Zpracování seismických dat

II. Seismický signál jako vlnová funkce

Josef Havíř

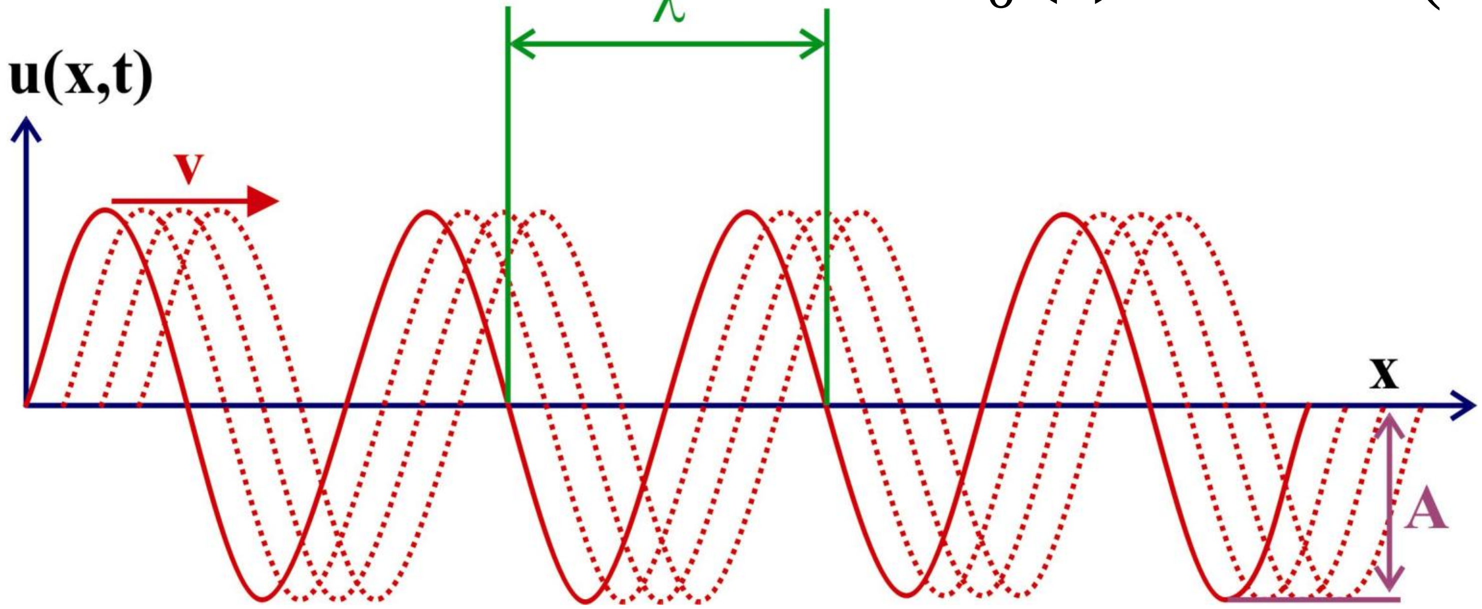
Josef.Havir@ipe.muni.cz

1. vlnová funkce - vyjádření pomocí Fourierovy řady

Představme si seismický signál jako jednoduchou harmonickou vlnu.

V případě, že tato vlna vyjadřuje posunutí, projevuje se v daném bodě kontinua kmitáním s frekvencí f a amplitudou A, tj. s výchylkou $u_0(t)$:

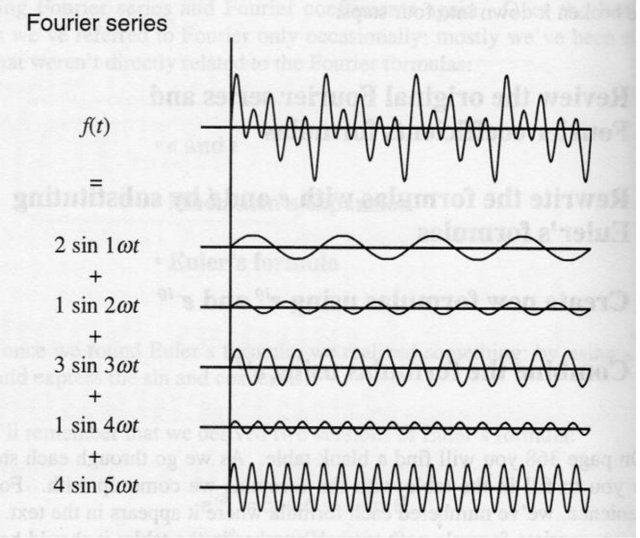
$$u_0(t) = A\sin(2\pi.f.t)$$



Fourierova řada

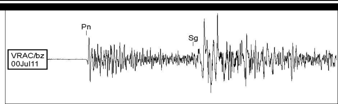
- vlnovou funkci lze dobře popsat pomocí goniometrických funkcí
- každou jakkoli složitou a nepravidelnou vlnovou funkci lze popsat jako součet mnoha křivek funkcí sinus a cosinus (**Fourierova řada**)

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)$$



Joseph Fourier

(1768-1830)

