úhel orientace *orbitální roviny* (nebo *roviny srážky*) vzhledem k nějakému danému směru kolmému na orbitální rovinu je ε.

Rychlost *těžiště* srážejících se částic před srážkou je

$$\mathbf{c_0} = \frac{m\mathbf{v} + m_1\mathbf{v_1}}{m + m_1} \tag{6.3}$$

a po srážce

$$\mathbf{c_0}' = \frac{m\mathbf{v}' + m_1\mathbf{v_1}'}{m + m_1} \tag{6.4}$$

Počáteční rychlosti můžeme vyjádřit pomocí $\mathbf{c_0}$ a $\mathbf{g}$

$$\mathbf{v} \ = \ \mathbf{c_0} - \frac{\mu}{m}\mathbf{g} \tag{6.5}$$

$$\mathbf{v}_1 \;=\; \mathbf{c_0} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{g}, \tag{6.6}$$

kde μ označuje *redukovanou hmotnost*

$$\mu = \frac{m m_1}{m + m_1}. \tag{6.7}$$

Podobně obdržíme i rychlosti po srážce

$$\mathbf{v}' \;=\; \mathbf{c_0}' - \frac{\mu}{m}\mathbf{g}' \tag{6.8}$$

$$\mathbf{v}'_1 \;=\; \mathbf{c_0}' + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{g}'. \tag{6.9}$$

Ze zákona *zachování hybnosti* během pružné srážky

$$m\mathbf{v} + m_1\mathbf{v_1} = m\mathbf{v}' + m_1\mathbf{v_1}' \tag{6.10}$$

nebo ze vztahů (6.3) a (6.4)

$$(m + m_1)\mathbf{c_0} = (m + m_1)\mathbf{c_0}', \tag{6.11}$$

takže

$$\mathbf{c_0} = \mathbf{c_0}' \tag{6.12}$$

Ze zákona *zachování energie* během pružné srážky máme

$$\frac{1}{2}(mv^2 + m_1 v_1^2) = \frac{1}{2}[m(v')^2 + m_1(v_1')^2] \tag{6.13}$$

a přímou úpravou vztahů (6.5), (6.6), (6.8) a (6.9)

$$\frac{1}{2}(mv^2 + m_1v_1^2) = \frac{1}{2}(m + m_1)c_0^2 + \frac{1}{2}\mu g^2 \tag{6.14}$$

$$\frac{1}{2}[m(v')^2 + m_1(v_1')^2] = \frac{1}{2}(m + m_1)c_0'^2 + \frac{1}{2}\mu g'^2. \tag{6.15}$$

Protože $\mathbf{c_0} = \mathbf{c_0'}$ dostáváme

$$g = g', \tag{6.16}$$

tedy *velikost*, ale nikoliv směr, je zachována při binárních pružných srážkách.

Úhel χ mezi **g** a **g'** je *úhel rozptylu* nebo také *deflekční úhel*. Abychom dostali vztah mezi vektory **g** a **g'**, zvolíme např. kartézké souřadnice s osou z ve směru **g**. Máme tedy

$$g_{\mathrm{x}} = g_{\mathrm{y}} = 0 \tag{6.17}$$

$$g_{\mathrm{z}} = g = g' \tag{6.18}$$

$$g_{\mathrm{x}}' = g \sin\chi \cos\varepsilon \tag{6.19}$$

$$g_{\mathrm{y}}' = g \sin\chi \sin\varepsilon \tag{6.20}$$

$$g_{\mathrm{z}}' = g \cos\chi, \tag{6.21}$$

kde ε určuje relativní orientaci *roviny srážky*. Pokud tedy známe počáteční rychlosti a úhel rozptylu χ můžeme určit rychlosti po srážce. Opačně, pokud známe konečné rychlosti a χ, můžeme určit původní rychlosti. Tento fakt umožňuje jednoduše uvažovat o *inverzní srážce*, protože χ je stejné jako pro přímou srážku (b, vzájemná síla a g jsou stejné).

Úhel rozptylu je jediná veličina, která závisí na detailech srážkového procesu. V případě vzájemné síly, která závisí pouze na vzdálenosti mezi interagujícími částicemi, χ závisí na následujících parametrech:

1. zákon vzájemného silového působení
2. velikost vzájemné rychlosti g
3. záměrná vzdálenost b.

