Kapitola 9

Vodivost plazmatu a difuze

9.1 Langevin rovnice

Předtím než budeme diskutovat dva důležité jevy v plazmatu, vodivost a difuzi, uvedeme si velmi jednoduchou pohybovou rovnici pro slabě ionizované ($n_e \ll n_g$) studené plazma - *Langevinovu rovnici*. Předpokládáme, že co se týče interakcí, bude dominantní interakce nabitých částic s neutrály. Dále uvažujeme pouze el. a mg. sílu (zanedbáváme gravitační pole a sílu způsobené gradienty tlaku). Dříve uvedená pohybová rovnice

$$\rho_{m\alpha}\frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha}\mathbf{g} - \nabla p_\alpha + \mathbf{A}_\alpha \tag{9.1}$$

se tedy zjednodušuje jako

$$m_e\frac{D\mathbf{u_e}}{Dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{A}_e}{n_e}. \tag{9.2}$$

Makroskopický srážkový člen $\mathbf{A}_e/n_e$ můžeme vyjádřit

$$\frac{\mathbf{A}_e}{n_e} = -\nu_c m_e \mathbf{u_e}, \tag{9.3}$$

kde ν_c je srážková frekvence pro přenos hybnosti mezi elektrony a těžkými neutrálními částicemi. V tomto vztahu jsme zanedbali střední rychlosti neutrálních částic, protože tyto částice jsou mnohem hmotnější než elektrony (ALE nezanedbáváme jejich tepelnou rychlost). Dosadíme srážkový člen a dostáváme *Langevinovu rovnici*

$$m_e \frac{D\mathbf{u_e}}{Dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B}) - \nu_c m_e \mathbf{u_e} \tag{9.4}$$

Fyzikální smysl srážkového členu? Pokud nepůsobí el. a mg. síla

$$\frac{D\mathbf{u_e}}{Dt} = -\nu_c \mathbf{u_e}, \tag{9.5}$$

což můžeme vyřešit

$$\mathbf{u_e}(t) = \mathbf{u_e}(0) exp(-\nu_c t). \tag{9.6}$$

Tedy srážky elektronů s neutrály snižují střední rychlost elektronů exponencielně rychlostí odpovídající srážkové frekvenci.

Rovnici analogickou k (**??**) můžeme napsat pro ionty

$$m_i \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = Ze(\mathbf{E} + \mathbf{u_i} \times \mathbf{B}) - \nu_{in} m_i \mathbf{u_i}, \tag{9.7}$$

kde Ze je náboj iontu. V mnoha případech jako je např. vysokofrekvenční plazma, můžeme zanedbat pohyb iontů, tj. $\mathbf{u}_i = 0$. Plazma, v nemž je důležitý pouze pohyb elektronů se obvykle nazývá *Lorentzův plyn*.

9.2 Linearizace Langevinovy rovnice

Langevinova rovnice ve tvaru (9.4) obsahuje nelineární členy - součin dvou proměnných. V mnoha případech můžeme situaci zjednodušit linearizací těchto členů, která je použitelná v případě změn o malých amplitudách.

- Totální diferenciál $\mathbf{u}_e$ obsahuje člen $(\mathbf{u}_e \cdot \nabla)\mathbf{u}_e$. Zanedbání tohoto členu je možné pokud jsou střední rychlost a její prostorové změny malé nebo pokud je střední rychlost kolmá na svůj gradient (transverzální vlny)

- V nelineární členu $\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}$ budeme separovat mg. indukci $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ na dva členy

  $$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B_0} + \mathbf{B}'(\mathbf{r}, t), \tag{9.8}$$

  takže

  $$q(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B_0} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B}'). \tag{9.9}$$

  Pokud můžeme předpokládat, že

  $$|\mathbf{u_e} \times \mathbf{B}'| \ll |\mathbf{E}| \tag{9.10}$$

můžeme člen $|\mathbf{u_e} \times \mathbf{B}'|$ v (9.9) zanedbat.