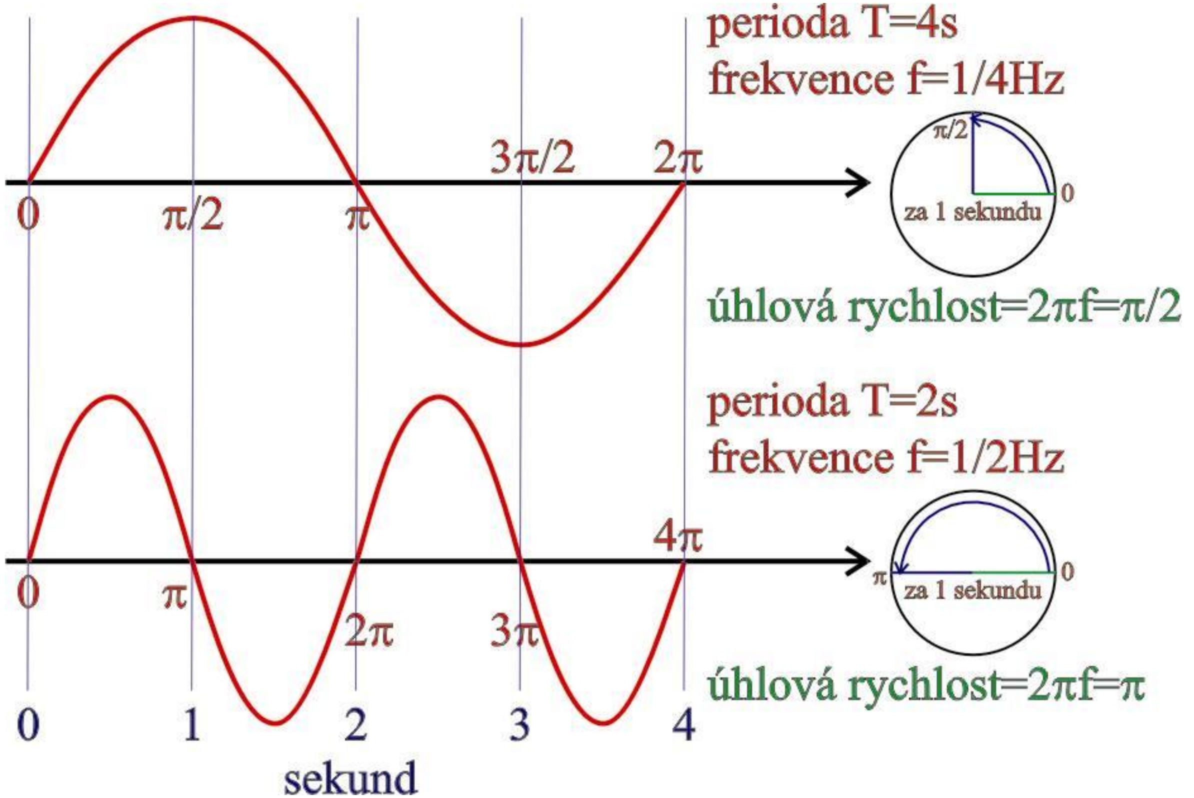


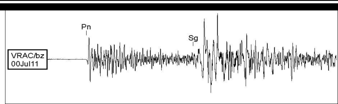
Úhlová rychlost

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)$$

- v matematickém vyjádření Fourierovy řady vystupuje veličina w ... úhlová rychlost

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$





každou jakkoli složitou a nepravidelnou vlnovou funkci lze popsat jako součet mnoha křivek funkcí sinus a cosinus (**Fourierova řada**)

$$u(t) = a_0 + \left(a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t\right) + \left(a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t\right) +$$
$$\ldots + \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right) + \ldots$$

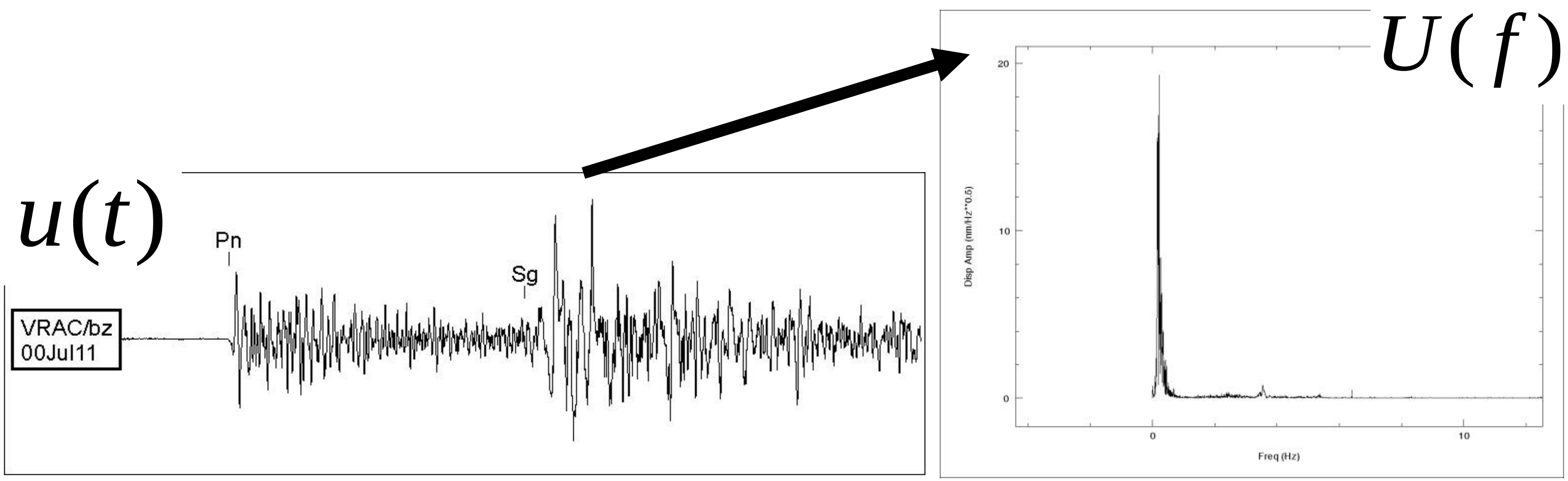
$$\downarrow$$

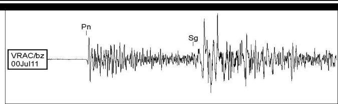
$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right)$$

2. Fourierova transformace - spektrum

- v předem zvoleném časovém okně můžeme hledat, v jaké míře se v signále projevují jednotlivé sinusovky o různých frekvencích ... můžeme si tak vyjádřit signál jako funkci v závislosti nikoli na čase, ale na frekvenci

- převod signálu z funkce času na funkci frekvence se nazývá **Fourierova transformace**





- Funkce U(f) závislá na frekvenci se nazývá **spektrum**.

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

- Spektrum je komplexní veličina.

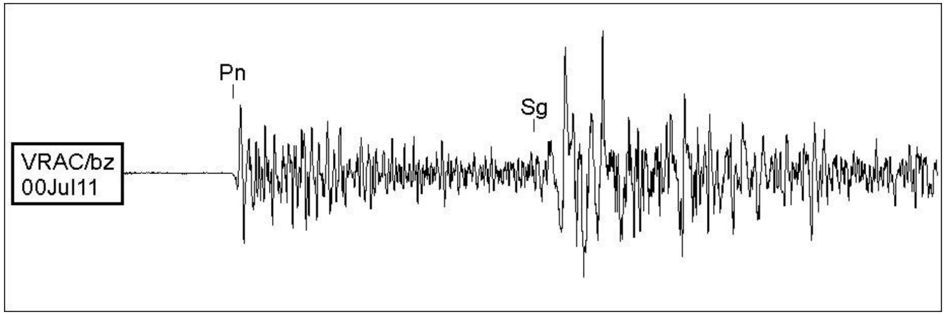
velikost $|U(f)|$ udává tzv.amplitudové spektrum