6.3 Dynamika binární srážky

Dynamika binární srážky je řízena zákonem vzájemného silového působení. Pro každé b existuje odpovídající χ a jejich vztah je nezávislý na zákonu vzájemných sil. Tento vztah je obsažen v *diferenciálním účinném průřezu* definovaném v odstavci 6.5.

Uvažujme srážku dvou částic m a m_1 v souřadném systému částice m. Polohový vektor částice m_1 bude $\mathbf{r}$. Předpokl., že síla interakce je centrální síla, tj.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\boldsymbol{r} \tag{6.22}$$

a poteniální energii lze tedy vyjádřit takto

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}\boldsymbol{r}. \tag{6.23}$$

Pro centrální sílu je torze $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$ nulová. Torze je časová změna momentu hybnosti $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \tag{6.24}$$

$\Rightarrow$ moment hybnosti je pohybová konstanta; $\mathbf{r}$ je stále kolmé na konstantní směr $\mathbf{L}$ $\Rightarrow$ pohyb leží v rovině.

Použijeme polární souřadnice (r, θ) a uvědomíme si, že jednotkové vektory $\hat{\boldsymbol{r}}$ a $\hat{\theta}$ závisí na θ:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}. \tag{6.25}$$

Protože $d\hat{\boldsymbol{r}}/d\theta = \hat{\theta}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} \tag{6.26}$$

nebo jinak zapsáno

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \tag{6.27}$$

Trajektorii částice nalezneme ze zákona zachování *energie* a *momentu hybnosti* pomocí analogie s jednočásticovým problémem. Kinetická energie relativního pohybu je

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \tag{6.28}$$

Ze ZZE

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{1}{2}\mu g^2. \tag{6.29}$$

Moment hybnosti vzhledem k počátku je dán

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (\mu \dot{\mathbf{r}}) = \mu r^2 \dot{\theta} (\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\theta}). \tag{6.30}$$

Původní hodnota momentu hybnosti je $b\mu g$, a tedy

$$r^2 \dot{\theta} = bg. \tag{6.31}$$

Pomocí předchozích vztahů získáme diferenciální rovnici pro dráhu $r(\theta)$. Napíšeme

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}, \tag{6.32}$$

použijeme (6.31) a (6.29) k eliminaci $d\theta/dt$ a dr/dt. Diferenciální rovnice trajektorie:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2}\right], \tag{6.33}$$

což přeskupíme takto

$$d\theta = \pm \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2}\right]^{-1/2} dr. \tag{6.34}$$

Výběr znaménka se musí udělat z fyzikálního náhledu. Kladné znaménko se použije pro $\theta > \theta_m$, záporné pro $\theta < \theta_m$, kde θ_m je úhel v bodě největšího přiblížení (*vertexa* trajektorie). Polohový vektor v tomto bodě označíme r_{m}.

Vzdálenost největšího přiblížení r_m dostaneme z (6.33), když si uvědomíme $dr/d\theta = 0$ a $r = r_m$:

$$1 - \frac{b^2}{r_m^2} - \frac{2U(r_m)}{\mu g^2} = 0 \tag{6.35}$$

tedy

$$r_m = b\left[1 - \frac{2U(r_m)}{\mu g^2}\right]^{-1/2} \tag{6.36}$$

Abychom určili *úhel rozptylu* χ, uvědomme si, že

$$\chi = \pi - 2\theta_m \tag{6.37}$$

a integrujme vztah (6.34) od θ_m po jiný úhel θ:

$$\theta - \theta_m = \pm \int_{r_m}^{r} \frac{b}{x^2}\left[1 - \frac{b^2}{x^2} - \frac{2U(x)}{\mu g^2}\right]^{-1/2} dx, \tag{6.38}$$

(stejná konvence znamének). Pro $r \to \infty$ máme $\theta_{(-)} \to 0$, zatímco $\theta_{(+)} \to 2\theta_m$, takže

$$\theta_m = \int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2}\right]^{-1/2} dr \tag{6.39}$$

a úhel rozptylu je

$$\chi(b,g) = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2}\right]^{-1/2} dr. \tag{6.40}$$

Abychom mohli vypočítat χ musíme znát záměrnou vzdálenost b, počáteční rychlosti g a vzájemnou potenciální energii intergajících částic $U(\mathbf{r})$.

6.4 Vyjádření úhlu rozptylu

Ukážeme si dvě konkrétní použití vztahu (6.40) k určení úhlu rozptylu χ pomocí záměrné vzdálenosti b a počáteční rychlosti g.

