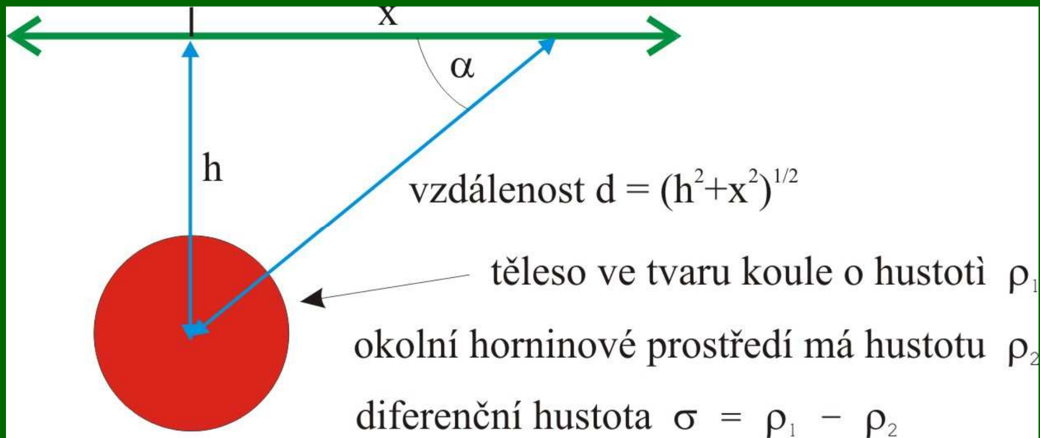
1. Úlohy z gravimetrie

Úvodní problém – nakreslete graf znázorňující tíhový účinek koule podle vzorce pro vertikální složku.

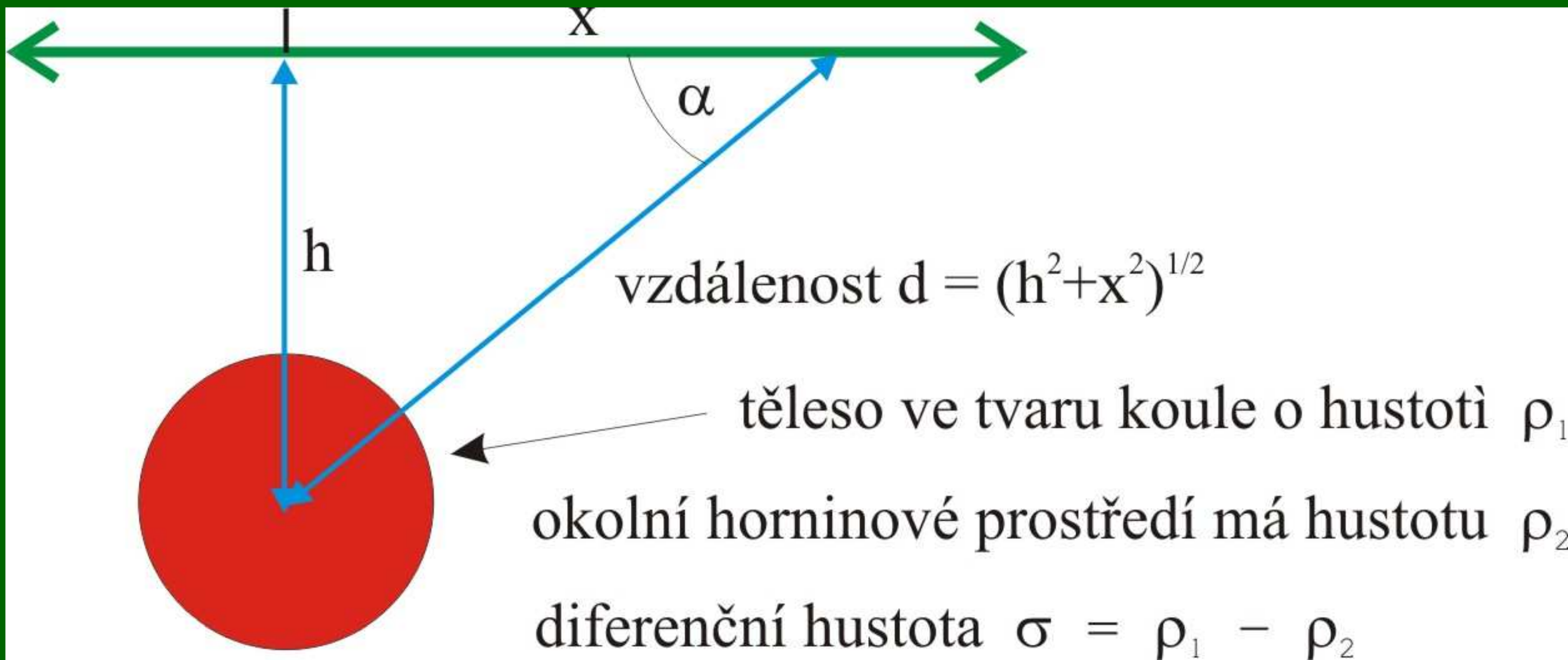
hloubka středu koule	h = 500 m
poloměr koule	R = 150 m
diferenční hustota	σ = 500 kg/m^3



1. Úlohy z gravimetrie

Pro gravitační zrychlení g obecně platí: $$g = \frac{\kappa M}{d^2}$$

Vzdálenost je ale: $$d = \sqrt{x^2 + h^2}$$



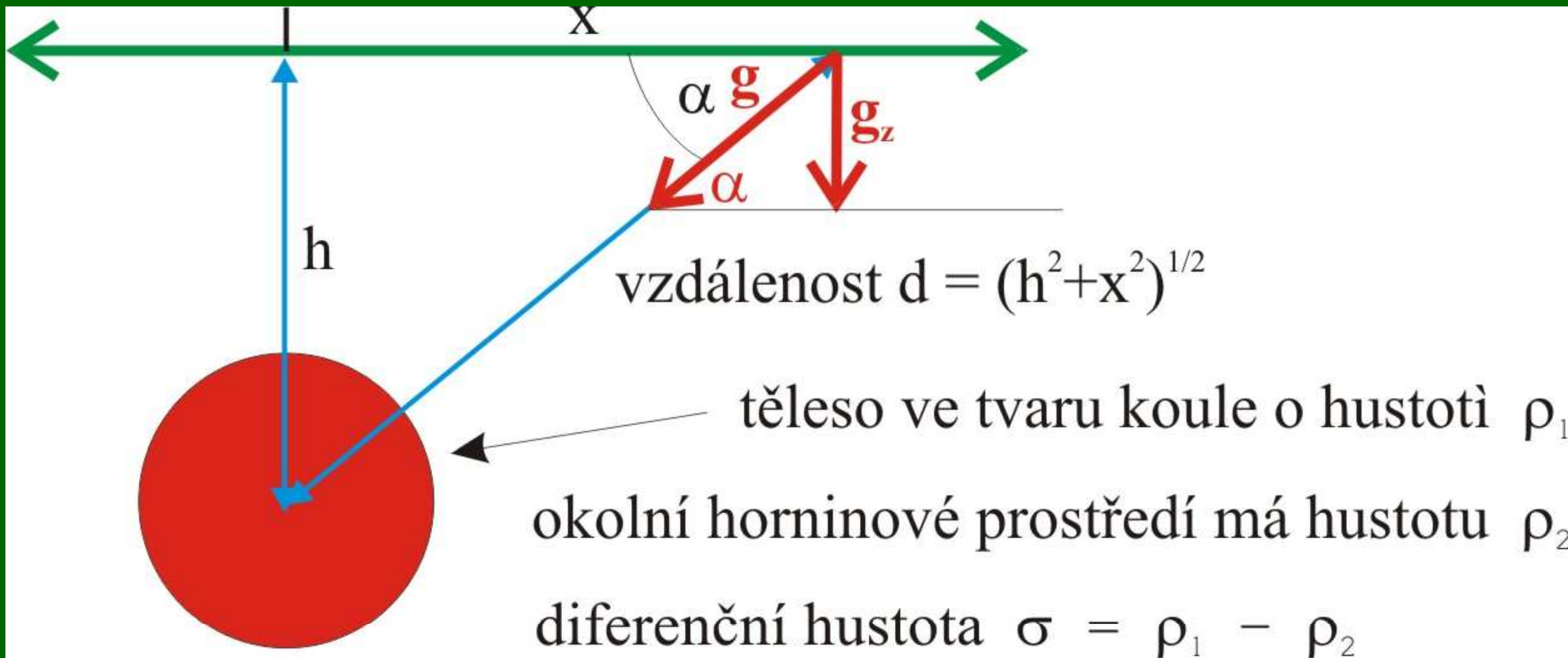
1. Úlohy z gravimetrie

Gravitační zrychlení tedy je dáno:

$$g = \frac{\kappa M}{x^2 + h^2}$$

Podle zadání nás ale zajímá pouze vertikální složka gravitačního zrychlení g_z:

$$g_z = g \sin \alpha$$



1. Úlohy z gravimetrie

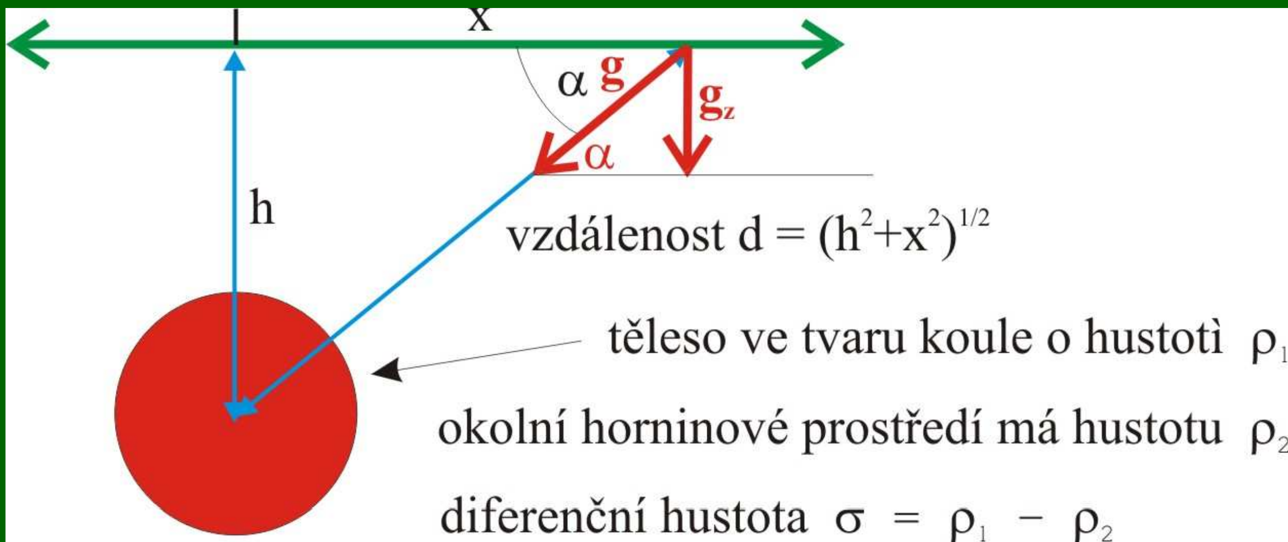
Gravitační zrychlení tedy je dáno:

$$g = \frac{\kappa M}{x^2 + h^2}$$

Podle zadání nás ale zajímá pouze vertikální složka gravitačního zrychlení g_z:

$$g_z = g \sin \alpha$$

Současně ale vidíme, že $\sin\alpha$ si můžeme vyjádřit jako:



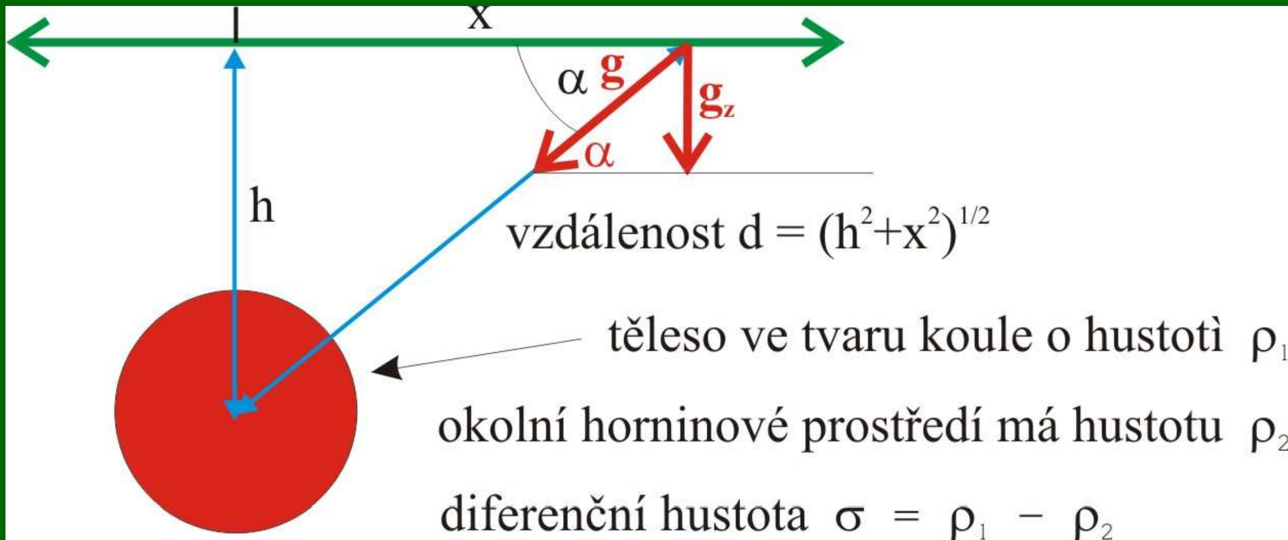
$$\sin \alpha = \frac{h}{d}$$

$$d = \sqrt{x^2 + h^2}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Tedy:

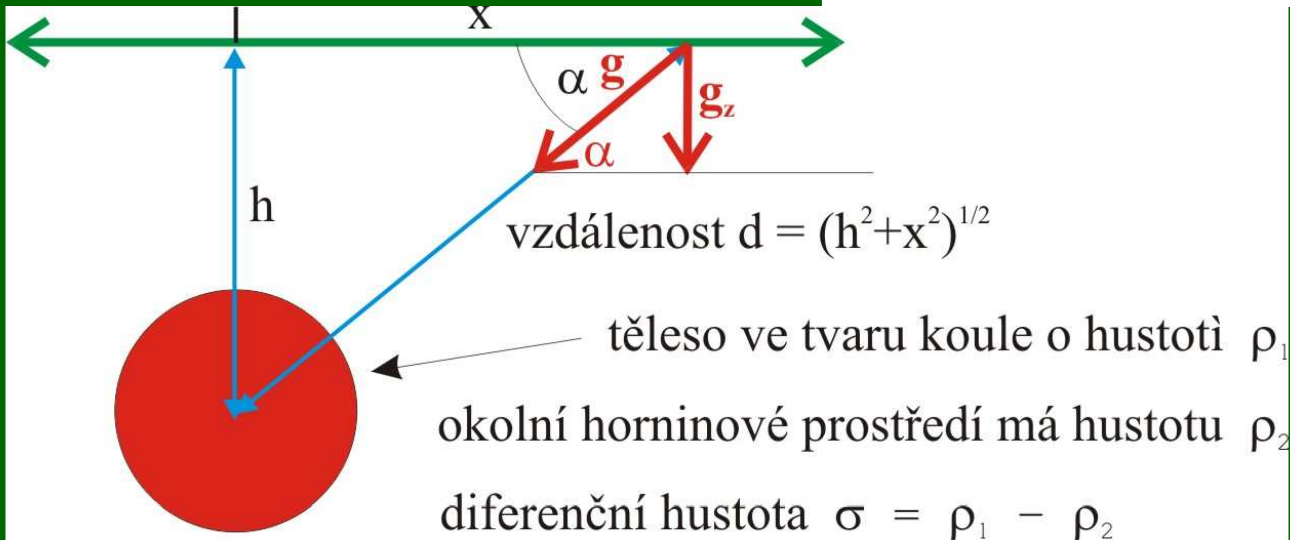
$$g_z = g\sin\alpha = \frac{\kappa M}{x^2+h^2}\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2+h^2\right)^3}}$$



1. Úlohy z gravimetrie

Hmotnost M je v našem případě nutno chápat nikoli jako celou hmotnost koule, ale jako diferenční hmotnost (oč je hmotnost odlišná od hmotnosti okolního prostředí o stejném objemu). M tedy závisí na objemu a na diferenční hustotě σ:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 . \sigma$$



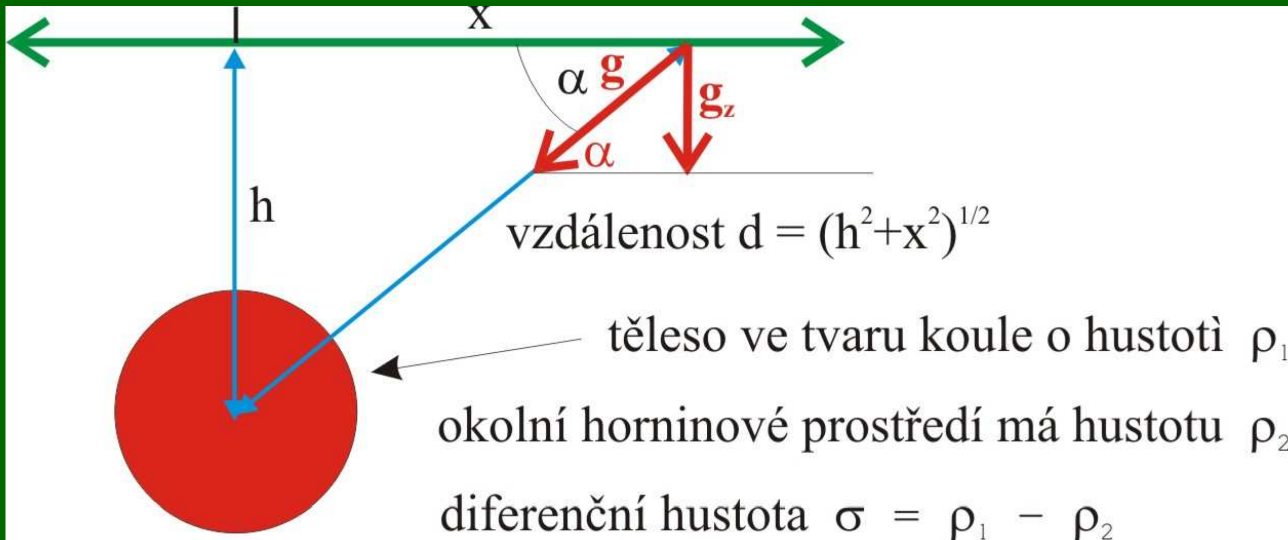
1. Úlohy z gravimetrie

Hmotnost M je v našem případě tedy:

$$M = \frac{4}{3}\pi 150^3.500 = 7{,}068{,}583{,}471 kg$$

Vertikální složka g je po dosazení:

$$g_z = \frac{6{,}67.10^{-11}.7068583471.500}{\sqrt{\left(x^2 + 500^2\right)^3}} = \frac{235{,}737259}{\sqrt{\left(x^2 + 500^2\right)^3}} m.s^{-2}$$



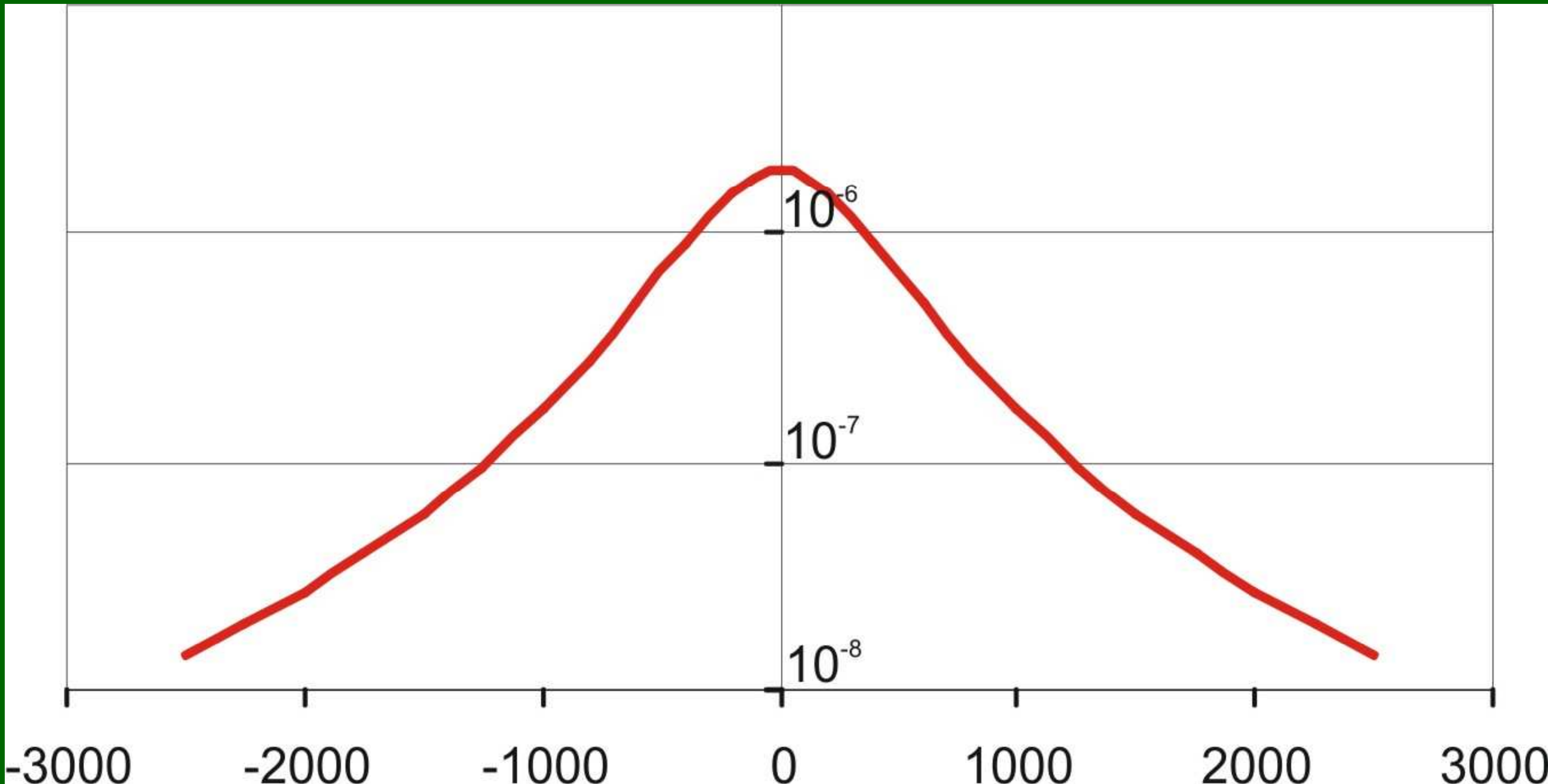
1. Úlohy z gravimetrie

Po dosazení za x (vzdálenost na profilu od bodu 0) můžeme doplnit tabulku hodnot vertikální složky gravitačního zrychlení v jednotlivých bodech profilu:

x [m]	Vz [m/s^2]	x [m]	Vz [m/s^2]
-2500	1,42252 . 10^{-8}	200	1,50949 . 10^{-6}
-2250	1,92522 . 10^{-8}	400	8,97951 . 10^{-7}
-2000	2,69057 . 10^{-8}	600	4,94804 . 10^{-7}
-1750	3,91016 . 10^{-8}	800	2,80765 . 10^{-7}
-1500	5,96373 . 10^{-8}	1000	1,6868 . 10^{-7}
-1250	9,66076 . 10^{-8}	1250	9,66076 . 10^{-8}
-1000	1,6868 . 10^{-7}	1500	5,96373 . 10^{-8}
-800	2,80765 . 10^{-7}	1750	3,91016 . 10^{-8}
-600	4,94804 . 10^{-7}	2000	2,69057 . 10^{-8}
-400	8,97951 . 10^{-7}	2250	1,92522 . 10^{-8}
-200	1,50949 . 10^{-6}	2500	1,42252 . 10^{-8}
0	1,8859 . 10^{-6}		

1. Úlohy z gravimetrie

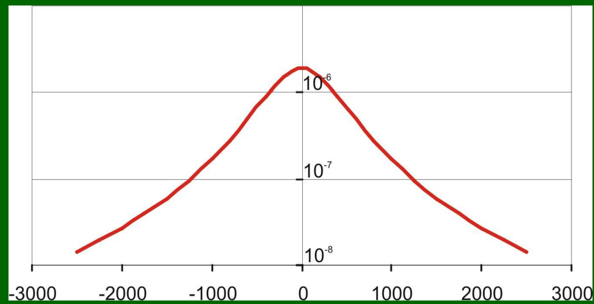
Vypočtené hodnoty pak vyneseme do grafu:



1. Úlohy z gravimetrie

Obrácené úlohy vycházející z úvodního problému:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



Úloha 1.1: Vypočti poloměr kulového tělesa, jehož tíhový účinek gz ve vzdálenosti 1000m od průmětu středu tělesa na povrch je $2{,}1 * 10^{-7}$ m/s^2.

hloubka středu koule $h = 500$ m

diferenční hustota $\sigma = 500$ kg/m^3

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.1: Vypočti poloměr kulového tělesa, jehož tíhový účinek gz ve vzdálenosti 1000m od průmětu středu tělesa na povrch je 2,1 $*10^{-7}$ m/s^2.

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}} \Leftrightarrow M = \frac{g_z \sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}{\kappa h}$$

hloubka středu koule $h = 500$ m

diferenční hustota $\sigma = 500$ kg/m^3

1. Úlohy z gravimetrie

Dosadíme do vzorce pro hmotnost M:

$$M = \frac{g_z\sqrt{\left(x^2+h^2\right)^3}}{\kappa h} = \frac{2{,}1\times10^{-7}\sqrt{(1000^2+500^2)^3}}{6{,}67\times10^{-11}.500}$$

$$M = 8{,}8\times10^9\,\mathrm{kg}$$

Nyní známe hmotnost i diferenční hustotu, hledáme poloměr.

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3.\sigma$$

1. Úlohy z gravimetrie

Nyní známe hmotnost i diferenční hustotu, hledáme poloměr.

$$M = 8{,}8 \times 10^9\,\mathrm{kg}$$

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3.\sigma \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\sigma}}$$

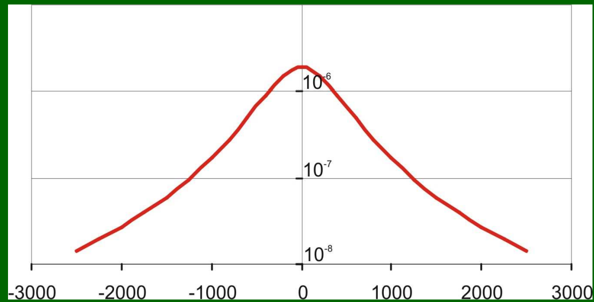
Opět dosadíme do vzorce:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\sigma}} = \sqrt[3]{\frac{3.8{,}8\times 10^9}{4.3{,}14.500}} \cong 161\,\mathrm{m}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Ověřme nyní blíže, jaký je vztah mezi poloměrem a tíhovým účinkem:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



Úloha 1.2: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se poloměr hmotné koule dvakrát?