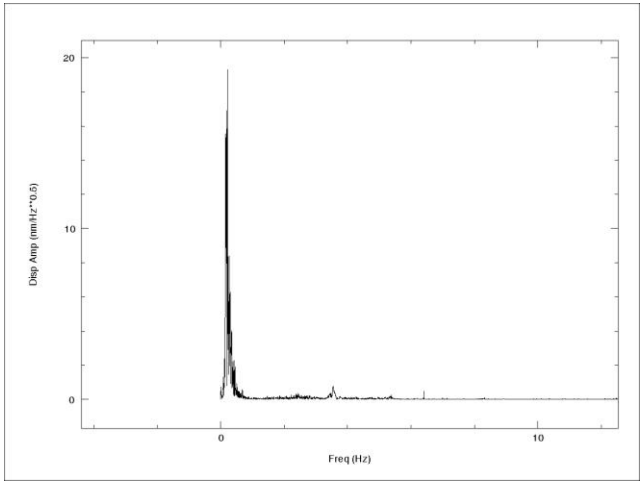
úhel $\arg(U(f))$ representuje tzv. fázové spektrum

- signál v závislosti na frekvenci představuje jeho **spektrum**

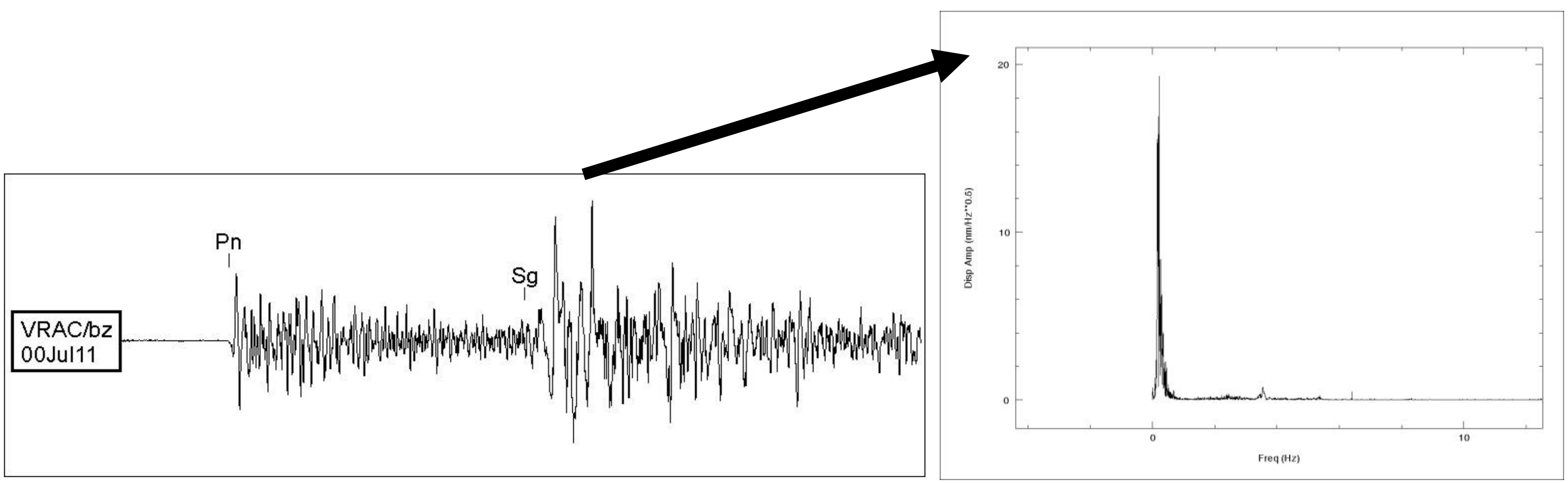
- **amplitudové spektrum** ukazuje vztah mezi frekvencí a amplitudou

- **fázové spektrum** ukazuje vztah mezi frekvencí a fází



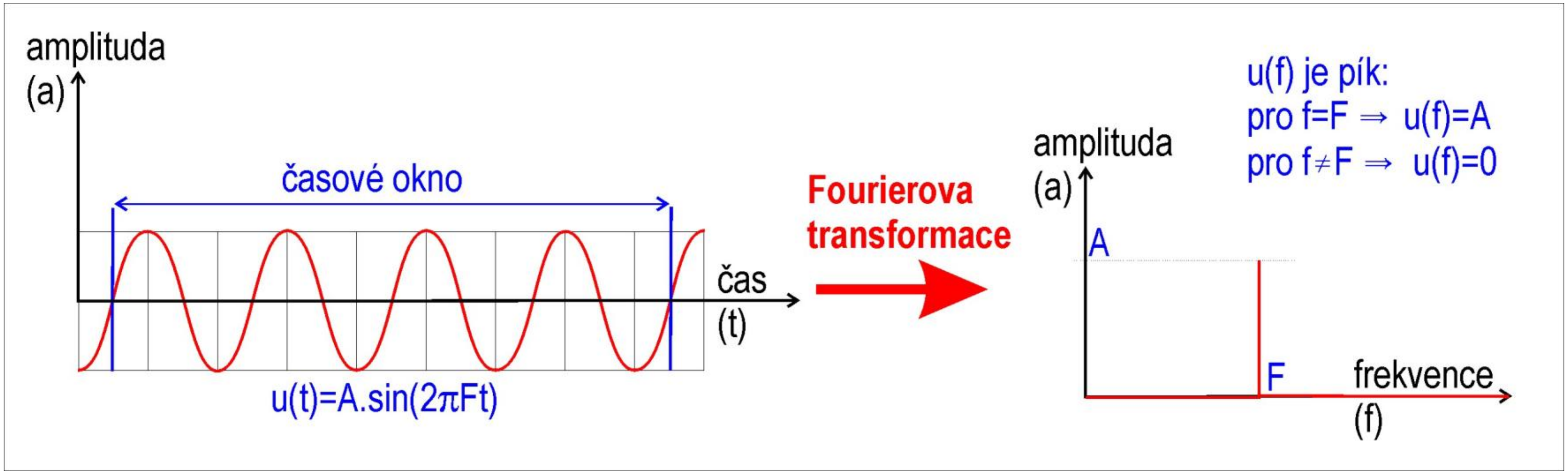


- Fourierovu transformaci si můžeme demonstrovat na příkladech dvou speciálních funkcí - jednoduché sinusovky a píku.