6.4.1 Dvě perfektně elastické tuhé koule

Uvažujme srážku dvou perfektně elastických tuhých koulí o poloměru R_1 a R_2. Potenciální energie je dána

$$\begin{aligned} U(r) &= 0 \,\mathrm{pro}\, r > R_1 + R_2 \\ &= \infty \,\mathrm{pro}\, r < R_1 + R_2. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Protože koule nemohou do sebe pronikat je jejich vzdálenost $r \geq R_1 + R_2$ a tedy zjednodušíme vztah (6.40) jako

$$\chi = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2}\right]^{-1/2} dr. \tag{6.42}$$

Použijeme substituci $y = b/r$:

$$\chi = \pi - 2 \int_0^{b/r_m} (1 - y^2)^{-1/2} dy, \tag{6.43}$$

což dává

$$\chi = \pi - 2 \sin^{-1}(b/r_m). \tag{6.44}$$

Pro $b > R_1 + R_2$ nedochází k žádné interakci $\Rightarrow r_m = b$. Pro $b \leq R_1 + R_2$ se koule sráží $\Rightarrow r_m = R_1 + R_2$.

$$\begin{aligned} \chi &= \pi - 2\arcsin\left(\frac{b}{R_1 + R_2}\right) \,\mathrm{pro}\, b \leq R_1 + R_2 \\ &= 0 \,\mathrm{pro}\, b > R_1 + R_2 \end{aligned} \tag{6.45}$$

6.4.2 Coulombovský interakční potenciál

Uvažujme případ Coulombovského pole, jehož interakční potenciální energie je

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r}, \tag{6.46}$$

kde q a q_1 jsou elektrické náboje částic o hmotnosti m a m_1. Dosazenín do vztahu (6.40) dostaneme

$$\chi(b,g) = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{qq_1}{2\pi\varepsilon_0\mu g^2 r}\right]^{-1/2} dr. \tag{6.47}$$

Vzdálenost nejbližšího přiblížení r_m můžeme dostat z (6.36) a (6.46). Zavedeme konstantu

$$b_0 = \frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0\mu g^2}, \tag{6.48}$$

takže b_0 vyjadřuje vzdálenost, na které je el. potenciální energii interakce dvakrát větší než relativní kinetická energie nekonečnu. Substitucí proměnné $y = 1/r$ a použitím b_0 ve vztahu (6.47) dostaneme

$$\chi(b,g) = \pi - 2b\int_0^{1/r_m} (-b^2y^2 - 2b_0y + 1)^{-1/2} dy. \tag{6.49}$$

Použijeme standardní vztah pro integraci (Rektorys):

$$\int (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^{-1/2} dx = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \arcsin\left[\frac{-2\alpha x - \beta}{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}}\right], \tag{6.50}$$

kde v našem případě $\alpha = -b^2$, $\beta = -2b_0$ a $\gamma = 1$. Použijeme meze integrálu, kde r_m je dáno vztahem (**??**):

$$\chi(b, g) = 2 \arcsin\left[\frac{b_0}{(b_0^2 + b^2)^{1/2}}\right]. \tag{6.51}$$

Tato rovnice se ekvivalentně dá přepsat jako

$$\tan(\frac{1}{2}\chi) = \frac{b_0}{b}. \tag{6.52}$$

- $\chi = \pi \Rightarrow b = 0$
- $\chi = \pi/2 \Rightarrow b = b_0$
- $\chi = 0 \Rightarrow b \to \infty$
- znaménko náboje částic stejné $\Rightarrow$ b_0 a χ jsou kladné
- znaménko náboje částic různé $\Rightarrow$ b_0 a χ jsou záporné

6.5 Účinný průřez

Zatím interakce pouze dvou částic ALE účinný průřez definován ve smyslu svazku totožných částic dopadajících na terč $\Rightarrow$ mějme svazek částic o hmotnosti m_1 rovnoměrně rozprostřených v prostoru dopadajících rychlostí $\mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ na částici m. Částice se záměrnou vzdáleností b se rozptylují pod úhlem χ, se vzdáleností $b + db$ pod úhlem $\chi + d\chi$. Počet částic rozptýlených za 1s do $\langle \chi, \chi + d\chi \rangle$ závisí na toku částic $\mathbf{\Gamma}$.

