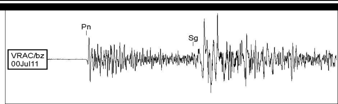
Při výkladu základů seismologie se nelze zcela vyhnout některým matematickým odvozením, a to i komplikovanějším částem. Některé z nich vyžadují práci se složitějšími matematickými nástroji, jejichž úplné objasnění jde výrazně nad rámec záměru kurzu „Zpracování seismických dat“.

Proto tyto části chápejte jako nepovinný doplněk, jehož cílem je doplnit výklad tak, aby ti, kteří chtějí, mohli danou problematiku sledovat v celé její šíři.

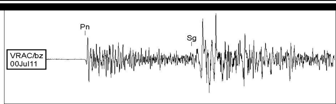
Zpracování seismických dat

II. Seismický signál jako vlnová funkce

Josef Havíř
Josef.Havir@ipe.muni.cz



Fourierova řada

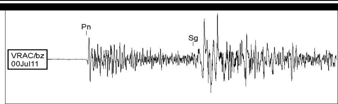


Každou jakkoli složitou a nepravidelnou vlnovou funkci lze popsat jako součet mnoha křivek funkcí sinus a cosinus (**Fourierova řada**)

$$u(t) = a_0 + \left(a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t\right) + \left(a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t\right) + \\ \ldots + \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right) + \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right)$$

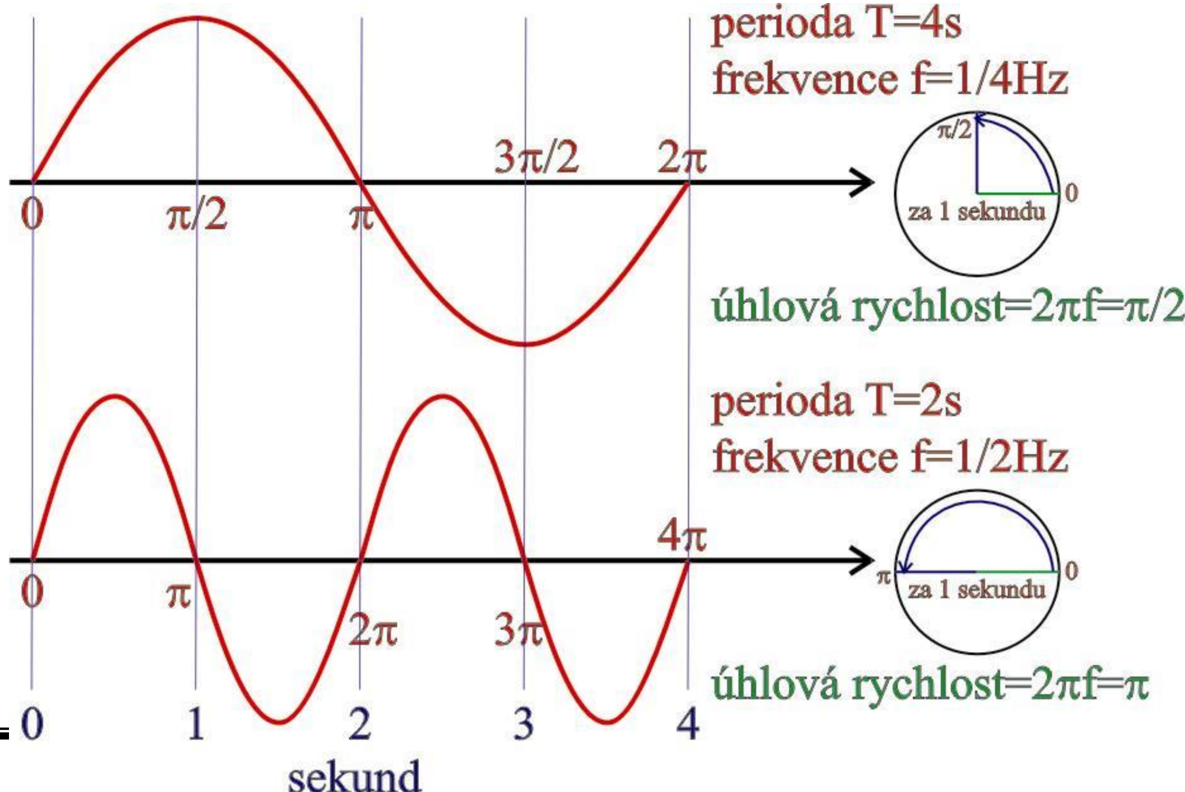


Úhlová rychlost

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)$$

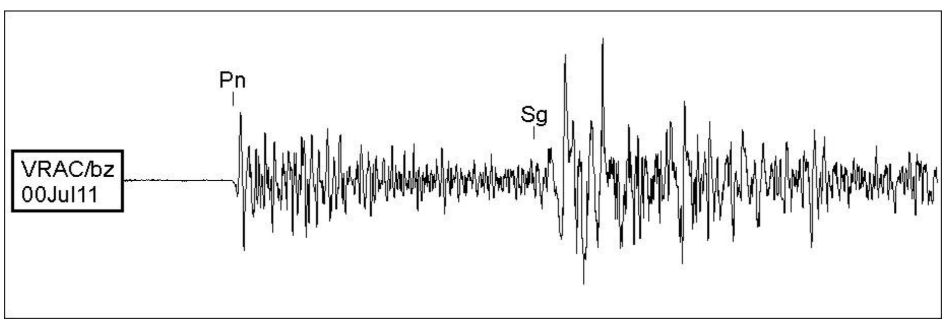
- v matematickém vyjádření Fourierovy řady vystupuje veličina ω ... úhlová rychlost

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$



Funkci popisující vlnění v závislosti na čase si tedy můžeme představit jako součet mnoha křivek funkcí sinus a cosinus, tyto jednotlivé křivky se vzájemně liší amplitudou a frekvencí. Koeficienty b_n a a_n popisují právě amplitudy příslušející funkci sinus a kosinus o určité frekvenci.

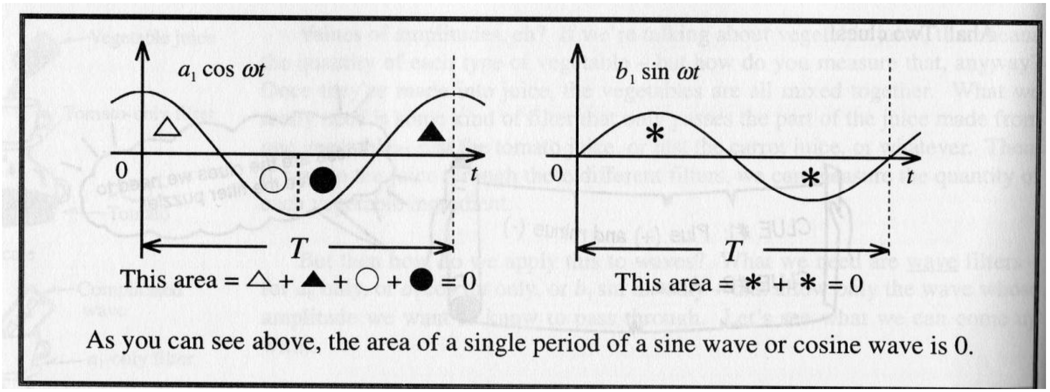
$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)$$

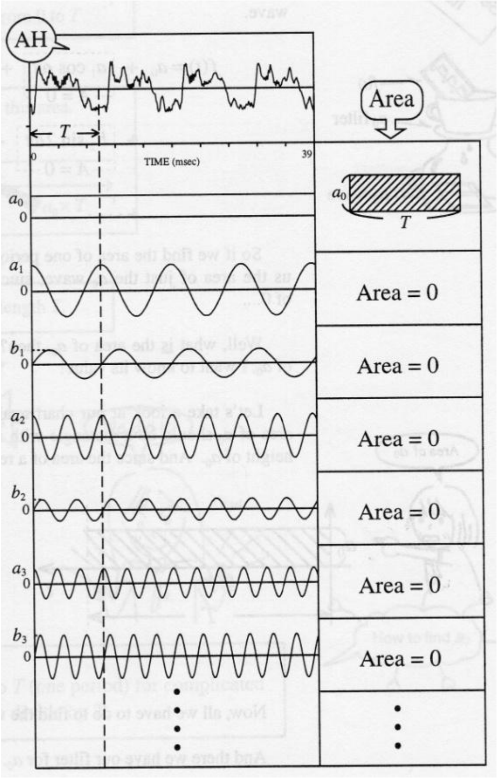


Fourierovy koeficienty

- konstanty a_0, a_n a b_n si můžeme obecně vyjádřit

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)$$

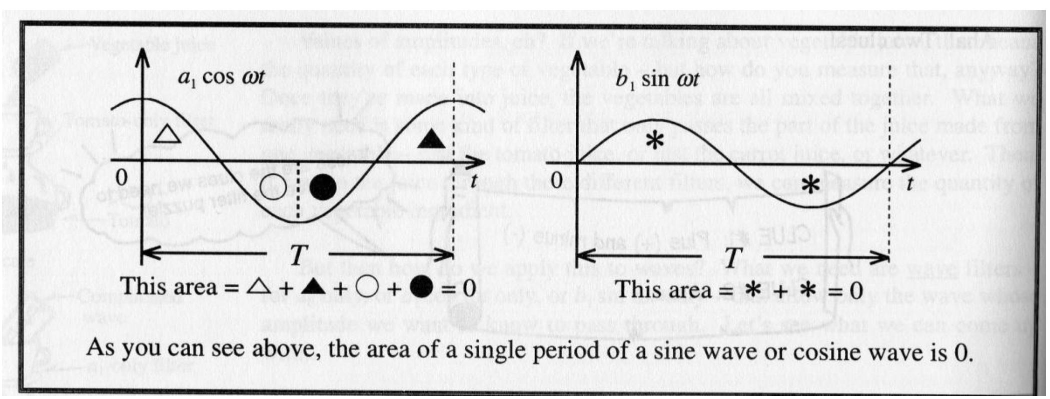


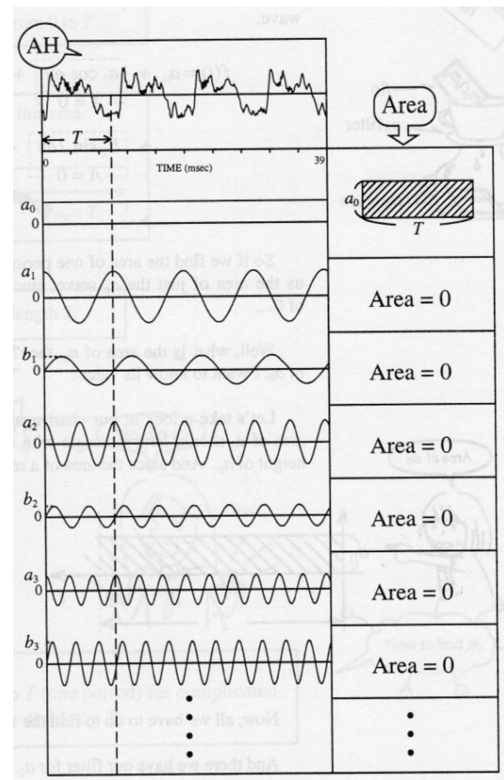


Rozložme vlnovou funkci pro periodu T (předpokládejme periodickou funkci) do součtu sinusovek a konstanty a_0.

Vidíme, že plocha A vymezená jednotlivými sinusovkami, je nulová. Plocha vymezená křivkou a_0 je rovna součinu a_0.T. Tj. také velikost plochy vymezené vlnovou funkcí u(t) odpovídá součinu a_0.T.

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)$$

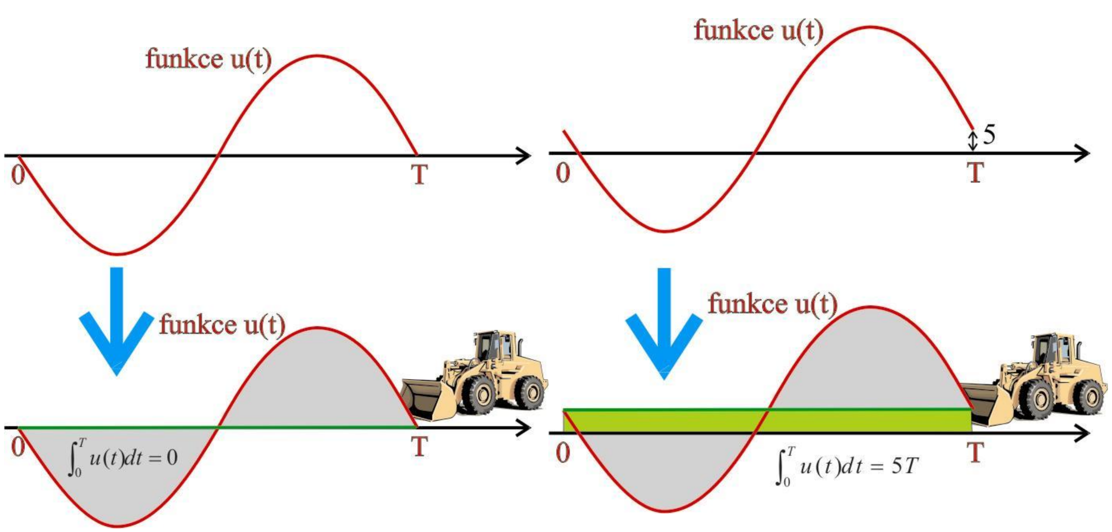


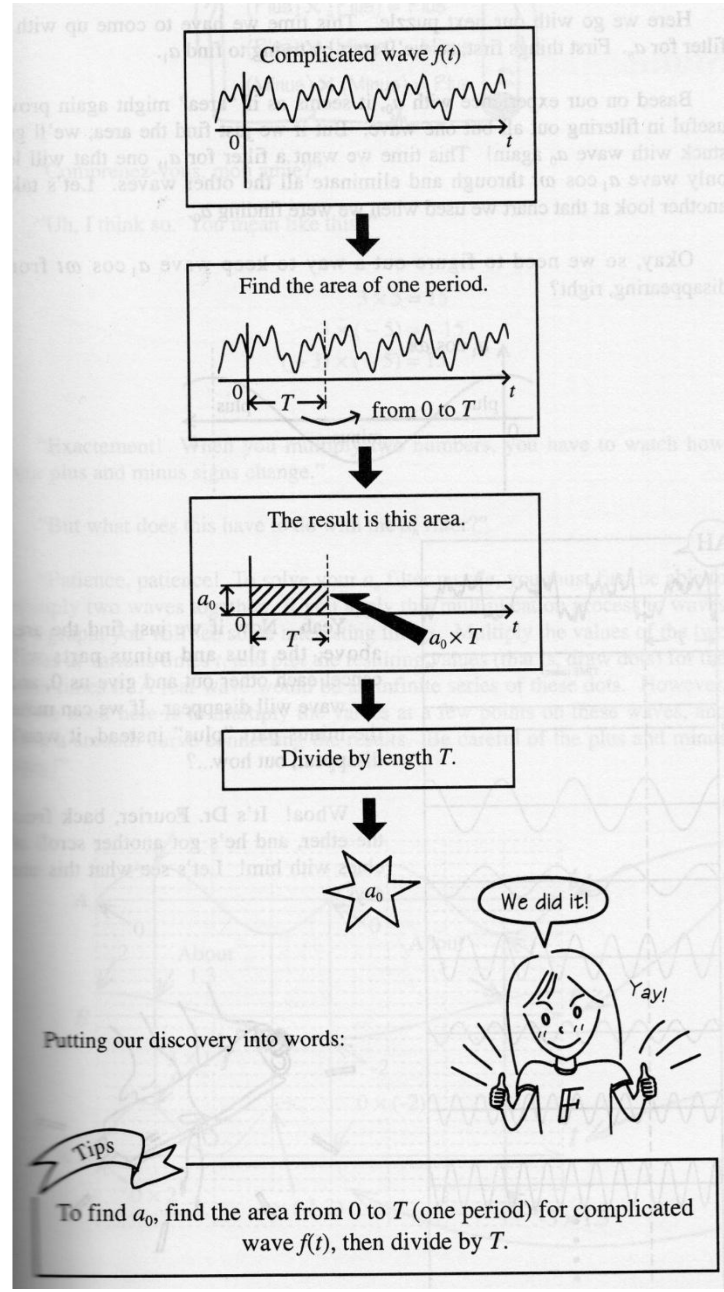


Velikost plochy vymezené vlnovou funkcí u(t) odpovídá součinu a_0.T.