S využitím dvou výše uvedených linearizačních zjednodušení získáváme následující Langevinovu rci

$$m_e \frac{\partial \mathbf{u_e}}{\partial t} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B_0}) - \nu_c m_e \mathbf{u_e} \tag{9.11}$$

V mnoha praktických problémech se proměnné $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}'$ a $\mathbf{u_e}$ mění harmonicky v čase i prostoru. Využijeme rovinných vln, protože jde o jednoduchý případ a jakákoliv fyzikálně realizovatelná vlna se dá vyjádřit jako superpozice rovinných vln.

$$\mathbf{E}, \mathbf{B}', \mathbf{u_e} \propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega \mathbf{t})], \tag{9.12}$$

kde ω je kruhová frekvence, $\mathbf{k}$ vlnový vektor ve směru šíření vlny. Diferenciální operátory ∇ a $\partial/\partial t$ se pak transformují na $i\mathbf{k}$ a $-i\omega$. Dosazením (9.8) do Maxwell. rce $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ dostaneme

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}', \tag{9.13}$$

takže

$$\mathbf{B}' = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega}. \tag{9.14}$$

Nyní můžeme ověřit nerovnost (9.10)

$$|\mathbf{u_e} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})/\omega| \ll |\mathbf{E}|. \tag{9.15}$$

Velikost nelineárního členu $|\mathbf{u_e} \times \mathbf{B}'|$ může být tedy rovna nebo menší než $|(u_e k E)/\omega|$. Nelineární člen můžeme zanedbat pokud

$$|u_e(k/\omega)| \ll 1 \tag{9.16}$$

nebo ekvivalentně

$$|u_e| \ll |\omega/k|, \tag{9.17}$$

kde ω/k představuje fázovou rychlost rovinné vlny. Protože tento člen obvykle dosahuje rychlosti světla, zatímco amplituda střední rychlosti elektronů u_e je mnohem menší, můžeme skutečně nelineární člen zanedbávat. Pokud ale dojde k rezonanci, je ω/k velmi malé, zatímco u_e se stává velké. V tomto případě se pak nelineární člen zanedbat nedá.

9.3 Stejnosměrná vodivost a pohyblivost elektronů

Použijeme Langevinovu rovnici pro ustálený stav, abychom odvodili stejnosměrnou vodivost plazmatu. V této kapitole předpokládáme slabě ionizované homogenní plazma, ve kterém můžeme použít model Lorentzova plynu. Předpokládáme, že aplikované el. pole je konstantní a homogenní.

9.3.1 Izotropní plazma

Pokud nepůsobí mg. síla, můžeme Langevinovu rci pro ustálený stav zapsat jako

$$-e\mathbf{E} - m_e \nu_c \mathbf{u_e} = 0. \tag{9.18}$$

Hustota el. proudu

$$\mathbf{J} = -e n_e \mathbf{u_e}. \tag{9.19}$$

Kombinací předchozích dvou rovnic

$$\mathbf{J} = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_e} \mathbf{E}. \tag{9.20}$$

Z Ohmova zákona $\mathbf{J} = \sigma_0 \mathbf{E}$ můžeme pak vyjádřit *stejnosměrnou vodivost* pro izotropní elektronový plyn

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_c}. \tag{9.21}$$

Pohyblivost elektronů μ_e je definovaná jako

$$\mu_e = \frac{u_e}{E}, \tag{9.22}$$

takže dostáváme

$$\mathcal{M}_e = -\frac{e}{m_e \nu_c} = -\frac{\sigma_0}{n_e e} \tag{9.23}$$

9.3.2 Anizotropní magnetoplazma

V případě přítomnosti mg. pole se plazma stává anizotropní. Langevinova rce pro ustálený stav je

$$-e(E + u_e \times B_0) - m_e \nu_c \mathbf{u_e} = 0, \tag{9.24}$$

kde $\mathbf{B}_0$ je konstantní a homogenní mg. pole. Použijeme (9.19)

$$\frac{m_e \nu_c}{n_e e} \mathbf{J} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B_0}), \tag{9.25}$$

takže

$$\mathbf{J} = \sigma_0 (\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B_0}), \tag{9.26}$$

což je zjednodušená podoba Ohmova zákona.