6.5.1 Diferenciální účinný průřez

Počet částic rozptýlených za jednotku času do prostorového úhlu $d\Omega$ vyjádřeného pomocí úhlů χ a ε:

$$\frac{dN}{dt} = \sigma(\chi, \varepsilon)\Gamma d\Omega, \tag{6.53}$$

kde $\sigma(\chi, \varepsilon)$ je *diferenciální účinný průřez* nebo *úhlová rozdělovací funkce*. Stejný počet částic dopadá před srážkou z oblasti dané intervaly $\langle b, b + db \rangle$ a $\langle \varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon \rangle$:

$$\frac{dN}{dt} = \Gamma b \, db \, d\varepsilon. \tag{6.54}$$

A tedy

$$\sigma(\chi, \varepsilon) d\Omega = b \, db \, d\varepsilon. \tag{6.55}$$

Protože $d\Omega = \sin\chi d\chi d\varepsilon$:

$$\sigma(\chi, \varepsilon) \sin\chi d\chi = b \, db \tag{6.56}$$

a dále

$$\sigma(\chi, \varepsilon) = \frac{b}{\sin\chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|. \tag{6.57}$$

Absolutní hodnota je použita, protože b klesá, když χ stoupá ALE dif. účinný průřez vyjadřuje kladnou veličinu - počet rozptýlených částic. Veličinu $db/d\chi$ vyjádříme ze vztahu (6.40), jestliže budeme znát $U(r)$. $\sigma(\chi, \varepsilon)$ má rozměr plochy.

6.5.2 Celkový účinný průřez rozptylu

σ_{t} je definován jako počet částic rozptýlený za jednotku času a jednotku toku částic do *všech směrů* od rozptylového centra:

$$\sigma_{\mathrm{t}} = \int_{\Omega} \sigma(\chi, \varepsilon) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi} \sigma(\chi, \varepsilon) \sin\chi d\chi. \tag{6.58}$$

Účinný průřez samozřejmě závisí na relativní rychlosti g.

Ve speciálním případě, kdy je interakční poteciál *izotropní* (např. Coulombovský), máme

$$\sigma_{\mathrm{t}} = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\chi) \sin\chi d\chi. \tag{6.59}$$

6.5.3 Účinný průřez pro přenos hybnosti

Účinný průřez lze definovat pro různé interakční procesy. Jeden z důležitých je přenos hybnosti:

$$\sigma_{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{prenos\,hybnosti\,za\,sekundu}}{\mathrm{dopadajici\,tok\,hybnosti}}, \tag{6.60}$$

kde hybnosti před srážkou je $\Gamma\mu g$. Po srážce je hybnost ve směru dopadu $\mu g \cos\chi$, takže přenesená hybnost je $\mu g(1 - \cos\chi)$. Celkový přenos hybnosti všemi dopadajícími částicemi

$$\Gamma\mu g \int_{\Omega} (1 - \cos\chi) \sigma(\chi, \epsilon) d\Omega, \tag{6.61}$$

a protože celkový tok hybnosti dopadajících částic je $\Gamma\mu g$

$$\sigma_m = \int_{\Omega} (1 - \cos\chi) \sigma(\chi, \epsilon) d\Omega. \tag{6.62}$$

V případě *izotropní* interakce a využitím $d\Omega = \sin\chi d\chi d\varepsilon$

$$\sigma_m = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos\chi)\sigma(\chi)\sin\chi d\chi. \tag{6.63}$$

Protože $\sigma(\chi)$ můžeme chápat jako úhlovou rozdělovací funkci lze ji brát jako váhovou funkci pro výpočet ***střední hodnoty*** jakékoliv funkce $F(\chi)$ závislé na úhlu rozptylu:

$$\langle F(\chi)\rangle = \frac{\int_\Omega F(\chi)\sigma(\chi)d\Omega}{\int_\Omega \sigma(\chi)d\Omega}, \tag{6.64}$$

což můžeme psát jako

$$\langle F(\chi)\rangle = \frac{2\pi}{\sigma_t}\int_0^\pi F(\chi)\sigma(\chi)\sin\chi d\chi \tag{6.65}$$

a podle definice střední hodnoty

$$\sigma_m = \sigma_t\langle 1 - \cos\chi\rangle. \tag{6.66}$$

6.6 Další srážkové parametry

Uvažujme tok $\Gamma = nv$ částic o hmotnosti m, hustotě n a konstantní rychlosti v dopadajících z jedné strany na terč složený z "nekonečně" hmotných částic o hustotě n_{g}, které jsou v klidu. Pak $g \equiv v$. Nechť dn je počet dopadajících částic na jednotku objemu ve vzdálenosti x, které interagují s částicemi terče na vzdálenosti dx a jsou tedy odstraněny ze svazku dopadajících částic (proto znaménko mínus):