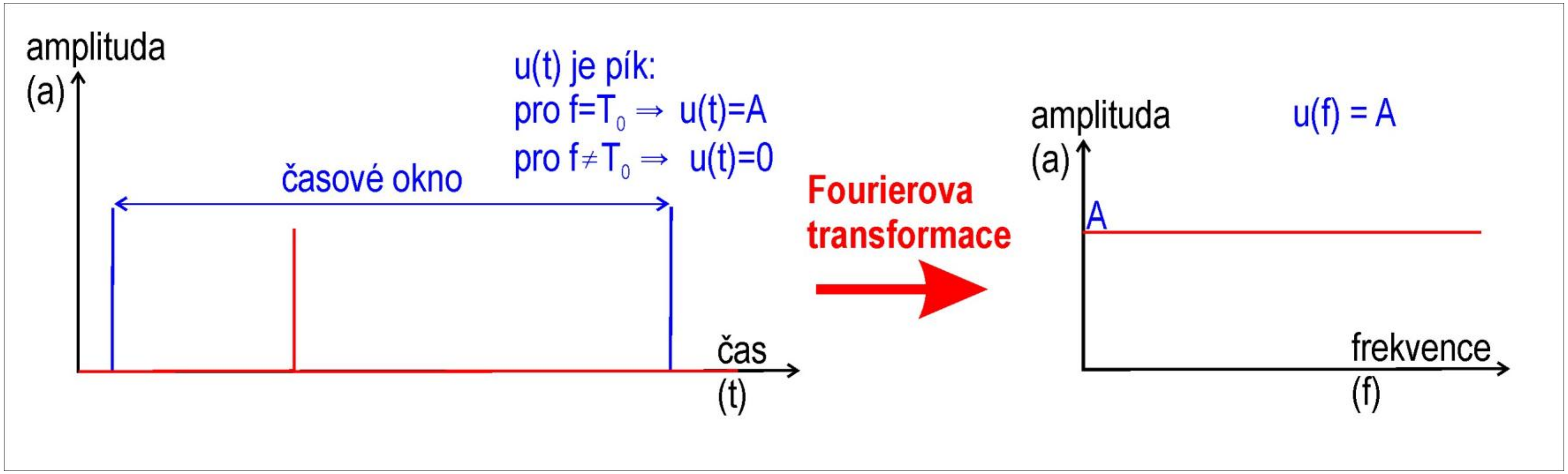
jednoduchá sinusoida

je funkce popsaná jednou konkrétní hodnotou frekvence **F** a jednou konkrétní hodnotou amplitudy **A**. Její frekvenční popis je tedy funkce, která má nenulovou hodnotu pouze v bodě o frekvenci F, všude jinde je nulová (tzv. **impuls** neboli **pík**).



pík

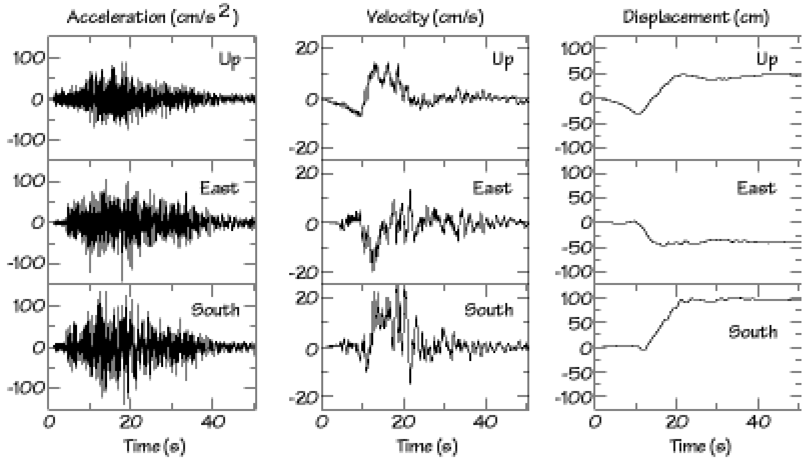
lze popsat jako součet sinusoidových křivek. V tomto případě potřebujeme sčítat nekonečně mnoho křivek (musíme použít všechny možné frekvence) a že amplituda všech jednotlivých křivek je stejná (v píku jsou obsaženy stejnou měrou všechny frekvence).

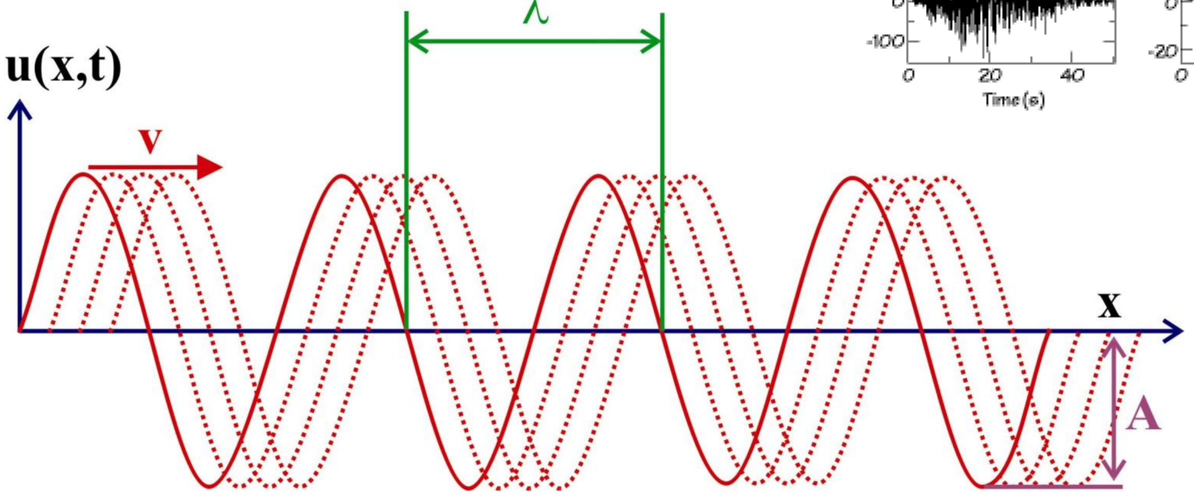


3. typy signálu - posunutí, rychlost a zrychlení

Seismický záznam může zachycovat kmitání částic kontinua ve smyslu:

- posunutí polohy částice
- rychlost posunutí polohy částice
- zrychlení posunutí polohy částice





posunutí

$$u_0(t) = A\sin\left(2\pi.f.t\right)$$

rychlost

$$v_0(t) = \frac{\partial u_0(t)}{\partial t}$$

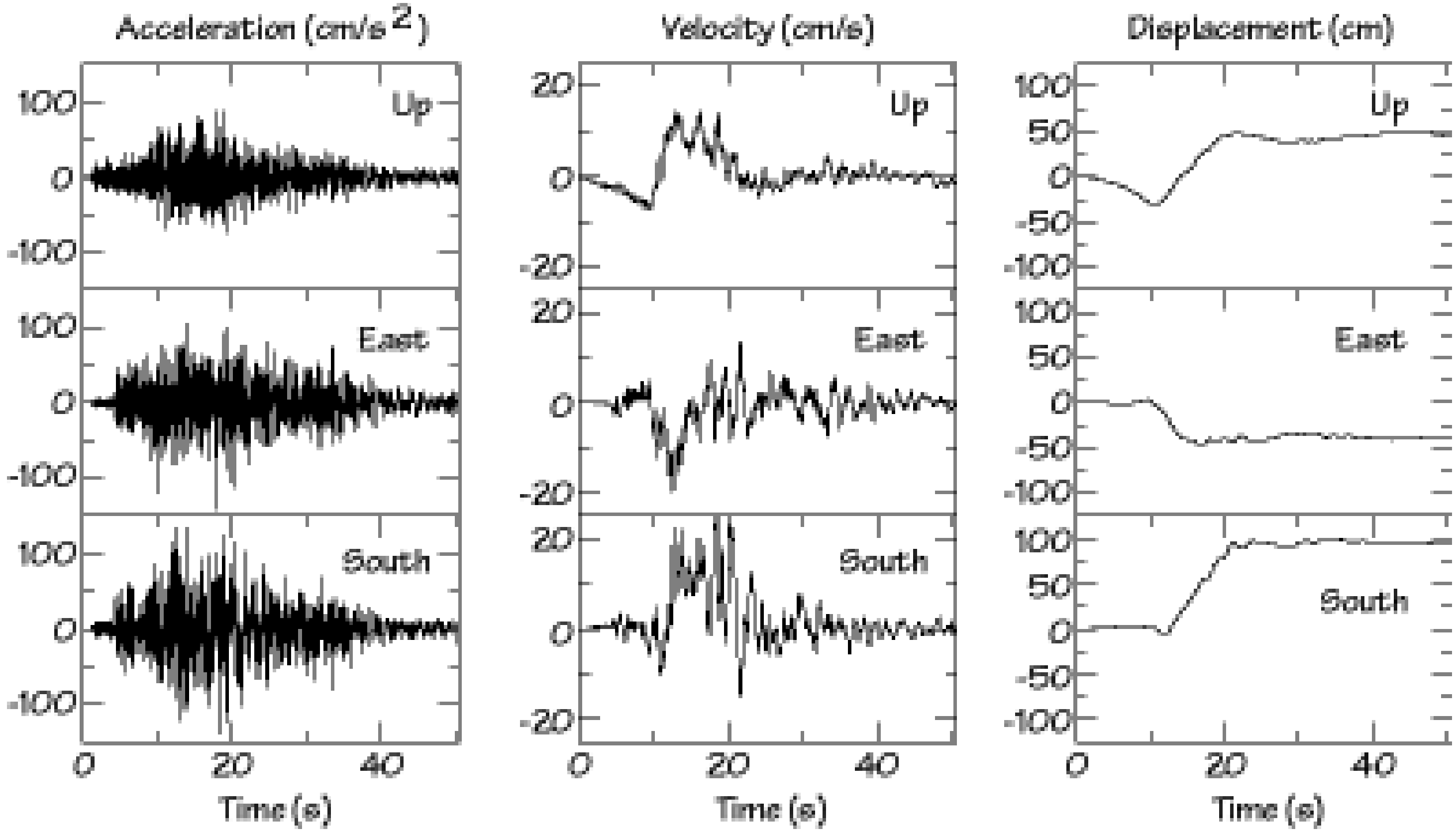
$$v_0(t) = 2\pi.f.A\cos\left(2\pi.f.t\right)$$

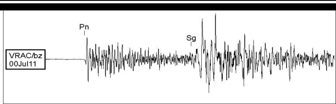
zrychlení

$$s_0(t) = \frac{\partial v_0(t)}{\partial t}$$

$$s_0(t) = -\left(2\pi.f\right)^2.A\sin\left(2\pi.f.t\right)$$

Ze vztahů po derivaci vidíme, že amplituda signálu derivovaného podle času je tím větší, čím větší je frekvence.

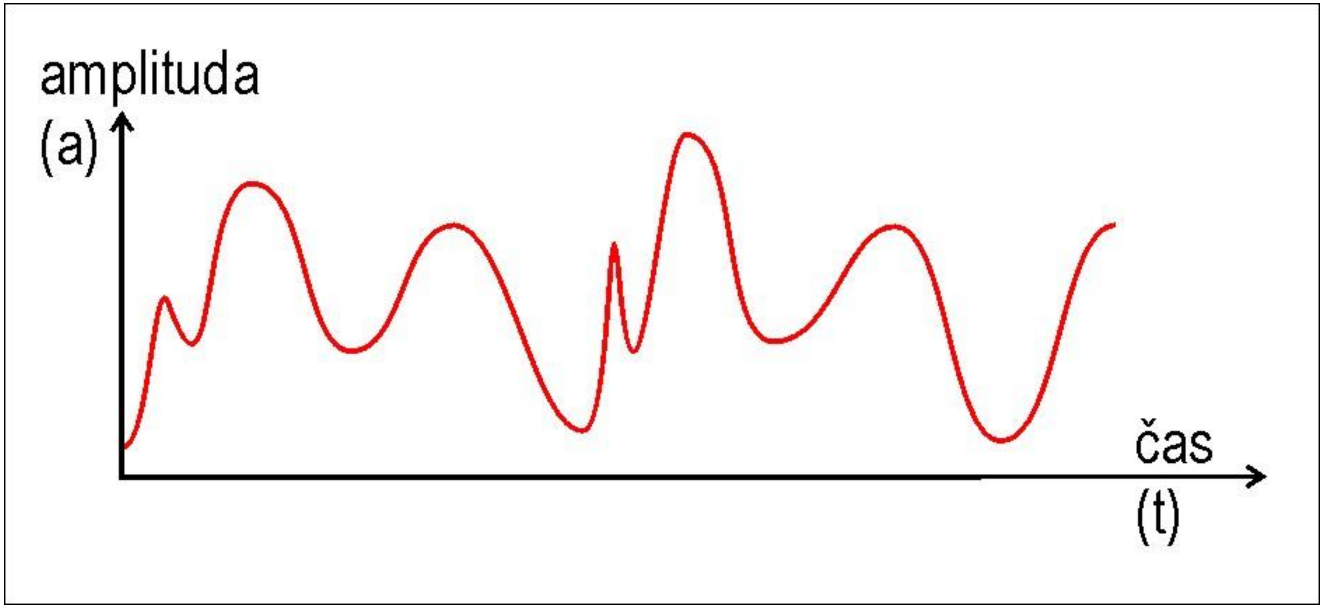


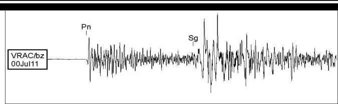


4. digitalizace signálu

- seismometr reaguje na spojitý pohyb půdy a produkuje spojitý záznam (analogový signál)
- spojitý záznam ale nelze zaznamenat ve formě počítačového souboru, pro počítačové zpracování je nutné přeměnit tento signál na nespojitý záznam (digitální signál)