$$\int_0^T u(t)dt = a_0.T$$

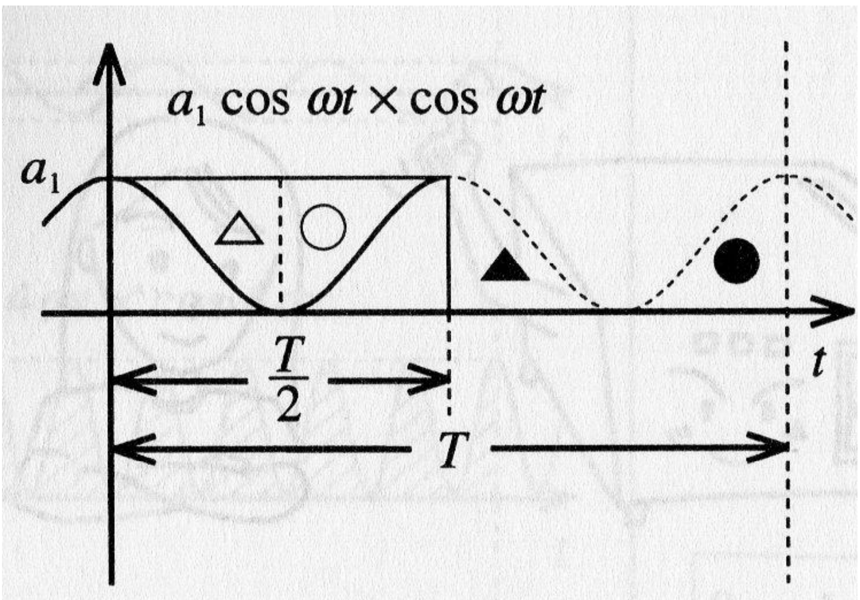
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

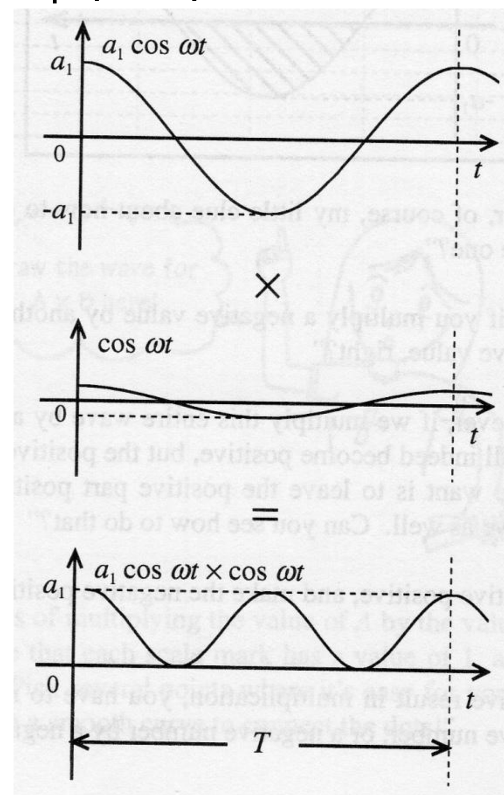




Dále vynásobme vlnovou funkci u(t) výrazem cos(ωt) a podívejme se, jakou plochu nyní budou vymezovat jednotlivé křivky Fourierovy řady.

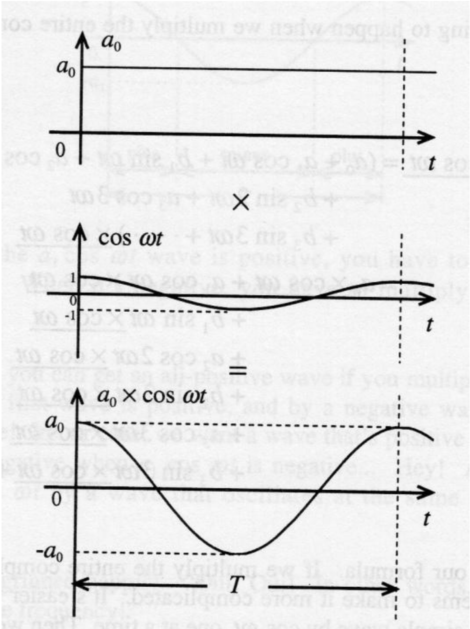
Křivka $a_1\cos\omega t.\cos\omega t$ vymezuje plochu $a_1.(T/2)$

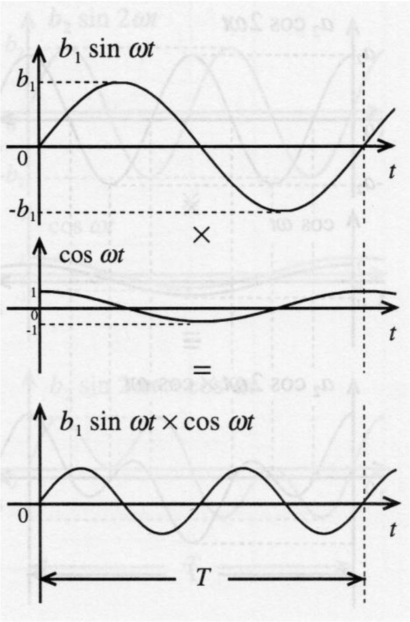


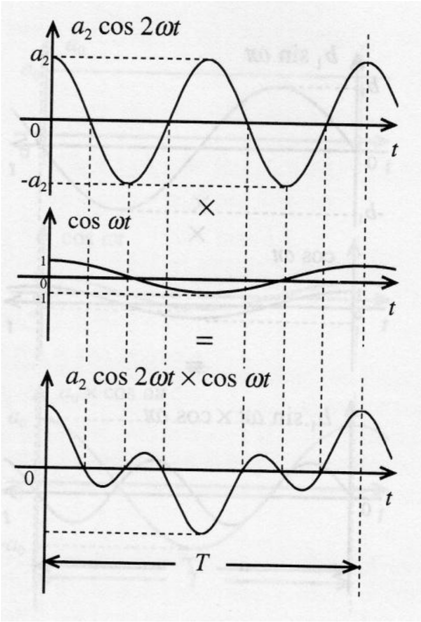


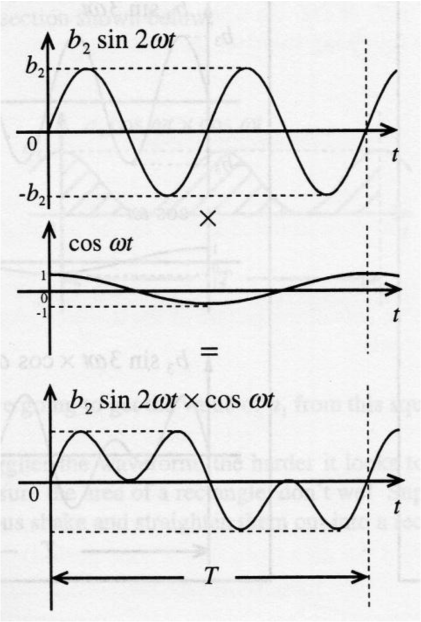
$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)$$

Plochy vymezené všemi ostatními křivkami jednotlivých členů Fourierovy řady jsou nulové









Velikost plochy vymezené vlnovou funkcí u(t).cosωt odpovídá součinu a_1.(T/2).

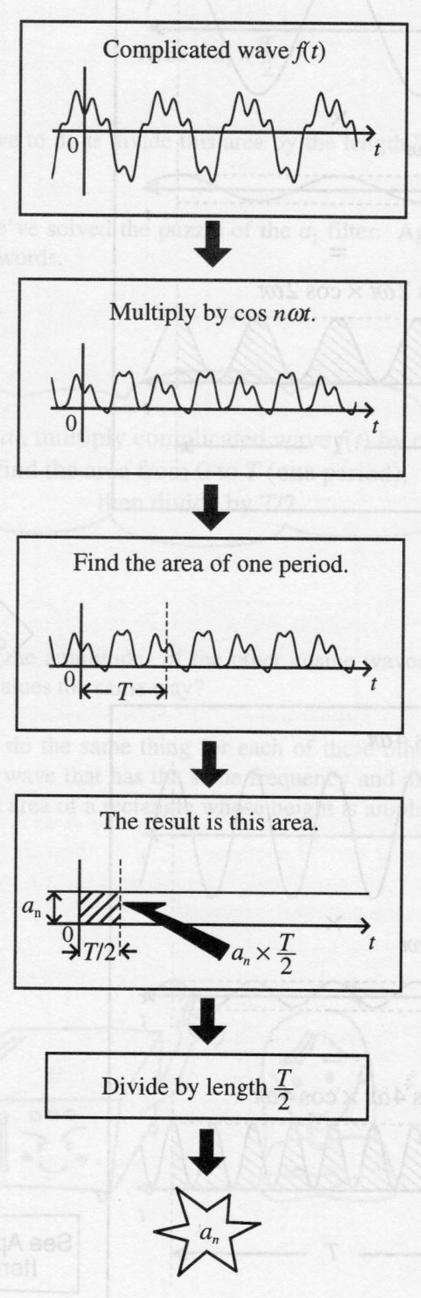
$$\int_0^T u(t)\cos(\omega t)dt = a_1.\frac{T}{2}$$

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(\omega t)dt$$

Analogicky lze ukázat, že platí:

$$\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)dt = a_n.\frac{T}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)dt$$



Stejně bychom mohli odvodit, že velikost plochy vymezené vlnovou funkcí u(t).sinωt odpovídá součinu b_1.(T/2).

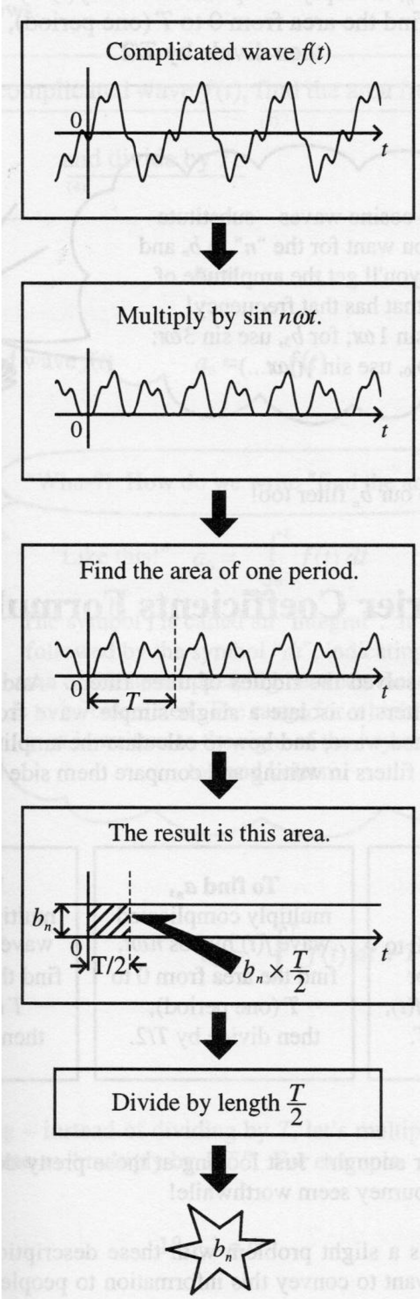
$$\int_0^T u(t)\sin(\omega t)dt = b_1.\frac{T}{2}$$

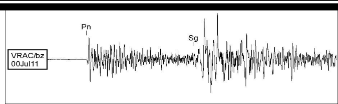
$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(\omega t)dt$$

Analogicky lze ukázat, že platí:

$$\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)dt = b_n.\frac{T}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)dt$$





Pro Fourierovy koeficienty tedy platí:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)dt$$

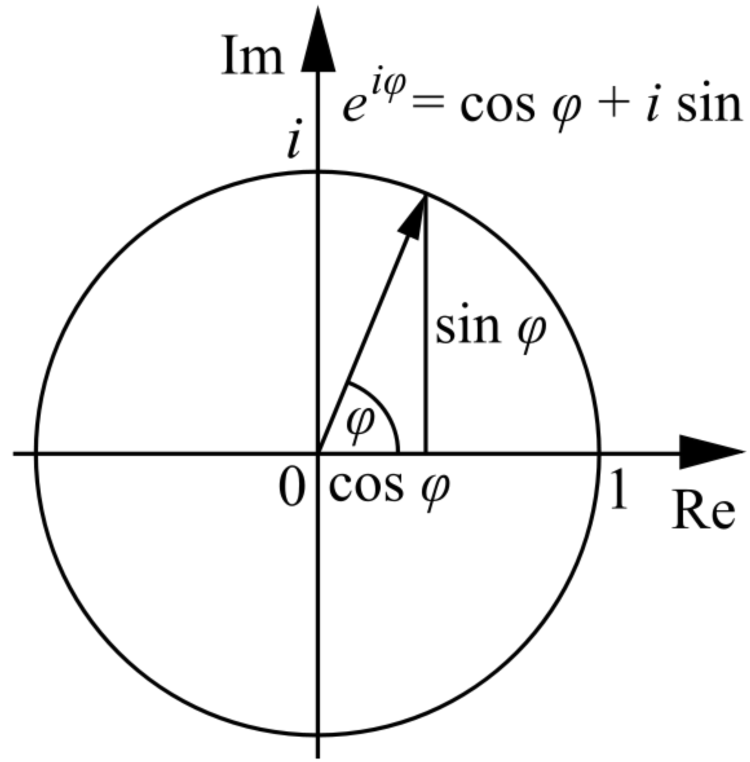
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)dt$$

Fourierova expanze - komplexní tvar

- převod Fourierovy řady na komplexní tvar využívá Eulerova vzorce, který popisuje vztah mezi goniometrickými funkcemi a exponenciální funkcí

Leonhard Paul Euler

(1707-1783)



vyjdeme z eulerova vzorce: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i.\sin\varphi$

provedeme substituci: $\varphi = n\omega t$

získáme vztahy:

$$e^{in\omega t} = \cos n\omega t + i.\sin n\omega t$$

$$e^{-in\omega t} = \cos n\omega t - i.\sin n\omega t$$

vhodným součtem těchto vztahů si vyjádříme goniometrické funkce:

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}\right)$$

$$\sin n\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}\right)$$

Do rovnice Fourierovy řady můžeme dosadit komplexní členy:

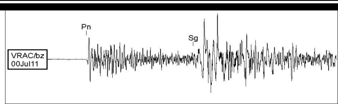
$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)$$

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} \right)$$

$$\sin n\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2}\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} \right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} \right) \right]$$



Rovnici můžeme upravit a zjednodušit:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}\right)\right]$$

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right)e^{in\omega t} + \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right)e^{-in\omega t}\right]$$

$$A_n = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-in\omega t}dt$$

$$B_n = \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{in\omega t}dt$$

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n e^{in\omega t} + B_n e^{-in\omega t}\right]$$

Vyjdeme-li ze vztahu:

$$A_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-in\omega t}dt$$

Lze ukázat, že rozšíříme-li n na všechna celá čísla (tj.i na hodnotu 0 a na záporná čísla,pak platí:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-i0\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = a_0$$

$$A_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-i(-n)\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{in\omega t}dt = B_n$$

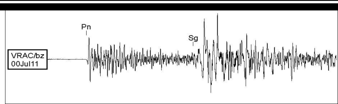
V komplexním tvaru si tedy můžeme všechny koeficienty (a_0, A_n, B_n) vyjádřit jediným koeficientem, rozšíříme-li n na všechna celá čísla, a Fourierovu řadu můžeme zjednodušit na tvar:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}$$

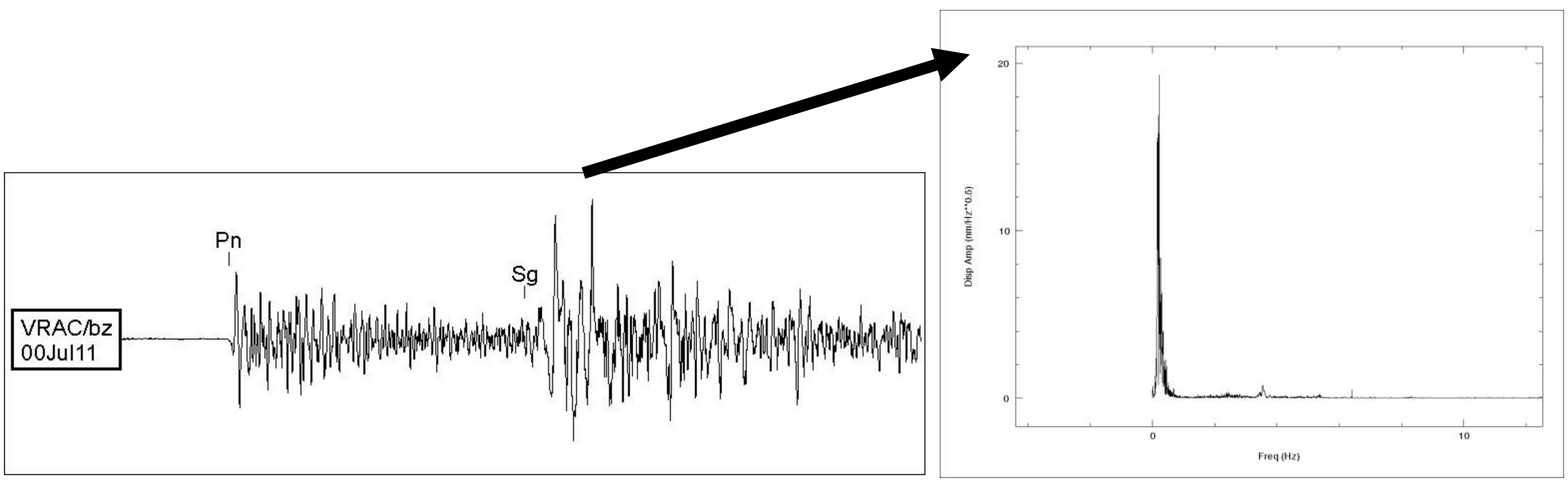
Kde:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-in\omega t} dt$$