Chtěli bychom přepsat tento zákon tak, aby hustota el. proudu byla přímo úměrná aplikovanému el. poli. Definujeme tedy *tenzor stejnosměrné vodivosti* $\mathcal{S}$

$$\mathbf{J} = \mathcal{S} \cdot \mathbf{E}. \tag{9.27}$$

Abychom získali jeho vyjádření, uvažujme kartézské souřadnice a mg. pole rovnoběžné s osou z, tj. $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$. Nahradíme $\mathbf{u}_e = -\mathbf{J}/(en_e)$ v (9.26)

$$\mathbf{J} = \sigma_0 \mathbf{E} - \frac{\sigma_0 B_0}{en_e} (\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{z}}). \tag{9.28}$$

Uvědomíme si, že

$$\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{z}} = J_y \hat{\mathbf{x}} - J_x \hat{\mathbf{y}} \tag{9.29}$$

a dostáváme tuto soustavu rovnic

$$\hat{\mathbf{x}} : \qquad J_x = \sigma_0 E_x - \frac{\Omega_{ce}}{\nu_e} J_y \tag{9.30}$$

$$\hat{\mathbf{y}} : \qquad J_y = \sigma_0 E_y + \frac{\Omega_{ce}}{\nu_e} J_x \tag{9.31}$$

$$\hat{\mathbf{z}} : \qquad J_z = \sigma_0 E_z, \tag{9.32}$$

kde $\Omega_{ce} = eB_0/m_e$ označuje elektronovou cyklotronovou frekvenci. Z prních dvou rovnic dostáváme

$$J_x = \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)} \sigma_0 E_x - \frac{\nu_c^2 \Omega_{ce}}{(\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)} \sigma_0 E_y \tag{9.33}$$

$$J_y = \frac{\nu_c^2 \Omega_{ce}}{(\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)} \sigma_0 E_x + \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)} \sigma_0 E_y. \tag{9.34}$$

V maticové podobě tedy

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2+\Omega_{ce}^2)} & -\frac{\nu_c^2\Omega_{ce}}{(\nu_c^2+\Omega_{ce}^2)} & 0 \\ \frac{\nu_c^2\Omega_{ce}}{(\nu_c^2+\Omega_{ce}^2)} & \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2+\Omega_{ce}^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{9.35}$$

Tenzor ss vodivosti je tedy

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \sigma_\perp & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\parallel \end{pmatrix}, \tag{9.36}$$

kde

$$\sigma_\perp = \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)}\sigma_0 \tag{9.37}$$

$$\sigma_H = \frac{\nu_c^2\Omega_{ce}}{(\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)}\sigma_0 \tag{9.38}$$

$$\sigma_\parallel \equiv \sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_e}. \tag{9.39}$$

Abychom pochopili fyzikální smysl komponent tenzoru $\mathcal{S}$ je vhodné rozložit el. intenzitu do směru rovnoběžného s $\mathbf{B_0}$ a kolmého. Element $\sigma_\perp$ se nazývá *kolmá* nebo *transverzální* vodivost (rovněž *Pedersonova vodivost*), protože řídí tok el. proudu ve směru rovnoběžném s $\mathbf{E}_\perp$ a kolmém na $\mathbf{B_0}$, zatímco σ_H (*Hallova vodivost*) řídí tok. el. proudu ve směru kolmém na el. i mg. pole. Element σ_0 je *podélná vodivost*, protože určuje tok el. proudu ve směru rovnoběžném s mg. polem.

Dále odvodíme vztah pro pohyblivost elektronů. Díky anizotropii půjde o tenzor

$$\mathbf{u_e} = \mathcal{M}_e \cdot \mathbf{E}. \tag{9.40}$$

Protože $\mathbf{J} = -en_e\mathbf{u}_e = \mathcal{S}\mathbf{E}$, máme

$$\mathcal{M}_e = -\frac{1}{n_e e}\mathcal{S}. \tag{9.41}$$

9.4 Střídavá vodivost a elektronová pohyblivost

Předpokládejme nyní, že el. pole $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ a střední rychlost elektronů $\mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t)$ se harmonicky mění s časem jako $\exp(-i\omega t)$. Linearizovanou Langevinovu rovnici (9.11)

$$-i\omega m_e \mathbf{u_e} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B_0}) - m_e \nu_c \mathbf{u_e} \tag{9.42}$$

můžeme tedy přepsat jako

$$-e(\mathbf{E} + \mathbf{u_e} \times \mathbf{B_0}) - m_e(\nu_c - i\omega)\mathbf{u_e} = 0 \tag{9.43}$$