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.2: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se poloměr hmotné koule dvakrát?

Změna poloměru se projeví (při neměnné diferenční hustotě) změnou hmotnosti – hloubka, staničení i konstanta κ se nemění.

$$g_{z1} = \frac{\kappa M_1 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$

$$g_{z2} = \frac{\kappa M_2 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{\dfrac{\kappa M_2 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}}{\dfrac{\kappa M_1 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.2: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se poloměr hmotné koule dvakrát?

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{\dfrac{\kappa M_2 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}}{\dfrac{\kappa M_1 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}} = \frac{M_2}{M_1}$$

Tíhový účinek je přímo úměrný hmotnosti, závislost je lineární.

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.2: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se poloměr hmotné koule dvakrát?

Změna poloměru se projeví (při neměnné diferenční hustotě) změnou hmotnosti.

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^{\,3}.\sigma$$

$$M_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^{\,3}.\sigma$$

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_2^{\,3}\sigma}{\frac{4}{3}\pi R_1^{\,3}\sigma}$$

1. Úloha z gravimetrie

Úloha 1.2: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se poloměr hmotné koule dvakrát?

Změna poloměru se projeví (při neměnné diferenční hustotě) změnou hmotnosti.

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_2{}^3\sigma}{\frac{4}{3}\pi R_1{}^3\sigma} = \frac{R_2{}^3}{R_1{}^3} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3$$

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.2: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se poloměr hmotné koule dvakrát?

Poloměr se zvětšil dvakrát, tj. platí:

$$\frac{R_2}{R_1} = 2$$

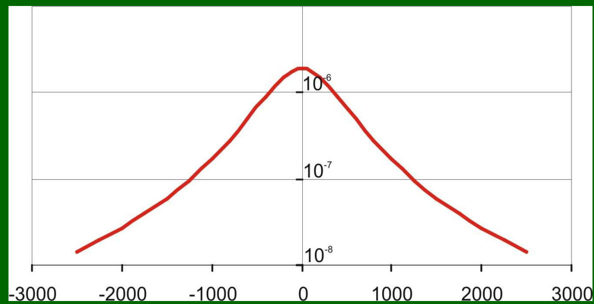
$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Tíhový účinek se zvětšil osmkrát.

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.3: Vypočti diferenční hustotu kulového tělesa, jehož tíhový účinek gz ve vzdálenosti 1000m od průmětu středu tělesa na povrch je 2,1 $*10^{-7}$ m/s^2.

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



hloubka středu koule	h = 500 m
poloměr	R = 180 m

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.3: Vypočti diferenční hustotu kulového tělesa, jehož tíhový účinek gz ve vzdálenosti 1000m od průmětu středu tělesa na povrch je 2,1 *10^{-7} m/s^2.

Opět hledáme hmotnost M:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}} \Leftrightarrow M = \frac{g_z \sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}{\kappa h}$$

$$M = \frac{g_z \sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}{\kappa h} = \frac{2{,}1 \times 10^{-7} \sqrt{(1000^2 + 500^2)^3}}{6{,}67 \times 10^{-11} . 500} = 8{,}8 \times 10^9 \, \mathrm{kg}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Nyní známe hmotnost i poloměr, hledáme diferenční hustotu.

$$M = 8{,}8 \times 10^{9}\,\mathrm{kg}$$

$$M = \frac{4}{3}\pi R^{3}.\sigma \Leftrightarrow \sigma = \frac{3M}{4\pi R^{3}}$$

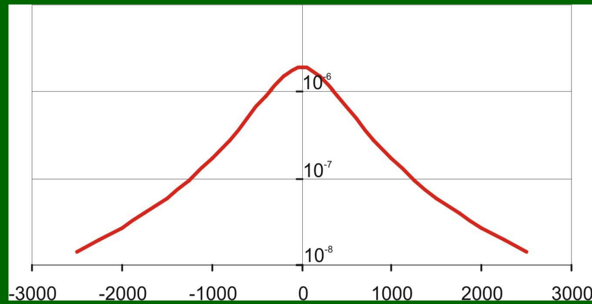
Opět dosadíme do vzorce:

$$\sigma = \frac{3M}{4\pi R^{3}} = \frac{3.8{,}8\times 10^{9}}{4.3{,}14.180^{3}} = 360\,\mathrm{kg/m^{3}}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Ověřme nyní blíže, jaký je vztah mezi diferenční hustotou a tíhovým účinkem:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



Úloha 1.4: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se diferenční hustota hmotné koule dvakrát?

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.4: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se diferenční hustota hmotné koule dvakrát?

Změna diferenční hustoty se projeví (při neměnném poloměru) změnou hmotnosti – hloubka, staničení i konstanta k se nemění.

$$g_{z1} = \frac{\kappa M_1 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$

$$g_{z2} = \frac{\kappa M_2 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{\dfrac{\kappa M_2 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}}{\dfrac{\kappa M_1 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Změna diferenční hustoty se projeví (při neměnném poloměru) změnou hmotnosti – hloubka, staničení i konstanta k se nemění.

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{\dfrac{\kappa M_2 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}}{\dfrac{\kappa M_1 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}} = \frac{M_2}{M_1}$$

Tíhový účinek je přímo úměrný hmotnosti, závislost je lineární.

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.4: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se diferenční hustota hmotné koule dvakrát?

Změna diferenční hustoty se projeví (při neměnném poloměru) změnou hmotnosti.

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^{\,3}.\sigma$$

$$M_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^{\,3}.\sigma$$

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_2}{\frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_1}$$

1. Úloha z gravimetrie

Úloha 1.4: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se diferenční hustota hmotné koule dvakrát?

Změna diferenční hustoty se projeví (při neměnném poloměru) změnou hmotnosti.

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_2}{\frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.4: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se diferenční hustota hmotné koule dvakrát?

Diferenční hustota se zvětšila dvakrát, tj. platí:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 2$$

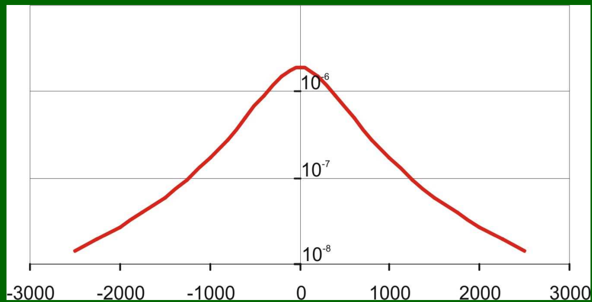
$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 2$$

Tíhový účinek se zvětšil dvakrát.

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.5: Vypočti hloubku kulového tělesa, jehož tíhový účinek gz ve vzdálenosti 0m od průmětu středu tělesa na povrch je 2,1 $*10^{-6}$ m/s^2.

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



diferenční hustota $\sigma = 500$ kg/m^3

poloměr R = 180 m

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.5: Vypočti hloubku kulového tělesa, jehož tíhový účinek gz ve vzdálenosti 0m od průmětu středu tělesa na povrch je 2,1 $*10^{-6}$ m/s^2.

Všimněme si, že pro x=0 (tj. pro místo přímo nad středem tělesa) se vzorec pro tíhový účinek výrazně zjednoduší:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}} = \frac{\kappa M h}{\sqrt{(h^2)^3}} = \frac{\kappa M h}{h^3} = \frac{\kappa M}{h^2}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Snadno si ze zjednodušeného vzorce vyjádříme h:

$$g_z = \frac{\kappa M}{h^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{\kappa M}{g_z}}$$

Potřebujeme znát také hmotnost M:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3.\sigma = \frac{4}{3}\pi.180^3.500 \cong 12{,}2 \times 10^9$$

1. Úlohy z gravimetrie

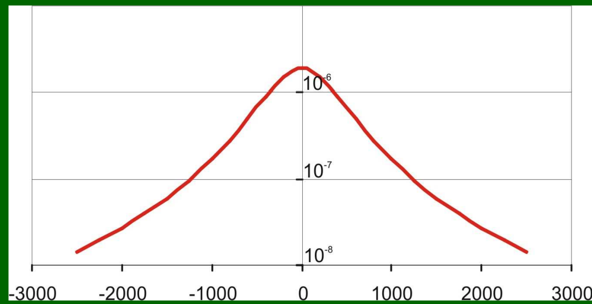
Nyní snadno dosadíme do vzorce:

$$h = \sqrt{\frac{\kappa M}{g_z}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}.12{,}2\times10^{9}}{2{,}1\times10^{-6}}} \cong 623\mathrm{m}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Ověřme nyní blíže, jaký je vztah mezi hloubkou a tíhovým účinkem:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



Úloha 1.6: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z v místě nad středem hmotné koule, zvětší-li se hloubka hmotné koule dvakrát?

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.6: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z v místě nad středem hmotné koule, zvětší-li se hloubka hmotné koule dvakrát?

Vyjdeme ze zjednodušeného vzorce pro x=0:

$$g_z = \frac{\kappa M}{h^2}$$

$$g_{z1} = \frac{\kappa M}{h_1^{\,2}}$$

$$g_{z2} = \frac{\kappa M}{h_2^{\,2}}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.6: Kolikrát se zmenší tíhový účinek g_z v místě nad středem hmotné koule, zvětší-li se hloubka hmotné koule dvakrát?

$$g_{z1} = \frac{\kappa M}{h_1^{\,2}}$$

$$g_{z2} = \frac{\kappa M}{h_2^{\,2}}$$

$$\frac{g_{z1}}{g_{z2}} = \frac{\dfrac{\kappa M}{h_1^{\,2}}}{\dfrac{\kappa M}{h_2^{\,2}}} = \frac{h_2^{\,2}}{h_1^{\,2}}$$

Tíhový účinek je nepřímo úměrný hloubce.

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.6: Kolikrát se zmenší tíhový účinek g_z v místě nad středem hmotné koule, zvětší-li se hloubka hmotné koule dvakrát?

Hloubka se zvětšila dvakrát, tj. platí: $\frac{h_2}{h_1} = 2$

$$\frac{g_{z1}}{g_{z2}} = \frac{h_2^{\,2}}{h_1^{\,2}} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = 2^2 = 4$$

Tíhový účinek se zmenšil čtyřikrát.

1. Úlohy z gravimetrie

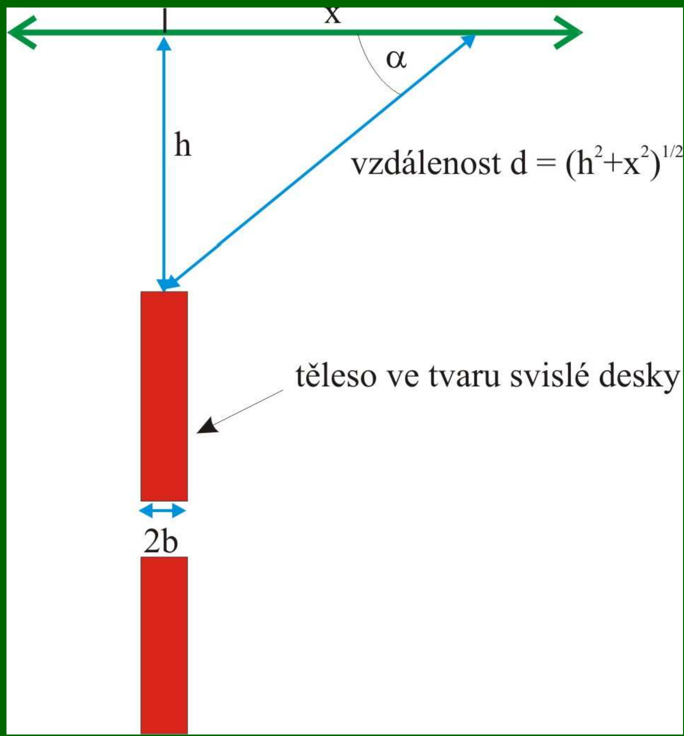
Řešení úloh:

verze	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	verze	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
1	164 m	8krát	82 kg/m^3	2krát	591 m	4krát	**11**	228 m	8krát	220 kg/m^3	2krát	427 m	4krát
2	206 m	8krát	163 kg/m^3	2krát	430 m	4krát	**12**	292 m	8krát	461 kg/m^3	2krát	295 m	4krát
3	218 m	8krát	193 kg/m^3	2krát	396 m	4krát	**13**	309 m	8krát	545 kg/m^3	2krát	272 m	4krát
4	254 m	8krát	304 kg/m^3	2krát	315 m	4krát	**14**	359 m	8krát	859 kg/m^3	2krát	216 m	4krát
5	264 m	8krát	341 kg/m^3	2krát	298 m	4krát	**15**	373 m	8krát	964 kg/m^3	2krát	204 m	4krát
6	167 m	8krát	87 kg/m^3	2krát	557 m	4krát	**16**	241 m	8krát	260 kg/m^3	2krát	382 m	4krát
7	214 m	8krát	182 kg/m^3	2krát	385 m	4krát	**17**	309 m	8krát	546 kg/m^3	2krát	264 m	4krát
8	227 m	8krát	215 kg/m^3	2krát	354 m	4krát	**18**	327 m	8krát	645 kg/m^3	2krát	243 m	4krát
9	264 m	8krát	340 kg/m^3	2krát	282 m	4krát	**19**	380 m	8krát	1017 kg/m^3	2krát	193 m	4krát
10	274 m	8krát	381 kg/m^3	2krát	266 m	4krát	**20**	395 m	8krát	1141 kg/m^3	2krát	183 m	4krát

2. Úlohy z magnetometrie

Úvodní problém – nakreslete graf znázorňující magnetický účinek ΔT v severojižním směru způsobenou tenkou svislou deskou, na základě vztahu:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right)$$



susceptibilita $\kappa = 0.006$
indukce normálního mag. pole
$T_0 = 50000$ nT
inklinace normálního mag. pole $I_n = 50°$
hloubka horního okraje desky $h = 2$ m
mocnost desky $2b = 0.5$ m

2. Úlohy z magnetometrie

Po dosazení známých hodnot získáme:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right) =$$

$$= -\frac{0{,}006\times 50000\times 0{,}5}{2\times 3{,}14\left(x^2 + 2^2\right)}\left(2\cos(2\times 50°) + x\sin(2\times 50°)\right) = -\frac{150}{6{,}28(x^2+4)}\left(-0{,}347 + x0{,}985\right)$$

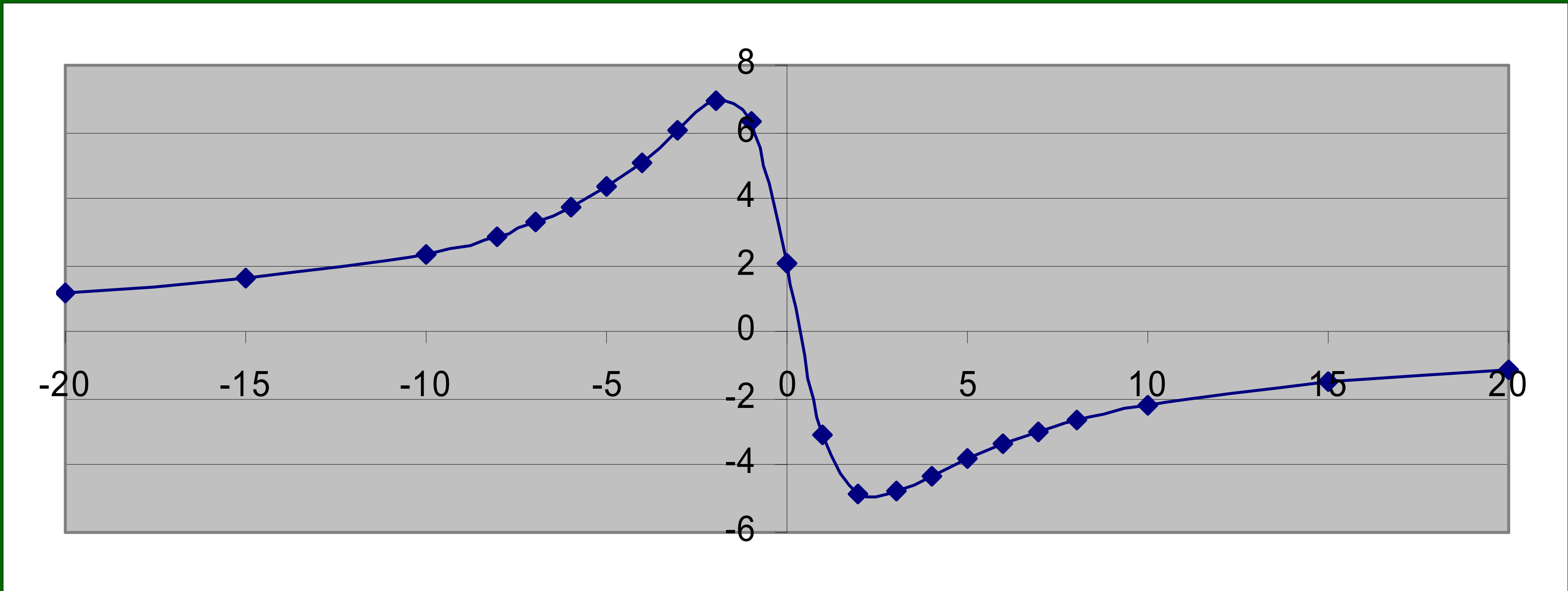
2. Úlohy z magnetometrie

Po dosazení za x (vzdálenost na profilu od bodu 0) můžeme doplnit tabulku hodnot magnetického účinku tenké svislé desky ΔT v jednotlivých bodech profilu:

x [m]	ΔT [nT]	x [m]	ΔT [nT]
-20	1,184	1	-3,043
-15	1,576	2	-4,841
-10	2,340	3	-4,787
-8	2,888	4	-4,288
-7	3,262	5	-3,768
-6	3,734	6	-3,319
-5	4,339	7	-2,949
-4	5,117	8	-2,644
-3	6,063	10	-2,181
-2	6,914	15	-1,504
-1	6,360	20	-1,143
0	2,027		

2. Úlohy z magnetometrie

Vypočtené hodnoty pak vyneseme do grafu:



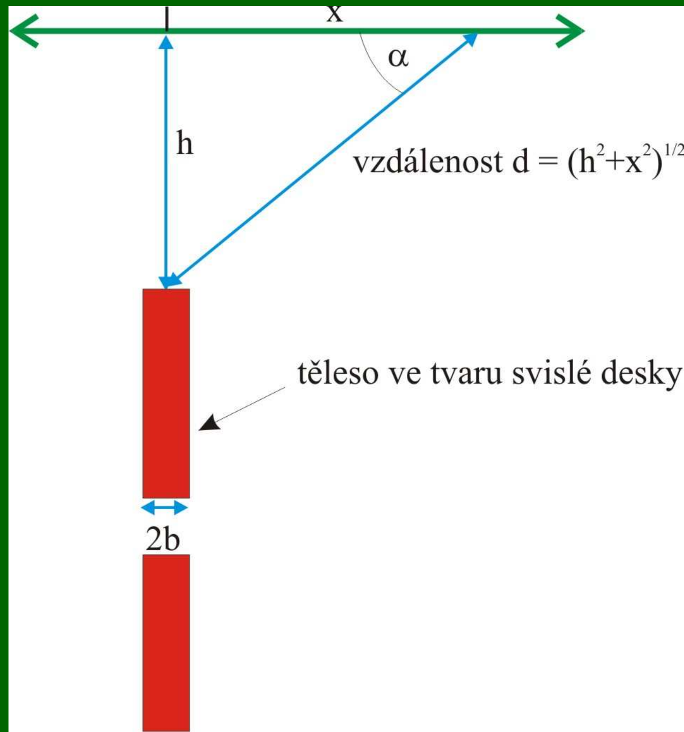
2. Úlohy z magnetometrie

Všimněme si na našem výchozím vztahu blíže goniometrických funkcí. Obě funkce jsou aplikovány na dvojnásobek inklinace normálního magnetického pole – pokud je tedy I_n=45°, mají obě funkce triviální řešení ($\sin 2.I_n=1$; $\cos 2.I_n=0$) a náš vzorec se podstatně zjednoduší:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right)+x\sin\left(2I_n\right)\right)$$

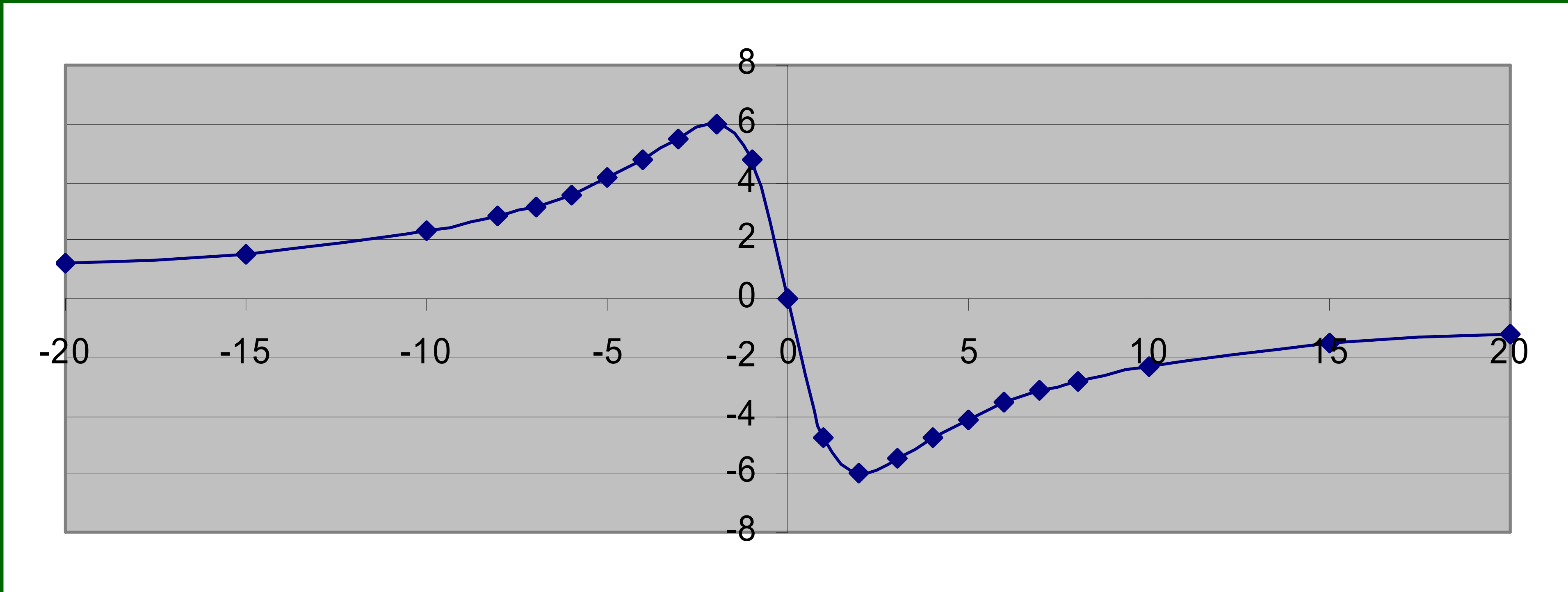
$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos\left(90°\right)+x\sin\left(90°\right)\right) =$$

$$= -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h.0+x.1\right) = -x\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}$$



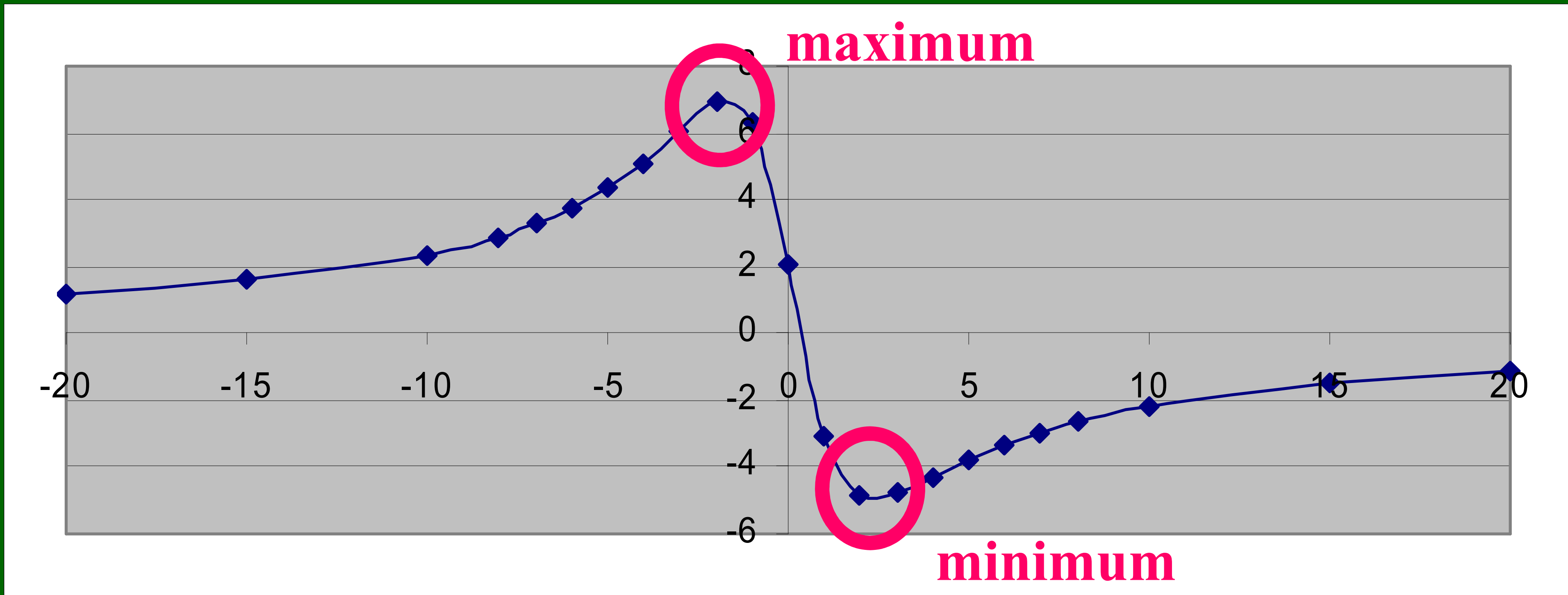
2. Úlohy z magnetometrie

Graf fukce ΔT je pro tento zjedodušený případ (I_n=0) středově symetrický:



2. Úlohy z magnetometrie

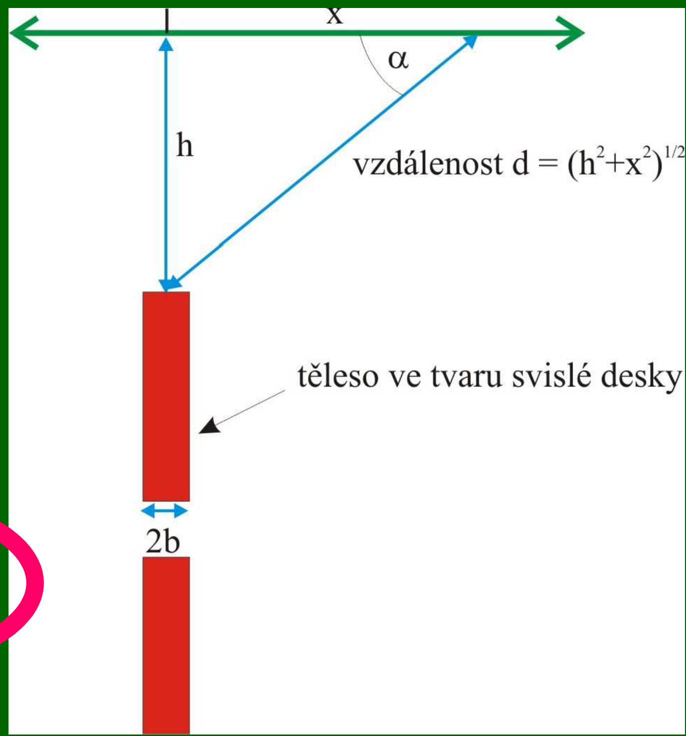
Vraťme se ale k naší obecnější úloze a k asymetrickému grafu funkce ΔT. Graf se vyznačuje jedním maximem a jedním minimem hodnot ΔT.