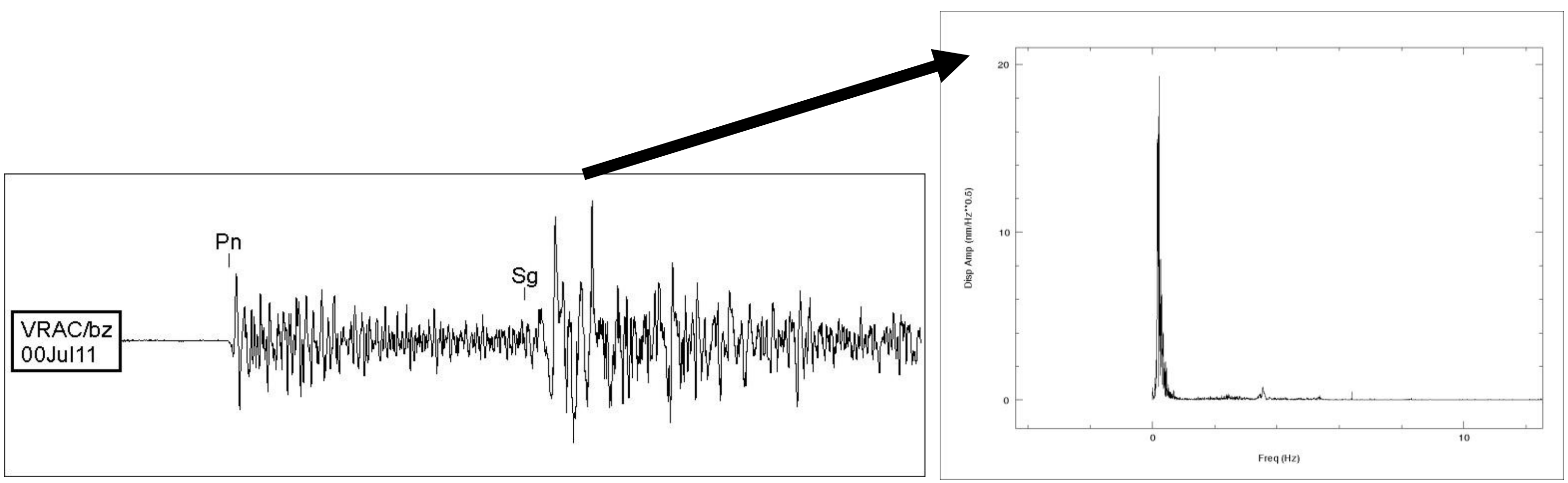
Fourierova transformace



Vezmeme-li v úvahu určitý časový úsek, můžeme v tomto časovém úseku určit amplitudy příslušející jednotlivým frekvencím (koeficienty bn a an) a můžeme tak číselně vyjádřit, v jaké míře se jednotlivé konkrétní frekvence podílejí na popisu celkového signálu. Můžeme tedy sestrojit funkci, která popisuje amplitudu signálu <u>v závislosti</u> nikoli na čase, ale <u>na frekvenci,</u> tj. **frekvenční spektrum**.



Matematická operace, která popisuje převod časové funkce signálu (seismogram) na funkci závislou na frekvenci (Fourierovo spektrum), se nazývá **Fourierova transformace**.



Nejsnáze si matematicky představíme princip Fourierovy transformace, když vyjdeme z komplexního tvaru Fourierovy řady:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}$$

A z vyjádření koeficientu C_n:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-in\omega t}dt$$

Dosaďme do vztahu Fourierovy řady komplexní výraz pro koeficient C_n:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-in\omega t} dt$$

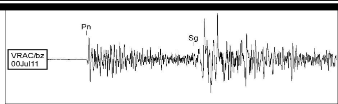
$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-in\omega t} dt \right] e^{in\omega t}$$

Položíme-li, že T jde k nekonečnu, můžeme vztah přepsat:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-in\omega t} dt \right] e^{in\omega t}$$

$$u(t) = \lim_{T \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\Delta f \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-in2\pi f_n t} dt \right] e^{in2\pi f_n t}$$

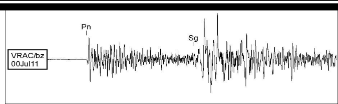
$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi f t} dt \right] e^{i2\pi f t} df$$



Výraz v hranaté závorce je pouze funkcí frekvence, protože integrujeme-li pro čas t od -∞ do ∞, je čas fixován. Můžeme jej nazvat U(f):

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi ft} dt \right] e^{i2\pi ft} df$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) e^{i2\pi ft} df$$



Výsledný vztah je vztahem Fourierovy transformace

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) e^{i2\pi ft} df$$

Funkce U(f) závislá na frekvenci se nazývá **spektrum**.

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

-Spektrum je komplexní veličina.

velikost $|U(f)|$ udává tzv. **amplitudové spektrum**

úhel $\arg(U(f))$ representuje tzv. **fázové spektrum**

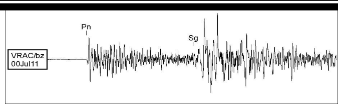
Zpracování seismických dat

IV. Dráha seismického paprsku

Josef Havíř

Josef.Havir@ipe.muni.cz

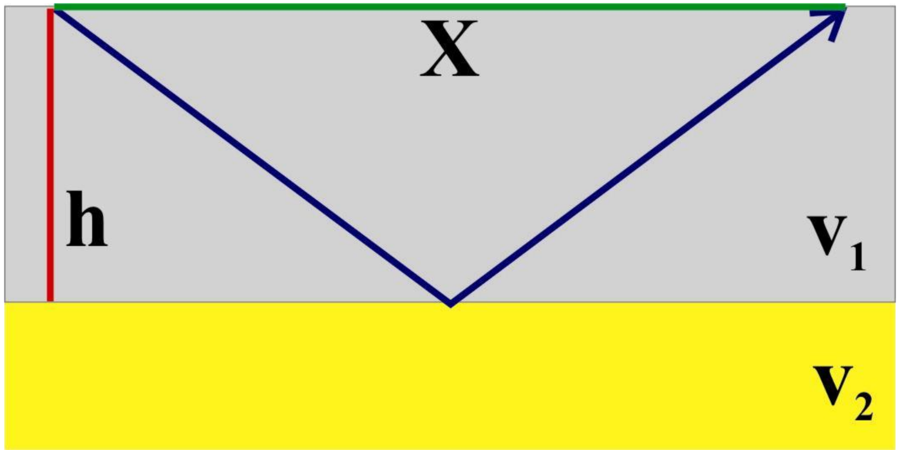
Rovnice odražené vlny



V případě vodorovného rozhraní je délka dráhy do místa odrazu stejná, jako délka dráhy z místa odrazu. Z pravoúhlého trojúhelníka snadno odvodíme:

$$\cos(\alpha) = \frac{h}{\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{2h}{d}$$

kde d je dráha paprsku odražené vlny a α je úhel dopadu

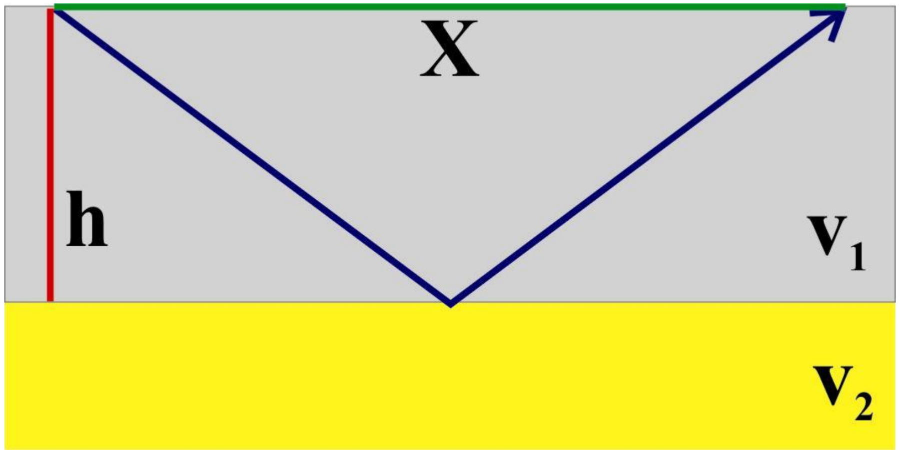


Z obecného vztahu:

$$t = \frac{d}{v_1} \qquad d = \frac{2h}{\cos(\alpha)}$$

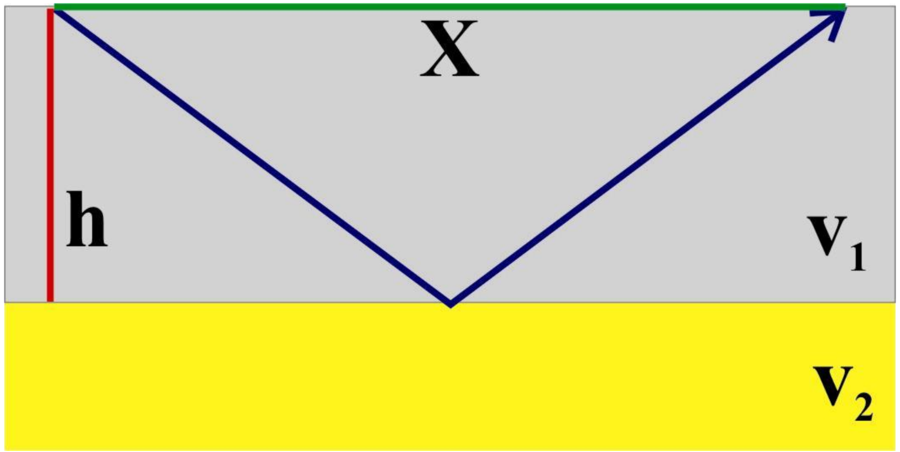
Získáme:

$$t = \frac{2h}{\cos(\alpha)} \frac{1}{v_1}$$

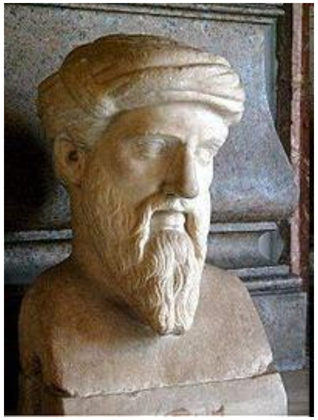


Úhel dopadu α ale závisí na epicentrální vzdálenosti. Z pravoúhlého trojúhelníka můžeme rovněž odvodit.

$$\sin(\alpha) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{x}{d}$$



Z Pythagorovy věty plyne:



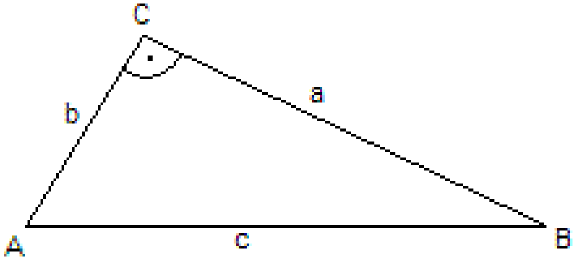
$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow d = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Leftrightarrow$$

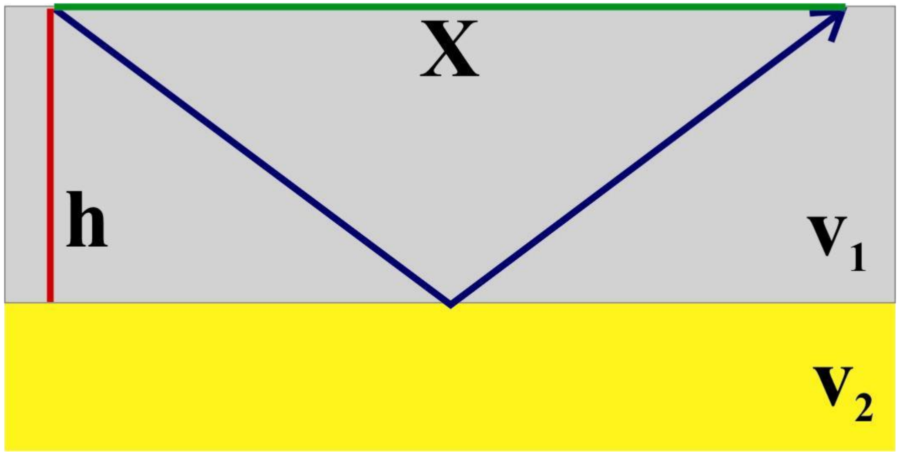
$$d = \sqrt{4h^2 + x^2}$$

Pythagoras ze Samu

(kolem 570 př.n.l.-po 510 př.n.l.)

$$c^2 = a^2 + b^2$$





Tj.

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{d} = \frac{x}{\sqrt{4h^2 + x^2}}$$

Pro goniometrické funkce platí:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$$

Přičemž:

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{4h^2 + x^2}} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4h^2 + x^2}} \Leftrightarrow$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{4h^2 + x^2 - x^2}{4h^2 + x^2}} = \sqrt{\frac{4h^2}{4h^2 + x^2}} = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + x^2}}$$

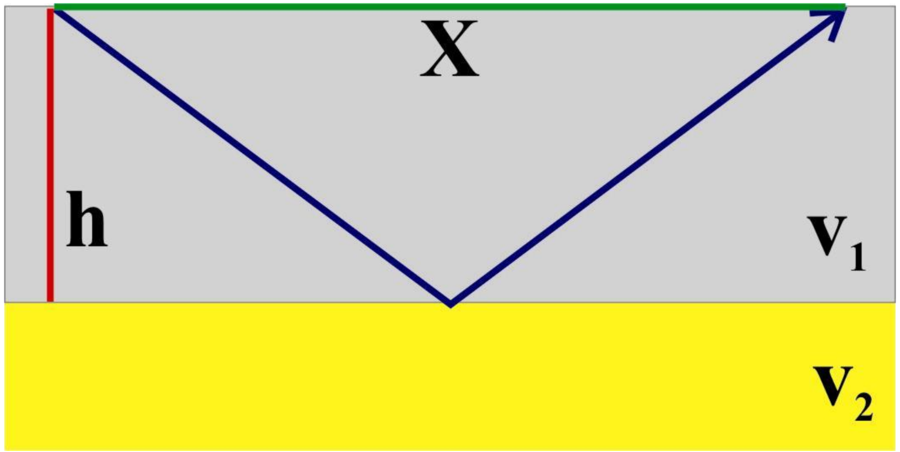
Takže vztah pro odraženou vlnu:

$$t = \frac{2h}{\cos(\alpha)} \frac{1}{v_1}$$

můžeme přepsat jako:

$$t = \frac{2h}{\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + x^2}}} \frac{1}{v_1} = \frac{\sqrt{4h^2 + x^2}}{v_1}$$

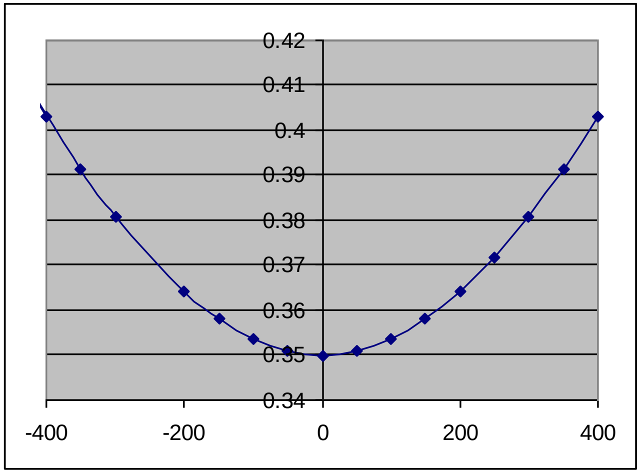
$$\cos(\alpha) = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + x^2}}$$

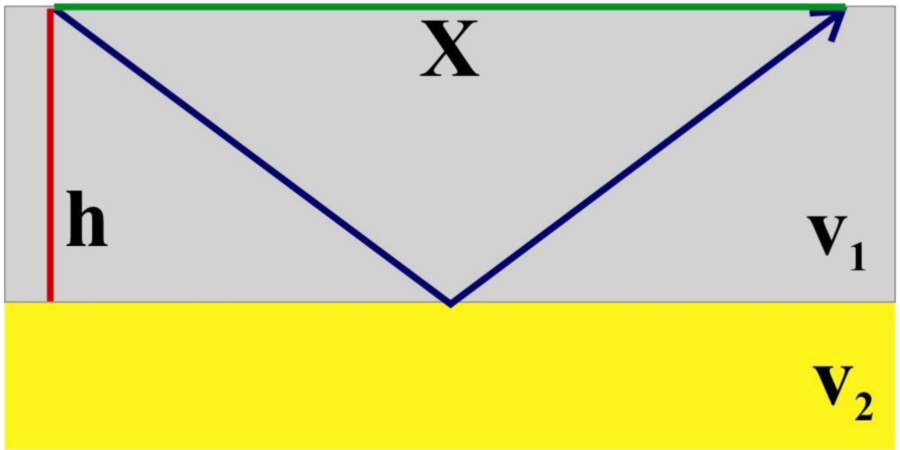


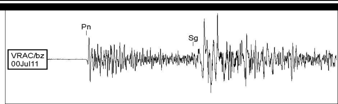
Vztah pro odraženou vlnu není rovnicí přímky!

$$t = \frac{\sqrt{4h^2 + x^2}}{v_1}$$

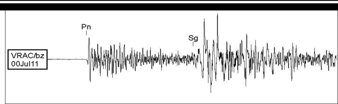
Hodochrona odražené vlny má tvar hyperboly s minimální hodnotou času ve staničení x=0.