Tato rovnice je analogická k rovnici (9.24) až na změnu členu srážkové frekvence, tj. místo ν_c na $\nu_c - i\omega$. Takže podobně dostáváme tenzor tlaku, kde frekvenčně závislá kolmá vodivost, Hallova vodivost a podélná vodivost jsou

$$\sigma_\perp = \frac{(\nu_c - i\omega)^2}{(\nu_c - i\omega)^2 + \Omega_{ce}^2}\sigma_0 \tag{9.44}$$

$$\sigma_H = \frac{(\nu_c - i\omega)\Omega_{ce}}{(\nu_c - i\omega)^2 + \Omega_{ce}^2}\sigma_0 \tag{9.45}$$

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e(\nu_c - i\omega)} = \frac{n_e e^2(\nu_c - i\omega)}{m_e(\nu_c^2 + \omega^2)} \tag{9.46}$$

Pohyblivost dostáváme opět analogicky podle vztahu (9.41).

Pokud můžeme zanedbat elektron-neutrál srážkovou frekvenci ($\nu_c = 0$), dostáváme

$$\sigma_\perp = \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \Omega_{ce}^2)}\sigma_0 \tag{9.47}$$

$$\sigma_H = \frac{i\omega\Omega_{ce}}{(\omega^2 - \Omega_{ce}^2)}\sigma_0 \tag{9.48}$$

$$\sigma_0 = i\frac{n_e e^2}{m_e\omega} \tag{9.49}$$

9.5 Vodivost při uvažování pohybu iontů

Vezmeme v úvahu pohyb iontů. Linearizovaná Langevinova rovnice pro částice typu α

$$m_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} = q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B_0}) - m_\alpha \nu_{c\alpha}\mathbf{u}_\alpha, \tag{9.50}$$

kde $\nu_{c\alpha}$ je efektivní srážková frekvence neboli tlumící člen, jenž je výsledkem srážek částic α s *neutrály*. Langevinova rovnice pro jednotlivé typy nabitých částic jsou nezávislé. Celkový proud je tedy dán jako

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha = (\sum_\alpha \mathcal{S}_\alpha) \cdot \mathbf{E} \tag{9.51}$$

a celkový tenzor vodivosti je jednoduše

$$\mathcal{S} = \sum_{\alpha} S_{\alpha}. \tag{9.52}$$

Pro plazma obsahující elektrony a několik typů iontů (index j) dostáváme ze vztahů (9.44), (9.45) a (9.46) pomocí plazmové frekvence $\omega_{p\alpha}$ a ε_0

$$\sigma_{\perp} = \epsilon_0 [\frac{\omega_{pe}^2(\nu_{ce} - i\omega)}{(\nu_{ce} - i\omega)^2 + \Omega_{ce}^2} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2(\nu_{cj} - i\omega)}{(\nu_{cj} - i\omega)^2 + \Omega_{cj}^2}] \tag{9.53}$$

$$\sigma_H = \epsilon_0 [\frac{\omega_{pe}^2 \Omega_{ce}}{(\nu_{ce} - i\omega)^2 + \Omega_{ce}^2} - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \Omega_{cj}}{(\nu_{cj} - i\omega)^2 + \Omega_{cj}^2}] \tag{9.54}$$

$$\sigma_{\parallel} = \epsilon_0 [\frac{\omega_{pe}^2}{(\nu_{ce} - i\omega)} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{(\nu_{cj} - i\omega)}] \tag{9.55}$$

9.6 Plazma jako dielektrikum

Až doposud jsme ale uvažovali o nabitých částicích pohybujících se ve vlastních vnitřních polích, takže jsme brali v úvahu tyto rovnice

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{9.56}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \tag{9.57}$$

které jsou používané pro volný prostor bez nábojů. Efekt existence plazmatu se pak projevoval pohybem a interakcí nabitých částic uvnitř plazmatu.