$$dn = -\sigma_{\mathrm{t}} n n_{\mathrm{g}} dx, \tag{6.67}$$

kde konstanta úměrnosti σ_{t} je celkový účinný průřez. Podobný vztah pro tok získáme vynásobením (6.67) rychlostí v

$$d\Gamma = -\sigma_{\mathrm{t}}\Gamma n_{\mathrm{g}} dx \tag{6.68}$$

neboli

$$\frac{d\Gamma}{\Gamma} = \frac{dn}{n} = -n_{\mathrm{g}}\sigma_{\mathrm{t}} dx \tag{6.69}$$

a po integraci

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 \exp(-n_{\mathrm{g}}\sigma_{\mathrm{t}} x) = \Gamma_0 \exp(-x/\lambda), \tag{6.70}$$

kde

$$\lambda = \frac{1}{n_{\mathrm{g}}\sigma_{\mathrm{t}}} \tag{6.71}$$

je *střední volná dráha* úbytku částic v dopadajícím svazku. Střední doba mezi interakcemi je

$$\tau = \frac{\lambda}{v}. \tag{6.72}$$

Její převrácená hodnota je *interakční* neboli *srážková frekvence*

$$\nu \equiv \tau^{-1} = n_{\mathrm{g}}\sigma_{\mathrm{t}} v, \tag{6.73}$$

což je počet interakcí za jednu sekundu, které má dopadající částice, s částicemi terče. Můžeme také definovat srážkovou frekvenci na jednotku hustoty

$$K = \sigma_{\mathrm{t}} v, \tag{6.74}$$

což se nazývá *rychlostní konstanta*. Samozřejmě

$$\nu = K n_{\mathrm{g}}. \tag{6.75}$$

6.7 Účinné průřezy pro srážku tuhých koulí

6.7.1 Diferenciální účinný průřez pro rozptyl

Využijeme vztah (6.45) pro úhel rozptylu a $b \leq R_1 + R_2$

$$b = (R_1 + R_2)\cos(\frac{1}{2}\chi) \tag{6.76}$$

a tedy

$$|\frac{db}{d\chi}| = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)\sin(\frac{1}{2}\chi). \tag{6.77}$$

Dosazením do vztahu (6.57)

$$\sigma = \frac{1}{4}(R_1 + R_2)^2 \tag{6.78}$$

6.7.2 Celkový účinný průřez pro rozptyl

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{4}(R_1 + R_2)^2 \sin\chi d\chi = \pi(R_1 + R_2)^2 \tag{6.79}$$

Dva speciální případy: elektron s molekulou o poloměru R, $\sigma = R^2/4$ a $\sigma_\mathrm{t} = \pi R^2$; dvě stejné molekuly o průměru D, $\sigma = D^2/4$ a $\sigma_\mathrm{t} = \pi D^2$.

Uvědomme si, že pro srážku tuhých koulí existuje mezní hodnota b, nad kterou nedochází ke srážce. Právě toto způsobí, že celkový účinný průřez σ_t není nekonečná hodnota.

6.7.3 Účinný průřez pro přenos hybnosti

Ze vztahu (6.63) pro účinný průřez pro přenos hybnosti a ze vztahu (6.78)

$$\sigma_m = 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{4}(R_1+R_2)^2(1-\cos\chi)\sin\chi d\chi = \frac{1}{2}\pi(R_1+R_2)^2\left(\int_0^\pi \sin\chi d\chi - \int_0^\pi \cos\chi \sin\chi d\chi\right). \tag{6.80}$$