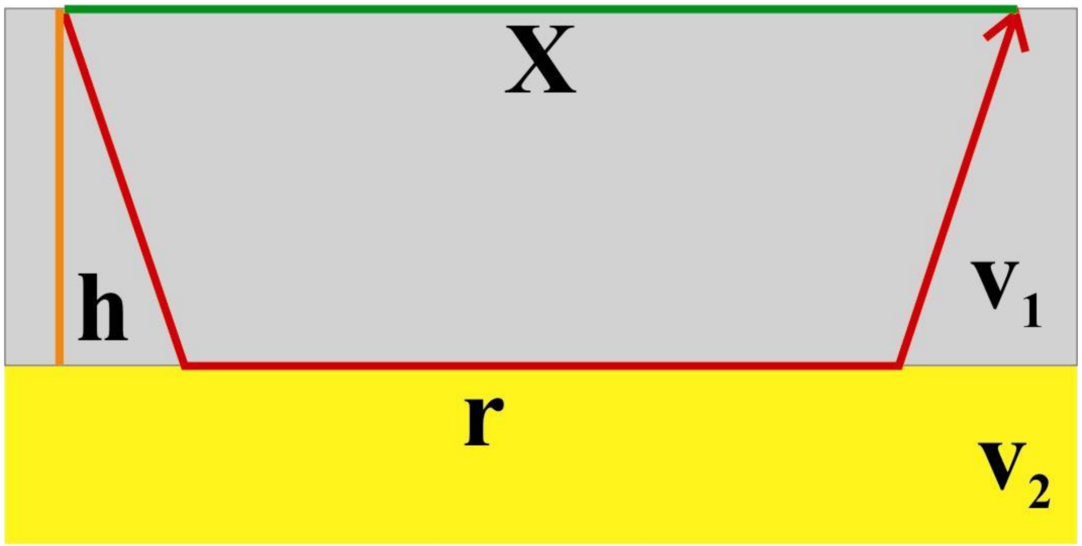


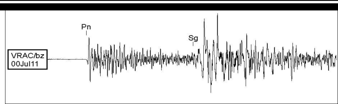
Rovnice lomené vlny (dvouvrstevný model)



lomená vlna

$$t = \frac{r}{v_2} + \frac{2h}{\cos(i)}\frac{1}{v_1}$$

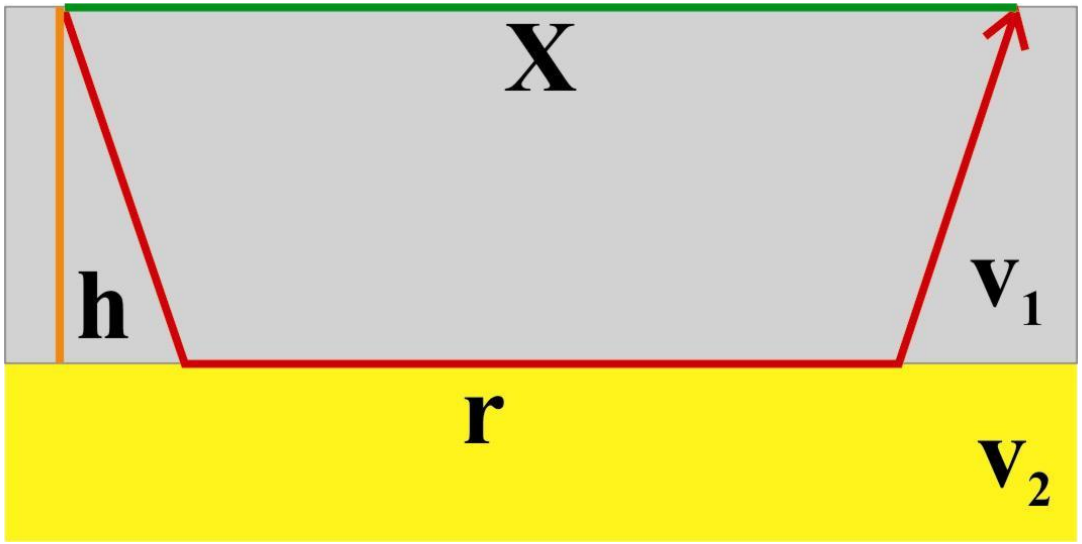




Tj.

$$t = \frac{1}{v_2}\left(X - 2.h.tg(i)\right) + \frac{2h}{\cos(i)}\frac{1}{v_1} =$$

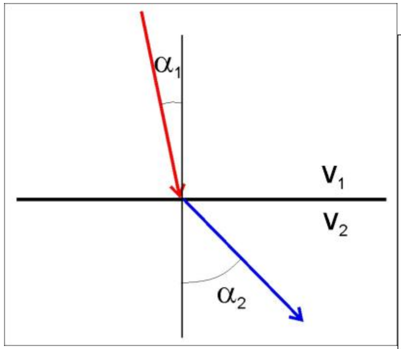
$$= \frac{1}{v_2}\left(X - \frac{2h\sin(i)}{\cos(i)}\right) + \frac{2h}{\cos(i)}\frac{1}{v_1}$$

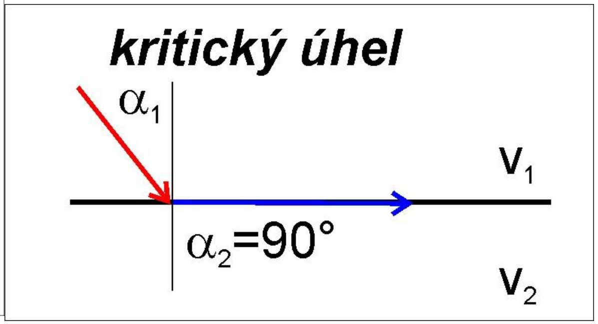


Ze Snellova pravidla plyne.

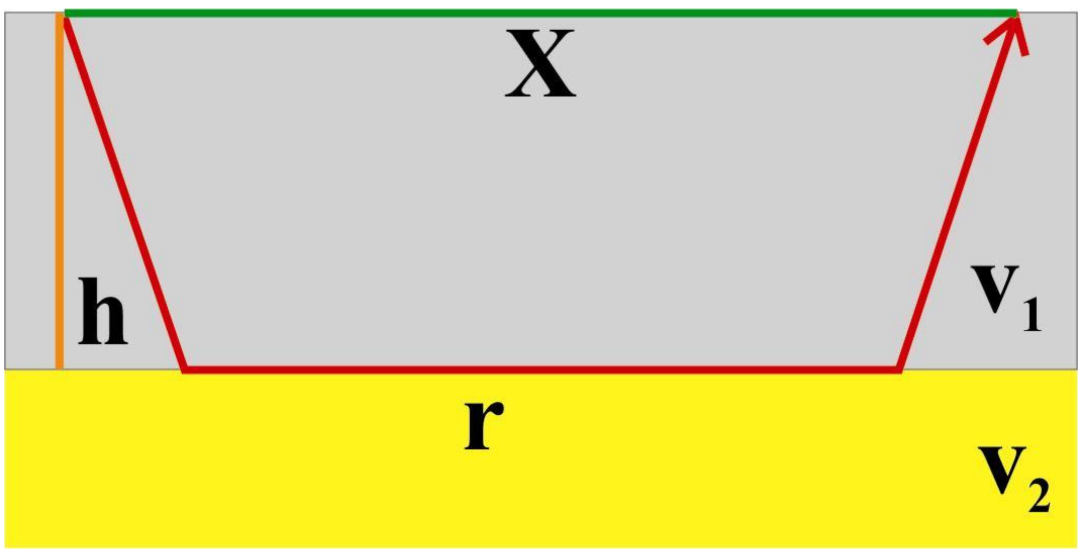
$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$$

$$\sin(i) = \frac{v_1}{v_2}$$





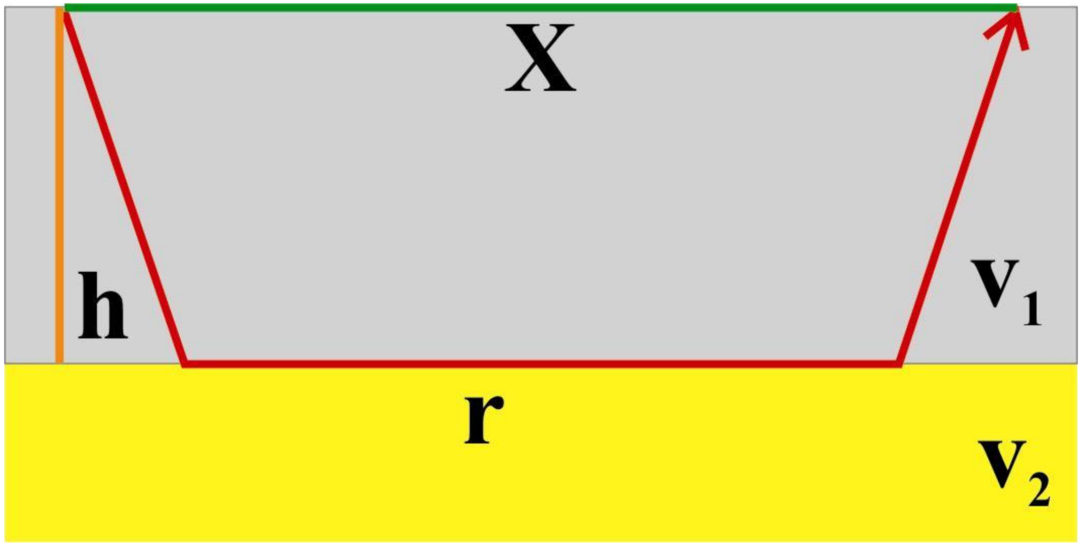
Willebrord van Roijen Snell
(1580-1626)



Dosaďme:

$$t=\frac{1}{v_2}\left(X-\frac{2h\sin(i)}{\cos(i)}\right)+\frac{2h}{\cos(i)}\frac{1}{v_1}=$$

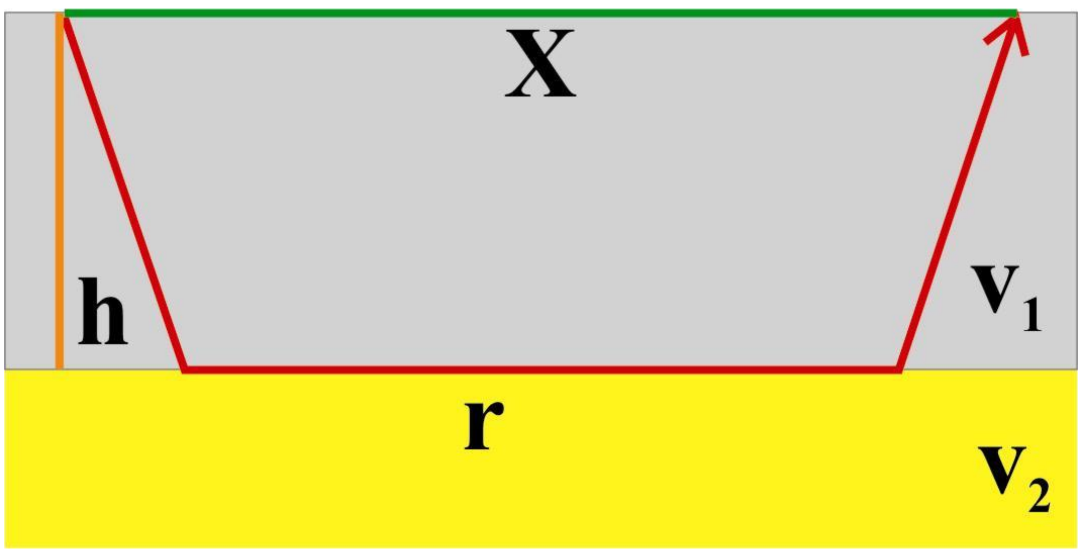
$$\frac{1}{v_2}\left(X-\frac{2h.v_1}{v_2.\cos(i)}\right)+\frac{2h}{\cos(i)}\frac{1}{v_1}$$



A upravme:

$$t = \frac{1}{v_2}\left(X - \frac{2h.v_1}{v_2.\cos(i)}\right) + \frac{2h}{\cos(i)}\frac{1}{v_1} =$$

$$= \frac{2h}{\cos(i)}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{v_1}{v_2^2}\right) + \frac{X}{v_2}$$

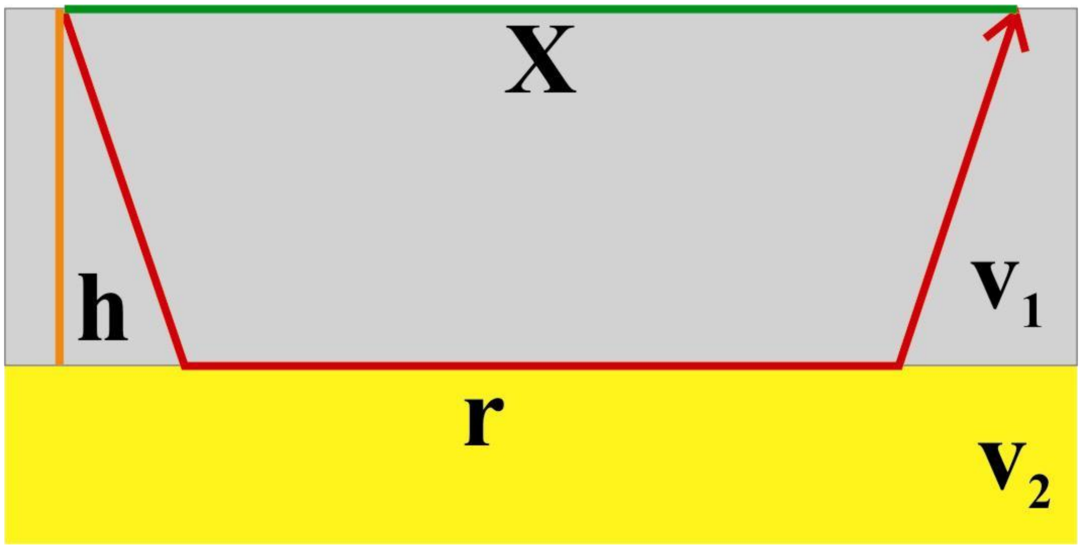


Zavedeme parametr p (paprskový parametr).

$$p = \frac{1}{v_2}$$

$$t = \frac{2h}{\cos(i)}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{v_1}{v_2^2}\right) + \frac{X}{v_2} =$$

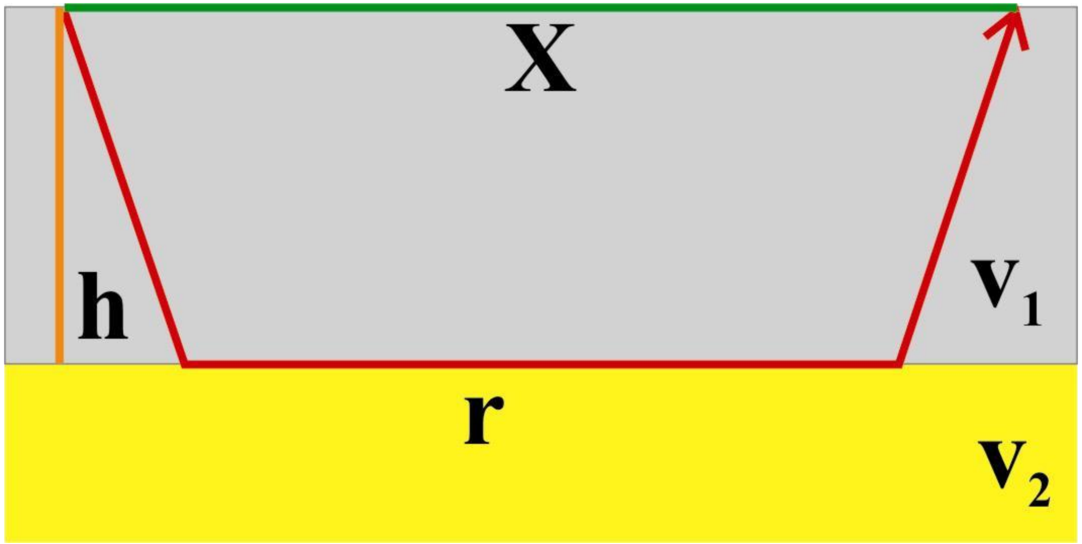
$$= X.p + 2h\frac{1}{\cos(i)}\left(\frac{1}{v_1} - v_1.p^2\right)$$