Pokud neuvažujeme vnitřní pohyb částic, můžeme plazma popisovat jako dielektrikum charakterizované *dielektrickým tenzorem*. Pak nás zajímají pouze obecné makroskopické vlastnosti a nikoliv elementární pohyb částic. Místo Langevinovy rovnice vezměme Maxwellovu rovnici

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \tag{9.58}$$

a zde zahrňme efekt plazmatu pomocí tenzoru vodivosti $\mathcal{S}$ definovaném vztahem

$$\mathbf{J} = \mathcal{S} \cdot \mathbf{E}. \tag{9.59}$$

Dosadíme do Maxwellovy rovnice a předpokládáme časově proměnné harmonické variace el. pole:

$$\nabla \times \mathbf{B} = mu_0 \mathcal{S} \cdot \mathbf{E} - i\omega\mu_0\epsilon_0\mathbf{E}. \tag{9.60}$$

Pokud **1** označíme jednotkový tenzor

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega\mu_0\epsilon_0(\mathbf{1} + \frac{i\mathcal{S}}{\omega\epsilon_0}) \cdot \mathbf{E} \tag{9.61}$$

nebo ekvivaletně

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega\mu_0\mathcal{E} \cdot \mathbf{E}, \tag{9.62}$$

kde

$$\mathcal{E} = \epsilon_0(1 + \frac{i\mathcal{S}}{\omega\epsilon_0}) \tag{9.63}$$

se nazývá *dielektrický tenzor* plazmatu. Používání tohoto tenzoru představuje jiný přístup pro popisování plazmatu než jsme používali doposud:

$$\mathbf{D} = \mathcal{E} \cdot \mathbf{E}. \tag{9.64}$$

Poznamenejme, že $\mathcal{E}$ závisí na frekvenci ω a můžeme ho zapsat v maticové podobě

$$\mathcal{E} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & 0 \\ \epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \tag{9.65}$$

kde

$$\epsilon_1 = 1 + \frac{i}{\omega\epsilon_0}\sigma_\perp \tag{9.66}$$

$$\epsilon_2 = \frac{i}{\omega\epsilon_0}\sigma_H \tag{9.67}$$

$$\epsilon_3 = 1 + \frac{i}{\omega\epsilon_0}\omega_0 \tag{9.68}$$

9.7 Difuze volných elektronů

Přítomnost gradientů tlaku v transportní rovnici hybnosti představuje sílu, která vyrovnává jakékoliv nehomogenity hustoty plazmatu. Difuze částic je výsledkem této síly.

Zde dovodíme difuzní koeficient pro elektrony v "teplém" slabě ionizavaném plazmatu.

- trasportní pohybová rovnice pro elektrony s konstantní elektron-neutrál srážkovou frekvencí

- odchylky od rovnováhy způsobené nehomogenitami v hustotě jsou velmi malé

$$n_e(\mathbf{r},t) = n_0 + n_e'(\mathbf{r},t), \tag{9.69}$$

kde $|n_e'| \ll n_0$ je veličina prvního řádu "malosti", takže tyto odchylky můžeme ve druhém řádu zanedbat

- tenzor tlaku $\mathcal{P}_e$ nahradíme skalárním tlakem p_e

$$p_e(\mathbf{r},t) = n_e(\mathbf{r},t)kT_e = (n_0 + n_e')kT_e \tag{9.70}$$

- $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ jsou nula, T_e =konst

Protože $\mathbf{u}_e$ je veličina prvnho řádu "malosti", můžeme rovnici kontinuity zapsat

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u_e} = 0, \tag{9.71}$$

kde jsme zanedbali součin $n_e'\mathbf{u}_e$. Podobně pro transportní rovnici hybnosti

$$n_e m_e [\frac{\partial \mathbf{u_e}}{\partial t} + (\mathbf{u_e} \cdot \nabla)\mathbf{u_e}] = -\nabla p_e - n_e M - e\nu_c \mathbf{u_e} \tag{9.72}$$

dostaneme po linearizaci

$$n_0 \frac{\partial \mathbf{u_e}}{\partial t} = -\frac{kT_e}{m_e}\nabla n_e' - n_0 \nu_c \mathbf{u_e}. \tag{9.73}$$