2. Úlohy z magnetometrie

Vraťme se k našemu původnímu zadání a zkusme vykreslit další grafy funkce magnetického účinku svislé tenké desky pro různé hloubky (ostatní parametry zůstanou nezměněny):

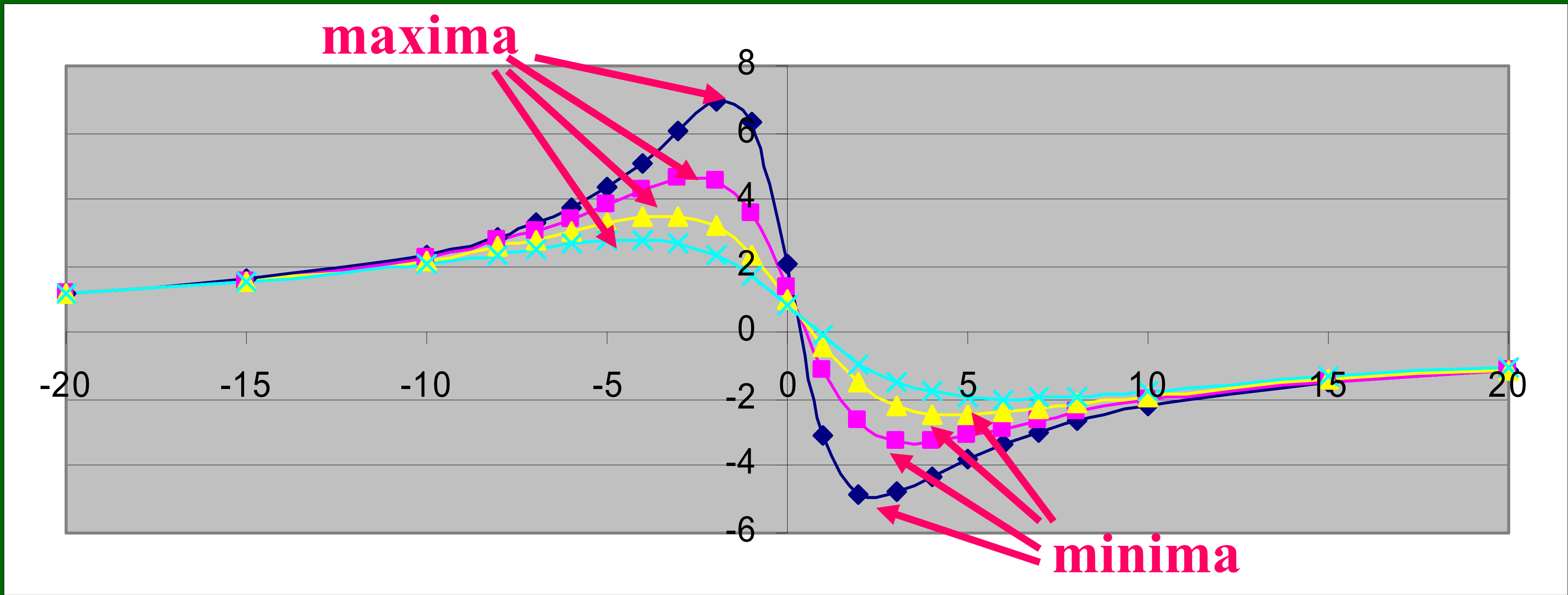
$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right)+x\sin\left(2I_n\right)\right)$$



susceptibilita κ = 0.006
indukce normálního mag. pole
T_0 = 50000 nT
inklinace normálního mag. pole I_n = 50°
hloubka horního okraje desky **h = 2-5 m**
mocnost desky 2b = 0.5 m

2. Úlohy z magnetometrie

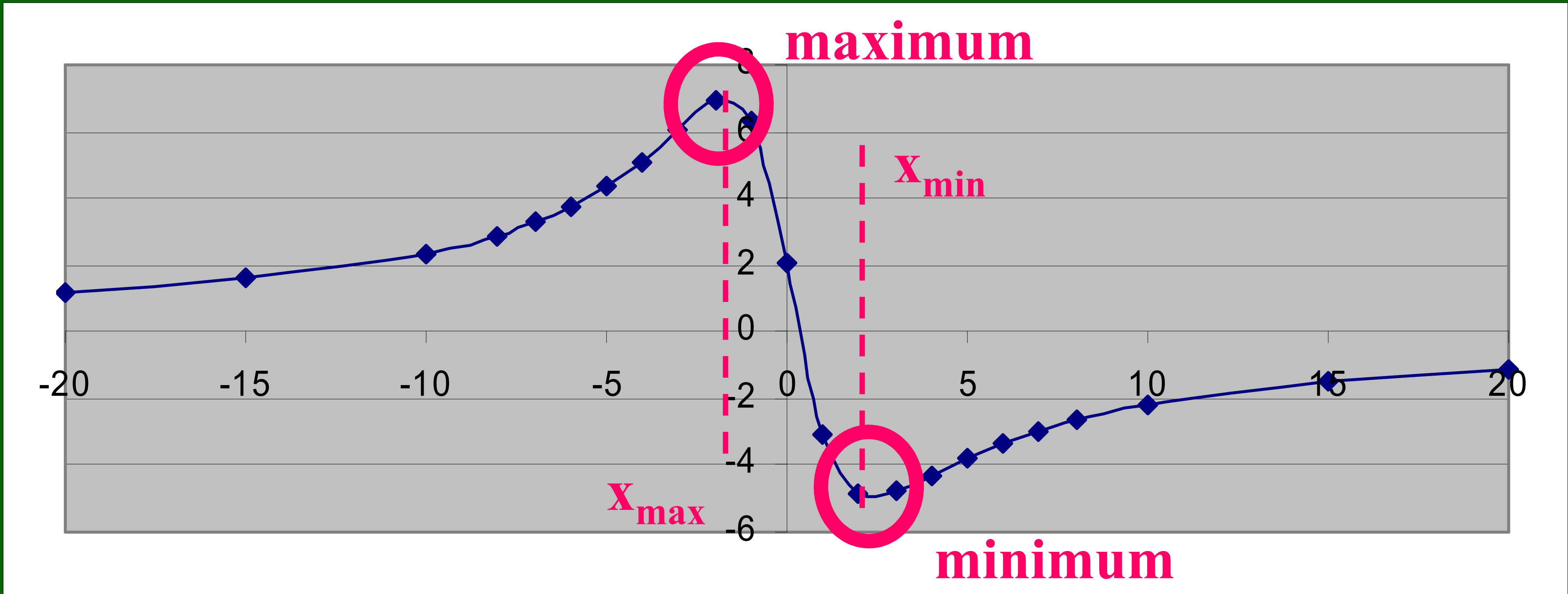
Zjišťujeme, že se s rostoucí hloubkou jednak zmenšuje absolutní hodnota ΔT v minimu a maximu funkce ΔT, a jednak že se od sebe vzdalují x-ové souřadnice maxima minima.



2. Úlohy z magnetometrie

Vzdálenost x-ových souřadnic minima a maxima funkce ΔT závisí na hloubce. Lze ukázat, že platí vztah:

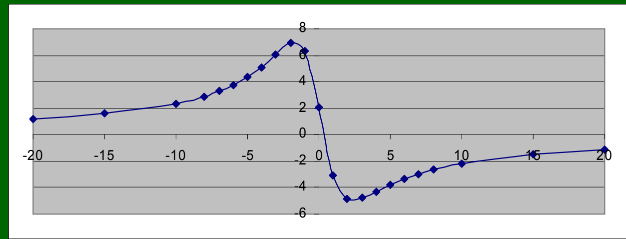
$$h = (x_{min} - x_{max})\frac{\sin 2I_n}{2}$$



2. Úlohy z magnetometrie

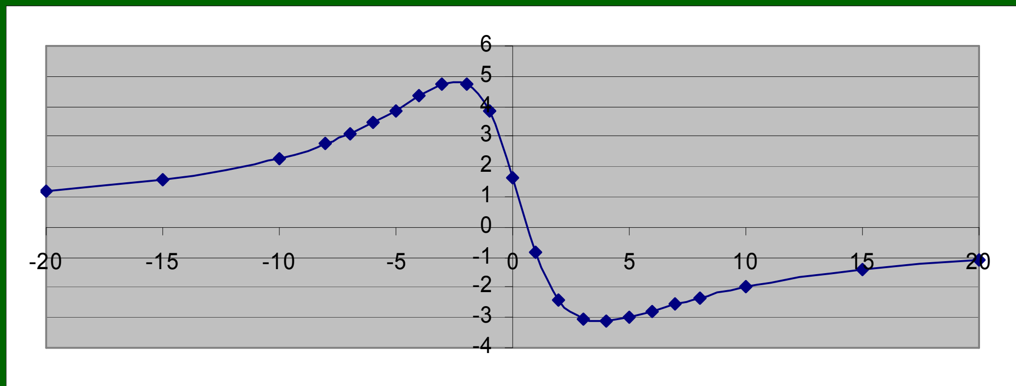
Obrácené úlohy vycházející z úvodního problému:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos(2I_n)+x\sin(2I_n)\right)$$



$$h = \left(x_{min} - x_{max}\right)\frac{\sin 2I_n}{2}$$

Úloha 2.1: Urči hloubku tenké svislé desky, jejíž magnetický účinek ΔT je znázorněn na daném grafu. Hodnota inklinace I_n je 51°.

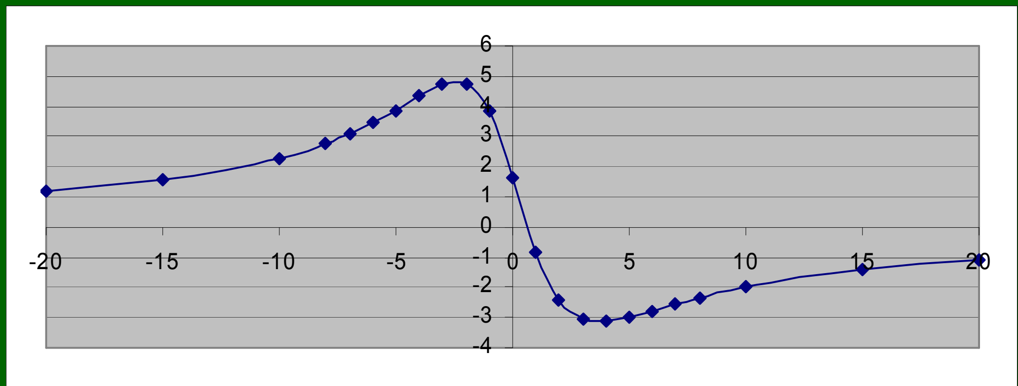


2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.1: Urči hloubku tenké svislé desky, jejíž magnetický účinek ΔT je znázorněn na daném grafu. Hodnota inklinace I_n je 51°.

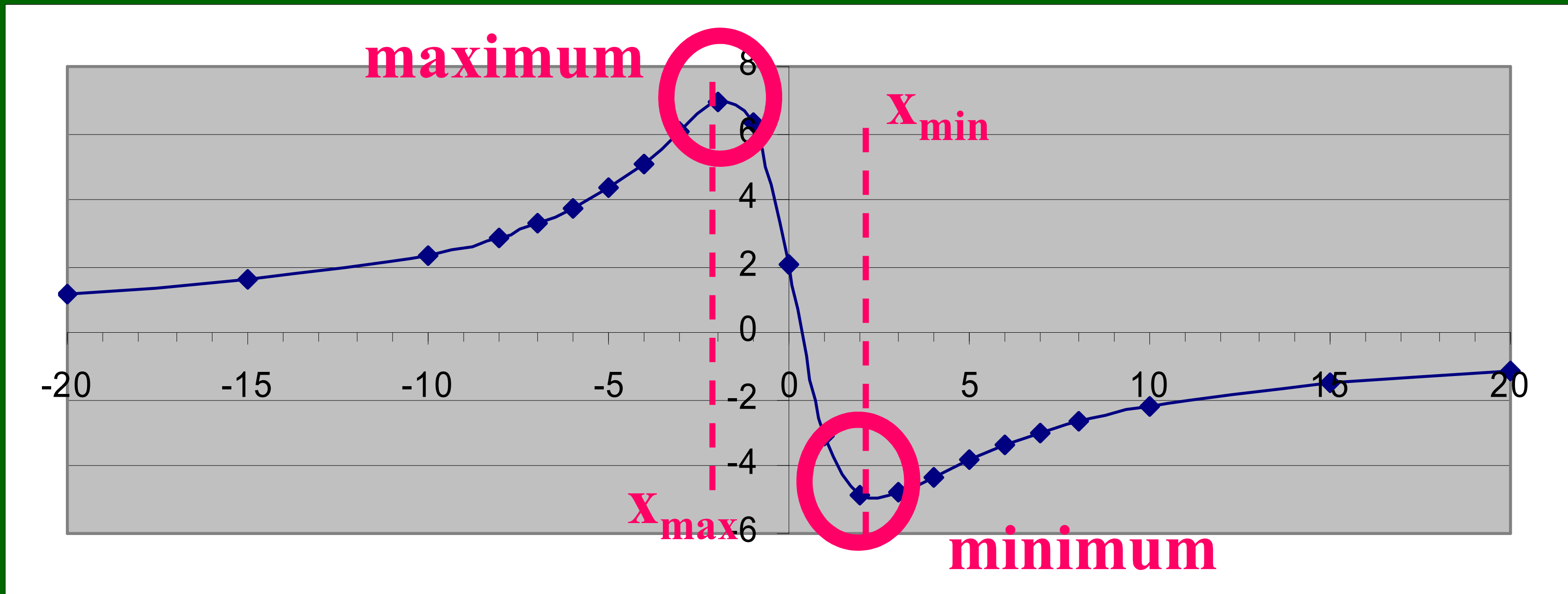
Protože máme k dispozici graf, můžeme vyjít ze vztahu:

$$h = (x_{min} - x_{max})\frac{\sin 2I_n}{2}$$



2. Úlohy z magnetometrie

Nalezneme v grafu minimum a maximum funkce ΔT a odečteme x-ové souřadnice v těchto bodech:



$$x_{min} \cong 2.1$$

$$x_{max} \cong \cdot 2.0$$

2. Úlohy z magnetometrie

Nyní můžeme dosadit do vzorce:

$$h = \left(x_{min} - x_{max}\right)\frac{\sin 2I_n}{2} =$$

$$= (2.1 - \cdot 2.0)\frac{\sin(2\times 51^\circ)}{2} = 4.1\frac{\sin 102^\circ}{2}$$

$$h \cong 2m$$

$$x_{min} \cong 2.1$$

$$x_{max} \cong \cdot 2.0$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.2: Vypočti mocnost tenké svislé desky, která způsobuje na vodorovném profilu magnetickou anomálií, jejíž hodnota ve vzdálenosti x=-10m je ΔT=4,5421nT, jestliže je známo, že hloubka horního okraje desky je 3m, její suseptibilita je 0,006 jednotek SI, inklinace normálního magnetického pole In=50° a indukce normálního magnetického pole T0=50000nT.

Výjdeme ze vztahu:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right) + x\sin\left(2I_n\right)\right)$$

2. Úlohy z magnetometrie

Vyjádříme si mocnost 2b:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right) + x\sin\left(2I_n\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$2b = -\frac{\Delta T 2\pi\left(x^2 + h^2\right)}{\kappa T_0\left(h\cos\left(2I_n\right) + x\sin\left(2I_n\right)\right)}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Všechny hodnoty ve vzorci jsou známé, můžeme tedy dosadit do vzorce:

$$2b = -\frac{\Delta T 2\pi \left(x^2 + h^2\right)}{\kappa T_0 \left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right)} =$$

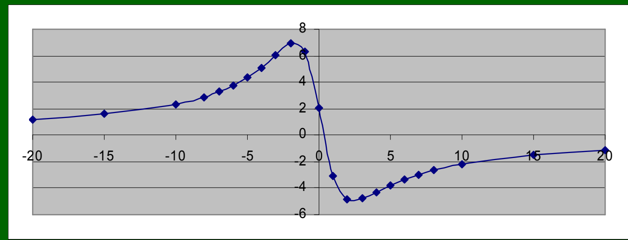
$$= -\frac{4.4521 \times 2 \times 3.16\left(-10^2 + 3^2\right)}{0.006 \times 50000 \times \left(3\cos 100° + -10\sin 100°\right)} =$$

$$= -\frac{28.137 \times 109}{300 \times -10.369} = -\frac{3066.963}{-3110.71} = 0.99 \cong 1\mathrm{m}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Ověřme nyní blíže, jaký je vztah mezi mocností tenké desky a jejím magnetickým účinkem:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right) + x\sin\left(2I_n\right)\right)$$



Úloha 2.3: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT, zvětší-li se mocnost tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.3: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT, zvětší-li se mocnost tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

Mocnost tenké svislé desky se ve vzorci oběvuje na jediném místě:

$$\Delta T_1 = -\frac{\kappa T_0 2b_1}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right)$$

$$\Delta T_2 = -\frac{\kappa T_0 2b_2}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right)$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.3: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT, zvětší-li se mocnost tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

Mocnost tenké svislé desky se ve vzorci oběvuje na jediném místě:

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{-\dfrac{\kappa T_0 2b_2}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right)+x\sin\left(2I_n\right)\right)}{-\dfrac{\kappa T_0 2b_1}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right)+x\sin\left(2I_n\right)\right)} = \frac{2b_2}{2b_1}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.3: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT, zvětší-li se mocnost tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

Mocnost tenké svislé desky se zvětšila dvakrát: $\frac{2b_2}{2b_1} = 2$

Tj.: $\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{2b_2}{2b_1} = 2$

Hodnota magnetické anomálie ΔT se zvětšila dvakrát.

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.4: Vypočti susceptibilitu materiálu tenké svislé desky, která způsobuje na vodorovném profilu magnetickou anomálií, jejíž hodnota ve vzdálenosti x=-10m je DT=4,5421nT, jestliže je známo, že hloubka horního okraje desky je 3m, její mocnost 2b=1m, inklinace normálního magnetického pole In=50° a indukce normálního magnetického pole T0=50000nT.

Výjdeme ze vztahu:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right) + x\sin\left(2I_n\right)\right)$$

2. Úlohy z magnetometrie

Vyjádříme si susceptibilitu κ:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right) \Leftrightarrow$$

$$\kappa = -\frac{\Delta T 2\pi\left(x^2 + h^2\right)}{2bT_0\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right)}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Všechny hodnoty ve vzorci jsou známé, můžeme tedy dosadit do vzorce:

$$\kappa = -\frac{\Delta T 2\pi\left(x^2 + h^2\right)}{2bT_0\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right)} =$$

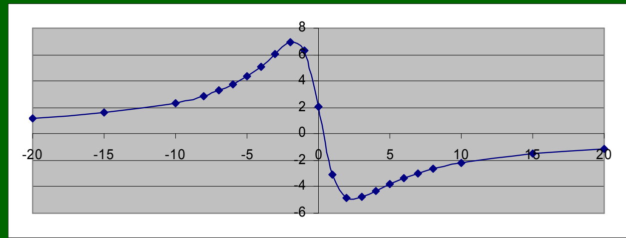
$$= -\frac{4.4521 \times 2 \times 3.16\left(-10^2 + 3^2\right)}{1 \times 50000 \times \left(3\cos 100° + -10\sin 100°\right)} =$$

$$= -\frac{28.137 \times 109}{50000 \times -10.369} = -\frac{3066.963}{-518451} = 0.00592 \cong 0.006$$

2. Úlohy z magnetometrie

Ověřme nyní blíže, jaký je vztah mezi susceptibilitou tenké desky a jejím magnetickým účinkem:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right)$$



Úloha 2.5: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT, zvětší-li se susceptibilita tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.5: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT, zvětší-li se susceptibilita tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

Susceptibilita tenké svislé desky se ve vzorci oběvuje na jediném místě:

$$\Delta T_1 = -\frac{\kappa_1 T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right) + x\sin\left(2I_n\right)\right)$$

$$\Delta T_2 = -\frac{\kappa_2 T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right) + x\sin\left(2I_n\right)\right)$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.5: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT, zvětší-li se susceptibilita tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

Susceptibilita tenké svislé desky se ve vzorci oběvuje na jediném místě:

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{-\frac{\kappa_2 T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos(2I_n)+x\sin(2I_n)\right)}{-\frac{\kappa_1 T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos(2I_n)+x\sin(2I_n)\right)} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.5: Kolikrát se zvětší hodnota magnetické anomálie ΔT, zvětší-li se susceptibilita tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, dvakrát?

Susceptibilita tenké svislé desky se zvětšila dvakrát: $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = 2$

Tj.: $$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = 2$$

Hodnota magnetické anomálie ΔT se zvětšila dvakrát.

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.6: Vypočti hloubku horního okraje tenké svislé desky, která způsobuje na vodorovném profilu magnetickou anomálií, jejíž hodnota ve vzdálenosti x=-10m je DT=4,3804nT, jestliže je známo, že mocnost desky je 2b=1m, její suseptibilita je 0,006 jednotek SI, inklinace normálního magnetického pole In=45° a indukce normálního magnetického pole T0=50000nT.

Výjdeme ze vztahu:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right)$$

2. Úlohy z magnetometrie

Dosadíme nejprve za inklinaci In=45°:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right) + x\sin\left(2I_n\right)\right) =$$

$$= -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos\left(2\times 45°\right) + x\sin\left(2\times 45°\right)\right) =$$

$$= -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos\left(90°\right) + x\sin\left(90°\right)\right)$$

Vidíme, že goniometrické funkce nabývají v tomto případě triviálních hodnot a náš vzorec se silně zjednodušší.

$$\sin 90° = 1$$
$$\cos 90° = 0$$

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}x$$

2. Úlohy z magnetometrie

Výjdeme ze zjedodušeného vzorce a vyjádříme si hloubku h:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + h^2 = -\frac{x\kappa T_0 2b}{2\pi\Delta T} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = -\frac{x\kappa T_0 2b}{2\pi\Delta T} - x^2 \Leftrightarrow$$

$$h = \sqrt{-\frac{x\kappa T_0 2b}{2\pi\Delta T} - x^2}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Všechny hodnoty ve vzorci jsou známé, můžeme tedy dosadit do vzorce:

$$h = \sqrt{-\frac{x\kappa T_0 2b}{2\pi\Delta T} - x^2} = \sqrt{-\frac{-10\times 0.006\times 50000\times 1}{2\times 3.16\times 4.3804} - -10^2} =$$

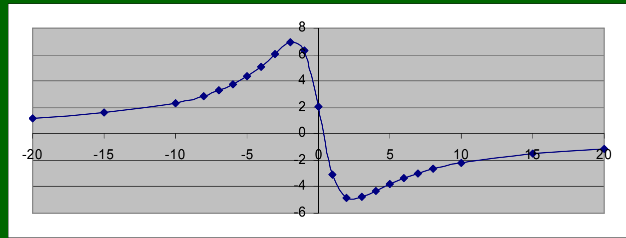
$$= \sqrt{\frac{3000}{27.684} - 100} = \sqrt{108.365 - 100} = \sqrt{8.365}$$

$$= 2.89\mathrm{m} \cong 3\mathrm{m}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Ověřme nyní blíže, jaký je vztah mezi hloubkou horního okraje tenké desky a jejím magnetickým účinkem:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right)$$



Úloha 2.7: Kolikrát se zmenší hodnota magnetické anomálie ΔT v místě x=-10m, je-li hodnota inklinace normálního magnetického pole In=45° a zvětší-li se hloubka horního okraje tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, z hodnoty 2m na dvojnásobek?

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.7: Kolikrát se zmenší hodnota magnetické anomálie ΔT v místě x=-10m, je-li hodnota inklinace normálního magnetického pole In=45° a zvětší-li se hloubka horního okraje tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, z hodnoty 2m na dvojnásobek?

Při inklinaci In=45°, jak jsme ukázali v předešlé úloze, nabívají goniometrické funkce ve vzorci triviálních hodnot a vzorec přechází do jednodušší formy:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right)$$

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}x$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.7: Kolikrát se zmenší hodnota magnetické anomálie ΔT v místě x=-10m, je-li hodnota inklinace normálního magnetického pole In=45° a zvětší-li se hloubka horního okraje tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, z hodnoty 2m na dvojnásobek?

Hloubka horního okraje tenké svislé desky se ve zjednodušeném vzorci oběvuje na jediném místě:

$$\Delta T_1 = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h_1^{\ 2}\right)} x$$

$$\Delta T_2 = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h_2^{\ 2}\right)} x$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.7: Kolikrát se zmenší hodnota magnetické anomálie ΔT v místě x=-10m, je-li hodnota inklinace normálního magnetického pole In=45° a zvětší-li se hloubka horního okraje tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, z hodnoty 2m na dvojnásobek?

Hloubka horního okraje tenké svislé desky se ve zjednodušeném vzorci oběvuje na jediném místě:

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{-\dfrac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h_1^{\,2}\right)}x}{-\dfrac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h_2^{\,2}\right)}x} = \frac{\left(x^2 + h_2^{\,2}\right)}{\left(x^2 + h_1^{\,2}\right)}$$

2. Úlohy z magnetometrie

Úloha 2.7: Kolikrát se zmenší hodnota magnetické anomálie ΔT v místě x=-10m, je-li hodnota inklinace normálního magnetického pole In=45° a zvětší-li se hloubka horního okraje tenké svislé desky, která tuto anomálii způsobuje, z hodnoty 2m na dvojnásobek?