Víme, že: $\cos(i) = \sqrt{1 - \sin^2(i)}$

Aplikujeme Snellův zákon: $\sin(i) = \dfrac{v_1}{v_2} = v_1.p$

$$\cos(i) = \sqrt{1 - \sin^2(i)} = \sqrt{1 - v_1^2.p^2}$$

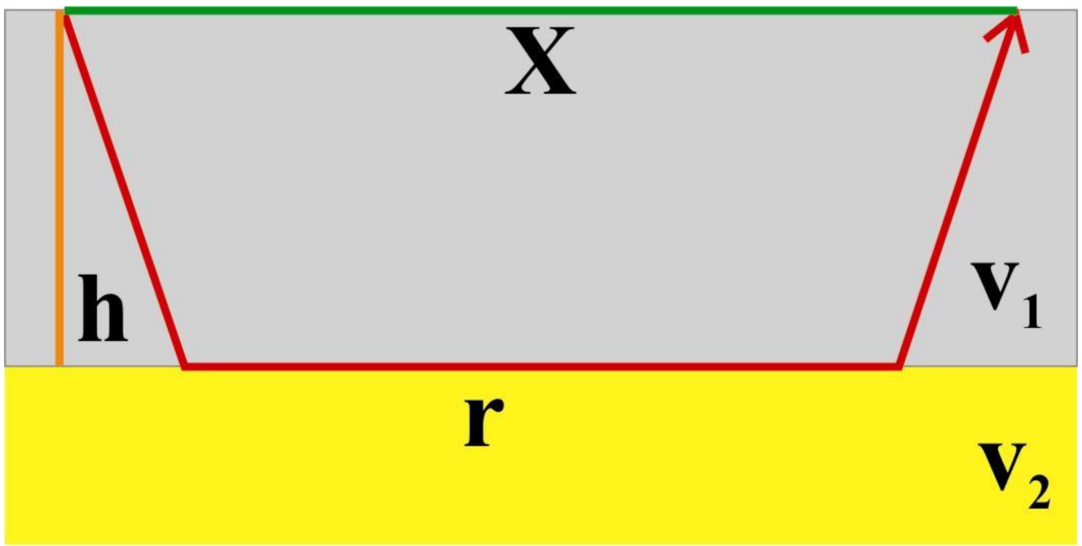


$$\cos(i) = \sqrt{1 - v_1^2 . p^2}$$

Dosaďme:

$$t = X.p + 2h \frac{1}{\cos(i)} \left(\frac{1}{v_1} - v_1 . p^2 \right) =$$

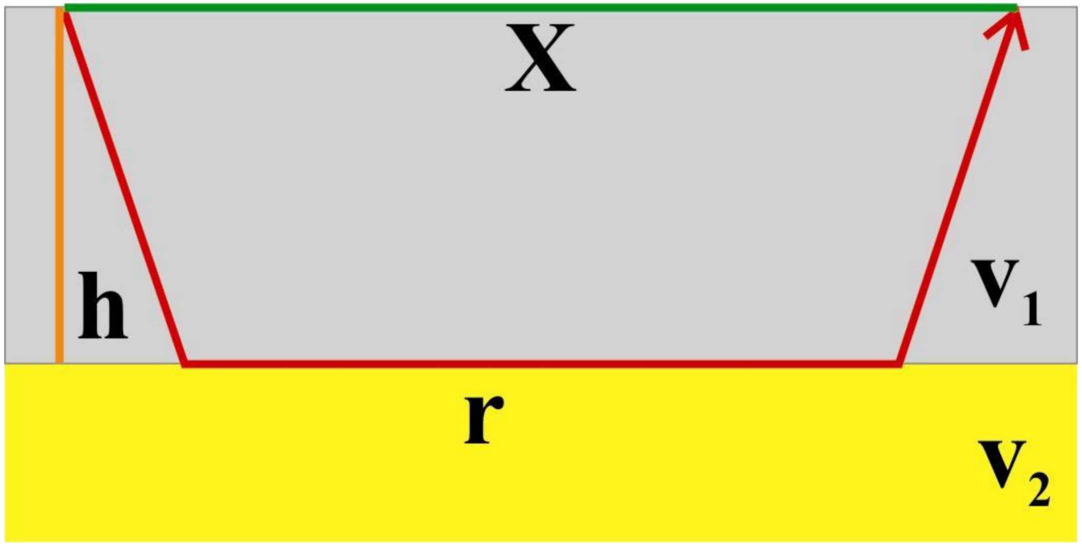
$$= X.p + 2h \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2 . p^2}} . \frac{1 - v_1^2 . p^2}{v_1} = X.p + 2h \frac{\sqrt{1 - v_1^2 . p^2}}{v_1}$$



Zavedeme parametr η_1.

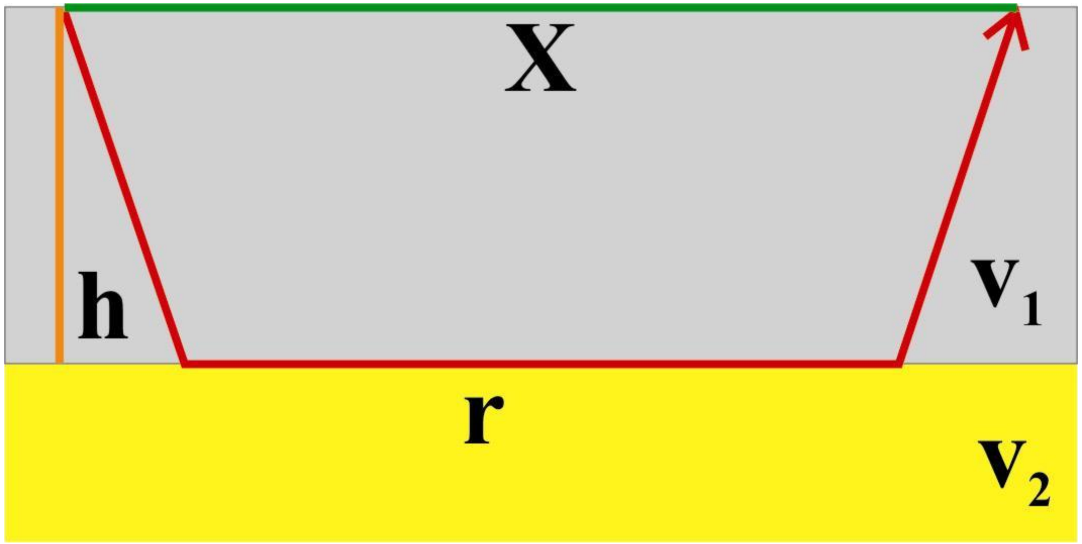
$$\eta_1 = \frac{\sqrt{1 - v_1^2 . p^2}}{v_1}$$

$$t = X.p + 2h \frac{1}{\cos(i)} \left(\frac{1}{v_1} - v_1.p^2 \right) = X.p + 2h.\eta_1$$



Vztah pro lomenou vlnu je rovnicí přímky!

$$t = X.p + 2h.\eta_1$$



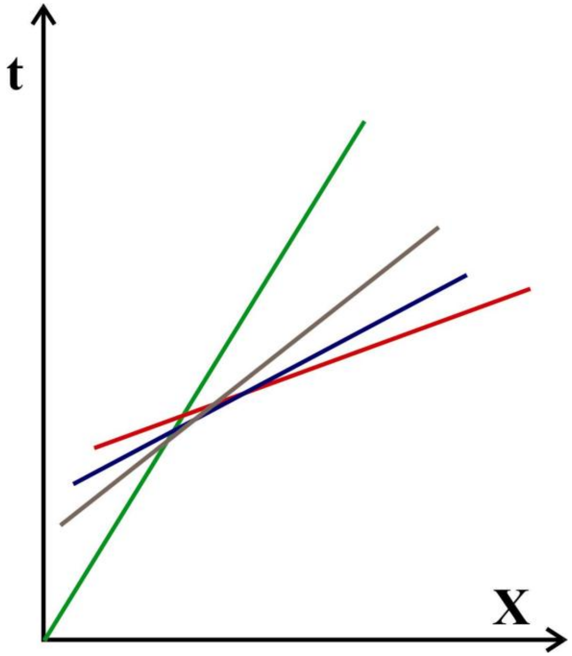
Rovnice lomené vlny (vícevrstevný model)

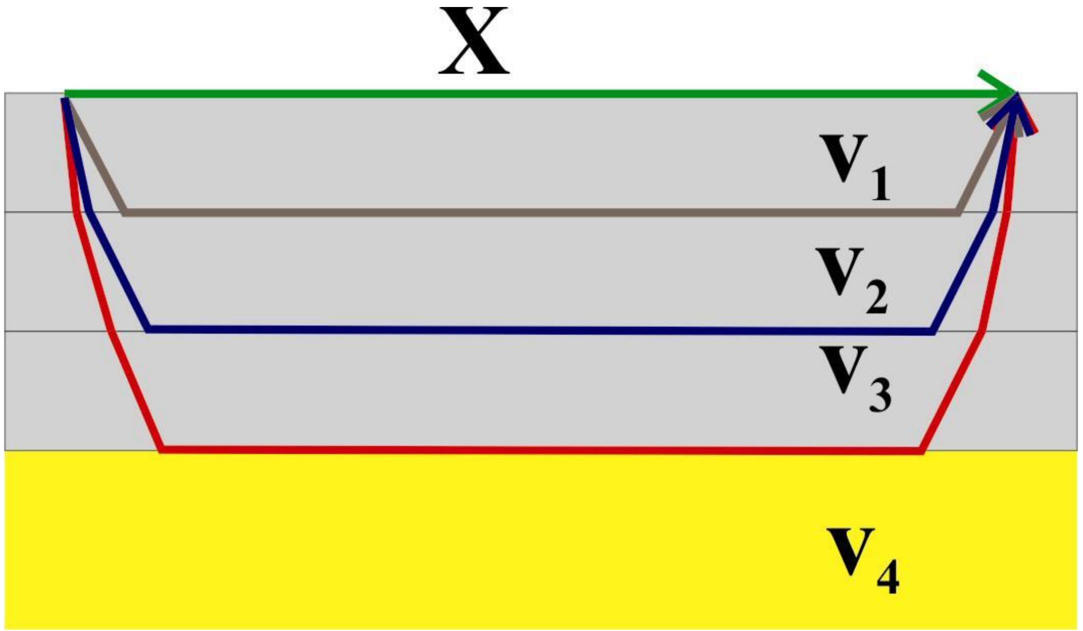
Vztah pro vlnu lomenou podél prvního rozhraní má tvar:

Zavedeme parametr η_1.

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{1 - v_1^2 . p^2}}{v_1}$$

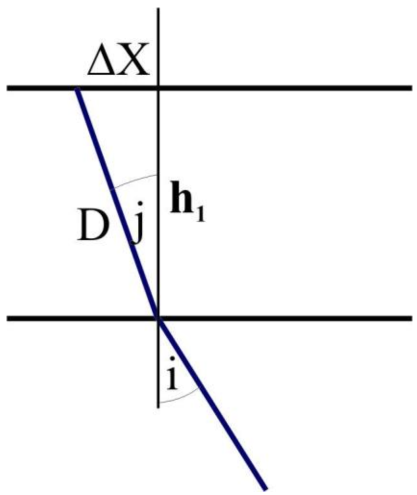
$$t = X.p + 2h.\eta_1$$

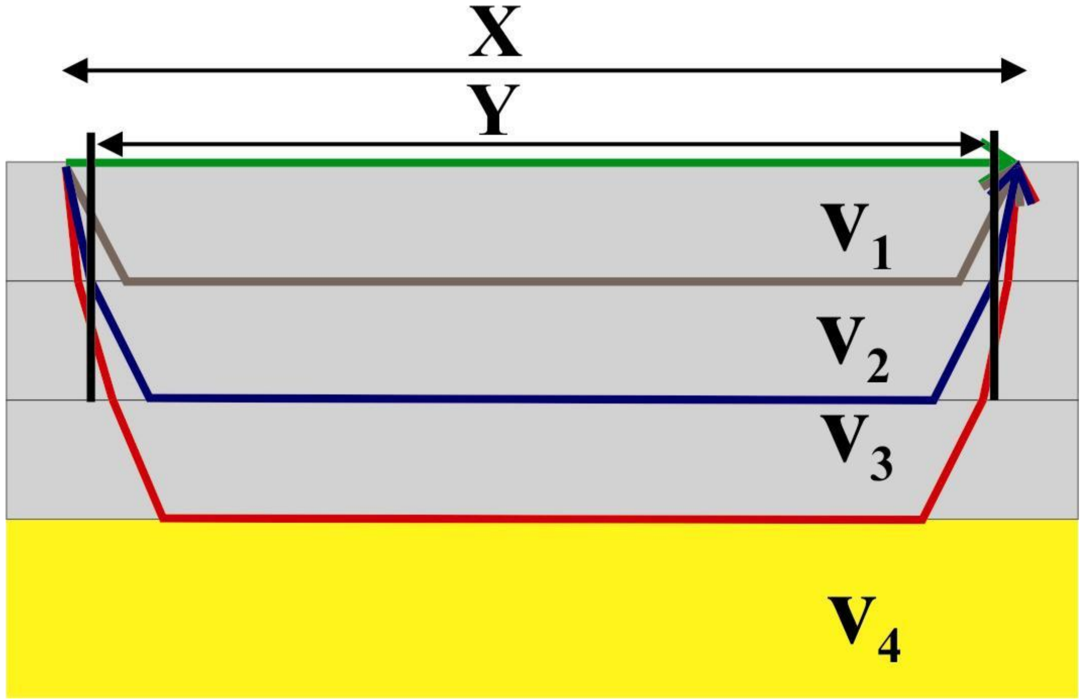




Vlna lomená podél druhého rozhraní. Vyjdeme z právě odvozeného vztahu pro lomenou vlnu, budeme předpokládat, že první rozhraní je povrchem:

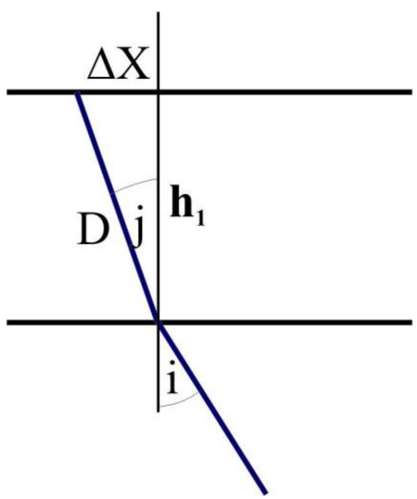
$$t' = Y.p + 2h_2.\eta_2 \qquad p = \frac{1}{v_3} \qquad \eta_2 = \frac{\sqrt{1 - v_2^2.p^2}}{v_2}$$

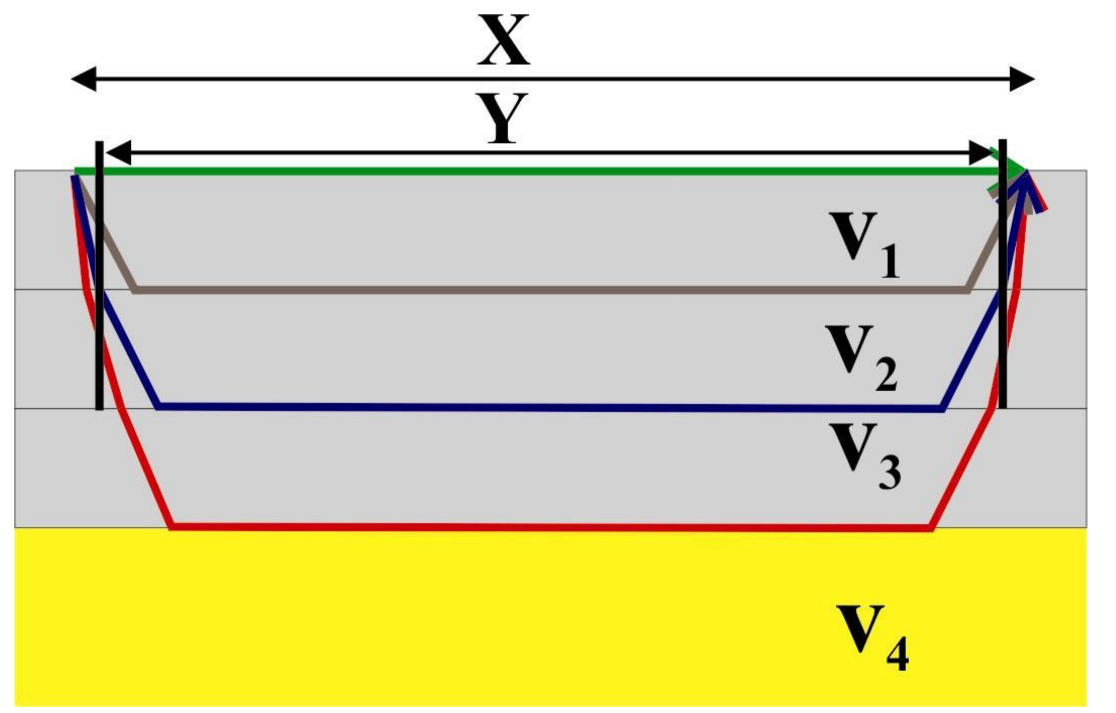




Nyní přidáme první vrstvu - dráha se protáhne o délku D, epicentrální vzdálenost se zvětší o dvojnásobek ΔX a čas průchodu seismické vlny bude delší o dvojnásobek Δt.