Vezmeme divergenci této rovnice

$$n_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{u_e})}{\partial t} = -\frac{kT_e}{m_e}\nabla^2 n_e' - n_0 \nu_c \nabla \cdot \mathbf{u_e} \tag{9.74}$$

a dosadíme za $n_0\nabla \cdot \mathbf{u_e}$ z (9.71)

$$\frac{\partial^2 n_e'}{\partial t^2} = \frac{kT_e}{m_e}\nabla^2 n_e' - \nu_c \frac{\partial n_e'}{\partial t}, \tag{9.75}$$

což můžeme přepsat i jako

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} = D_e \nabla^2 n_e' - \frac{1}{\nu_c}\frac{\partial^2 n_e'}{\partial t^2}, \tag{9.76}$$

kde jsme definovali *koeficient difuze volných elektronů*

$$D_e = \frac{kTe}{m_e \nu_c} \tag{9.77}$$

Chceme získat odhad velikosti jednotlivých členů v rovnici (9.76). Nechť τ a L představují charakteristický čas a délku, na které se významně mění $n_e' \Longrightarrow$ prostorová derivace je velikosti řádu L^{-1} a časová derivace velikosti řádu τ^{-1}:

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} \sim \frac{n_e'}{\tau} \tag{9.78}$$

$$D_e \nabla^2 n_e' \sim D_e \frac{n_e'}{L^2} \tag{9.79}$$

$$\frac{1}{\nu_c}\frac{\partial^2 n_e'}{\partial t^2} \sim \frac{n_e'}{\nu_c \tau^2}. \tag{9.80}$$

Porovnáme-li (9.78) a (9.80) vidíme, že je-li $\nu_v \tau \gg 1$, tj. průměrný počet srážek elektronů s neutrály během časového intervalu τ je dosti velký, můžeme poslední člen v (9.76) zanedbat a dostáváme *difuzní rovnici*

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} = D_e \nabla^2 n_e'. \tag{9.81}$$

Takže pokud je rychlost změny hustoty pomalá ve srovnání se srážkovou frekvencí, je hustota elektronů řízena difuzní rovnicí, v níž je difuzní koeficient dán vztahem (9.77).

Podmínka $\nu_v \tau \gg 1$ znamená zanedbání členu zrychlení v transportní pohybové rovnici, tj. zanedbání $\partial \mathbf{u}_e / \partial t$. Pokud zanedbáváme časové změny $\mathbf{u}_e$ dostáváme z linearizované pohybové rovnice (9.73)

$$n_0 \nu_c \mathbf{u_e} = -\frac{kT_e}{m_e} \nabla n'_e, \tag{9.82}$$

což můžeme napsat jako

$$\mathbf{\Gamma_e} = -D_e \nabla n'_e, \tag{9.83}$$

kde $\mathbf{\Gamma}_e = n_0 \mathbf{u}_e$ je linearizovaný tok elektronů. Vztah (9.83) je analogický k jednoduchému Ohmovu zákonu $\mathbf{J} = \sigma_0 \mathbf{E}$, takže tok elektronů způsobený gradientem hustoty je analogický k el. proudu způsobenému el. polem, pokud uvažujeme ustálený stav pro $\mathbf{u}_e$.

9.8 Difuze elektronů v mg. poli

Uvažujme nyní konst. a homogenní pole B_0. Uděláme podobné zjednodušení jako v předchozím a zanedbáme $\partial \mathbf{u}_e / \partial t$. Z linearizované pohybové rovnice dostáváme

$$\mathbf{\Gamma_e} = -D_e \nabla n'_e - \frac{e}{m_e \nu_e} (\mathbf{\Gamma_e} \times \mathbf{B_0}). \tag{9.84}$$

Uvažujeme kartézskou soustavu souřadnic, osa z ve směru $\mathbf{B}_0$, tj. $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$:

$$\mathbf{\Gamma_e} = -D_e \nabla n'_e - \frac{\Omega_{ce}}{\nu_e} (\mathbf{\Gamma_e} \times \hat{\mathbf{z}}). \tag{9.85}$$