Známe honotu x (x=-10m), i hloubku h_1 (h_1=2m) a h_2 ($h_2=2*h_1$=4m). Můžeme tedy dosadit do vzorce:

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{\left(x^2 + h_2{}^2\right)}{\left(x^2 + h_1{}^2\right)} = \frac{\cdot 10^2 + 4^2}{\cdot 10^2 + 2^2} = \frac{116}{104} = 1.115$$

Hodnota magnetické anomálie ΔT se zvětšila 1.115 krát.

2. Úlohy z magnetometrie

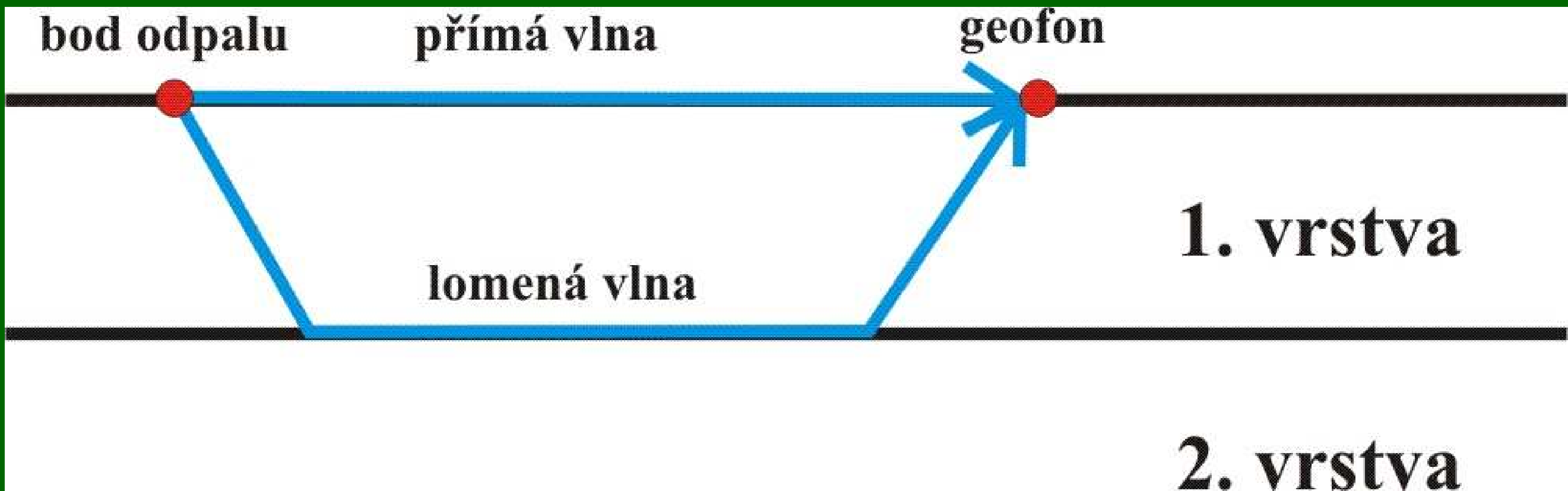
Řešení úloh:

verze	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
1	1m	1m	3krát	0,005	3krát	2m	1,066krát
2	2m	2m	3krát	0,005	3krát	2m	1,066krát
3	2m	2m	3krát	0,005	3krát	4m	1,066krát
4	3m	1m	3krát	0,005	3krát	4m	1,066krát
5	2m	1m	3krát	0,005	3krát	5m	1,066krát
6	1m	1m	3krát	0,008	3krát	5m	1,414krát
7	2m	1m	3krát	0,008	3krát	5m	1,414krát
8	2m	1,5m	3krát	0,008	3krát	3m	1,414krát
9	3m	1,5m	3krát	0,008	3krát	3m	1,414krát
10	2m	1m	3krát	0,008	3krát	2m	1,414krát

3. Úlohy ze seismiky

Úvodní problém – nakreslete hodochronu přímé a lomené vlny.

Předpokládáme, že zdrojem vln byl odpal na povrchu a lomená vlna vzniká na vodorovném rozhraní v hloubce 10m.
Rychlost vlny v první vrstvě $v_0=600\ ms^{-1}$
Rychlost vlny v druhé vrstvě $v_1=2000\ ms^{-1}$

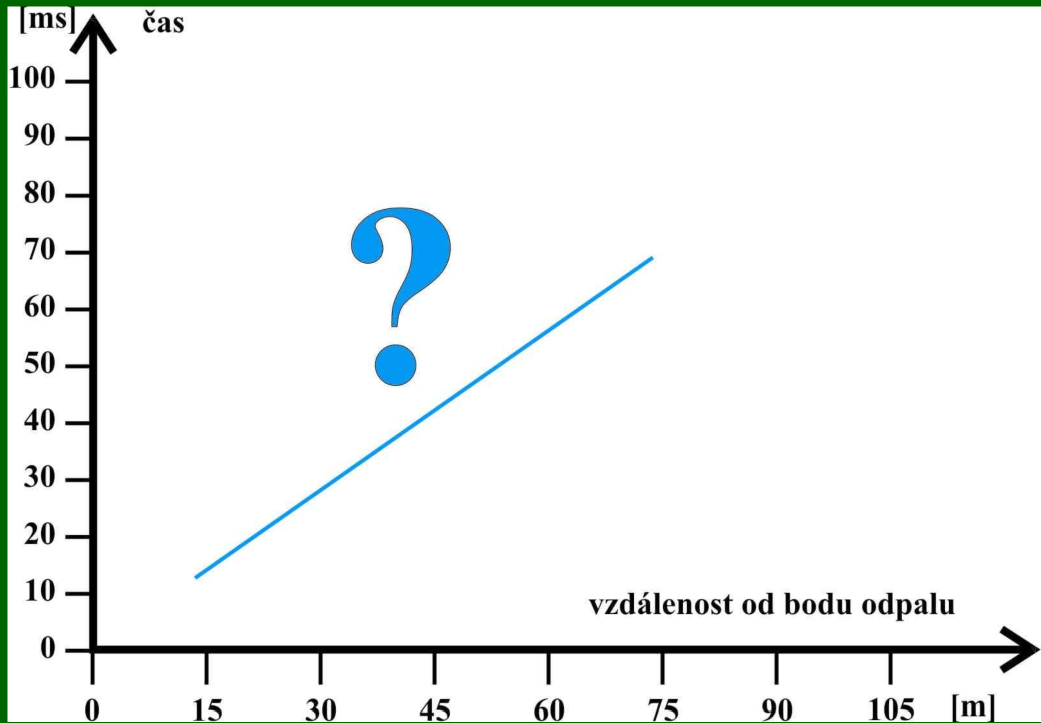


3. Úlohy ze seismiky

Hodochrona je křivka popisující závislost mezi časem detekce a vzdáleností od bodu odpalu. V homogenním prostředí je tato závislost přímková. <u>Budeme ji sledovat na horizontálním profilu.</u>

$$t = \frac{d}{v}$$

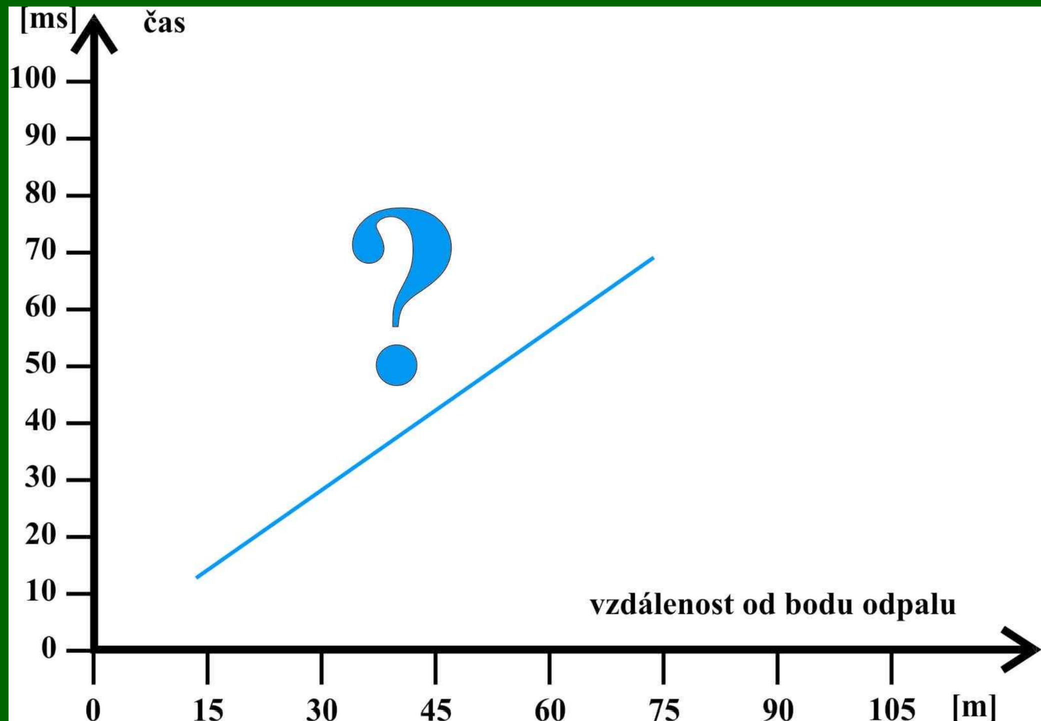
t … čas detekce
d … dráha
v … rychlost



3. Úlohy ze seismiky

Předpokládáme homogenní dvouvrstevné prostředí dané dvěma rychlostmi:
Rychlost vlny v první vrstvě $v_0=600\ ms^{-1}$
Rychlost vlny v druhé vrstvě $v_1=2000\ ms^{-1}$

$$t = \frac{d}{v}$$

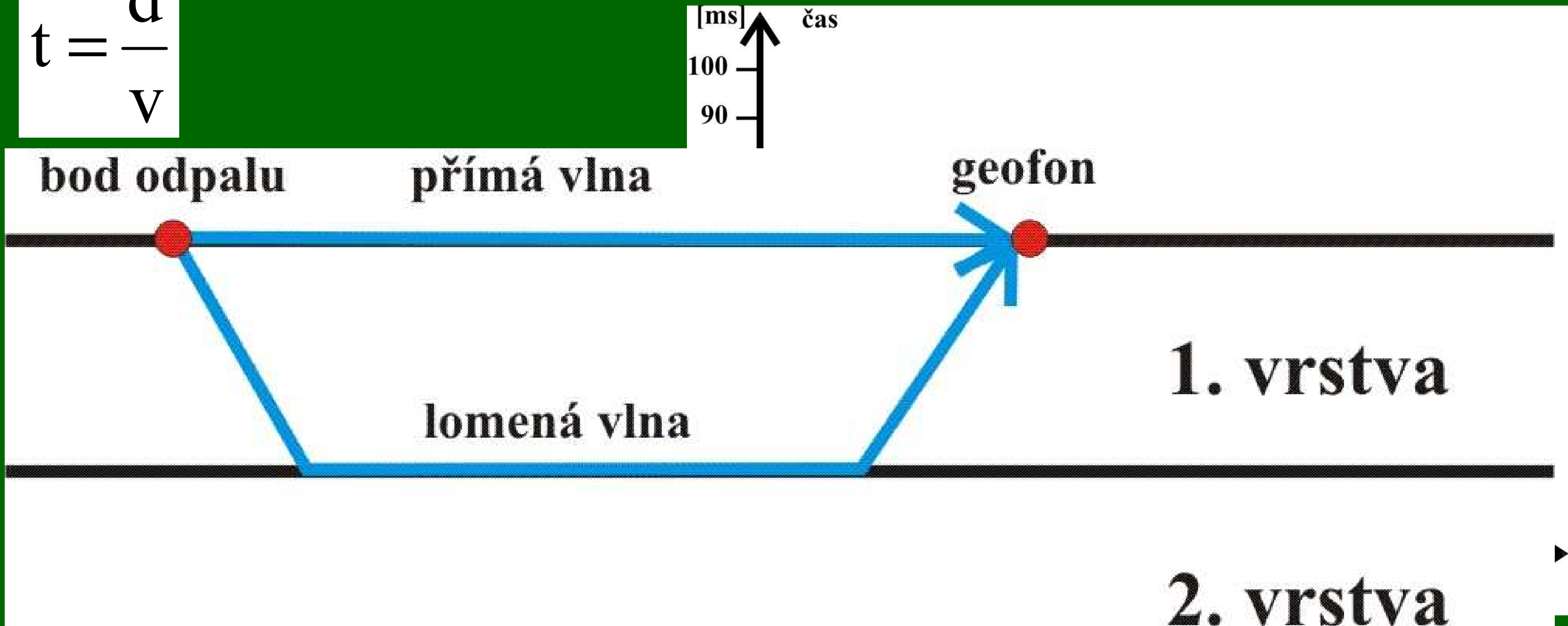


3. Úlohy ze seismiky

Nyní záleží na dráze. Sestrojme nejprve hodochronu **vlny přímé**.

Přímá vlna se pohybuje pouze 1.vrstvou a to po nejkratší dráze.

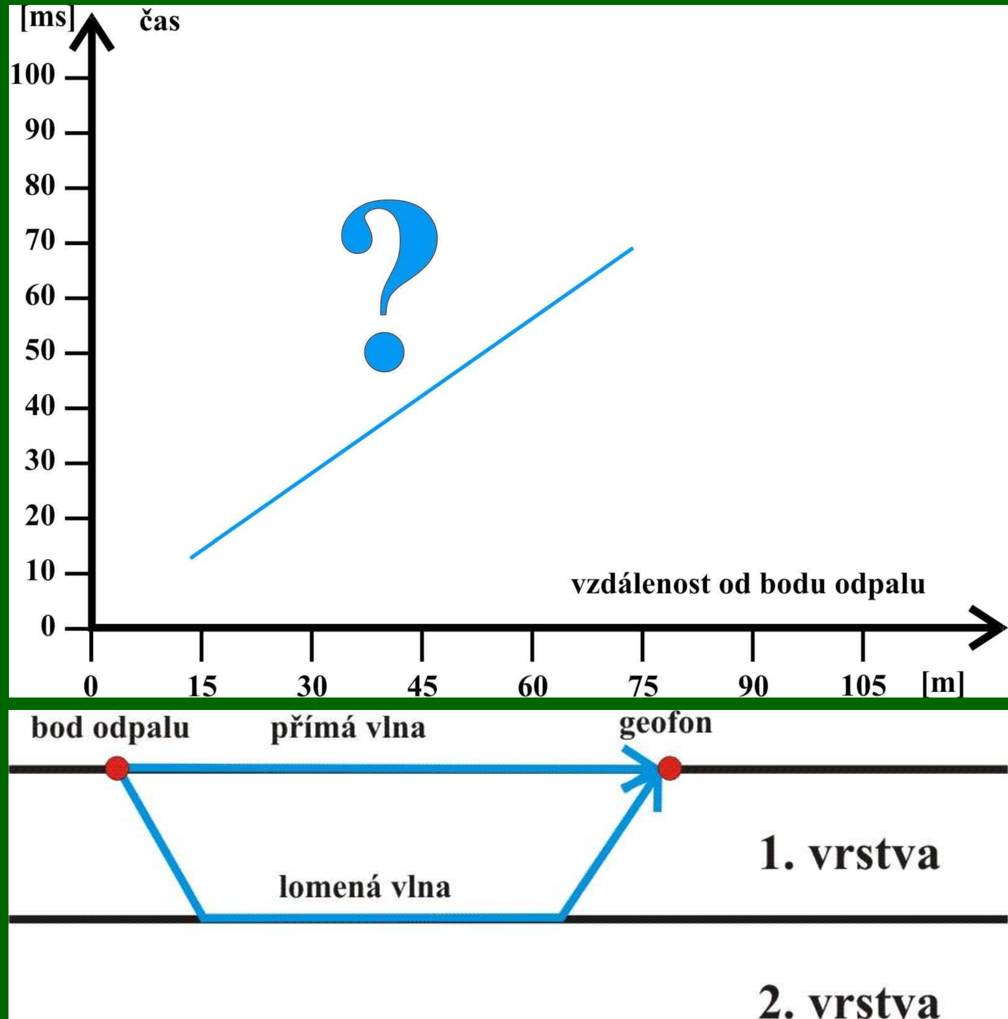
$$t = \frac{d}{v}$$



3. Úlohy ze seismiky

Dráha d tedy odpovídá vzdálenosti od místo odpalu do místa záznamu. Rychlost je konstantní a odpovídá v_0=600 ms^{-1}.

$$t = \frac{d}{v} = \frac{x}{v_0} = \frac{x}{600}$$

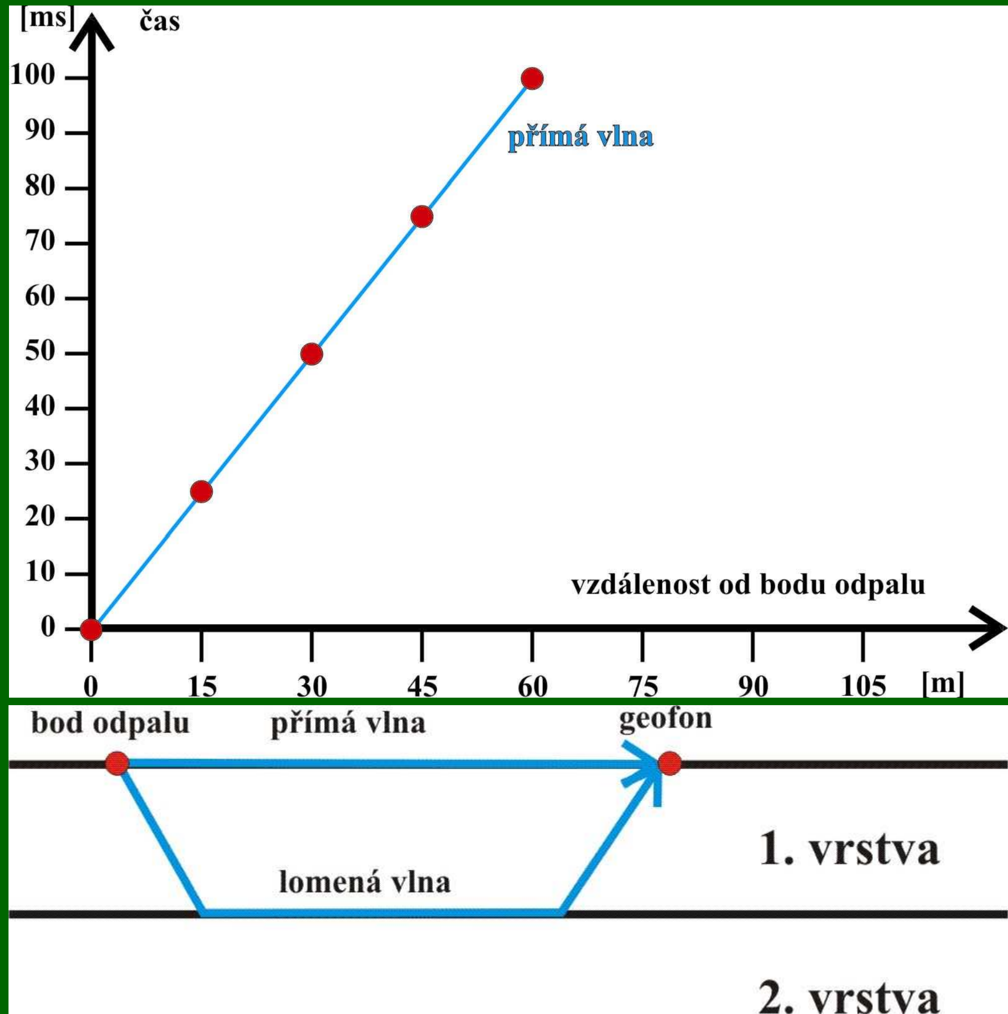


kde x … vzdálenost bodu záznamu od bodu odpalu na vodorovném profilu, na kterém sledujeme čas detekce t.

3. Úlohy ze seismiky

Dráha d tedy odpovídá vzdálenosti od místo odpalu do místa záznamu. Rychlost je konstantní a odpovídá $v_0=600\ ms^{-1}$.

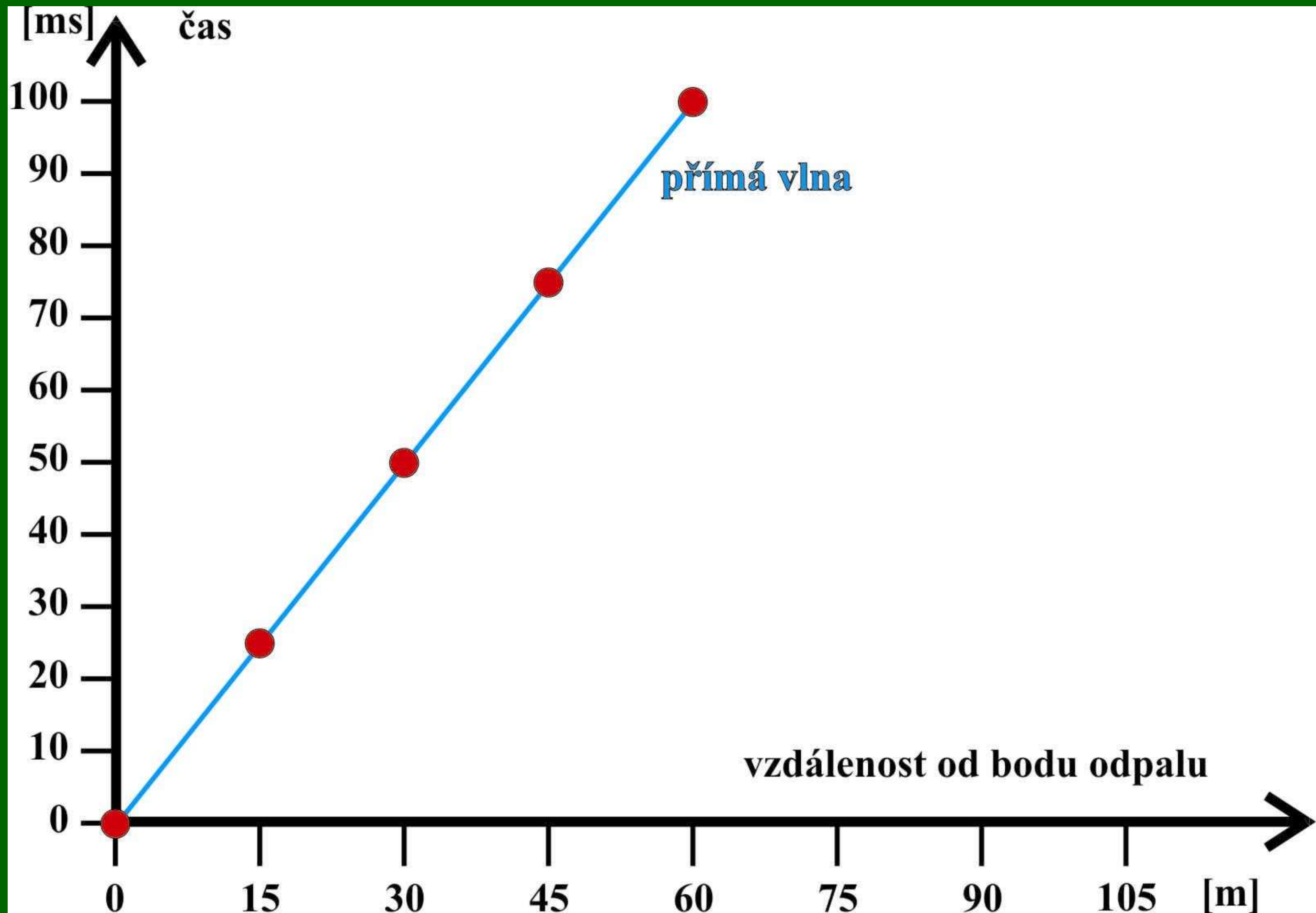
$$t = \frac{d}{v} = \frac{x}{v_0} = \frac{x}{600}$$



kde x … vzdálenost bodu záznamu od bodu odpalu na vodorovném profilu, na kterém sledujeme čas detekce t.

3. Úlohy ze seismiky

Přímá vlna může být detekována již v bodě odpalu a hodochrona přímé vlny prochází počátkem souřadné soustavy.

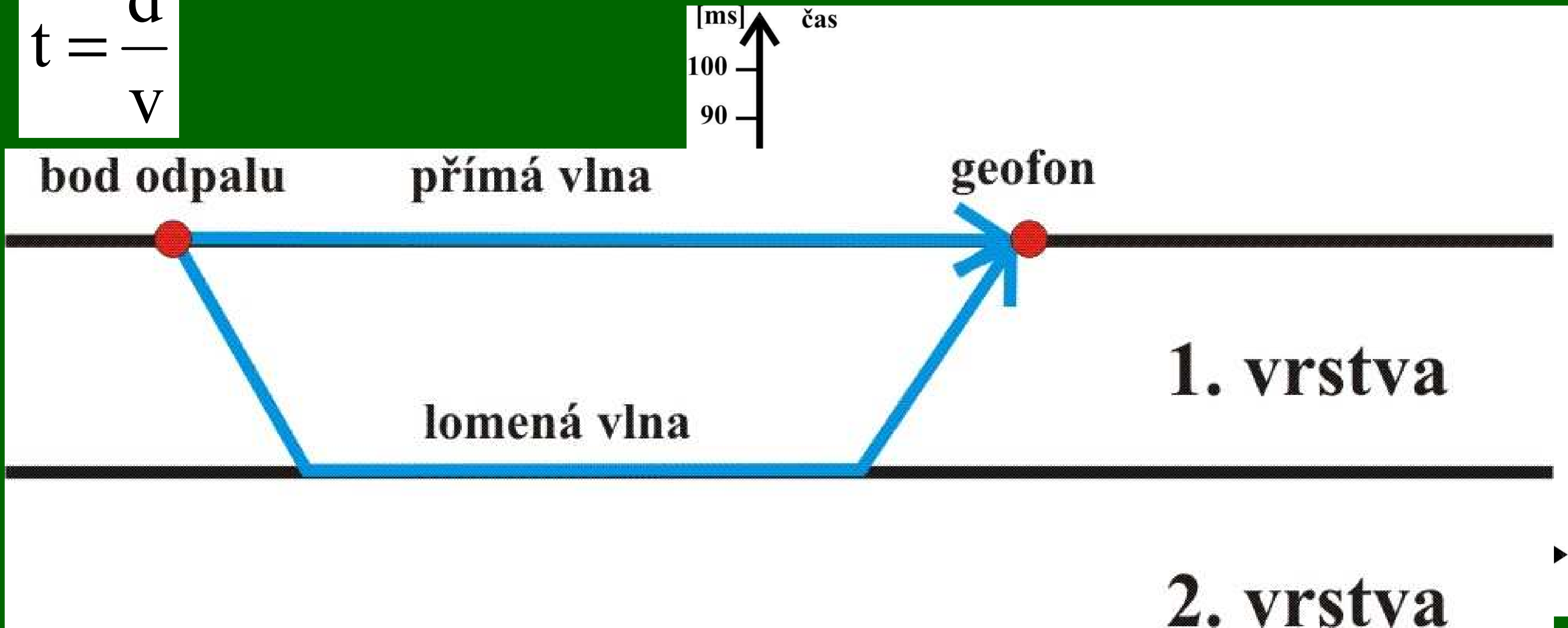


3. Úlohy ze seismiky

Dále sestrojíme hodochronu **vlny lomené**.