$$t' = Y.p + 2h_2.\eta_2 \qquad t = 2\Delta t + t'$$

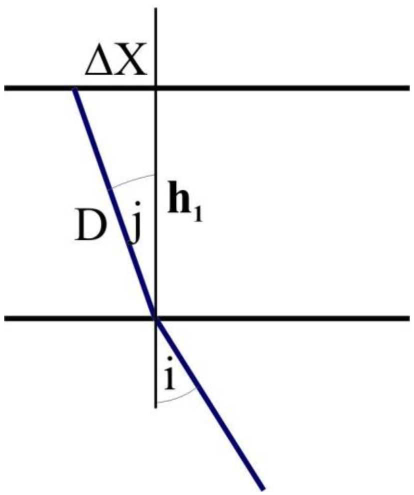


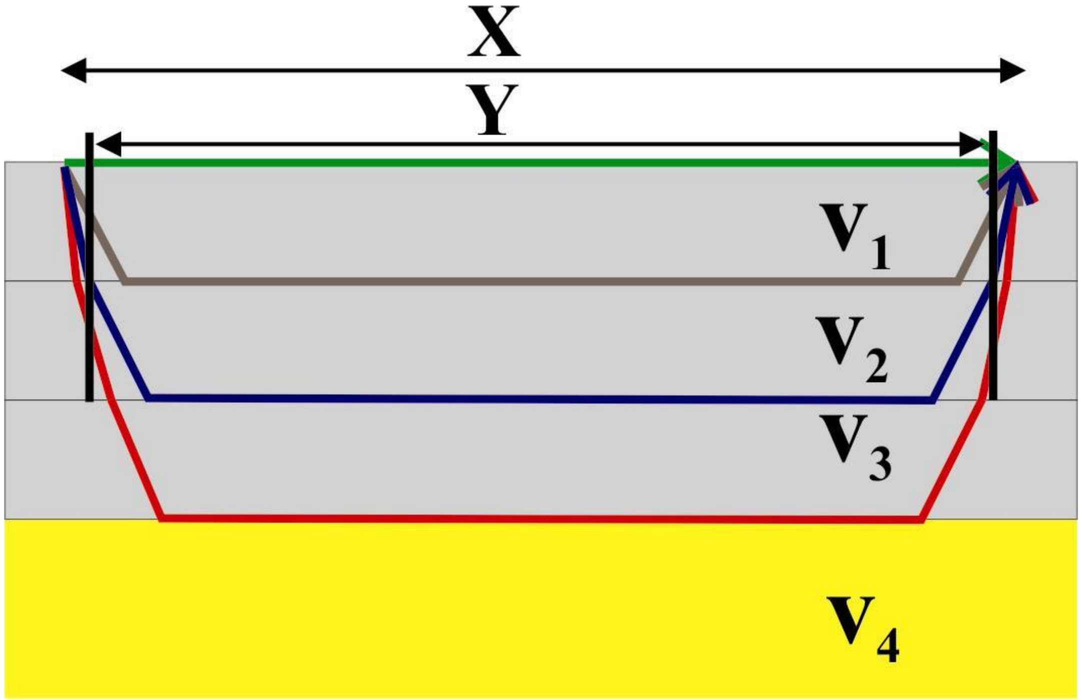


Vidíme, že

$$\Delta t = \frac{D}{v_1} = \frac{D\left(\sin^2(j) + \cos^2(j)\right)}{v_1} =$$

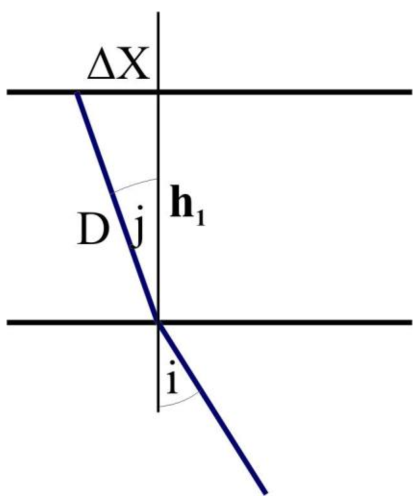
$$= D\sin(j)\frac{\sin(j)}{v_1} + D\cos(j)\frac{\cos(j)}{v_1}$$

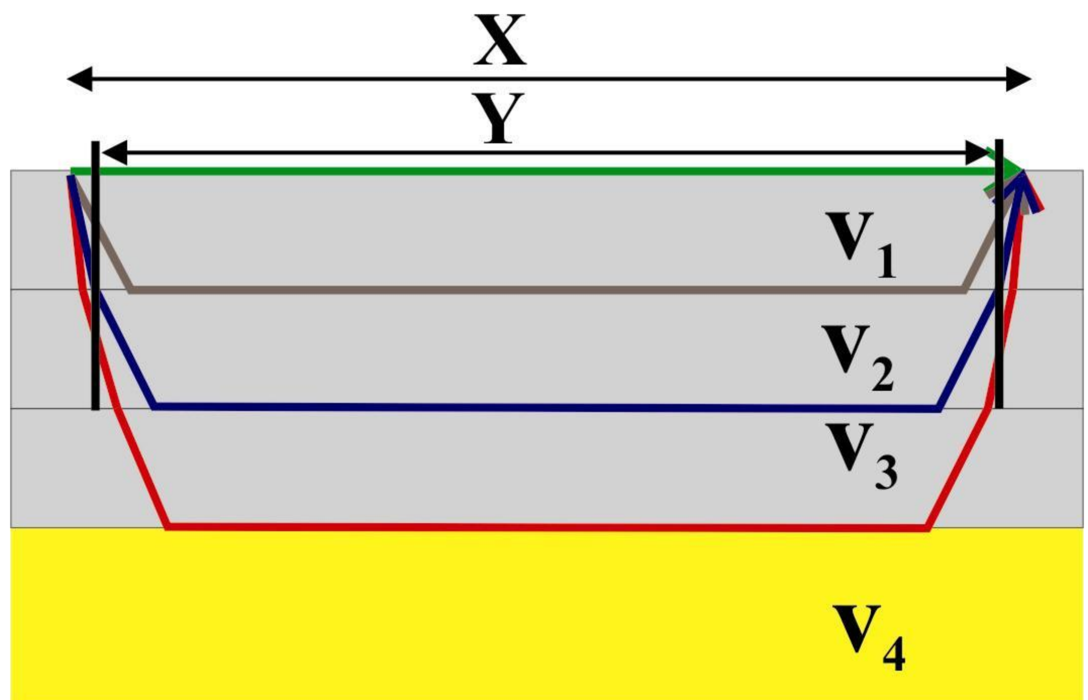




Snadno odvodíme, že: $\Delta X = D\sin(j) \qquad h_1 = D\cos(j)$

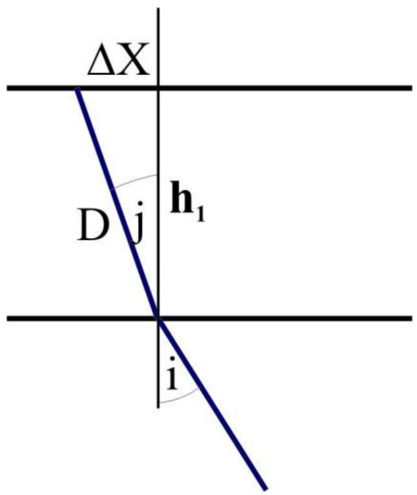
$$p = \frac{1}{v_3} = \frac{\sin(i)}{v_2} = \frac{\sin(j)}{v_1} \qquad \eta_1 = \frac{\sqrt{1 - v_1^2 . p^2}}{v_1} = \frac{\cos(j)}{v_1}$$

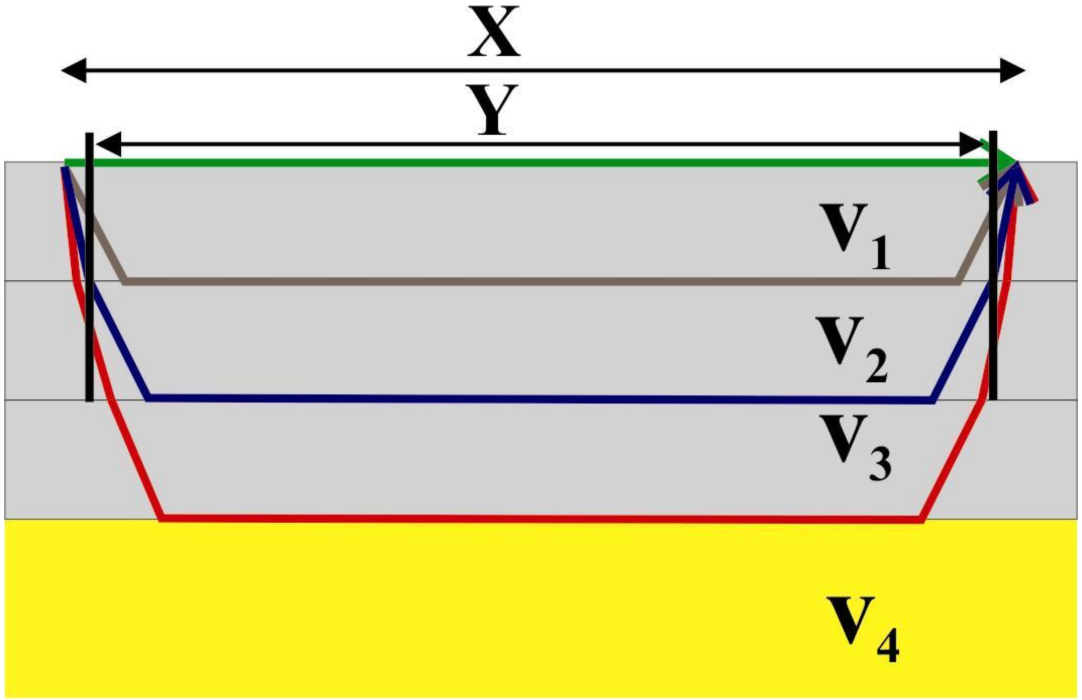




A dosadíme: $\Delta X = D\sin(j)$

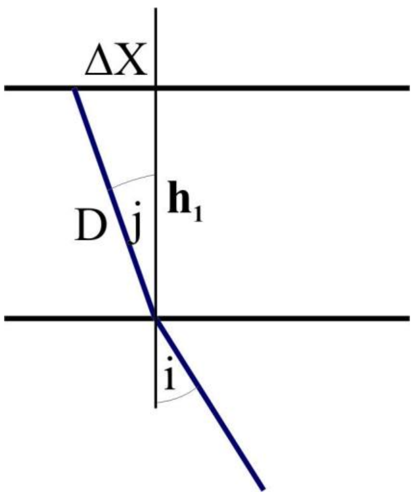
$$\Delta t = D\sin(j)\frac{\sin(j)}{v_1} + D\cos(j)\frac{\cos(j)}{v_1} = \Delta X\frac{\sin(j)}{v_1} + D\cos(j)\frac{\cos(j)}{v_1}$$

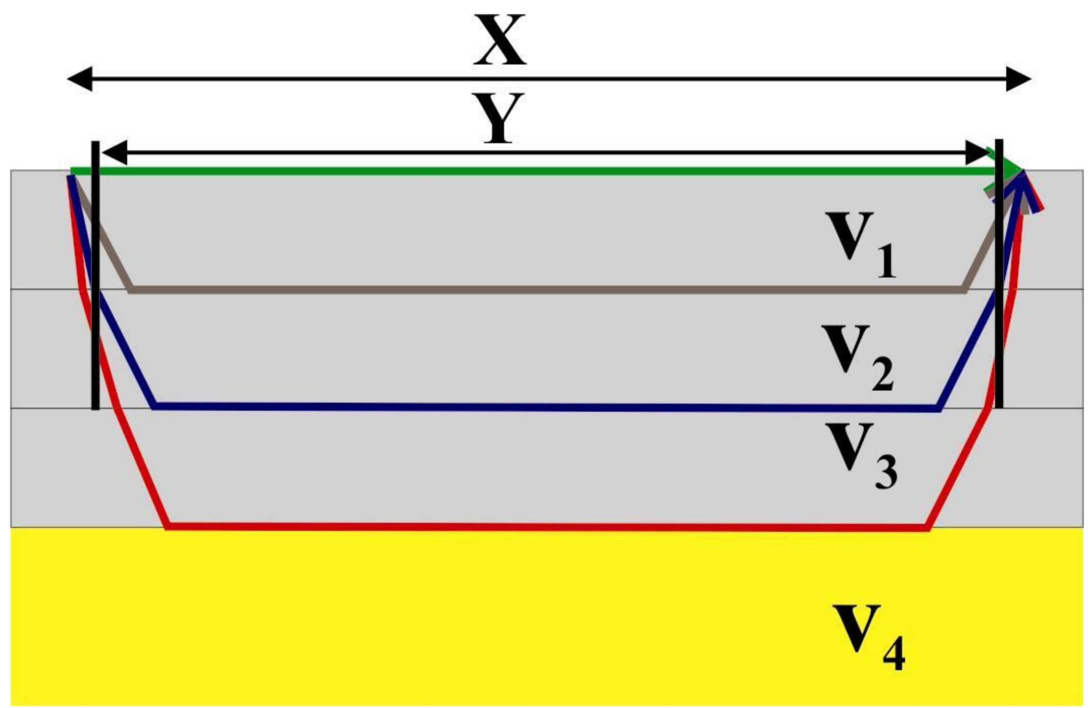




A dosadíme: $$h_1 = D\cos(j)$$

$$\Delta t = \Delta X \frac{\sin(j)}{v_1} + D\cos(j)\frac{\cos(j)}{v_1} = \Delta X \frac{\sin(j)}{v_1} + h_1 \frac{\cos(j)}{v_1}$$

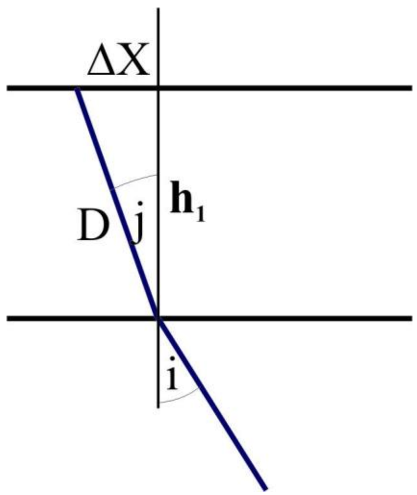


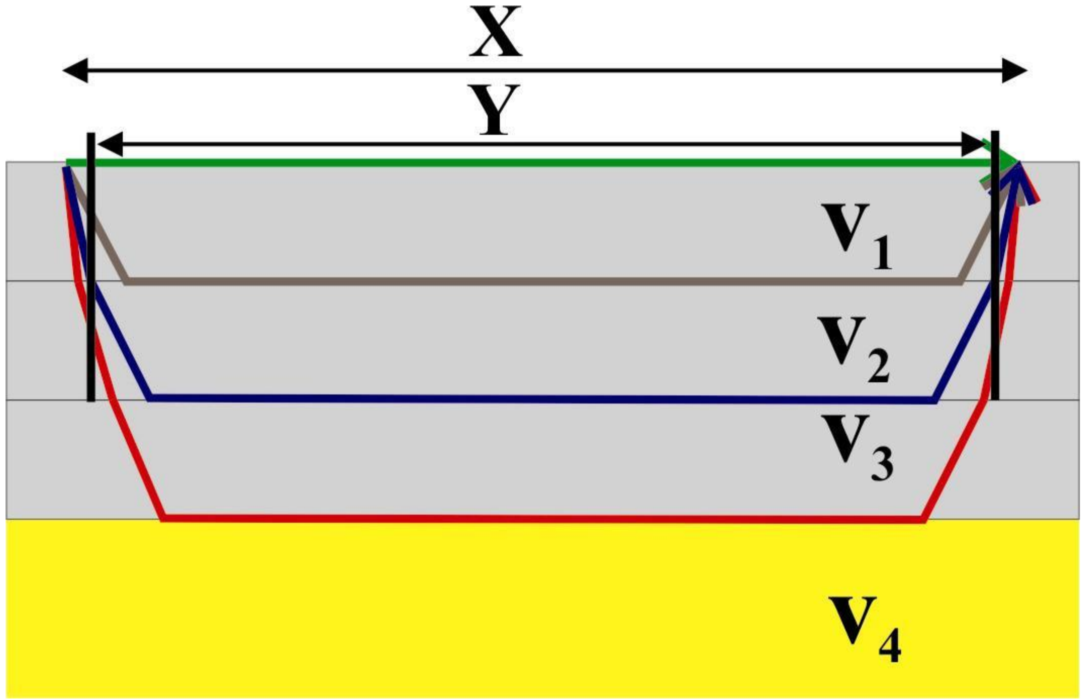


A dosadíme:

$$p = \frac{\sin(j)}{v_1}$$

$$\Delta t = \Delta X \frac{\sin(j)}{v_1} + h_1 \frac{\cos(j)}{v_1} = \Delta X.p + h_1 \frac{\cos(j)}{v_1}$$