Tato rovnice je analogická k (9.28), kde $\mathbf{\Gamma}_e$ nahradíme $\mathbf{J}$, D_e nahradíme σ_e a $-\nabla n'_e$ nahradíme $\mathbf{E}$. Dále $\Omega_{ce}/\nu_c = \sigma_0 B_0/(e n_e)$. Takže analogicky s výrazem $\mathbf{J} = \mathcal{S} \cdot \mathbf{E}$ můžeme psát

$$\mathbf{\Gamma_e} = -\mathcal{D} \cdot \nabla n'_e, \tag{9.86}$$

kde $\mathcal{D}$ je *tenzor difuze v mg. poli*

$$\left(\mathcal{D} = \begin{array}{ccc} D_\perp & D_H & 0 \\ -D_H & D_\perp & 0 \\ 0 & 0 & D_\parallel \end{array} \right), \tag{9.87}$$

přičemž

$$D_\perp = \frac{\nu_c^2}{\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2} D_e \tag{9.88}$$

$$D_H = \frac{\nu_c \Omega_{ce}}{\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2} D_e \tag{9.89}$$

$$D_\parallel \equiv D_e = \frac{kT_e}{m_e \nu_c} \tag{9.90}$$

Podobně jako v předchozí kapitole můžeme odvodit difuzní rovnici pro n'_e. Nejprve zapíšeme rovnici kontinuity (9.71) jako

$$\frac{\partial n'_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma_e} = 0. \tag{9.91}$$

Dosadíme (9.86) za $\mathbf{\Gamma}_e$

$$\frac{\partial n'_e}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathcal{D} \cdot \nabla n'_e). \tag{9.92}$$

Za použití matice (9.87) a výpočtu v kartézských souřadnicích dostaneme

$$\mathcal{D} \cdot \nabla n_e' = \hat{\mathbf{x}}(D_\perp \frac{\partial n_e'}{\partial x} + D_H \frac{\partial n_e'}{\partial y}) + \tag{9.93}$$

$$\hat{\mathbf{y}}(-D_H \frac{\partial n_e'}{\partial x} + D_\perp \frac{\partial n_e'}{\partial y}) + \hat{\mathbf{z}} D_e \frac{\partial n_e'}{\partial z}. \tag{9.94}$$

Tento výsledek dosadíme do (9.92)

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} = D_\perp (\frac{\partial^2 n_e'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_e'}{\partial y^2}) + D_e \frac{\partial^2 n_e'}{\partial z^2}. \tag{9.95}$$

Protože $D_\perp < D_e$ a protože $D_\perp$ klesá s rostoucím Ω_{ce}/ν_c (podobně jako $\sigma_\perp$), je difuze částic ve směru kolmém na mg. pole vždy menší než ve směru rovnoběžném.

Transportní pohybová rovnice pro elektronový plyn, pokud zanedbáme člen zrychlení ale vezmeme v úvahu elmag sílu, je obecně (konst. teplota)

$$\mathbf{\Gamma}_e = \mathcal{M}_e (n_e \mathbf{E} + \mathbf{\Gamma_e} \times \mathbf{B}) - D_e \nabla n_e. \tag{9.96}$$

Vidíme, že tok elektronů je výsledkem obojího, elmag síly i gradientu tlaku. Podíl skalární pohyblivosti $\mathcal{M}_e$ a difuzního koeficientu je znám jako *Einsteinova relace*

$$\frac{\mathcal{M}_e}{D_e} = -\frac{e}{kT_e} \tag{9.97}$$

9.9 Ambipolarní difuze

Ukázali jsme si, že časově ustálená transportní rovnice hybnosti v případě nepřítomnosti elmag sil a konst. teplotě dává tuto difuzní rovnici pro elektrony:

$$\mathbf{\Gamma_e} = -D_e \nabla n'_e, \tag{9.98}$$

kde *difuzní koeficient volných elektronů* je definován

$$D_e = \frac{kT_e}{m_e \nu_{ce}}. \tag{9.99}$$

Pokud budeme uvažovat podobnou rovnici pro ionty ve slabě ionizovaném plazmatu máme

$$\mathbf{\Gamma_i} = -D_e \nabla n'_i, \tag{9.100}$$

kde

$$D_i = \frac{kT_i}{m_i \nu_{ci}} \tag{9.101}$$

označuje *difuzní koeficient volných iontů.*
$\Longrightarrow$ neuvažovali jsme interakci mezi elektrony a ionty ALE elektrony difundují rychleji a zanechávají za sebou kladný náboj. Difuze, při které neuvažujeme prostorový náboj, se nazývá *volná difuze.*
V mnoha případech ovšem *nemůžeme* zanedbat prostorový náboj, vzniklé el. pole ja dáno Maxwellovou rovnicí