Po integraci

$$\sigma_m = \pi(R_1 + R_2)^2 \tag{6.81}$$

Střední hodnota změny hybnosti na jednu částici je dána vztahem (6.65)

$$\langle \mu g(1-\cos\chi)\rangle = \frac{2\pi}{\sigma_t}\int_0^\pi \mu g(1-\cos\chi)\sigma(\chi)\sin\chi d\chi \tag{6.82}$$

a dle vztahu (6.63)

$$\langle \mu g(1-\cos\chi)\rangle = \mu g\frac{\sigma_m}{\sigma_t}, \tag{6.83}$$

což zjednodušíme za použití výrazů pro účinné průřezy (6.81) a (6.79)

$$\langle \mu g(1-\cos\chi)\rangle = \mu g \tag{6.84}$$

6.8 Účinné průřezy pro Coulombovský potenciál

6.8.1 Diferenciální účinný průřez

Derivací vztahu (6.52)

$$\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{b^2}{2b_0\cos^2(\chi/2)}, \tag{6.85}$$

takže diferenc. účinný průřez je

$$\sigma(\chi) = \frac{b^3}{2b_0 \sin\chi \cos^2(\chi/2)} \tag{6.86}$$

nebo za použití $\tan\chi/2 = b_0/b$

$$\sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{4\sin^4(\chi/2)}, \tag{6.87}$$

což je vztah pro *Rutherfordovský rozptyl*. Protože $2\sin^2(\chi/2) = (1 - cos\chi)$, máme

$$\sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{(1-\cos\chi)^2} \tag{6.88}$$

6.8.2 Celkový účinný průřez pro rozptyl

Protože dif. účinný průřez prudce roste pro $\chi \to 0$, bude celkový účinný průřez σ_{t} nekonečný. Ze vztahů (6.59) a (**??**)

$$\sigma_t = 2\pi \int_{\chi_{min}}^{\pi} \sigma(\chi)\sin\chi d\chi = 2\pi b_0^2 \int_{\chi_{min}}^{\pi} \frac{\sin\chi}{(1-\cos\chi)^2} d\chi, \tag{6.89}$$

kde $\chi_{\mathrm{min}} = 0$. Integrováním

$$\sigma_t = \pi b_0^2 [\frac{1}{\sin^2(\chi_{min}/2)} - 1], \tag{6.90}$$

což jasně dává $\sigma_{\mathrm{t}} = \infty$ pro $\chi_{\mathrm{min}} = 0$. Příspěvek částic s velmi malými deflekčními úhly činí tedy celkový účinný průřez nekonečným.

6.8.3 Účinný průřez pro přenos hybnosti

Substitucí (**??**) do (6.63) dostáváme

$$\sigma_m = 2\pi \int_{\chi_{min}}^{\pi} (1-\cos\chi)\sigma(\chi)\sin\chi d\chi = 2\pi b_0^2 \int_{\chi_{min}}^{\pi} \frac{\sin\chi}{(1-\cos\chi)} d\chi, \tag{6.91}$$

kde opět $\chi_{\mathrm{min}} = 0$ a integrací máme

$$\sigma_m = 4\pi b_0^2 \ln[\frac{1}{\sin^2(\chi_{min}/2)}], \tag{6.92}$$

což opět dává $\sigma_{\mathrm{m}} = \infty$ pro $\chi_{\mathrm{min}} = 0$.

6.9 Stínění Coulombovského potenciálu

Nekonečné hodnoty pro σ_{t} a σ_{m} pro Coulombovský potenciál jsou interpretovány jako chybějící mezní hodnota záměrné vzdálenosti b (malé $\chi \to$ velké b). Abychom tedy získali rozumné hodnoty σ_{t} a σ_{m} musíme nějak modifikovat naše úvahy a na základě rozumného důvodu zavést max. hodnotu záměrné vzdálenosti $b = b_c$.

Ze vztahu $\sigma(\chi, \varepsilon)d\Omega = b\,db\,d\varepsilon$ a definice celk. účinného průřezu (6.58):

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^{b_c} b\ db, \tag{6.93}$$

kde jsem zavedli max. hodnotu $b = b_c$, takže

$$\sigma_t = \pi b_c^2. \tag{6.94}$$

Zavedení max. hodnoty $\Leftrightarrow$ nedochází k interakcím pro částice ve vzdálenostech $b > b_c$

Rozptyl pro úhly $\langle \pi/2, \pi \rangle$, tj. $\langle 0, b_0 \rangle$ se obvykle nazývá *rozptyl pod velkými úhly* nebo *těsné srážky*. Pokud se budou brát v úvahu pouze těsné srážky, máme

$$\sigma_{t,\mathrm{velke}} = \pi b_0^2 \quad ; \quad (\pi/2 < \chi < \pi), \tag{6.95}$$

kde $b_0 = qq_1/(4\pi\varepsilon_0 \mu g^2)$.