- spojitý záznam je křivka, která má nekonečně mnoho bodů
- do počítačového souboru lze ale zapsat jen konečný počet údajů
- jsou-li zapisovanými údaji např. hodnota amplitudy v daném čase, lze tyto údaje zapsat pouze pro vybrané diskrétní body (tzv. vzorek)



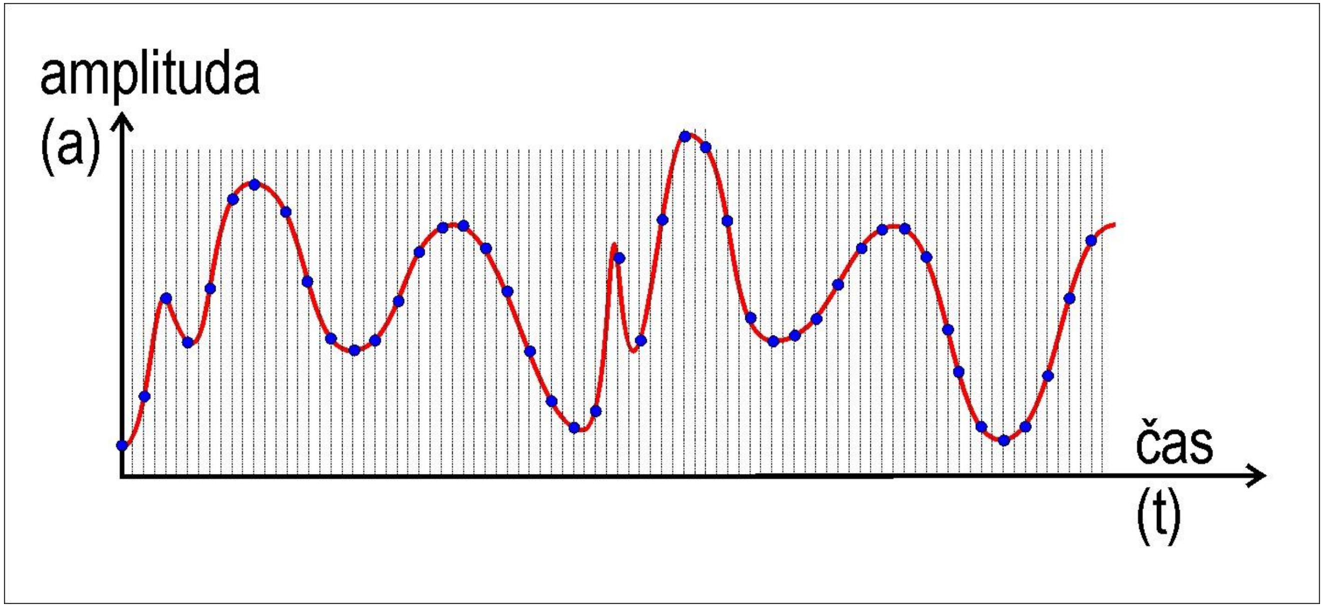


- digitální záznam je tím detailnější, čím hustěji volíme diskrétní body

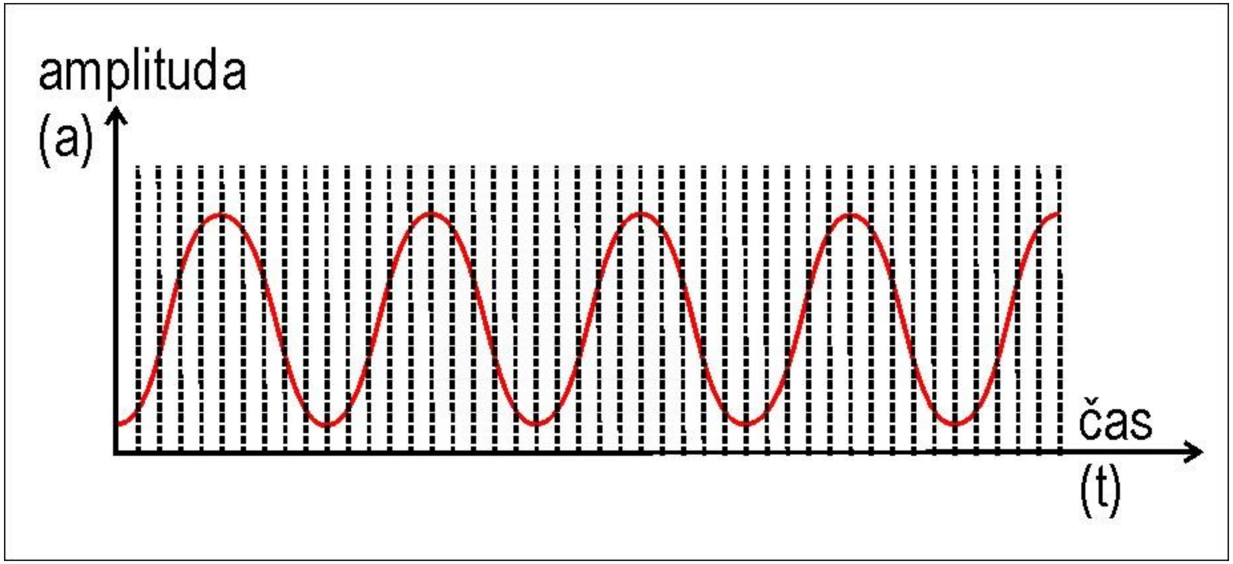
- frekvence, s jakou volíme body (vzorky), nazýváme **vzorkovací frekvencí**

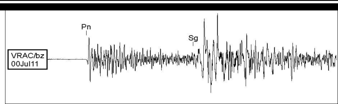
digitalizovaný nespojitý záznam nese méně informací, než původní záznam spojitý

- ztráta informace je nevratná!