Její dráha je komplikovanější.

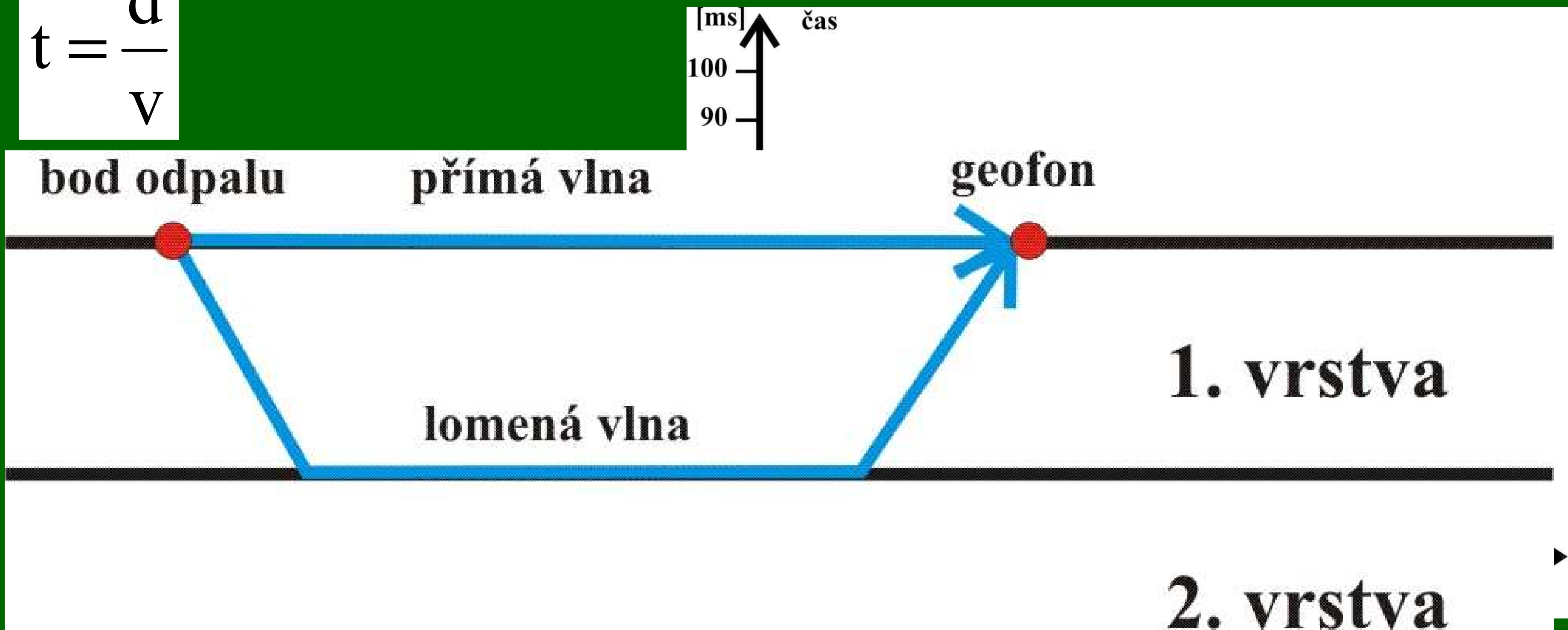
$$t = \frac{d}{v}$$



3. Úlohy ze seismiky

Lomená vlna se šíří 1.vrstvou rychlostí v_0, na rozhraní 1. a 2. vrstvy se láme podél rozhraní, kudy se šíří rychlostí v_1, a pak se opět vraci k povrchu 1.vrstvou rychlostí v_0.

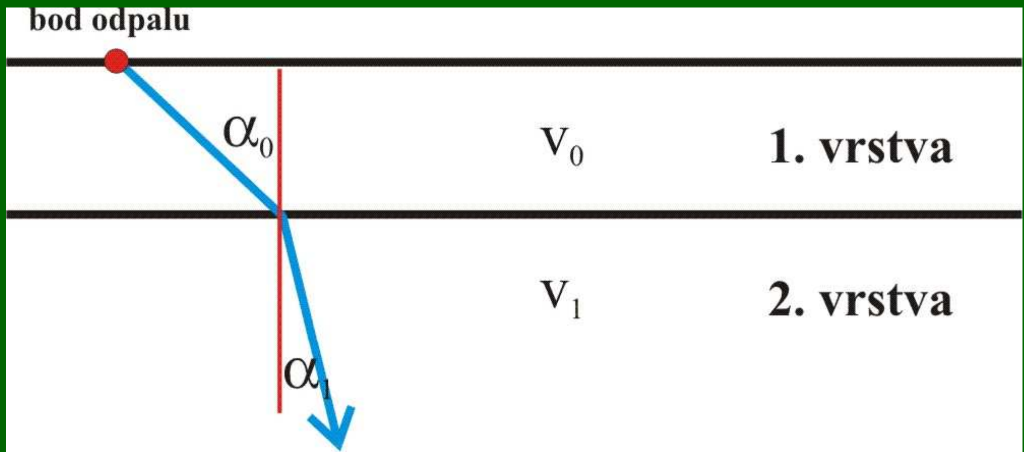
$$t = \frac{d}{v}$$



3. Úlohy ze seismiky

Aby se vlna lámala podél rozhraní, musí na něj dopadat pod kritickým úhlem i, který odvodíme ze Snellova zákona.

$$\frac{\sin\alpha_0}{v_0} = \frac{\sin\alpha_1}{v_1}$$



Willebrord van Roijen Snell

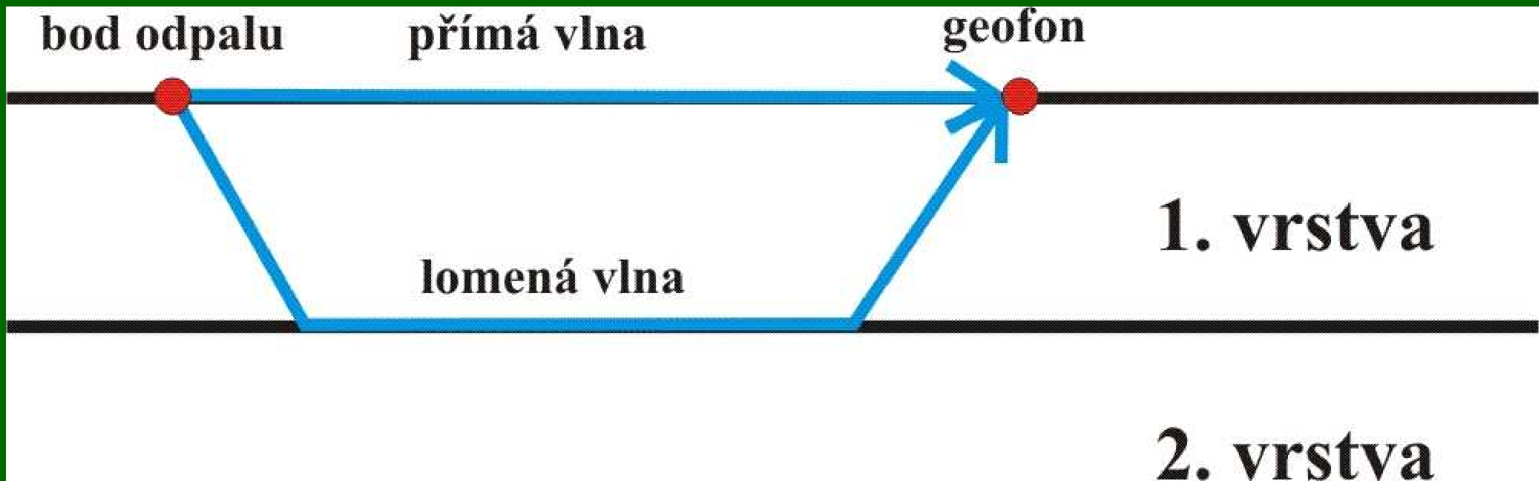
(1580-1626)

3. Úlohy ze seismiky

Kritický úhel odvodíme ze Snellova vztahu:

$$\frac{\sin\alpha_0}{v_0} = \frac{\sin 90^\circ}{v_1} = \frac{1}{v_1}$$

$$\sin(i) = \frac{v_0}{v_1}$$



3. Úlohy ze seismiky

Rychlosti známe, tj. můžeme dosadit do vzorce:

$$\sin(i) = \frac{v_0}{v_1} = \frac{600}{2000} = 0{,}3 \Leftrightarrow$$

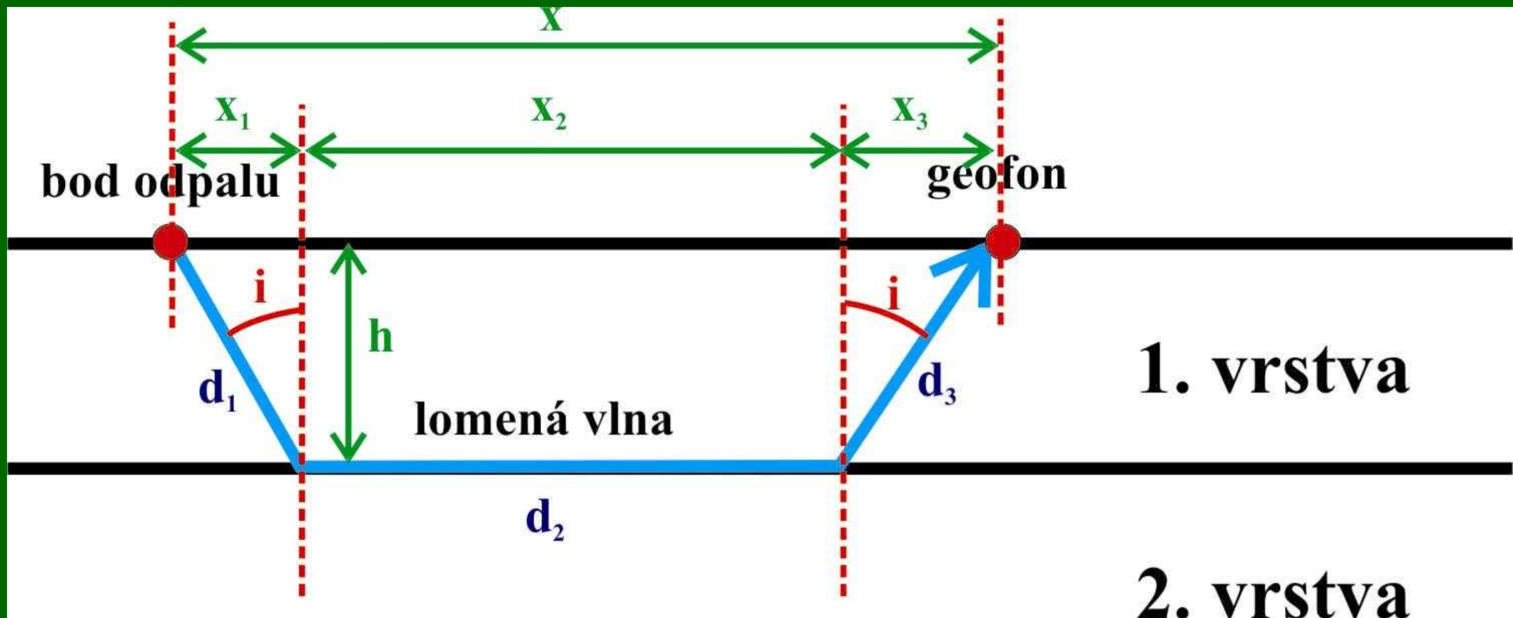
$$\Leftrightarrow i = \arcsin(0{,}3) = 17{,}46°$$

3. Úlohy ze seismiky

Dráhu d i vzdálenost bodu záznamu od bodu odpalu x si můžeme rozdělit na tři úseky:

$$d = d_1 + d_2 + d_3 \qquad d_1 = d_3$$

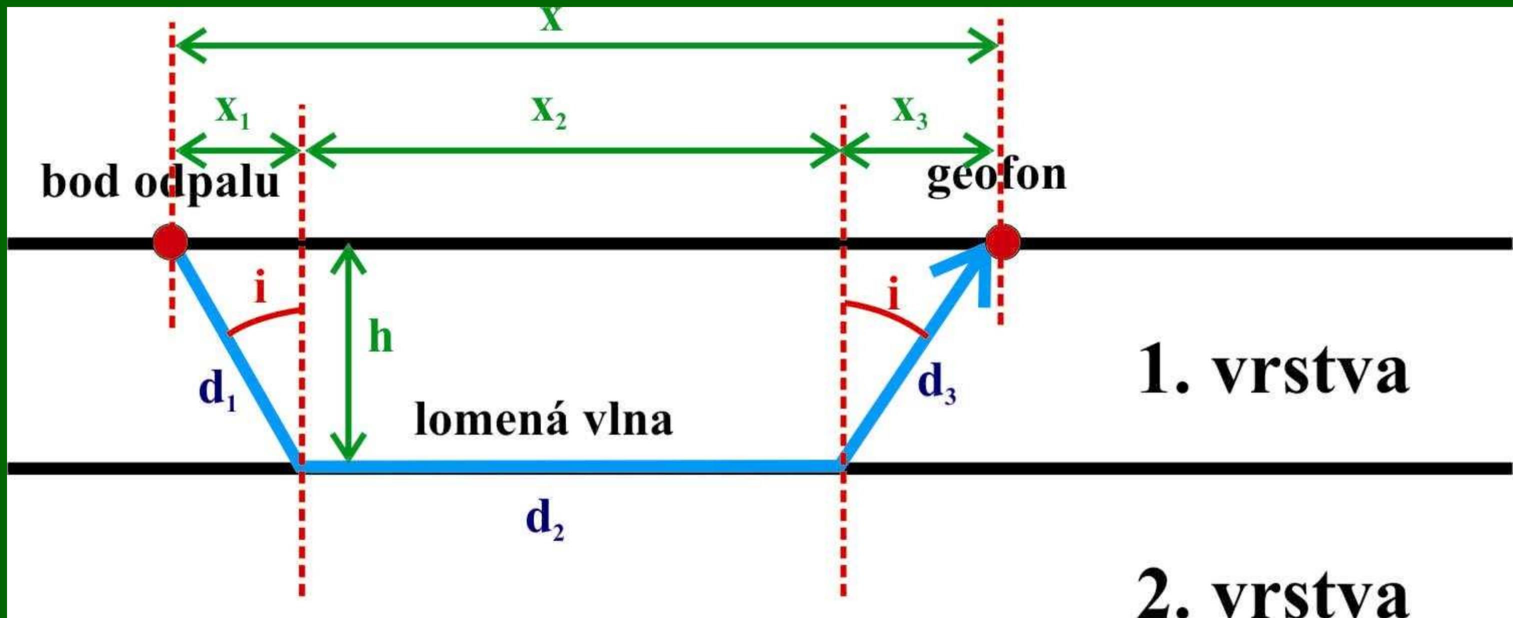
$$x = x_1 + x_2 + x_3 \qquad x_1 = x_3$$



3. Úlohy ze seismiky

Pro úsek d_1 platí:

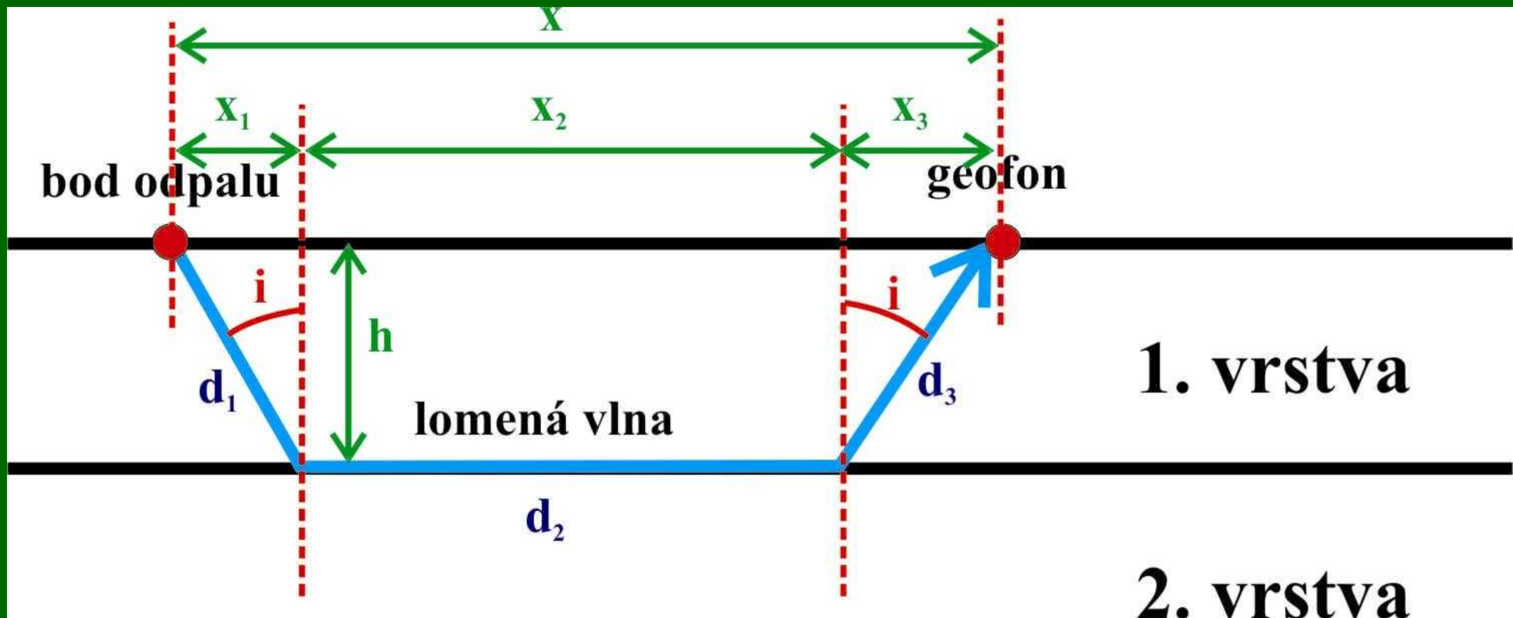
$$\cos(i) = \frac{h}{d_1} \Leftrightarrow d_1 = \frac{h}{\cos(i)}$$



3. Úlohy ze seismiky

Totéž platí pro úsek d_3:

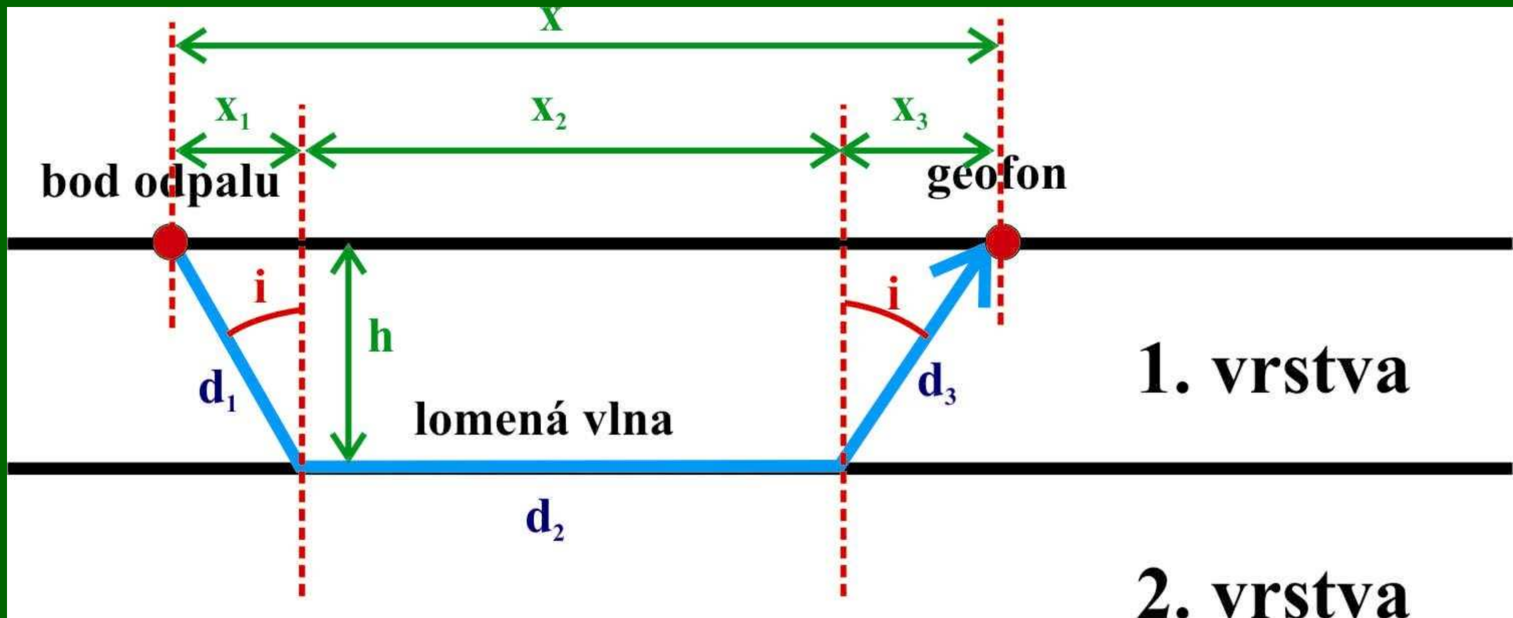
$$d_3 = d_1 = \frac{h}{\cos(i)}$$



3. Úlohy ze seismiky

Pro úsek d_2 platí: $$d_2 = x_2 = x - (x_1 + x_3)$$

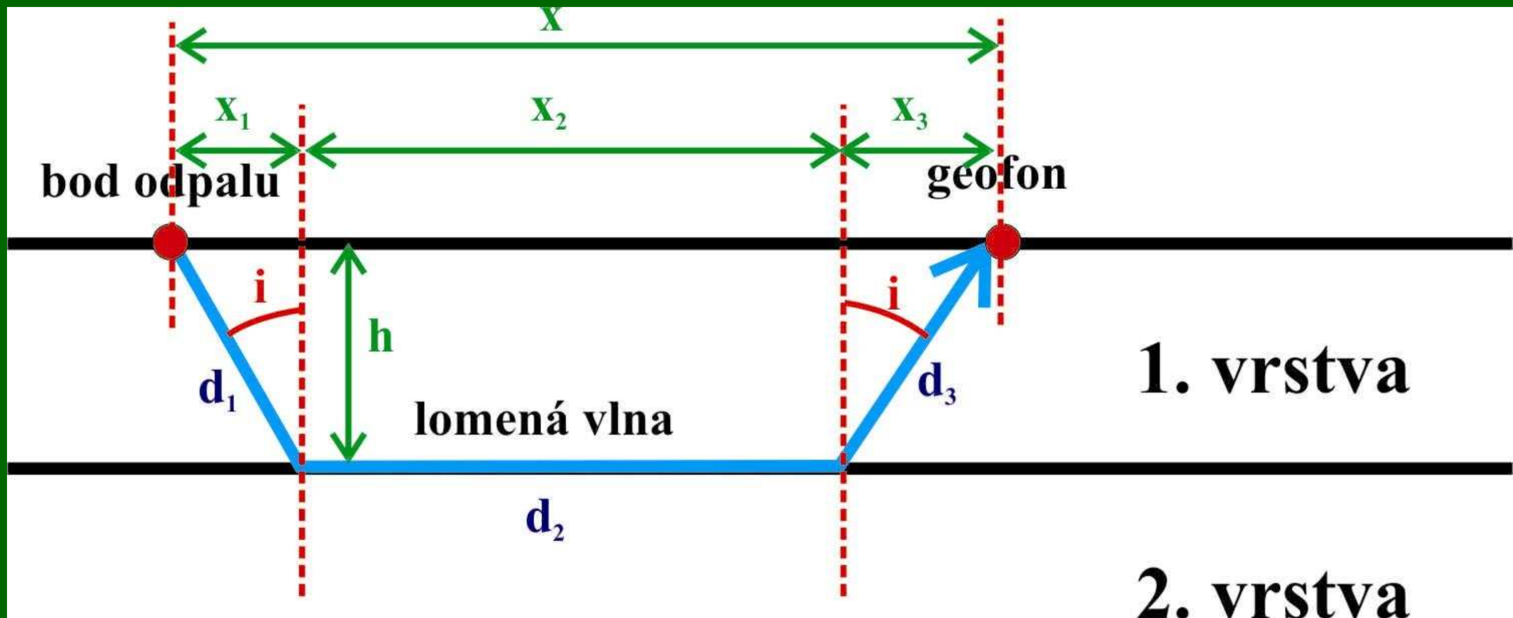
Protože $x_1 = x_3$ platí: $$d_2 = x - (2x_1)$$