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0}. \tag{9.102}$$

Odhadneme důležitost prostorového náboje pro difuzi $\Rightarrow$ použijeme bezrozměrnou analýzu: L je char. délka, na které se podstatně mění hustota náboje. Ze vztahu (9.73)

$$E \sim \frac{enL}{\epsilon_0}, \tag{9.103}$$

takže el. síla na jednotk. hmotnost

$$f_E = \frac{eE}{m} \sim \frac{e^2 nL}{m\epsilon_0}. \tag{9.104}$$

"Difuzní síla" na jednotk. hmotnost z (9.73)

$$f_D = \frac{kT}{mn_0}|\nabla n| \sim \frac{kTn}{mn_0 L}. \tag{9.105}$$

$\Rightarrow$ El. pole prostorového náboje může být zanedbáno pokud $f_E \ll f_D$, tj.

$$L^2 \ll \frac{\epsilon_0 kT}{n_0 e^2} = \lambda_D^2, \tag{9.106}$$

kde λ_D je *Debyeova délka*. To je splněno zřídka a musíme uvažovat tzv. *ambipolární difuzi*. Předp., že změny hustoty elektronů i iontů jsou prvního řádu "malosti"

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) = n_0 + n'_\alpha(\mathbf{r}, t), \tag{9.107}$$

kde $\alpha = e, i$ a $n'_\alpha \ll n_0$, a že $\mathbf{u}_\alpha$ mají velmi malou amplitudu. Použijeme linearizovanou rovnici kontinuity

$$\frac{\partial n'_\alpha}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha = 0 \tag{9.108}$$

a linearizovanou rovnici hybnosti za předp. konstantních teplot a bez mg. pole

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E} - \frac{kT_\alpha}{m_\alpha n_0}\nabla n'_\alpha - \nu_{c\alpha}\mathbf{u}_\alpha, \tag{9.109}$$

kde pole prostorového náboje splňuje rci (9.102). Rovněž předp. že střední rychlost neutrálů je nulová a zanedbáváme srážky elektron-iont. Vezmeme divergenci (9.109) a použijeme rovnici kontinuity (9.108):

$$\frac{\partial^2 n'_\alpha}{\partial t^2} = -\frac{q_\alpha n_0}{m_\alpha}(\nabla\cdot\mathbf{E}) + \frac{kT_\alpha}{m_\alpha}\nabla^2 n'_\alpha - \nu_{c\alpha}\frac{\partial n'_\alpha}{\partial t}. \tag{9.110}$$

Nahradíme $\nabla\cdot\mathbf{E}$ z Maxwellovy rovnice (9.102) a dostáváme soustavu rovnic

$$\frac{\partial^2 n'_e}{\partial t^2} = \omega_{pe}^2(n'_i - n'_e) + \frac{kT_e}{m_e}\nabla^2 n'_e - \nu_{ce}\frac{\partial n'_e}{\partial t} \tag{9.111}$$

$$\frac{\partial^2 n'_i}{\partial t^2} = -\omega_{pi}^2(n'_i - n'_e) + \frac{kT_i}{m_i}\nabla^2 n'_i - \nu_{ce}\frac{\partial n'_i}{\partial t}. \tag{9.112}$$

Musíme provést další zjednodušení. Podobně jako dříve jestliže $\nu_c\tau \gg 1$, kde τ je charakteristická doba difuze, můžeme členy na levé straně rovnic zanedbat. Jejich zkombinováním tedy dostáváme

$$(n'_i - n'_e)(\omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2) + kT_e\nabla^2 n'_e + kT_i\nabla^2 n'_i - m_e\nu_{ce}\frac{\partial n'_e}{\partial t} - m_i\nu_{ci}\frac{\partial n'_i}{\partial t} = 0. \tag{9.113}$$

Pomocí další aproximace $n'_e = n'_i = n'$

$$k(T_e + T_i)\nabla^2 n' - (m_e\nu_{ce} + m_i\nu_{ci})\frac{\partial n'}{\partial t} = 0, \tag{9.114}$$

což můžeme přepsat jako

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = D_a\nabla^2 n', \tag{9.115}$$

kde

$$D_a = \frac{k(T_e + T_i)}{m_e \nu_{ce} + m_i \nu_{ci}} \tag{9.116}$$

je *koeficient ambipolární difuze.*