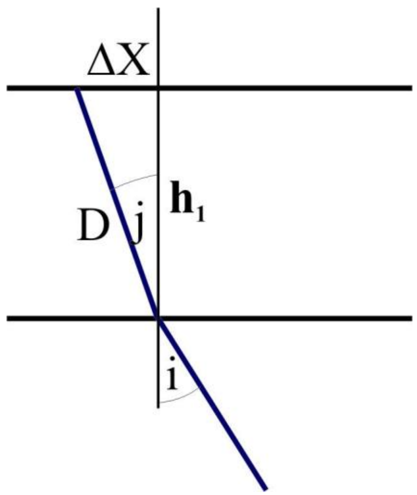


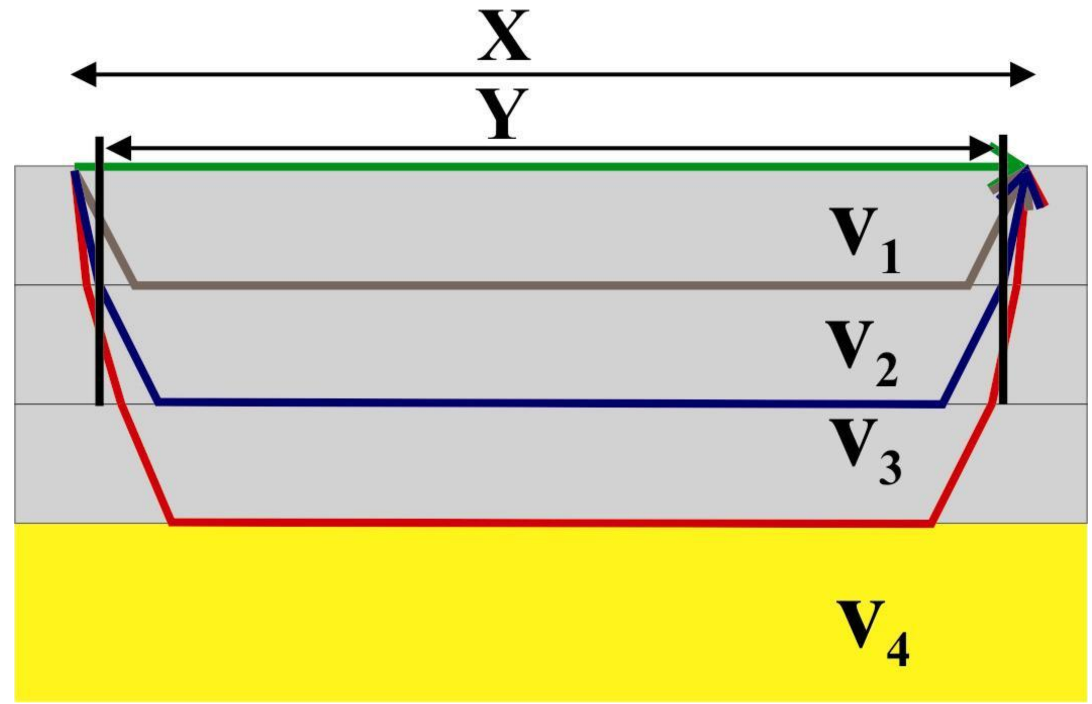


A dosadíme:

$$\eta_1 = \frac{\cos(j)}{v_1}$$

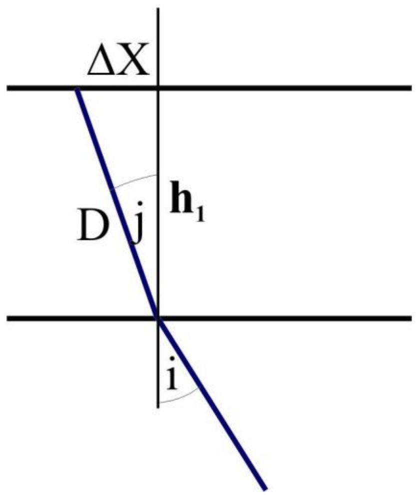
$$\Delta t = \Delta X.p + h_1 \frac{\cos(j)}{v_1} = \Delta X.p + h_1 \eta_1$$

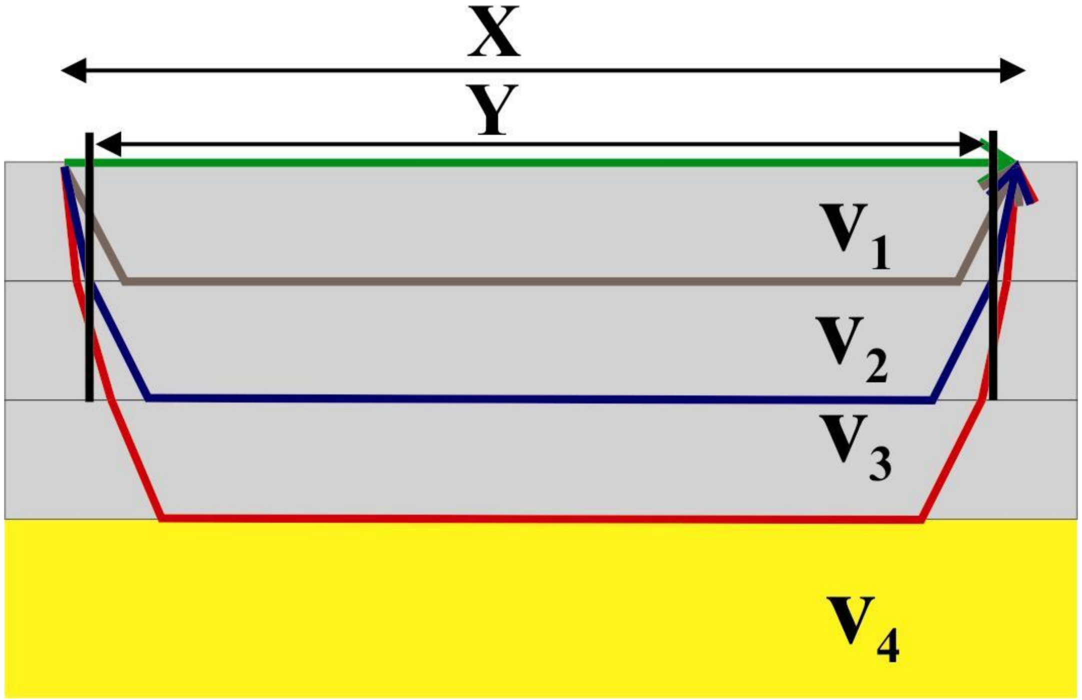




Tj.: $$2\Delta t = 2\Delta X.p + 2h_1\eta_1 \qquad t' = Y.p + 2h_2.\eta_2$$

$$t = 2\Delta t + t' = 2\Delta X.p + 2h_1\eta_1 + Y.p + 2h_2\eta_2$$

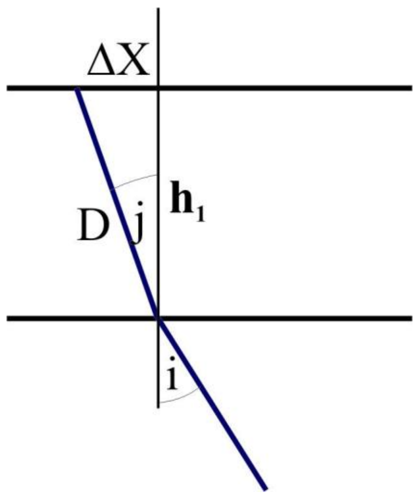


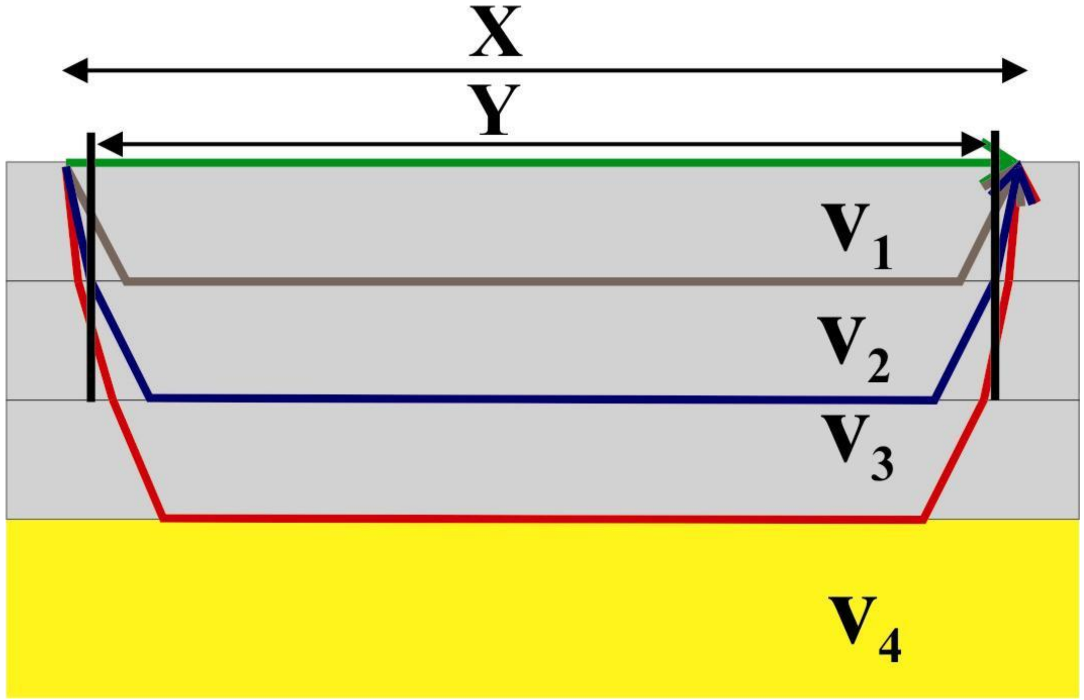


Protože: $X = Y + 2\Delta X$

$$t = 2\Delta X.p + 2h_1\eta_1 + Y.p + 2h_2\eta_2 =$$

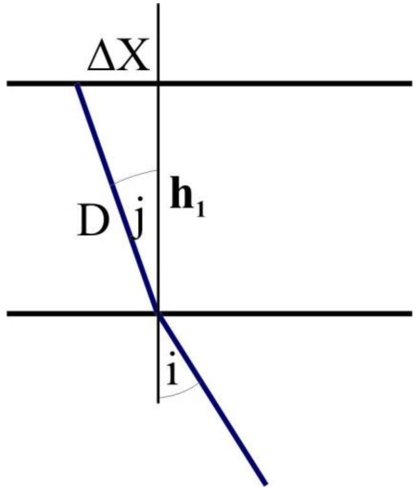
$$= X.p + 2h_1\eta_1 + 2h_2\eta_2$$

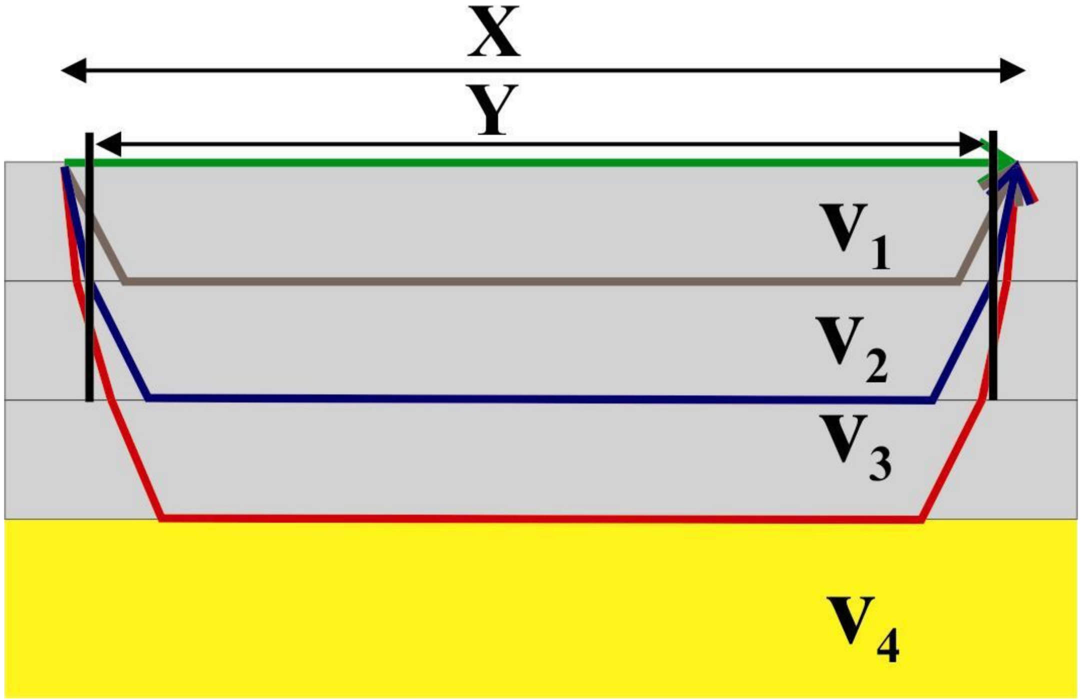




Můžeme psát:

$$t = X.p + 2\sum_{i=1}^{2} h_i \eta_i$$

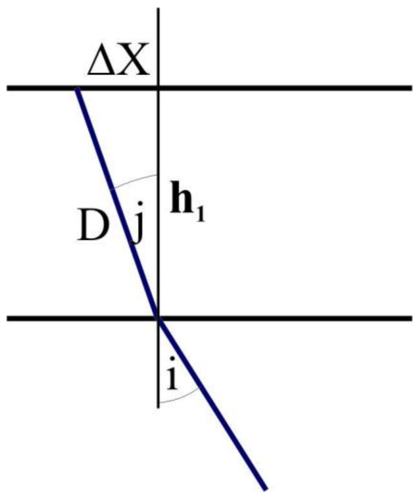


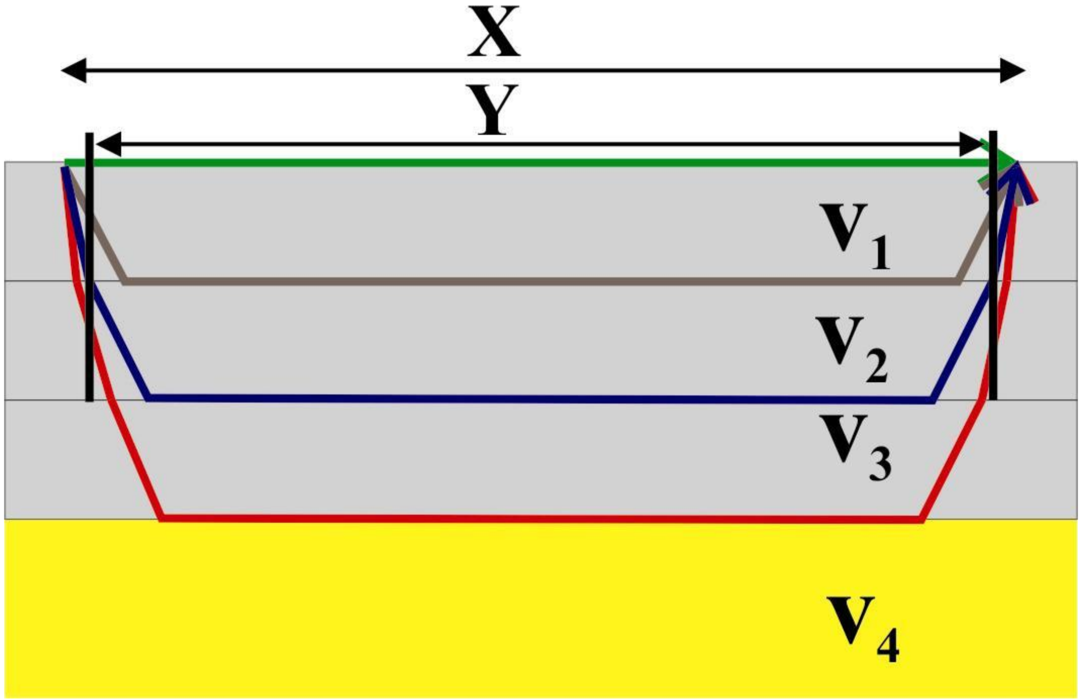


Vlna lomená podél n-tého rozhraní.