3. Úlohy ze seismiky

Pro úsek x_1 platí:

$$tg(i) = \frac{x_1}{h} \Leftrightarrow x_1 = h.tg(i)$$

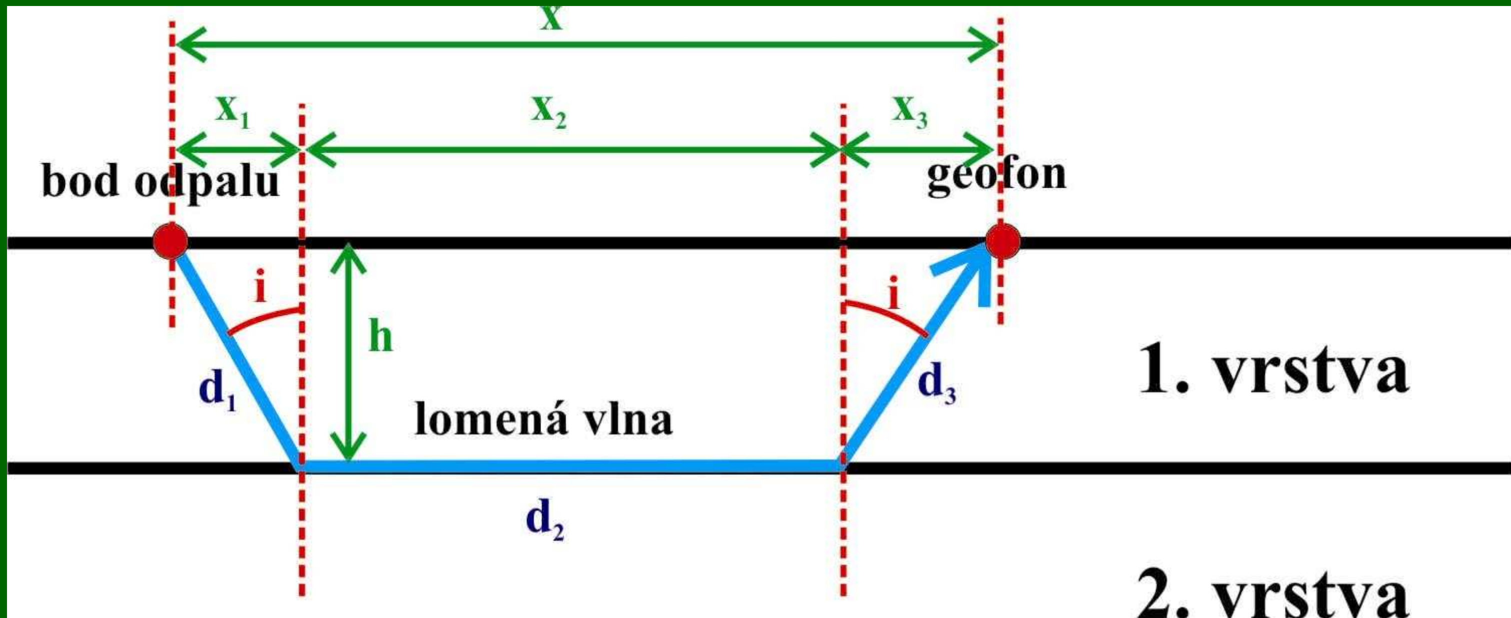


3. Úlohy ze seismiky

Tedy, pro úsek d_2 platí:

$$d_2 = x - (2x_1) \qquad d_2 = x - (2.h.tg(i))$$

$$tg(i) = \frac{x_1}{h} \Leftrightarrow x_1 = h.tg(i)$$

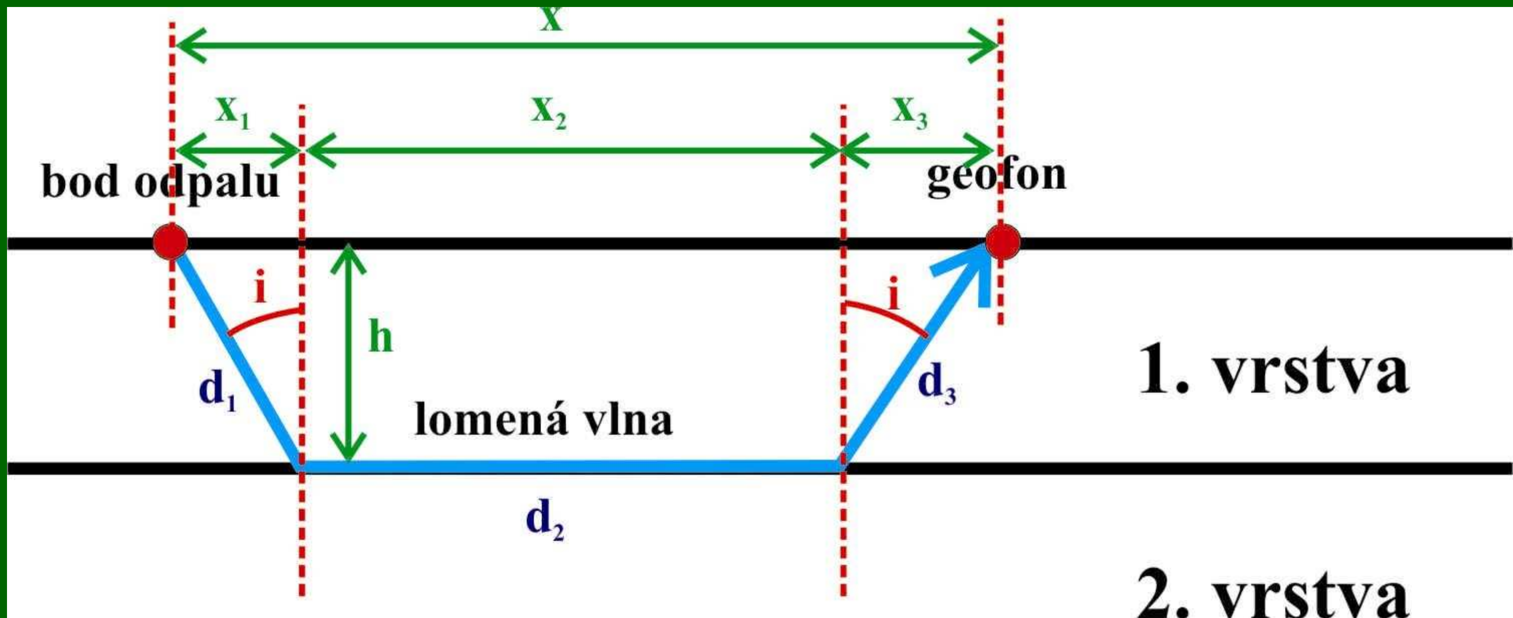


3. Úlohy ze seismiky

Přitom drahami d_1 a d_3 se signál šíří rychlostí v_0, dráhou d_2 se signál šíří rychlostí v_1. Pro čas detekce t tedy platí:

$$t = \frac{d_1}{v_0} + \frac{d_2}{v_1} + \frac{d_3}{v_0}$$

$$d_1 = d_3 \Leftrightarrow t = \frac{2.d_1}{v_0} + \frac{d_2}{v_1}$$



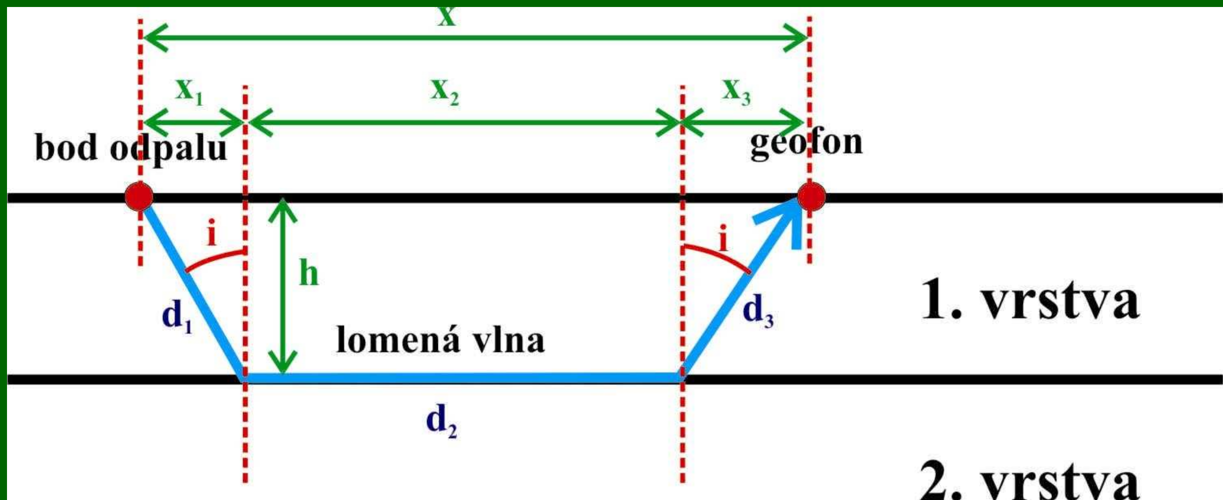
3. Úlohy ze seismiky

Tedy:

$$d_1 = \frac{h}{\cos(i)}$$

$$d_2 = x - (2.h.tg(i))$$

$$t = \frac{2.d_1}{v_0} + \frac{d_2}{v_1} = \frac{2.\dfrac{h}{\cos(i)}}{v_0} + \frac{x - 2.h.tg(i)}{v_1}$$

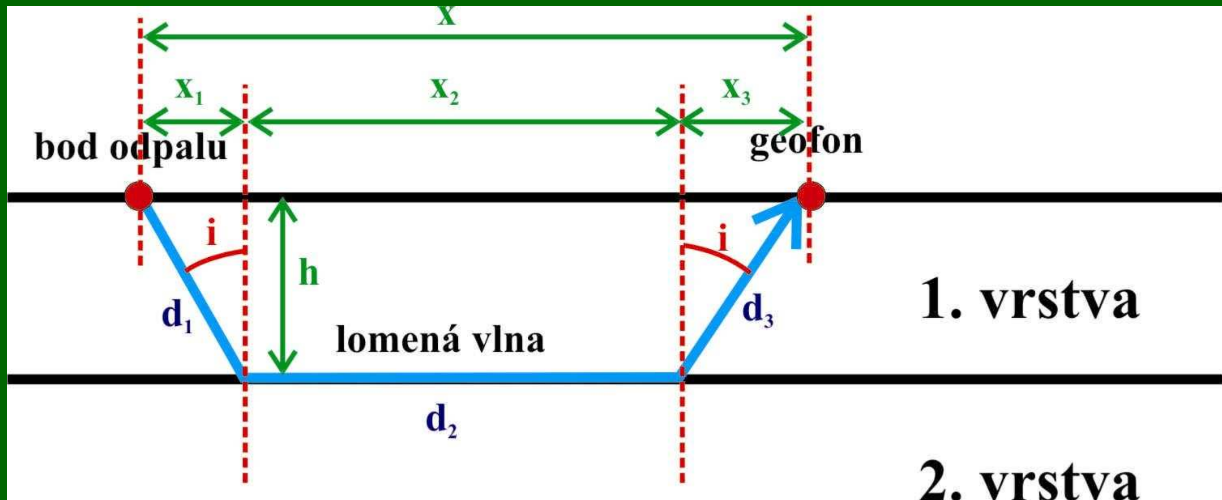


3. Úlohy ze seismiky

Tedy:

$$t = \frac{2.\dfrac{h}{\cos(i)}}{v_0} + \frac{x - 2.h.tg(i)}{v_1} =$$

$$= \frac{2.h}{v_0.\cos(i)} + \frac{x - 2.h.tg(i)}{v_1}$$

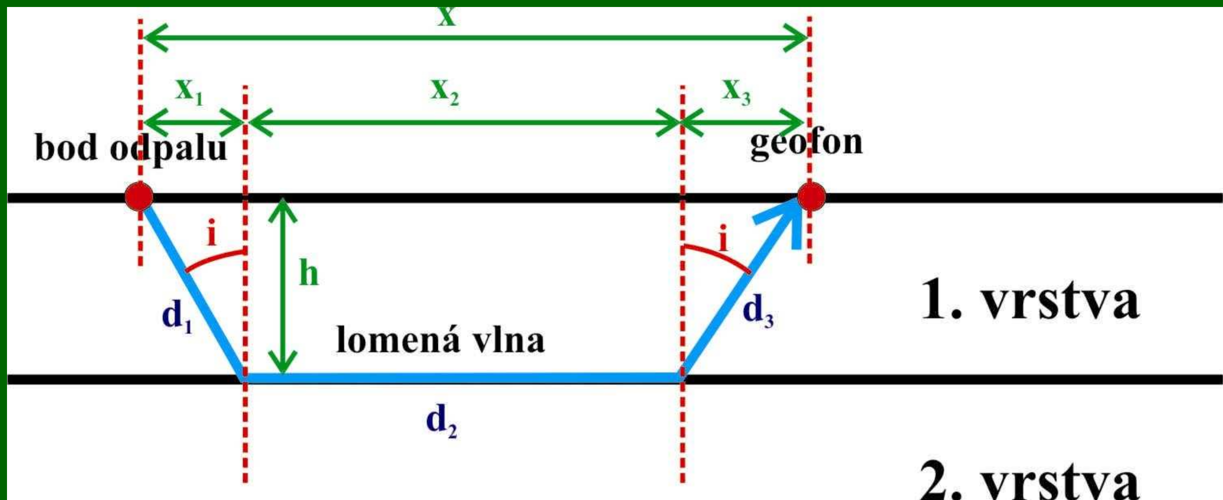


3. Úlohy ze seismiky

Nyní již můžeme dosadit do vzorce hodnoty všech proměnných:

$$t = \frac{2.h}{v_0.\cos(i)} + \frac{x - 2.h.tg(i)}{v_1} =$$

$$= \frac{2.10}{600.\cos(17{,}46°)} + \frac{x - 2.10.tg(17{,}46°)}{2000}$$

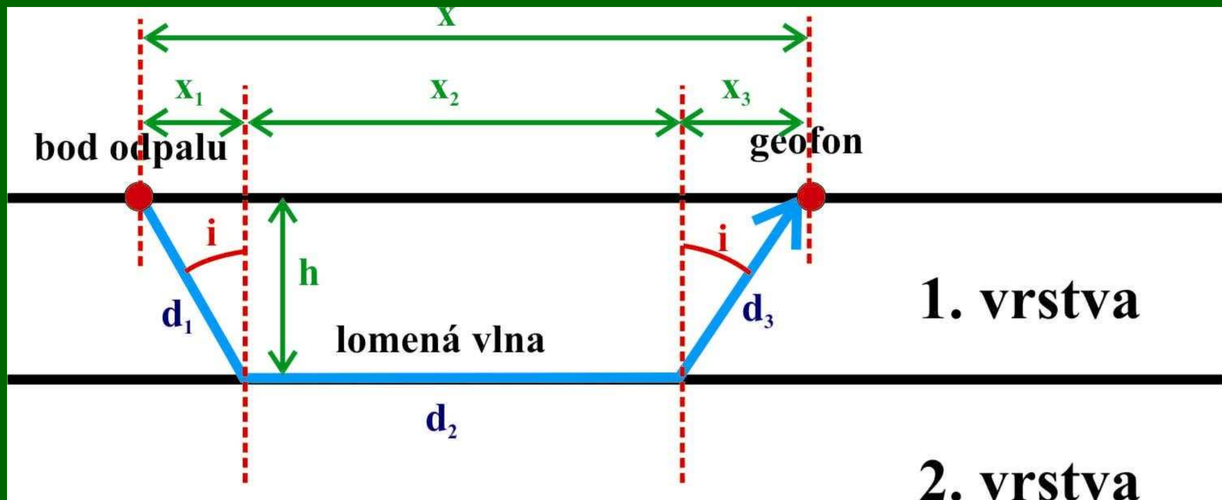


3. Úlohy ze seismiky

Nyní již můžeme dosadit do vzorce hodnoty všech proměnných:

$$t = \frac{2.10}{600.\cos(17,46°)} + \frac{x - 2.10.\mathrm{tg}(17,46°)}{2000} =$$

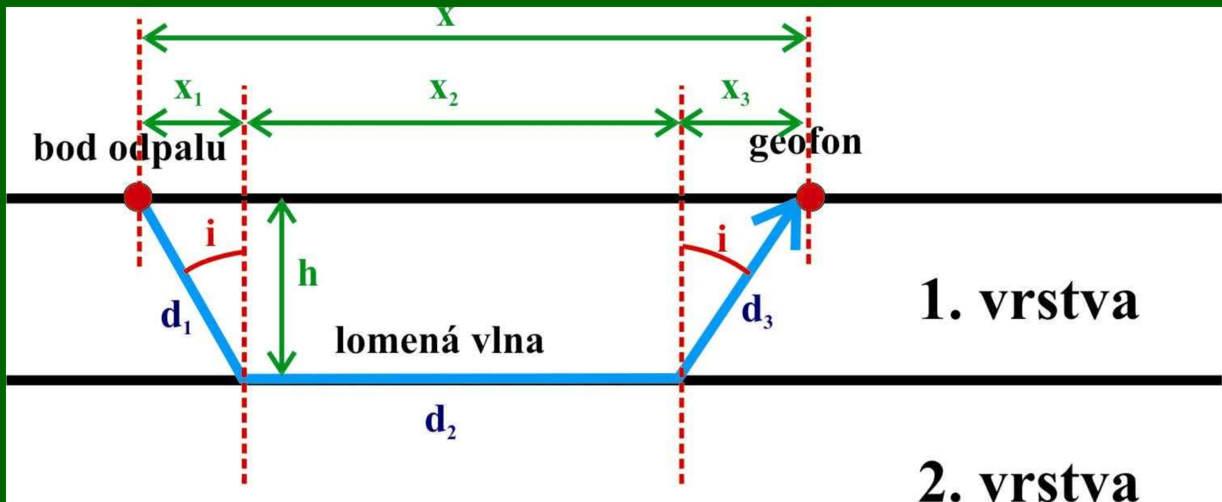
$$\frac{20}{600.0,954} + \frac{x - 20.0,314}{2000} = 0,035 + \frac{x - 6,28}{2000}$$



3. Úlohy ze seismiky

Nyní můžeme dosazovat různá x a vypočítat odpovídající časy t, které pak můžeme vynést do grafu.

$$t = 0{,}035 + \frac{x - 6{,}28}{2000}$$

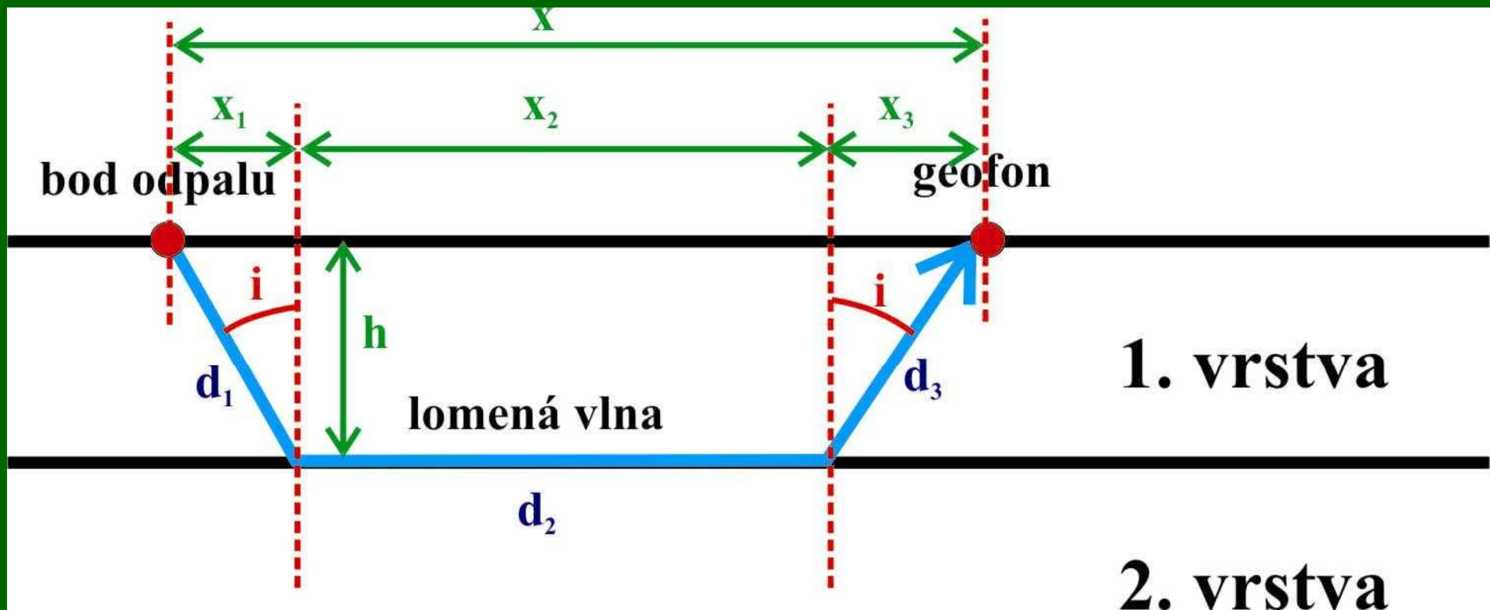


3. Úlohy ze seismiky

Je zřejmé, že lomená vlna nemůže být detekována již v bodě odpalu, ale že může dosáhnou povrchu nejdříve ve vzdálenosti $x_1+x_3=2.x_1$

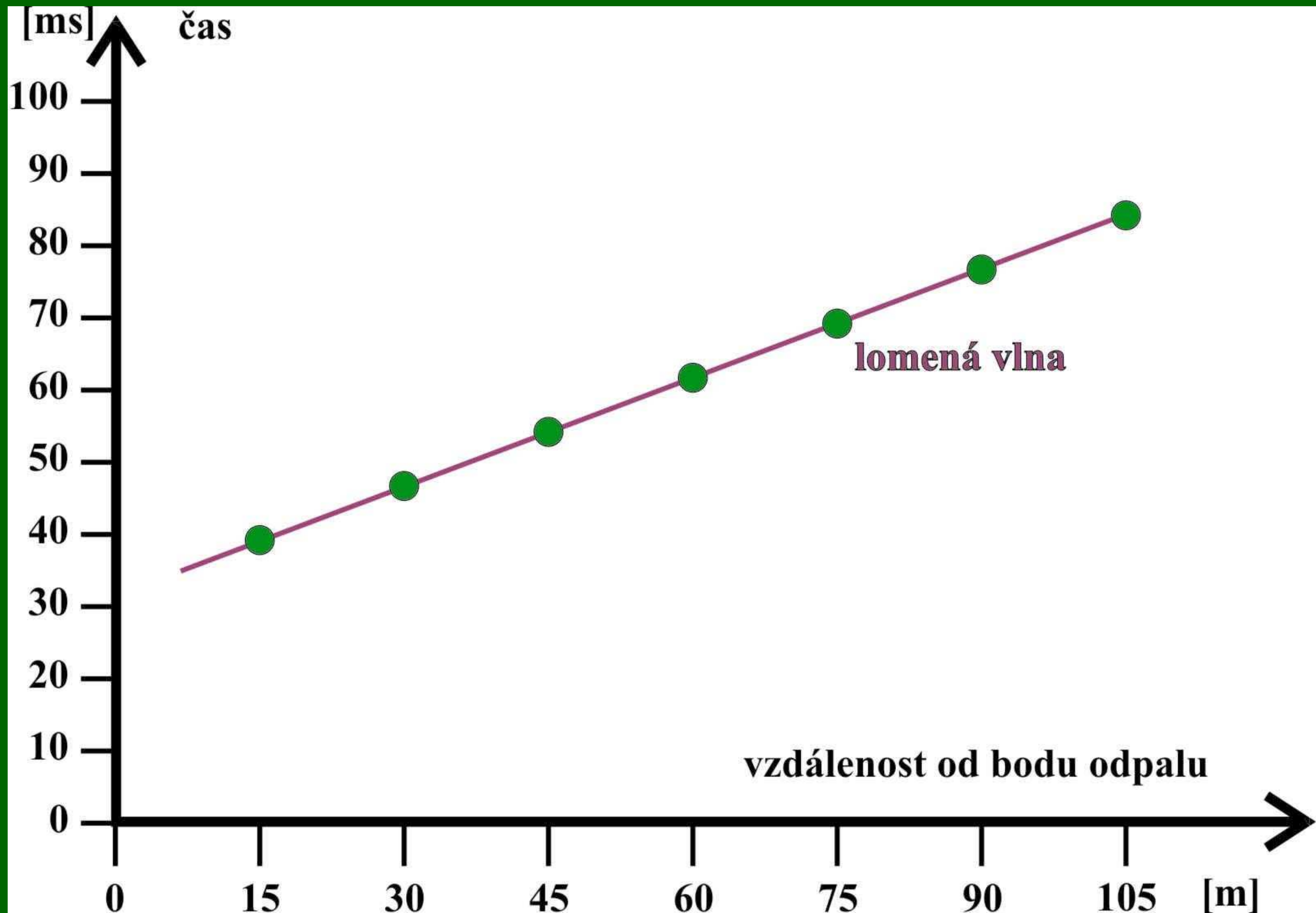
$$x_1 = h.tg(i) = 10.tg(17{,}46°) = 3{,}14$$

$$2x_1 = 6{,}3m$$



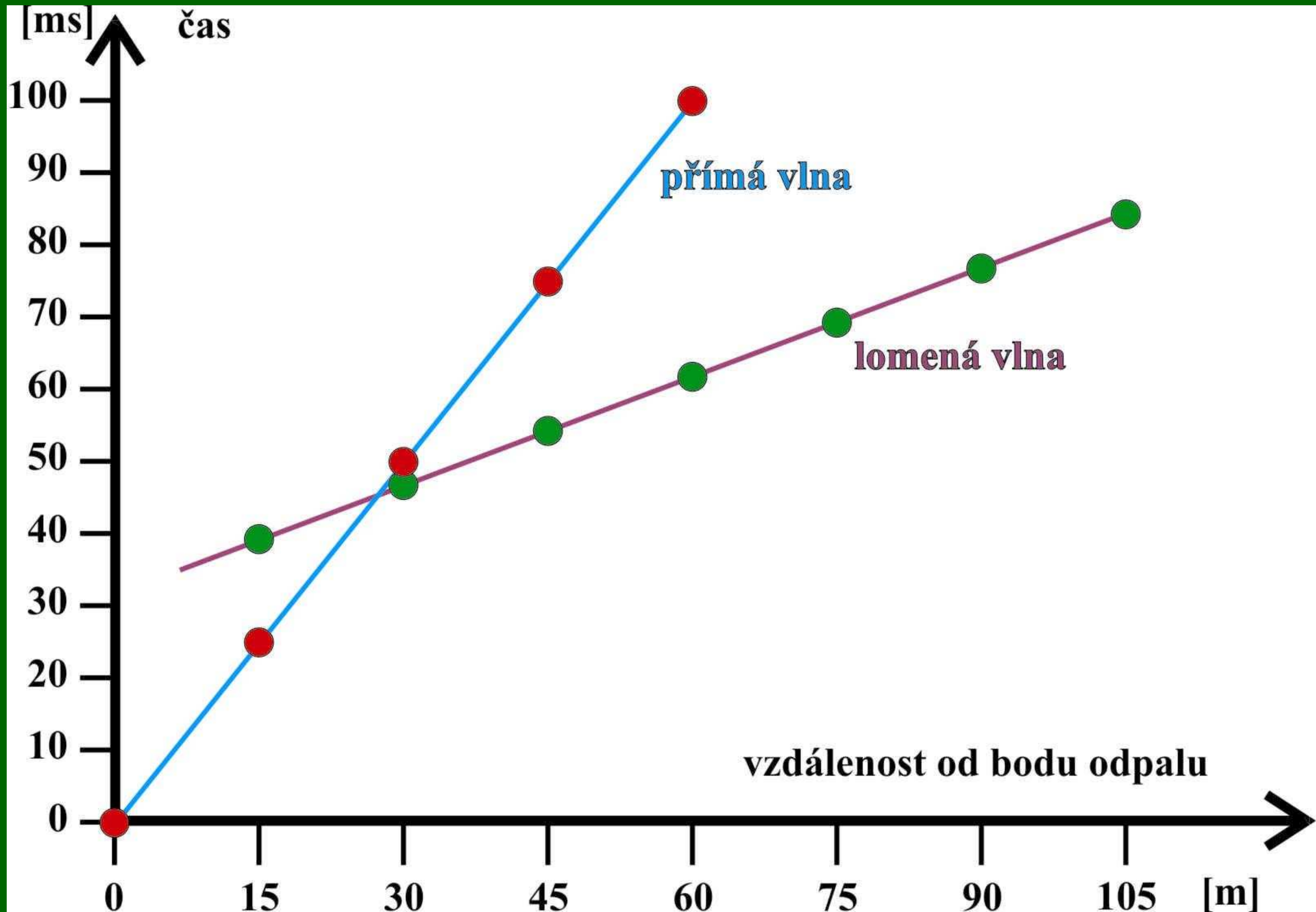
3. Úlohy ze seismiky

Lomená vlna nemůže být detekována již v bodě odpalu a hodochrona lomené vlny neprochází počátkem souřadné soustavy.