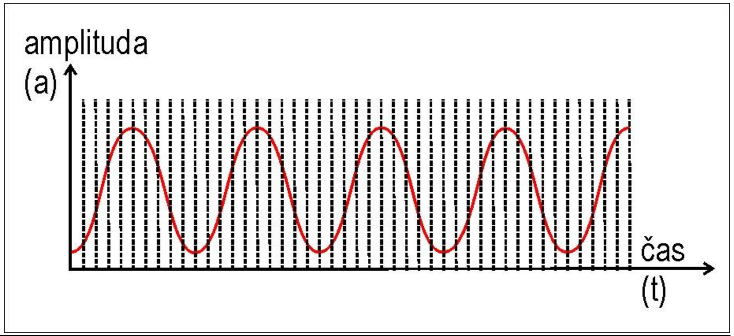


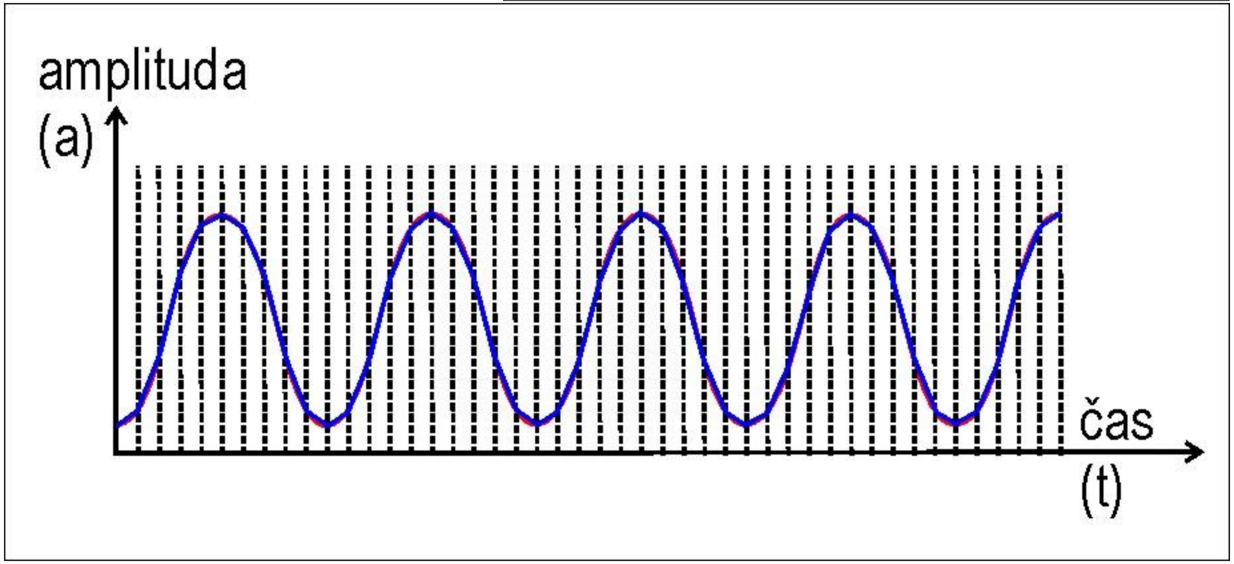
- je-li vzorkovací frekvence mnohem větší, než frekvence zaznamenaného signálu, pak diskrétní digitální záznam umožňuje zobrazit signál dostatečně věrně



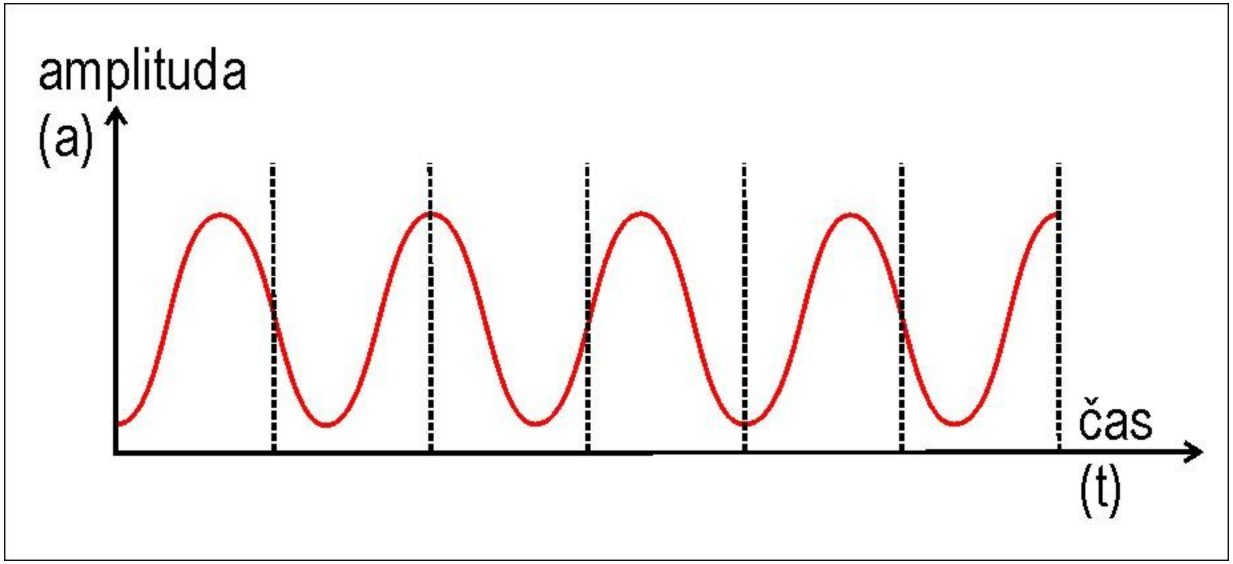


- spojíme-li diskrétní body lomenou čarou (modrá křivka), získáme tvar velmi podobný původnímu spojitému signálu