Lze ukázat, že před chvílí odvozený vztah můžeme zobecnit:

$$t = X.p + 2\sum_{i=1}^{n} h_i \eta_i$$

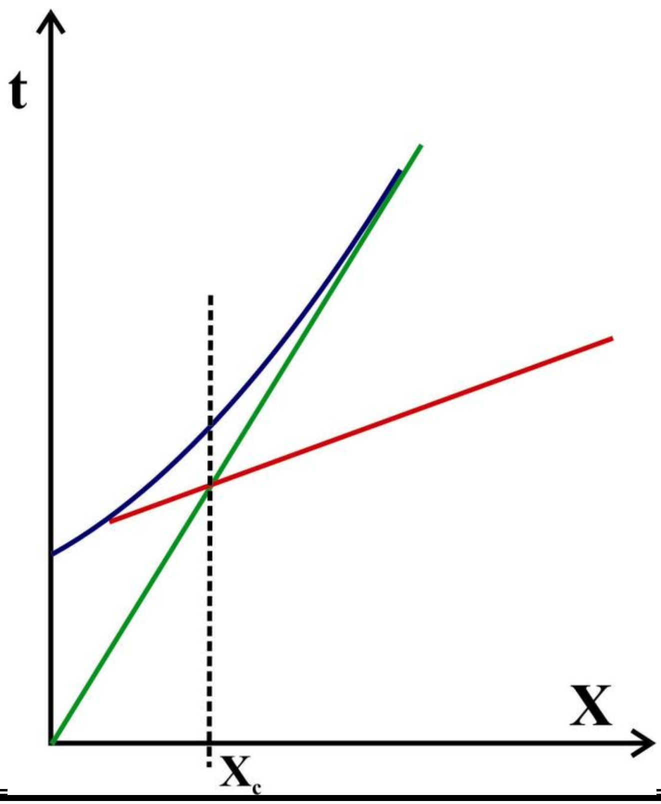




Vzdálenost, ve které přímá a lomená vlna přichází ve stejný čas

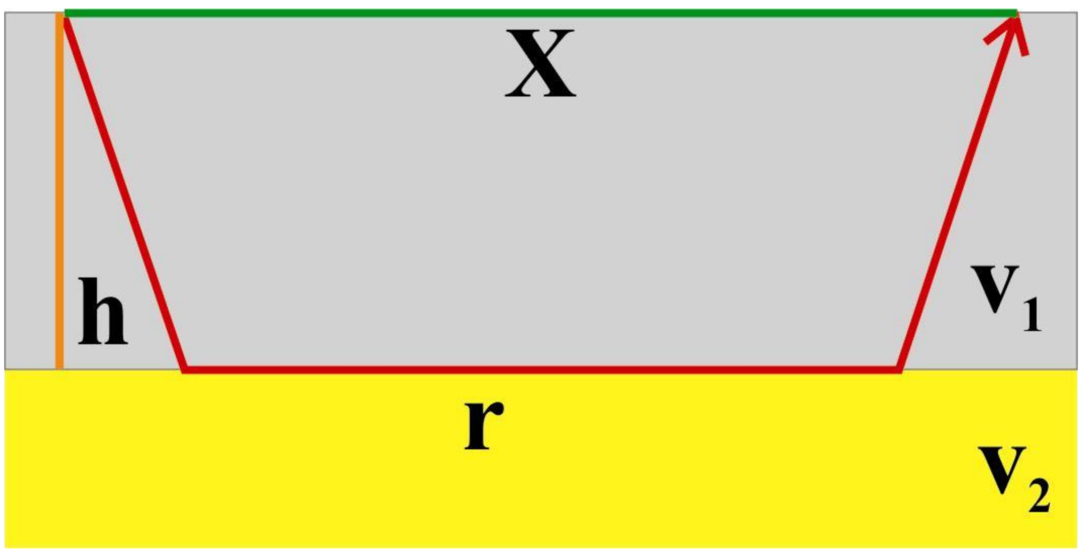
V malých epicentrálních vzdálenostech bude nejdříve detekována vlna přímá, ve větších epicentrálních vzdálenostech pak vlna lomena.

Nazvěme mezní vzdálenost X_c. V této vzdálenosti budou vlna přímá a lomená detekovány ve stejný čas.



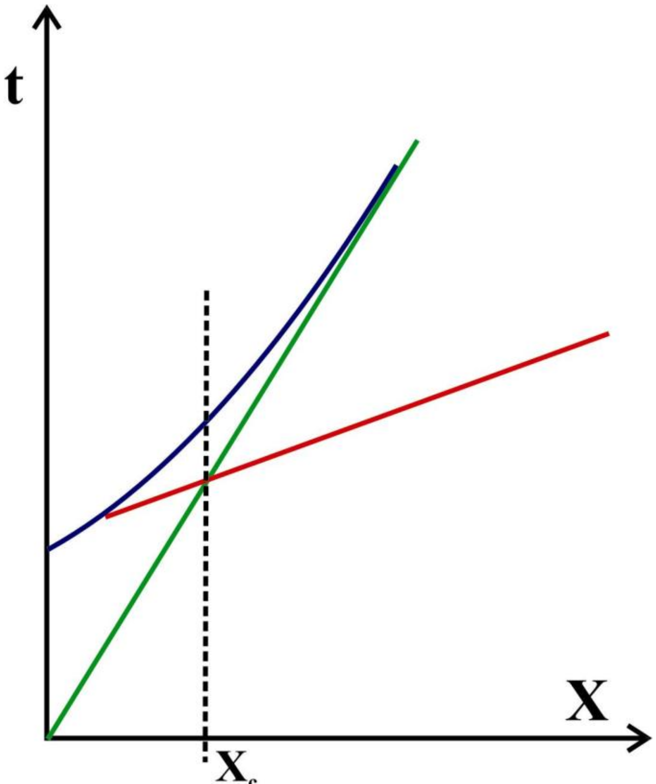
$$t = \frac{X}{v_1}$$

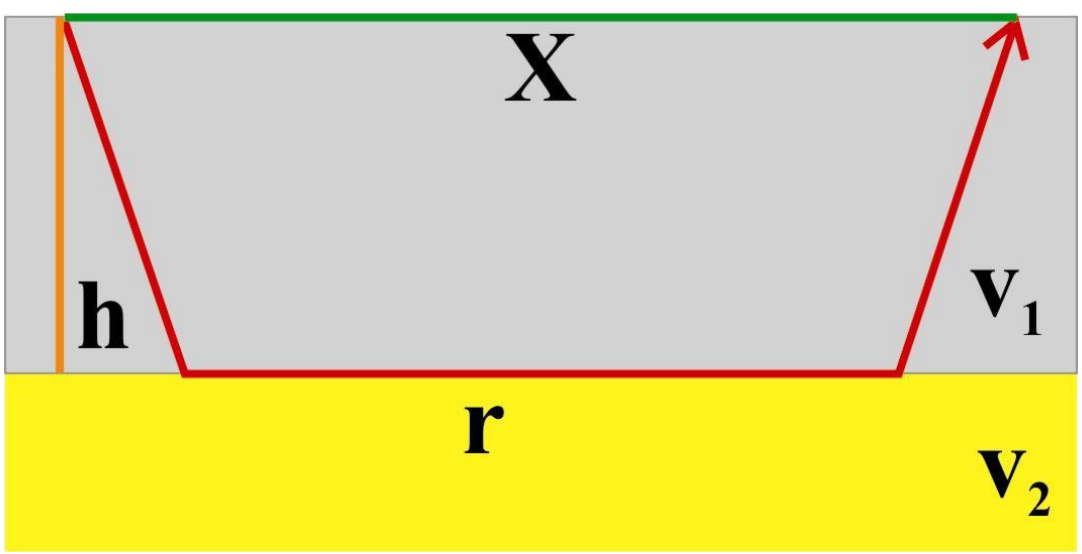
$$t = X.p + 2h.\eta_1$$



Tedy: $t = \frac{X_c}{v_1}$ $\quad t = X_c.p + 2h.\eta_1 = \frac{X_c}{v_2} + 2h.\eta_1$

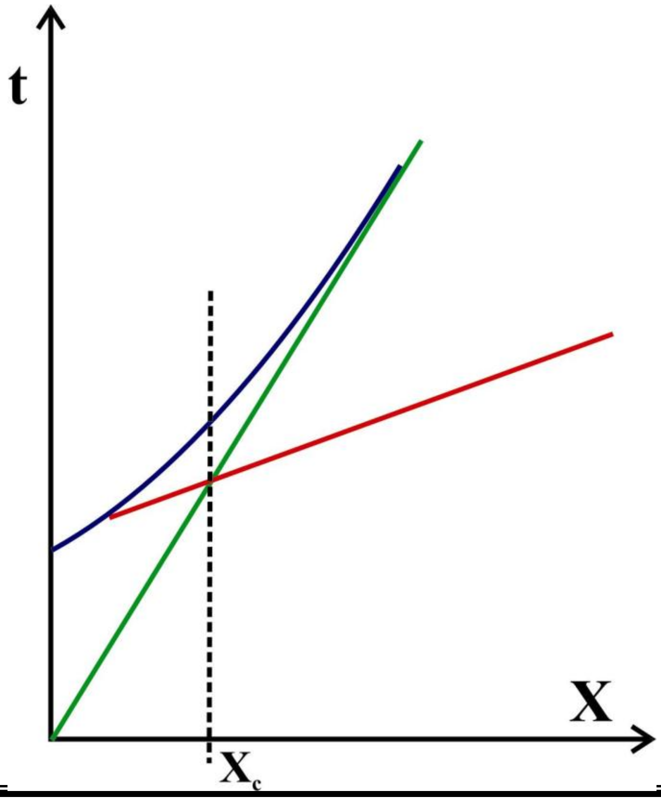
$$\frac{X_c}{v_1} = X_c.p + 2h.\eta_1 = \frac{X_c}{v_2} + 2h.\eta_1 \Leftrightarrow X_c = 2h\frac{v_1.v_2}{v_2 - v_1}\eta_1$$

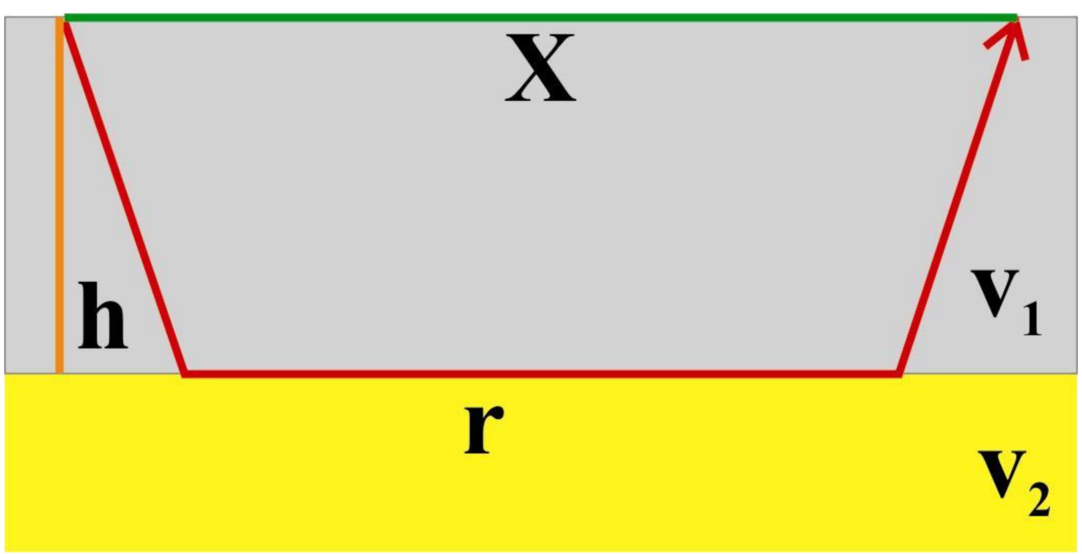




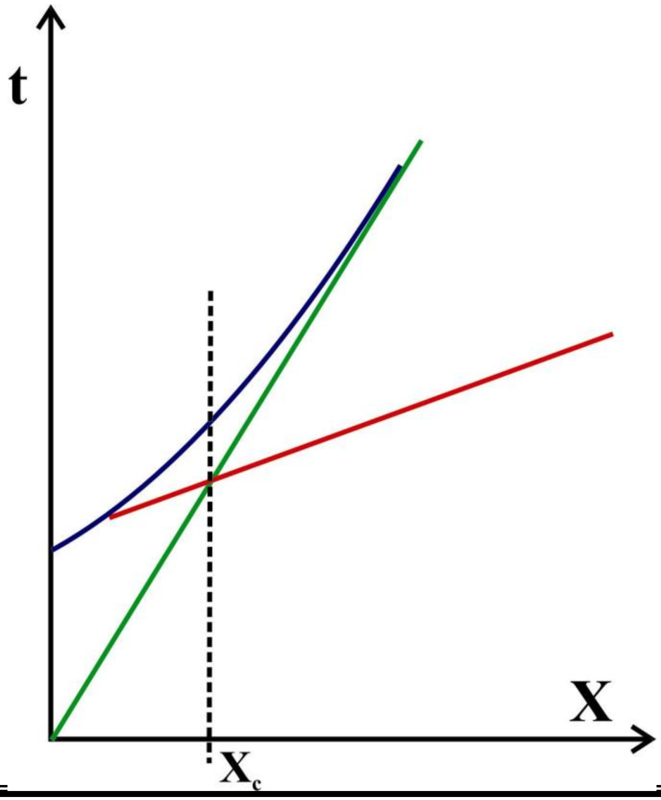
Protože: $\eta_1 = \dfrac{\sqrt{1 - v_1^2 . p^2}}{v_1}$

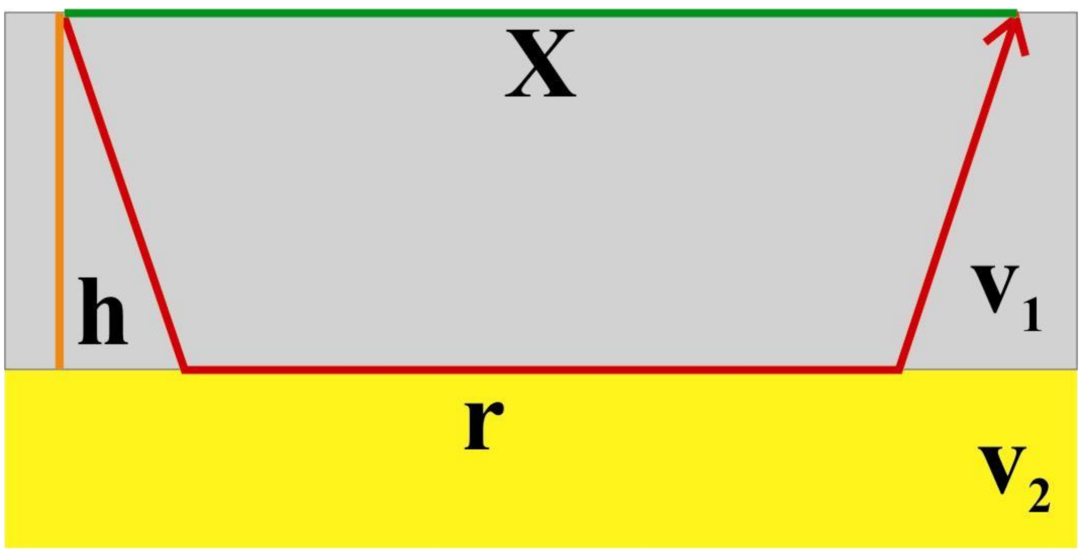
$$X_c = 2h \frac{v_1 . v_2}{v_2 - v_1} \eta_1 = 2h \frac{v_1 . v_2}{v_2 - v_1} \frac{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}}}{v_1} = 2h \frac{v_2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}}}{v_2 - v_1}$$





$$X_c = 2h\frac{v_2\sqrt{1-\frac{v_1^2}{v_2^2}}}{v_2 - v_1} = 2h\frac{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_2 - v_1} = 2h\sqrt{\frac{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)}{(v_2 - v_1)^2}}$$





$$X_c = 2h\sqrt{\frac{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)}{(v_2 - v_1)^2}} = 2h\sqrt{\frac{v_2 + v_1}{v_2 - v_1}}$$