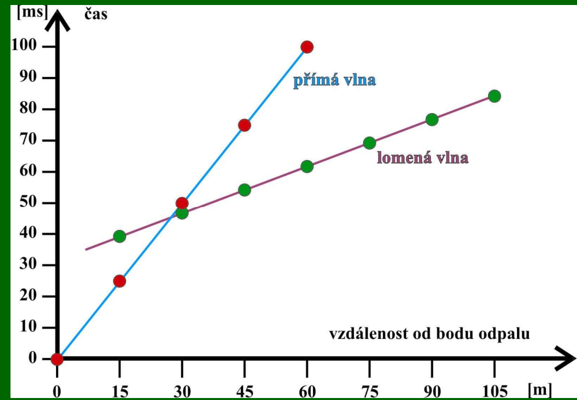
3. Úlohy ze seismiky

Nyní máme sestrojeny hodochrony přímé i lomené vlny.



3. Úlohy ze seismiky

Úlohy vycházející z úvodního problému:



$$\frac{\sin \alpha_0}{v_0} = \frac{\sin \alpha_1}{v_1}$$

$$\sin(i) = \frac{v_0}{v_1}$$

Úloha 3.1: Urči úhel, pod kterým se signál bude lámat do druhé vrstvy, jestliže na rozhraní mezi 1. a 2. vrstvou dopadl pod úhlem 20°, rychlost v_0 v 1.vrstvě je 800ms^{-1} a rychlost v_1 ve 2. vrstvě je 1800ms^{-1}.

3. Úlohy ze seismiky

Úloha 3.1: Urči úhel, pod kterým se signál bude lámat do druhé vrstvy, jestliže na rozhraní mezi 1. a 2. vrstvou dopadl pod úhlem 20°, rychlost v_0 v 1.vrstvě je $800 ms^{-1}$ a rychlost v_1 ve 2. vrstvě je $1800 ms^{-1}$.

Výjdeme ze Snellova zákona:

$$\frac{\sin \alpha_0}{v_0} = \frac{\sin \alpha_1}{v_1}$$

3. Úlohy ze seismiky

Snadno si vyjádříme úhel lomu α_1:

$$\frac{\sin\alpha_0}{v_0} = \frac{\sin\alpha_1}{v_1} \Leftrightarrow \sin\alpha_1 = \frac{v_1 . \sin\alpha_0}{v_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \arcsin\left(\frac{v_1 . \sin\alpha_0}{v_0}\right)$$

3. Úlohy ze seismiky

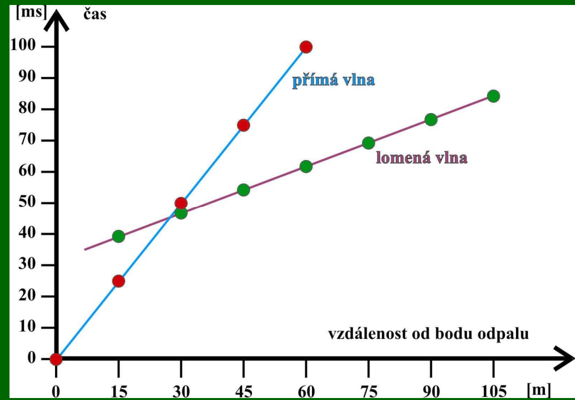
Nyní snadno dosadíme do vzorce:

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{v_1 . \sin\alpha_0}{v_0}\right) = \arcsin\left(\frac{1800 . \sin 20°}{800}\right) =$$

$$= \arcsin(0{,}8) \cong 50{,}3°$$

3. Úlohy ze seismiky

Úlohy vycházející z úvodního problému:



$$\frac{\sin\alpha_0}{v_0} = \frac{\sin\alpha_1}{v_1} \qquad \sin(i) = \frac{v_0}{v_1}$$

Úloha 3.2: Urči kritický úhel, pod kterým dopadá lomená vlna na rozhraní, jestliže rychlost v_0 v 1.vrstvě je $800 ms^{-1}$ a rychlost v_1 ve 2. vrstvě je $1800 ms^{-1}$.

3. Úlohy ze seismiky

Úloha 3.2: Urči kritický úhel, pod kterým dopadá lomená vlna na rozhraní, jestliže rychlost v_0 v 1.vrstvě je 800ms^{-1} a rychlost v_1 ve 2. vrstvě je 1800ms^{-1}.

Pro kritický úhel i platí toto pravidlo odvozené ze Snellova zákona:

$$\sin(i) = \frac{v_0}{v_1}$$

3. Úlohy ze seismiky

Tj.

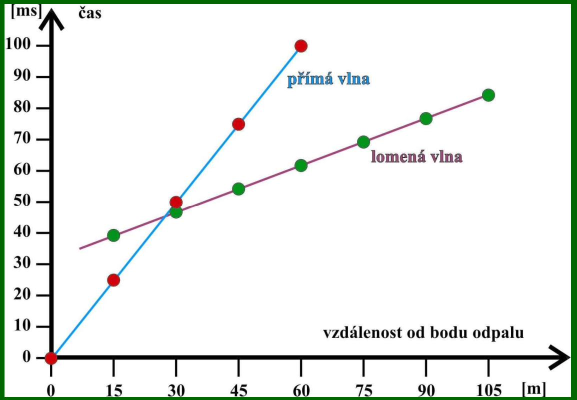
$$\sin(i) = \frac{v_0}{v_1} \Leftrightarrow i = \arcsin\left(\frac{v_0}{v_1}\right)$$

Nyní snadno dosadíme do vzorce:

$$i = \arcsin\left(\frac{v_0}{v_1}\right) = \arcsin\left(\frac{800}{1800}\right) = \arcsin(0{,}4) = 26{,}4°$$

3. Úlohy ze seismiky

Úlohy vycházející z úvodního problému:



$$t = \frac{d}{v}$$

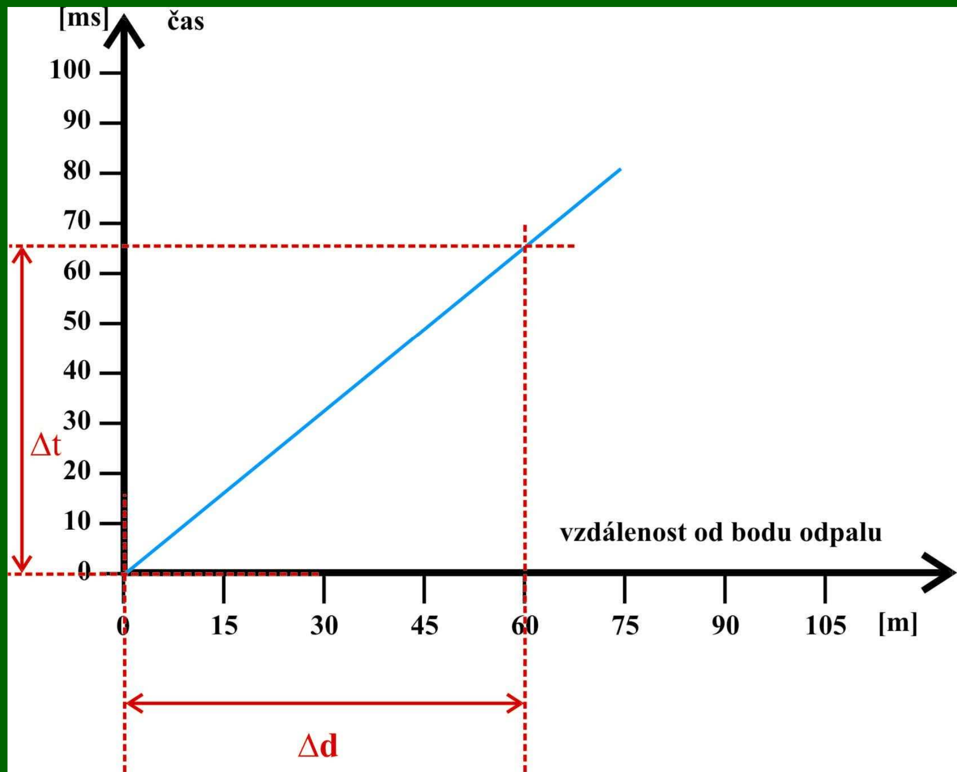
Úloha 3.3: Urči z hodochrony přímé vlny její rychlost.

3. Úlohy ze seismiky

Úloha 3.3: Urči z hodochrony přímé vlny její rychlost.

Hodochrona znázorňuje vzdálenost času detekce (šíření) vlny na vzdálenosti. Přímo z grafu tedy můžeme odečist příslušný úsek dráhu a času.

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

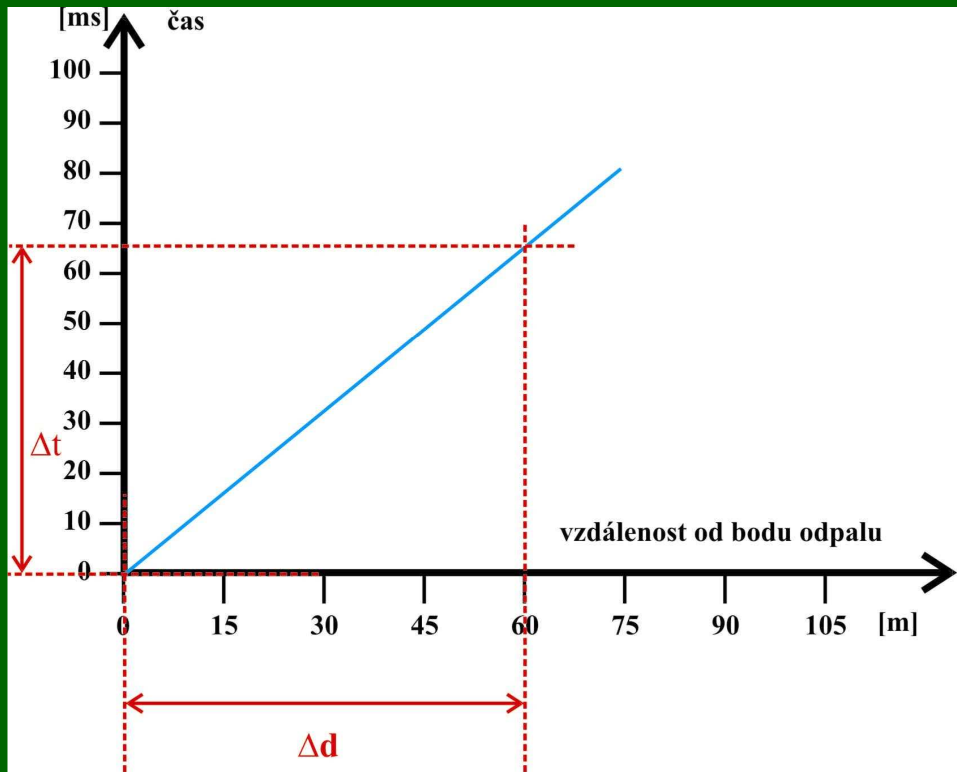


3. Úlohy ze seismiky

Podíl příslušných úseků dráhy a času odpovídá rychlosti:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} = $$

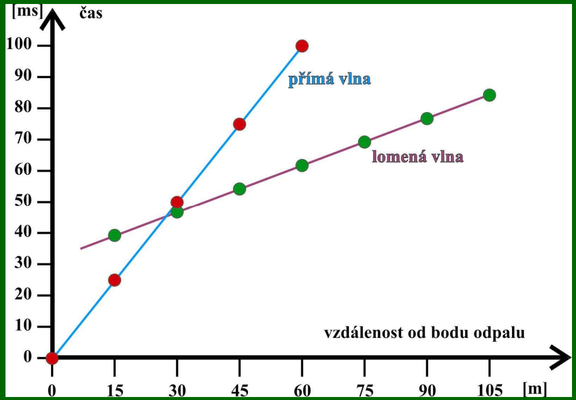
$$= \frac{60}{0{,}065} \cong 923\,\mathrm{ms}^{-1}$$



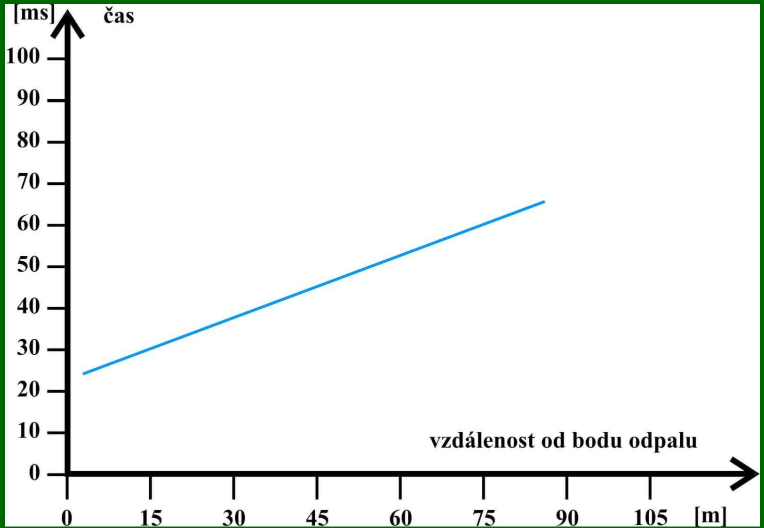
3. Úlohy ze seismiky

Úlohy vycházející z úvodního problému:

$$t = \frac{d}{v}$$



Úloha 3.4: Urči z hodochrony lomené vlny její rychlost.

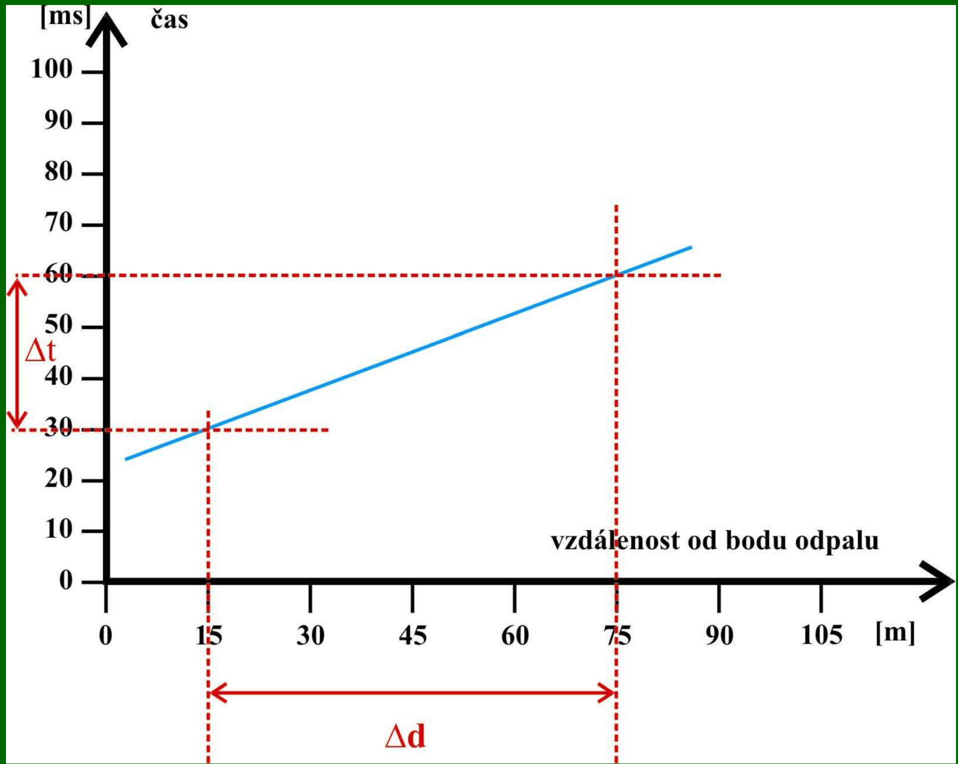


3. Úlohy ze seismiky

Úloha 3.4: Urči z hodochrony lomené vlny její rychlost.

Hodochrona znázorňuje vzdálenost času detekce (šíření) vlny na vzdálenosti. Také u lomené vlny můžeme přímo z grafu odečist příslušný úsek dráhu a času.

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

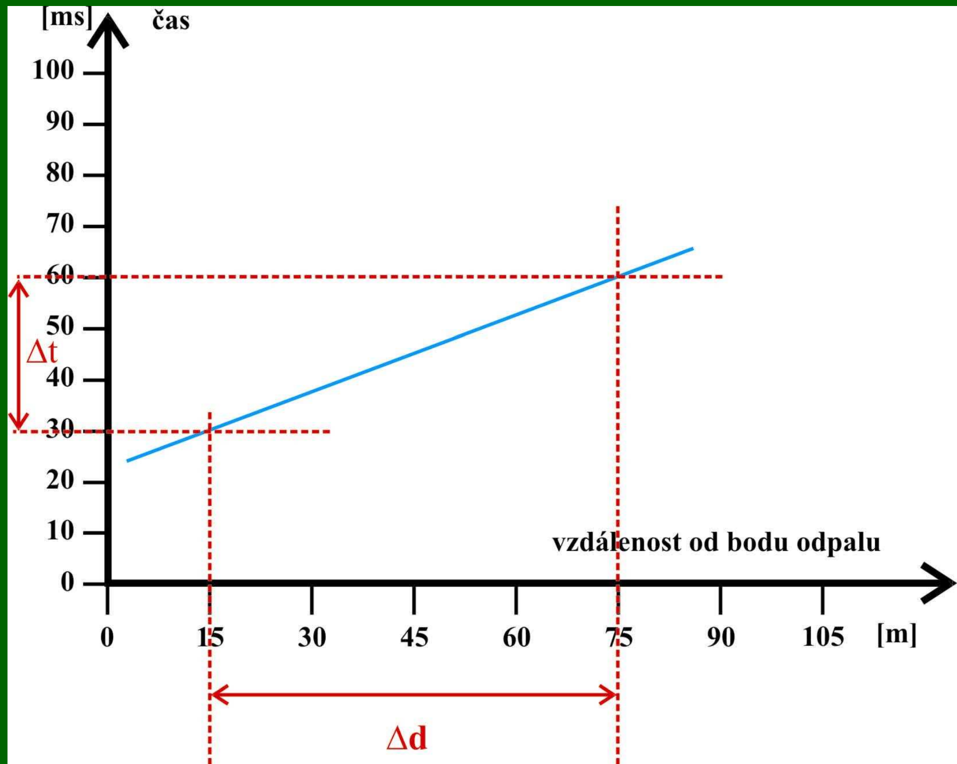


3. Úlohy ze seismiky

Podíl příslušných úseků dráhy a času odpovídá rychlosti:

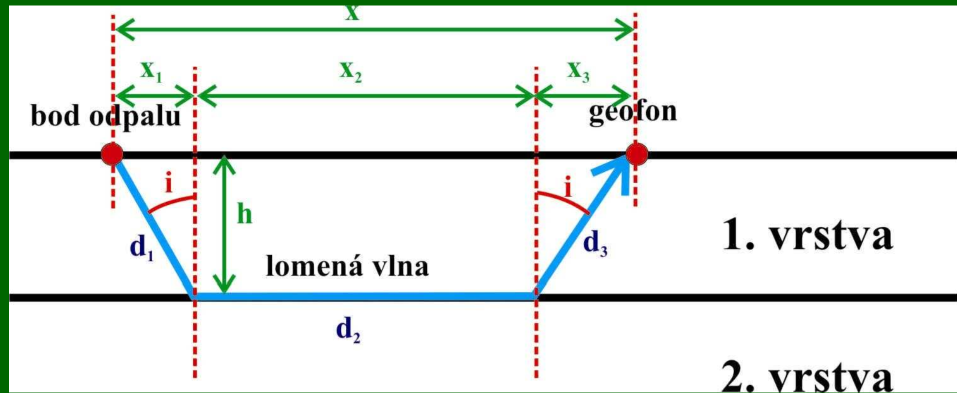
$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} =$$

$$= \frac{60}{0{,}03} = 2000 ms^{-1}$$



3. Úlohy ze seismiky

Úlohy vycházející z úvodního problému:

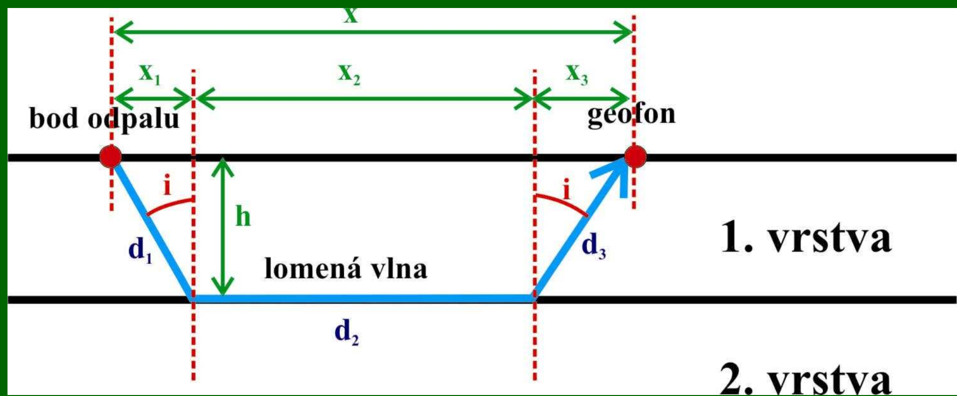


Úloha 3.5: Urči nejmenší vzdálenost od bodu odpalu, ve které může být zaznamenána lomená vlna, jestliže rozhraní mezi 1. a 2. vrstvou se nachází v hloubce 10m, rychlost v_0 v 1.vrstvě je 800ms^{-1} a rychlost v_1 ve 2. vrstvě je 1800ms^{-1}..

3. Úlohy ze seismiky

Úloha 3.5: Urči nejmenší vzdálenost od bodu odpalu, ve které může být zaznamenána lomená vlna, jestliže rozhraní mezi 1. a 2. vrstvou se nachází v hloubce 10m, rychlost v_0 v 1.vrstvě je 800ms^{-1} a rychlost v_1 ve 2. vrstvě je 1800ms^{-1}.

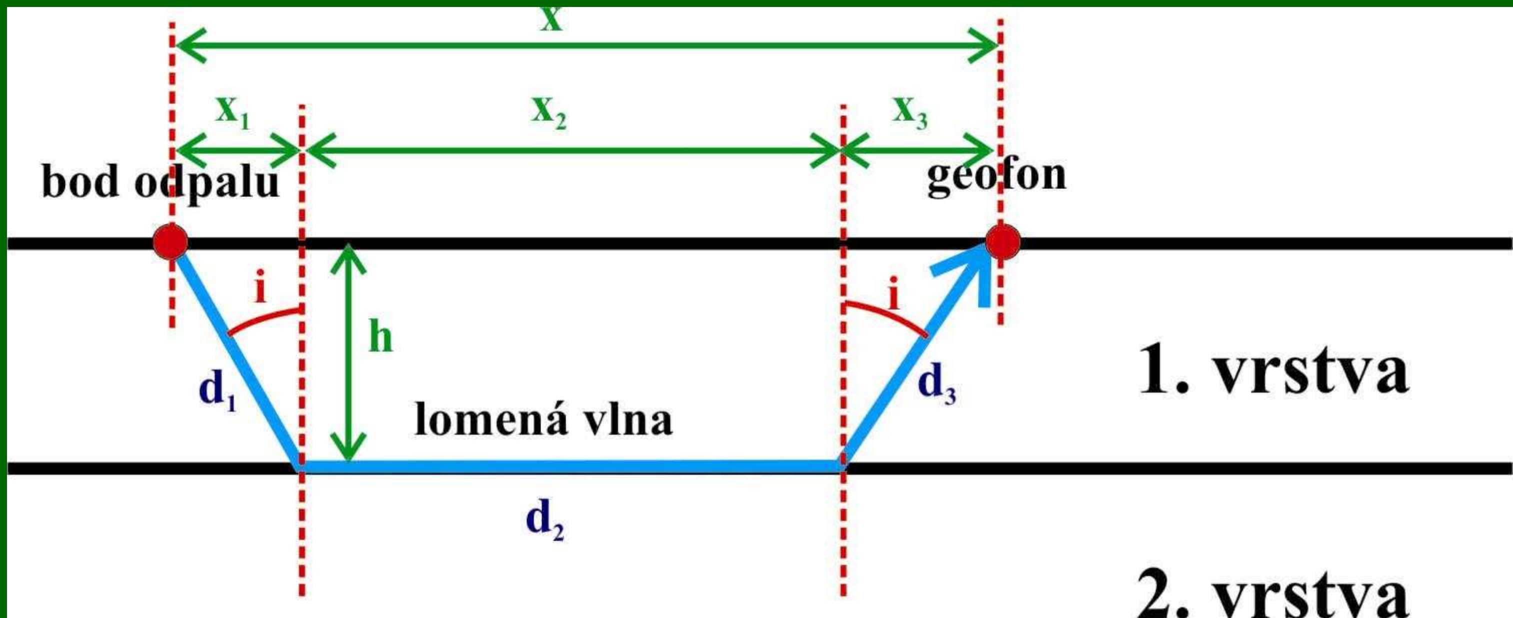
Je zřejmé, že lomená vlna nemůže být detekována již v bodě odpalu, ale že může dosáhnou povrchu nejdříve ve vzdálenosti $x_1+x_3=2.x_1$



3. Úlohy ze seismiky

Pro úsek x_1 platí:

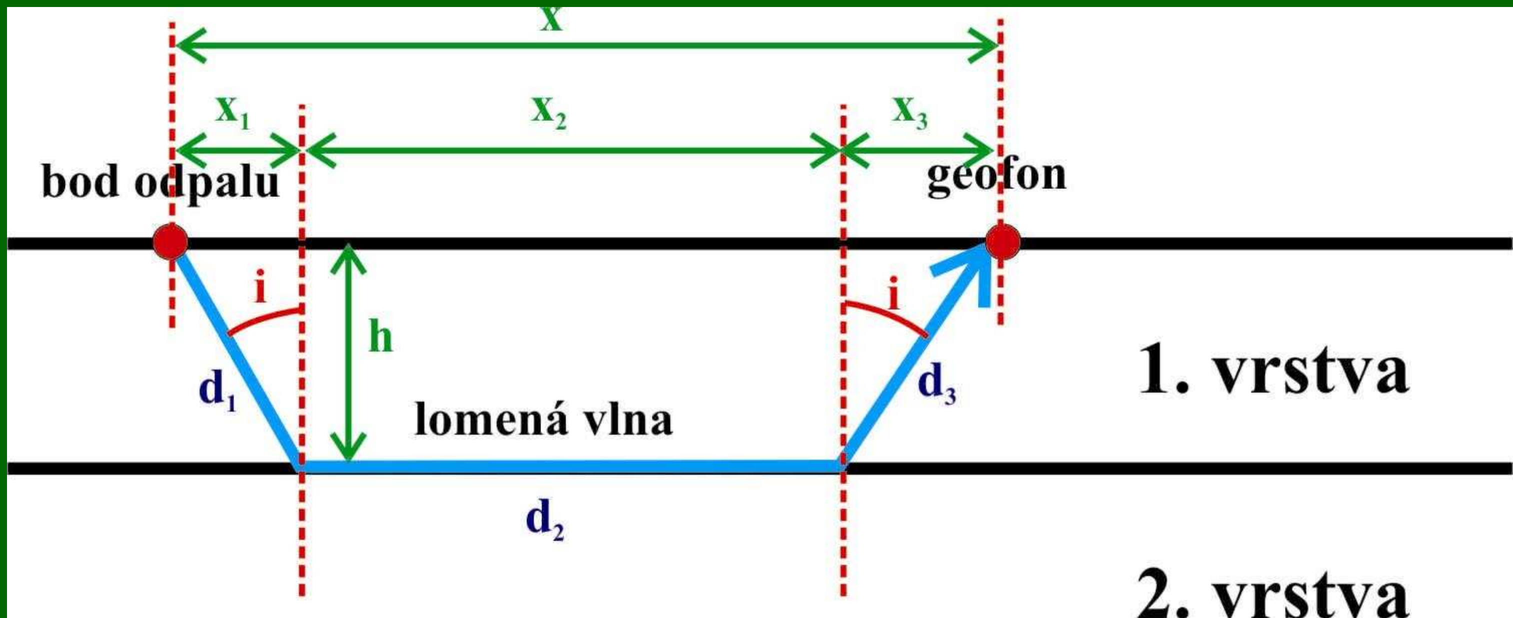
$$tg(i) = \frac{x_1}{h} \Leftrightarrow x_1 = h.tg(i)$$



3. Úlohy ze seismiky

Tj. pro $2x_1$ platí: $$x_1 = h.tg(i) \Leftrightarrow 2x_1 = 2.h.tg(i)$$

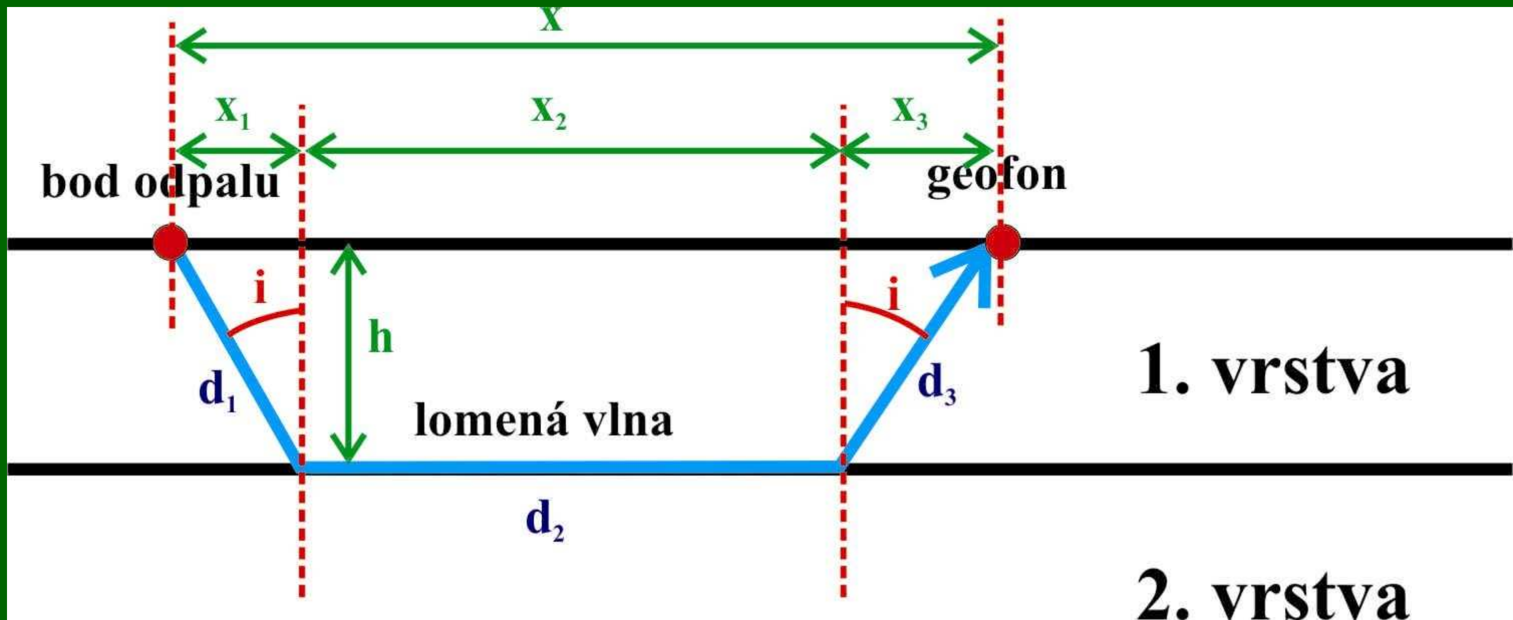
Ze Snellova zákona plyne, že: $$\sin(i) = \frac{v_0}{v_1}$$



3. Úlohy ze seismiky

Snadno si můžeme tedy vypočítat hodnotu sin(i):

$$\sin(i) = \frac{v_0}{v_1} = \frac{800}{1800} = 0{,}4$$



3. Úlohy ze seismiky

Nebo můžeme využít vztahů mezi goniometrickými funkcemi:

$$\mathrm{tg}(i) = \frac{\sin(i)}{\cos(i)}$$

$$\sin^2(i) + \cos^2(i) = 1 \Leftrightarrow \cos(i) = \sqrt{1 - \sin^2(i)}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}(i) = \frac{\sin(i)}{\sqrt{1 - \sin^2(i)}} = \frac{0{,}4}{\sqrt{1 - 0{,}4^2}} = 0{,}5$$

3. Úlohy ze seismiky

Pro výpočet vzdálenost $2x_1$ ale potřebujeme znát tg(i).

Můžeme si buď odvodit přímo velikost kritického úhlu i a aplikovat funkci tg:

$$\sin(i) = 0{,}4 \Leftrightarrow i = 26{,}4° \Leftrightarrow \mathrm{tg}(i) = 0{,}5$$

Nebo můžeme využít vztahů mezi goniometrickými funkcemi:

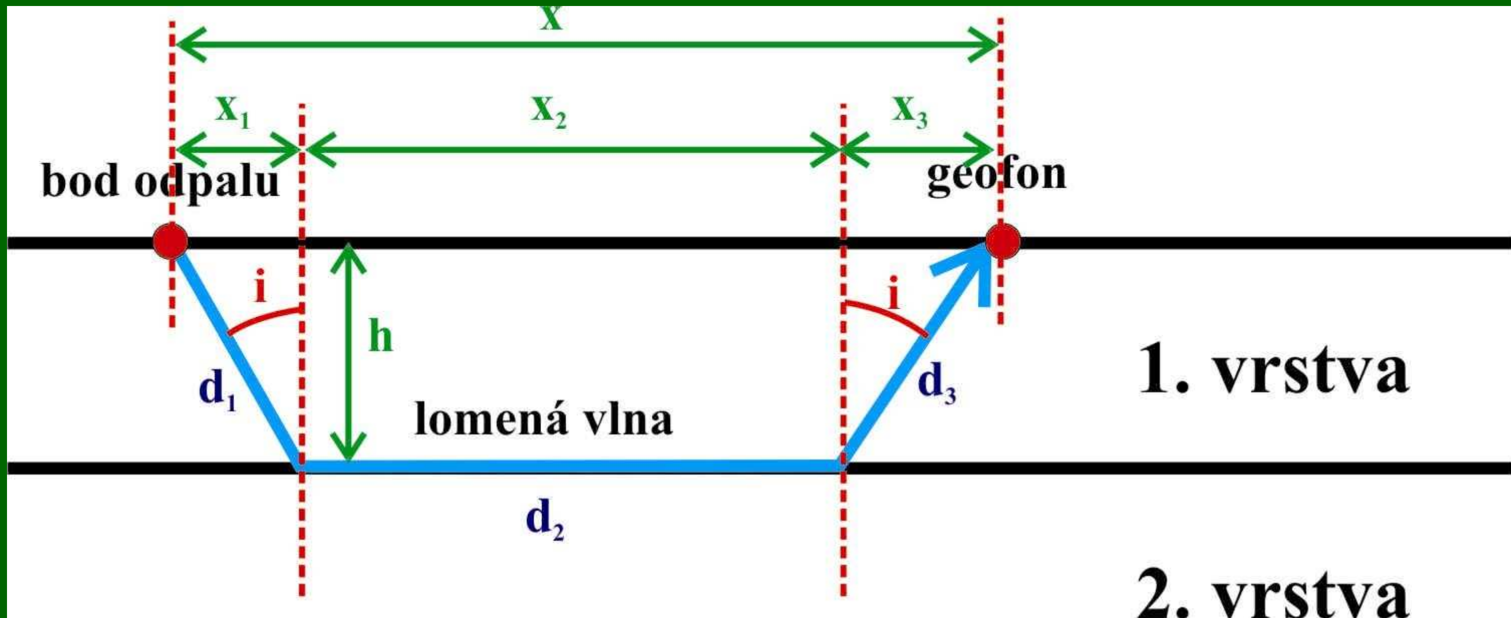
$$\mathrm{tg}(i) = \frac{\sin(i)}{\cos(i)}$$

$$\sin^2(i) + \cos^2(i) = 1 \Leftrightarrow \cos(i) = \sqrt{1 - \sin^2(i)}$$

3. Úlohy ze seismiky

Nyní můžeme snadno dosadit do vzorce pro $2x_1$:

$$2x_1 = 2.h.tg(i) = 2.10.0,5 = 10m$$



3. Úlohy ze seismiky

Řešení úloh:

verze	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	verze	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
1	58,8°	23,6°	600 m/s	2000 m/s	10,7m	11	71,3°	21,2°	600 m/s	2000 m/s	12,7m
2	49,5°	26,7°	500 m/s	1900 m/s	12,5m	12	61,6°	22,9°	500 m/s	1900 m/s	15,2m
3	77,7°	20,5°	400 m/s	1750 m/s	11,5m	13	55,2°	24,6°	400 m/s	1750 m/s	20,8m
4	65,8°	22,0°	700 m/s	2200 m/s	9,8m	14	46,4°	28,2°	700 m/s	2200 m/s	19,3m
5	53,6°	25,2°	800 m/s	2500 m/s	13,5m	15	43,2°	30,0°	800 m/s	2500 m/s	11,9m
6	54,3°	24,9°	600 m/s	2000 m/s	11,5m	16	46,6°	28,1°	600 m/s	2000 m/s	13,9m
7	46,2°	28,3°	500 m/s	1900 m/s	8,7m	17	56,2°	24,3°	500 m/s	1900 m/s	16,1m
8	68,2°	21,6°	400 m/s	1750 m/s	9,2m	18	50,8°	26,2°	400 m/s	1750 m/s	13,1m
9	60,0°	23,2°	700 m/s	2200 m/s	10,7m	19	43,2°	30,0°	700 m/s	2200 m/s	11,2m
10	49,9°	26,6°	800 m/s	2500 m/s	17,3m	20	40,2°	32,0°	800 m/s	2500 m/s	15,1m

4. Úlohy z radiometrie

Úvodní problém – sestrojte graf vyjadřující závislost úbytku uranu $^{235}_{92}U$ N_t/N_0 na čase t.

N_0 … počer atomů uranu v čase t=0
N_t … počet atomů uranu v čase t

Uran $^{235}_{92}U$ se rozpadá na thorium $^{231}_{90}Th$ s poločasem rozpadu $T=7.10^8$ let.

4. Úlohy z radiometrie

Mezi počátečním počtem atomů uranu N_0 a počtem zbývajících atomů N_t v čase t platí vztah:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$$

kde λ je rozpadová konstanta prvku, která souvisí s poločasem rozpadu T podle vztahu:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

4. Úlohy z radiometrie

Rozpadovou konstantu λ si tedy můžeme vyjádřit jako:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

Pak dosadíme do vztahu (čas můžeme dosadit v jednotkách „rok“ za předpokladu, že budeme i v dalším postupu pracovat důsledně s touto jednotkou času):

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0{,}693}{7 \times 10^{8}} = 9{,}9 \times 10^{-10}$$

4. Úlohy z radiometrie

Máme sestrojit graf vyjadřující úbytek atomů uranu v čase (tj. graf N_t/N_0 ku času t), vyjádříme si tedy vztah pro poměr N_t/N_0:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

Pro vyjádření poměru N_t/N_0 nemusíme nutně znát počáteční počet atomů N_0. Je zřejmé, že počet atomů rozpadajícího se prvku v čase klesá, na počátku je tedy počet atomů nejvyšší. Můžeme si pak tento počet obecně vyjádřit jako 100%. N_t pak představuje procento dosud nerozpadlých atomů.

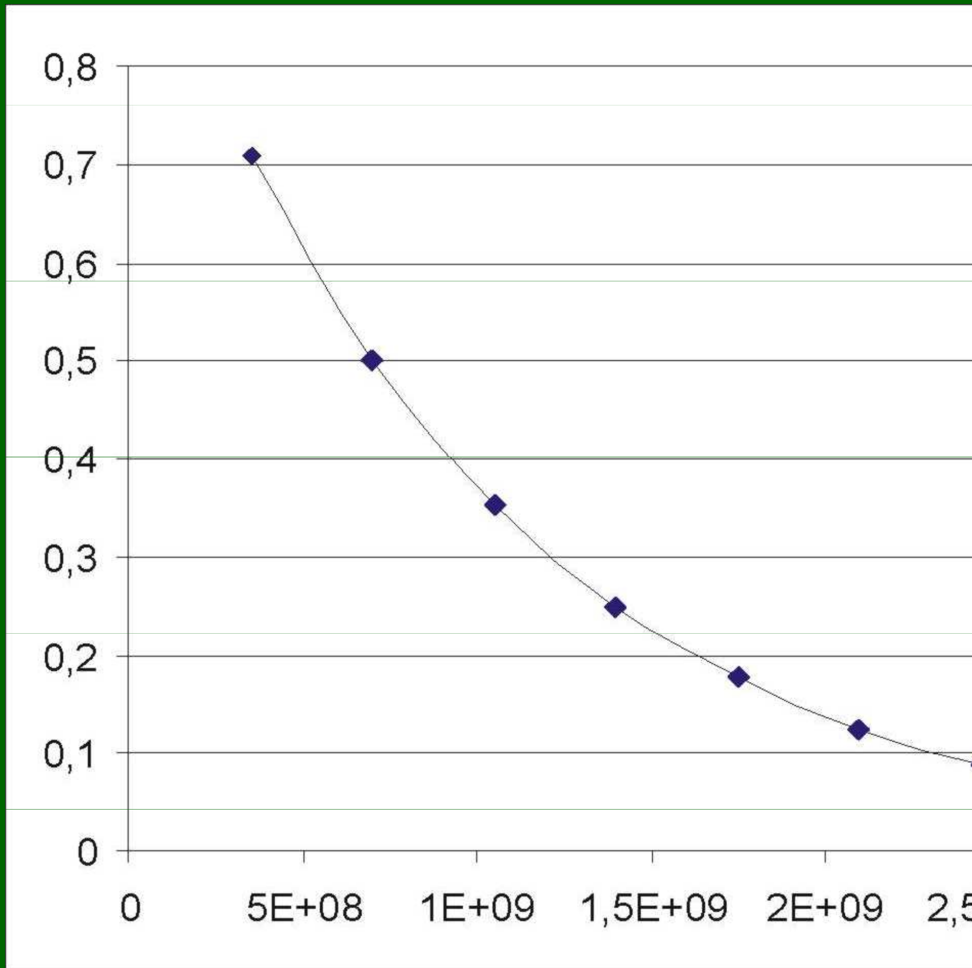
4. Úlohy z radiometrie

Vypočteme hodnoty poměru N_t/N_0 pro vhodně zvolené časy t tak, abychom mohli sestrojit požadovaný graf (krok na časové ose tedy volíme s ohledem na velikost poločasu rozpadu – pro ilustrativnost grafu je vhodné, aby délka časové osy byla alespoň pětinásobek poločasu rozpadu).

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

4. Úlohy z radiometrie

Pak sestrojíme graf:



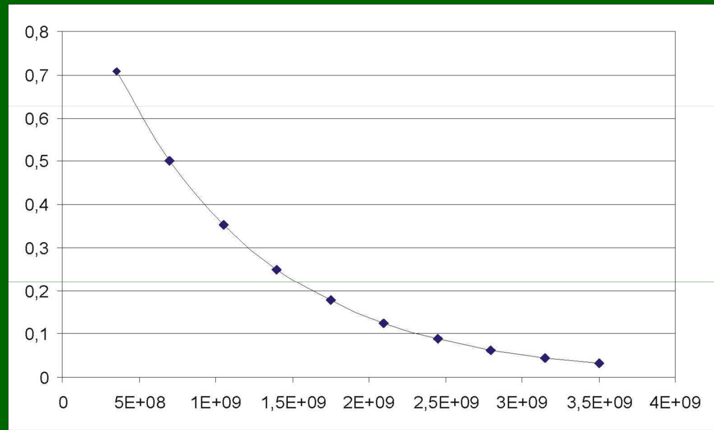
$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

4. Úlohy z radiometrie

Obrácené úlohy vycházející z úvodního problému:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$



Úloha 4.1: Určete dobu, za kterou se rozpadne 75% atomu uranu $^{235}_{92}U$, jestliže víme, že jeho poločas rozpadu je $T=7.10^8$ let.

4. Úlohy z radiometrie

Úloha 4.1: Určete dobu, za kterou se rozpadne 75% atomu uranu $^{235}_{92}\mathrm{U}$, jestliže víme, že jeho poločas rozpadu je $T=7.10^8$ let.

Máme vypočítat dobu, za kterou se rozpadne 75% atomů uranu – tj. máme vypočítat dobu, za kterou v systému zůstane zachováno 25% původních atomů uranu.

$$\text{rozpadlo}\quad\text{se} = 75\%$$

$$\text{celkem} = 100\%$$

$$\text{zbylo} = (\text{celkem}) - (\text{rozpadlo}\quad\text{se}) = 100\% - 75\% = 25\%$$

4. Úlohy z radiometrie

Poměr N_t/N_0 vyjadřuje poměrné zastoupení atomů, které zbyly:

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t} = \frac{25\%}{100\%} = 0,25 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0,25$$

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\text{rozpadlo se} = 75\%$$

$$\text{celkem} = 100\%$$

$$\text{zbylo} = (\text{celkem}) - (\text{rozpadlo se}) = 100\% - 75\% = 25\%$$

4. Úlohy z radiometrie

Nyní si vyjádříme čas t:

$$e^{-\lambda t} = 0{,}25 \Leftrightarrow \ln\left(e^{-\lambda t}\right) = -\lambda.t = \ln\left(0{,}25\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}25)}{-\lambda}$$

Abychom mohli dosadit do vzorce, potřebujeme ještě znát rozpadovou konstanu λ. Známe poločas rozpadu T.

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

4. Úlohy z radiometrie

Rozpadovou konstantu λ si tedy můžeme vyjádřit jako:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

Pak dosadíme do vztahu (čas můžeme dosadit v jednotkách „rok“ za předpokladu, že budeme i v dalším postupu pracovat důsledně s touto jednotkou času):

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0{,}693}{7 \times 10^{8}} = 9{,}9 \times 10^{-10}$$

4. Úlohy z radiometrie

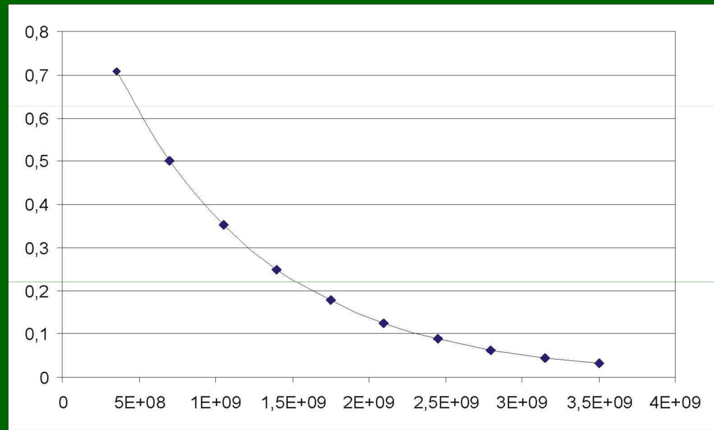
Nyní již můžeme dosadit do vzorce:

$$t = \frac{\ln(0{,}25)}{-\lambda} = \frac{-1{,}386}{-9{,}9 \times 10^{-10}} = 1{,}4 \times 10^{9}\,\text{let}$$

4. Úlohy z radiometrie

Obrácené úlohy vycházející z úvodního problému:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t} \qquad T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$



Úloha 4.2: Určete jaké procento atomů uranu $^{235}_{92}U$ se rozpadne za 5.10^8 let, jestliže víme, že jeho poločas rozpadu je $T=7.10^8$ let.

4. Úlohy z radiometrie

Úloha 4.2: Určete jaké procento atomů uranu $^{235}_{92}U$ se rozpadne za 5.10^8 let, jestliže víme, že jeho poločas rozpadu je $T=7.10^8$ let.

Opět výjdeme ze základního vztahu. Nyní se ptáme přímo na poměr N_t/N_0.

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

Abychom ale mohli dosadit do vzorce, potřebujeme ještě znát rozpadovou konstanu λ. Známe poločas rozpadu T.

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

4. Úlohy z radiometrie

Rozpadovou konstantu λ si tedy můžeme vyjádřit jako:

$$\mathrm{T} = \frac{\ln 2}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{\mathrm{T}}$$

Pak dosadíme do vztahu (čas můžeme dosadit v jednotkách „rok“ za předpokladu, že budeme i v dalším postupu pracovat důsledně s touto jednotkou času):

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\mathrm{T}} = \frac{0{,}693}{7 \times 10^{8}} = 9{,}9 \times 10^{-10}$$

4. Úlohy z radiometrie

Pak již můžeme dosadit do vzorce:

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-9.9\times10^{-10} * 5\times10^{8}} = e^{-0,495} \cong 0,61$$

Chceme-li znát procentuální zastoupení prvků, které se nerozpadly, dosadíme za N_0=100%.

$$\frac{N_t}{N_0} = 0,61 = \frac{N_t}{100\%} \Leftrightarrow N_t = 0,61\times100\% = 61\%$$

4. Úlohy z radiometrie

Úloha se ale neptala no množství nerozpadlých atomů, ale na množství atomů rozpadlých, což je doplněk do 100%.

$$\frac{N_t}{N_0} = 0{,}61 = \frac{N_t}{100\%} \Leftrightarrow N_t = 0{,}61 \times 100\% = 61\%$$

$$\text{zbylo} = 61\%$$

$$\text{celkem} = 100\%$$

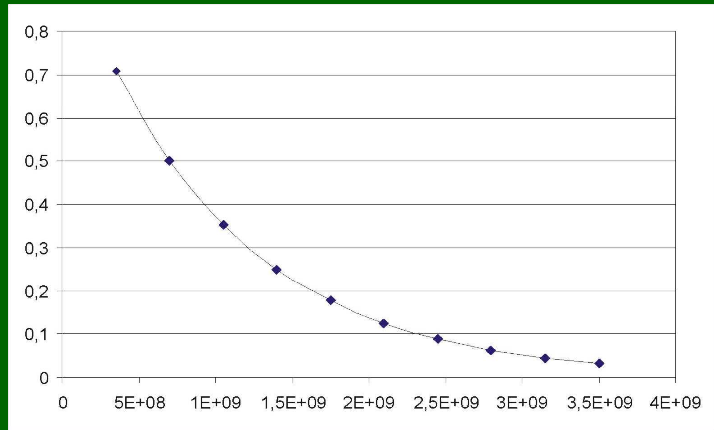
$$\text{rozpadlo} \quad \text{se} = (\text{celkem}) - (\text{zbylo}) = 100\% - 61\% = 39\%$$

4. Úlohy z radiometrie

Obrácené úlohy vycházející z úvodního problému:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$



Úloha 4.3: Určete poločas rozpadu radioa $^{235}_{92}U$ ního prvku, jestliže víme, že za čas $t=9{,}25.10^8$ let se rozpadne 60% atomů.

4. Úlohy z radiometrie

Úloha 4.3: Určete poločas rozpadu radioaktivního prvku, jestliže víme, že za čas t=9,25.10^8 let se rozpadne 60% atomů.

Víme, že za danou se rozpadne 60% atomů uranu – tj. za tuto dobu zůstane v systému zachováno 40% původních atomů uranu.

$$\text{rozpadlo}\quad \text{se} = 60\%$$

$$\text{celkem} = 100\%$$

$$\text{zbylo} = (\text{celkem}) - (\text{rozpadlo}\quad \text{se}) = 100\% - 60\% = 40\%$$

4. Úlohy z radiometrie

Poměr N_t/N_0 vyjadřuje poměrné zastoupení atomů, které zbyly:

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t} = \frac{40\%}{100\%} = 0{,}4 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0{,}4$$

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\text{rozpadlo se} = 60\%$$

$$\text{celkem} = 100\%$$

$$\text{zbylo} = (\text{celkem}) - (\text{rozpadlo se}) = 100\% - 60\% = 40\%$$

4. Úlohy z radiometrie

Nyní si vyjádříme rozpadovou konstantu λ:

$$e^{-\lambda t} = 0{,}4 \Leftrightarrow \ln\left(e^{-\lambda t}\right) = -\lambda . t = \ln\left(0{,}4\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0{,}4)}{-t}$$

A protože čas známe, můžeme jej dosadit do vzorce:

$$\lambda = \frac{\ln(0{,}4)}{9.25 \times 10^{8}} = 9.9 \times 10^{-10}$$

4. Úlohy z radiometrie

Úloha se ale ptá na poločas rozpadu T:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Rozpadovou konstantu ovšem již známe a můžeme tedy dosadit do vzorce:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{9{,}9 \times 10^{-10}} = 7 \times 10^{8}\,\mathrm{let}$$

4. Úlohy z radiometrie

Řešení úloh:

verze	4.1	4.2	4.3	verze	4.1	4.2	4.3
1	7,6 dne	66,5%	3,8 dne	7	12,6 dne	42,1%	3,8 dne
2	3244 let	57,5%	1622 let	8	5388 let	34,8%	1622 let
3	$9{,}0.10^9$ let	60,3%	$4{,}5*10^9$ let	9	$1{,}49.10^{10}$ let	46,0%	$4{,}5*10^9$ let
4	5,02 dne	51,8%	3,8 dne	10	4,38 dne	72,1%	3,8 dne
5	2144 let	47,3%	1622 let	11	1868,5 let	72,3%	1622 let
6	$5{,}95.10^9$ let	53,7%	$4{,}5*10^9$ let	12	$5{,}18.10^9$ let	78,6%	$4{,}5*10^9$ let