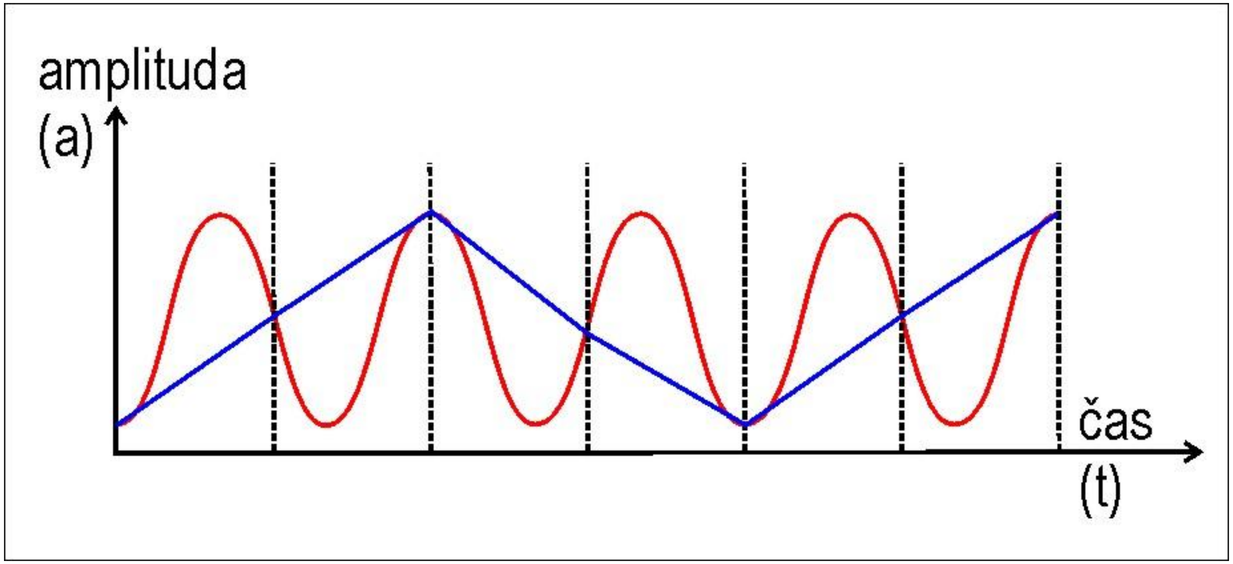




- je-li vzorkovací frekvence oproti zaznamenanému signálu příliš nízká, nelze z diskrétních bodů věrně zrekonstruovat původní křivku

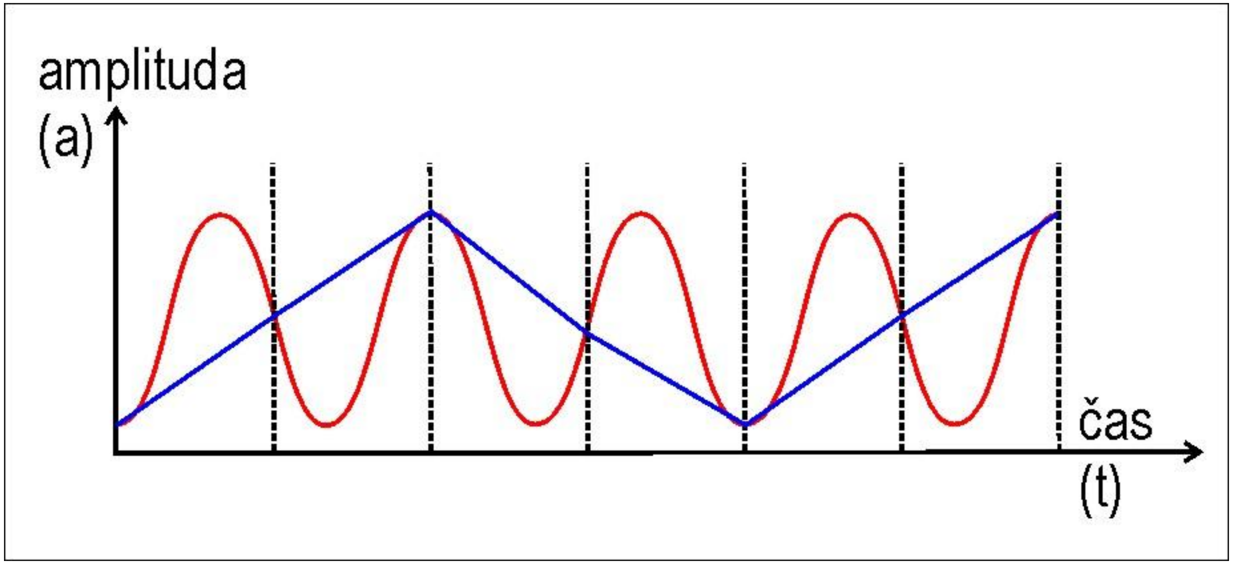


- spojíme-li diskrétní body lomenou čarou (modrá křivka), získáme oproti původnímu signálu zcela odlišný tvar, se zcela jinou (podstatně vyšší) převládající frekvencí (tzv. **alias-efekt**).

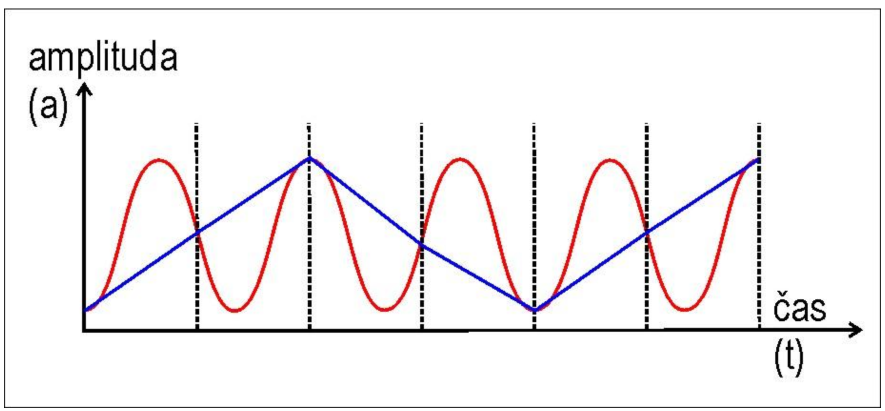


- protože proces digitalizace je nevratný, nelze potlačit vliv alias-efektu po digitalizaci

- uměle vzniklé frekvence (vlivem alias-efektu) nelze jednoduše a jednoznačně odlišit od přirozených nižších frekvencí, které byly součástí signálu již před digitalizací a které mají reálný původ



- V roce 1924 zjistil H. Nyquist, že aby mohl být signál úspěšně digitalizován, musí být zvolená vzorkovací frekvence alespoň dvojnásobná oproti nejvyšší frekvenci obsažené v signálu (polovina nejvyšší frekvence signálu = tzv. **Nyqistova frekvence**)



Harry Nyquist

(1889-1976)