Víme, že v případě nabitých částic v plazmatu dojde k jejich stínění oblakem částic s opačným znaménkem. Míra efektivnosti tohoto stínění je *Debyeova délka*:

$$\lambda_D = (\frac{\epsilon_0 kT}{n_0 e^2})^{\frac{1}{2}}. \tag{6.96}$$

Koule o poloměru λ_D je *Debyeova koule*. Vezmeme-li do úvahy toto stínění:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_1}{r}\exp(-\frac{r}{\lambda_D}) \tag{6.97}$$

tedy pro $r \ll \lambda_D$ jde o potenciální energii velmi blízkou Coulombovské, zatímco pro $r \gg \lambda_D$ je to téměř nula.

Výpočet σ_t za použití Debyovské potenciální energie je velmi komplikovaný a vyžaduje numerické řešení. Je ovšem možné použít alternativní zjednodušující přístup, který vede k dobrému souhlasu s řešením numerickým: vezmeme Coulombovský potenciál pro $r < \lambda_D$ a nula pro $r > \lambda_D \Rightarrow b_c = \lambda_D$. Obecně platí

$$\lambda_D \gg b_0. \tag{6.98}$$

Rozptyl pro $b_0 < b < \lambda_D$ vedoucí k $\chi < \pi/2$ se nazývá *rozptyl pod malými úhly* a jeho příspěvek k celk. účinnému průřezu je

$$\sigma_{t,\mathrm{male}} = 2\pi \int_{b_0}^{\lambda_D} b\, db = \pi(\lambda_D^2 - b_0^2) \quad ; \quad (\chi < \pi/2). \tag{6.99}$$

Porovnáme-li

$$\frac{\sigma_{t,\mathrm{male}}}{\sigma_{t,\mathrm{velke}}} = \frac{\lambda_D^2}{b_0^2} - 1 \simeq \frac{\lambda_D^2}{b_0^2}. \tag{6.100}$$

$\Rightarrow$ důležité jsou srážky způsobující rozptyl pod malými úhly, nemůžeme je zanedbat a z integrace pro $b_c = \lambda_D \Rightarrow$

$$\sigma_t = \pi \lambda_D^2 \tag{6.101}$$

Zavedeme max. hodnotu $b_c = \lambda_D$ i pro účinný průřez pro přenos hybnosti a ze vztahu (6.92) máme

$$\sigma_m = 2\pi b_0^2 \ln(1 + \frac{\lambda_D^2}{b_0^2}), \tag{6.102}$$

protože

$$\sin(\frac{1}{2}\chi_c) = (1 + \frac{b_c^2}{b_0^2})^{-1/2}. \tag{6.103}$$

Použijeme označení

$$\Lambda = \frac{\lambda_D}{b_0}, \tag{6.104}$$

přičemž $\Lambda \gg 1$, takže

$$\sigma_m = 4\pi b_0^2 \ln \Lambda \tag{6.105}$$

Funkce Λ se mění relativně pomalu, pro většinu laboratorních typů plazmatu je $\ln \Lambda = 10$–20. Abychom mohli vypočítat Λ uvažujme zjednodušeně:

$\mathbf{T/n_2}$	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}
10^2	12.8	9.43	5.97				
10^3	16.3	12.8	9.43	5.97			
10^4	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97		
10^5	23.2	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97	
10^6	26.3	22.8	19.3	15.9	12.4	8.96	5.54
10^7	28.5	25.1	21.6	18.1	14.7	11.2	7.85
10^8	30.9	27.4	24.0	20.5	17.0	13.6	10.1

- $q = -e$, $q_1 = e$
- n_0 hustota elektronů a iontů
- T teplota obou
- Maxwell. rozdělení pro oba typy částic, žádná driftová rychlost

$$\langle g^2 \rangle = \frac{1}{n_0^2} \int_v \int_{v_1} f_e f_{i1} (\mathbf{v_1} - \mathbf{v})^2 d^3v d^3v_1 = \frac{1}{n_0} \int_v f_e (\frac{3kT}{m_i} + v^2) d^3v = \frac{3kT}{\mu} \tag{6.106}$$

a tedy

$$b_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu \langle g^2 \rangle} = \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 kT} \tag{6.107}$$

tj.

$$\Lambda = \frac{12\pi\epsilon_0 kT}{e^2} \lambda_D = 12\pi n_0 \lambda_D^3 = 9N_D, \tag{6.108}$$

kde N_D je počet částic v Debyově kouli.

Hodnoty parametru Λ pro teploty T v K a n_e v cm^{-3}: