1. VEKTOROVÉ PROSTORY

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

20. září 2006

Abstrakt

V této kapitole zavedeme dva pojmy, které budou hrát v následujícím výkladu klíčovou úlohu a dokážeme o nich několik jednoduchých tvrzení. Půjde o pojem *tělesa* a *vektorového prostoru*.

Abstrakt

V této kapitole zavedeme dva pojmy, které budou hrát v následujícím výkladu klíčovou úlohu a dokážeme o nich několik jednoduchých tvrzení. Půjde o pojem *tělesa* a *vektorového prostoru*. Prvky tělesa budeme nazývat *skaláry* a prvky vektorového prostoru *vektory*.

Obsah přednášky I

- Úvod
  - Základní číselné obory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$; pojem tělesa.
  - Tělesa $\mathbb{Z}_p$

Obsah přednášky I

- Úvod
  - Základní číselné obory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$; pojem tělesa.
  - Tělesa $\mathbb{Z}_p$
- Geometrická interpretace vektorů v rovině a v třírozměrném prostoru
  - Geometrická interpretace vektorů v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, rovnoběžníkové pravidlo

Obsah přednášky II

- Vektorové prostory
- Příklady vektorových prostorů (řádkově a sloupcově uspořádané n-tice skalárů, polynomy, rozšíření těles, funkce z množiny do tělesa a vektorového prostoru)

Číselné obory I

$\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel,

Číselné obory I

$\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel,
$\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel,

Číselné obory I

$\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel,
$\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel,
$\mathbb{Q}$ – množina všech racionálních čísel,

Číselné obory I

$\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel,
$\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel,
$\mathbb{Q}$ – množina všech racionálních čísel,
$\mathbb{R}$ – množina všech reálnych čísel,

Číselné obory I

$\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel,
$\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel,
$\mathbb{Q}$ – množina všech racionálních čísel,
$\mathbb{R}$ – množina všech reálnych čísel,
$\mathbb{C}$ – množina všech komplexních čísel.

Číselné obory II

Nulu považujeme za přirozené číslo, t. j. $0 \in \mathbb{N}$.

Číselné obory II

Nulu považujeme za přirozené číslo, t. j. $0 \in \mathbb{N}$.

Imaginární jednotku (která je prvkem $\mathbb{C} - \mathbb{R}$) budeme značit $\imath$.

Číselné obory II

Nulu považujeme za přirozené číslo, t. j. $0 \in \mathbb{N}$.

Imaginární jednotku (která je prvkem $\mathbb{C} - \mathbb{R}$) budeme značit $\imath$.

Prvky výše uvedených číselných oborů $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nazýváme často *skaláry*. V tomto případě pak budeme mluvit o *číselném tělese*.

Struktura číselných oborů I

Na každé z těchto množin jsou definované dvě binární operace, *sčítaní* $+$ a *násobení* $\cdot$.

Struktura číselných oborů I

Na každé z těchto množin jsou definované dvě binární operace, *sčítaní* $+$ a *násobení* $\cdot$.

Obě tyto operace jsou asociativní a komutativní.

Struktura číselných oborů I

Na každé z těchto množin jsou definované dvě binární operace, *sčítaní* $+$ a *násobení* $\cdot$.

Obě tyto operace jsou asociativní a komutativní.

Násobení je (z obou stran) *distributivní* vzhledem ke sčítání, t. j. pro všechny prvky x, y, z příslušné množiny platí

$$x(y+z) = xy + xz, \qquad (x+y)z = xz + yz.$$

Struktura číselných oborů II

Číselný obor $\mathbb{N}$ je v porovnaní s obory $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ "chudší" – totiž rovnice tvaru $x + a = b$ mají v oborech $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ řešení $x = b - a$ pre libovolné a, b, ale v $\mathbb{N}$ je takováto rovnice řešitelná, pokud $a \leq b$.

Struktura číselných oborů II

Číselný obor $\mathbb{N}$ je v porovnaní s obory $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ "chudší" – totiž rovnice tvaru $x + a = b$ mají v oborech $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ řešení $x = b - a$ pre libovolné a, b, ale v $\mathbb{N}$ je takováto rovnice řešitelná, pokud $a \leq b$.

Obory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ jsou však "bohatší" nejen v porovnání s $\mathbb{N}$, ale i s $\mathbb{Z}$ – rovnice tvaru $ax = b$ mají v oborech $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ řešení pro libovolné $a \neq 0$ a b, přičemž v $\mathbb{N}$ či $\mathbb{Z}$ jsou řešitelné, pouze pokud a je dělitelem b.

Axiomy tělesa I

Tělesem nazýváme množinu K s dvěmi význačnými prvky – *nulou* 0 a *jedničkou* 1 – a dvěmi binárními operacemi na K – *sčítáním* $+$ a *násobením* $\cdot$ – takovými, že platí

Axiomy tělesa II

$$(\forall a, b \in K)(a + b = b + a),(\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a + (b + c) = (a + b) + c),$$
$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c),$$

$$(\forall a \in K)(0 + a = a), \qquad (\forall a \in K)(1 \cdot a = a),$$

$$(\forall a \in K)(\exists\, b \in K)(a + b = 0),$$
$$(\forall a \in K \setminus \{0\})(\exists\, b \in K)(a \cdot b = 1),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)), \quad 0 \neq 1.$$

Axiomy tělesa III

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

Axiomy tělesa III

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

0 je neutrální prvek sčítání a 1 je neutrální prvek násobení a tyto prvky jsou navzájem různé.

Axiomy tělesa III

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

0 je neutrální prvek sčítání a 1 je neutrální prvek násobení a tyto prvky jsou navzájem různé.

Prvek $b \in K$ takový, že $a + b = 0$, je k danému $a \in K$ určený jednoznačně.
Tento jednoznačně určený prvek k danému a označujeme $-a$ a nazýváme *opačný prvek* k a. Místo $a + (-b)$ píšeme jen $a - b$.

Axiomy tělesa IV

Analogicky se lze přesvědčit, že i prvek $b \in K$ takový, že $a \cdot b = 1$ je k danému $0 \neq a \in K$ určený jednoznačně – označujeme ho a^{-1} nebo $\frac{1}{a}$, případně $1/a$ a nazýváme *inverzní prvek* k a alebo *převrácená hodnota* prvku a.

Axiomy tělesa IV

Analogicky se lze přesvědčit, že i prvek $b \in K$ takový, že $a \cdot b = 1$ je k danému $0 \neq a \in K$ určený jednoznačně – označujeme ho a^{-1} nebo $\frac{1}{a}$, případně $1/a$ a nazýváme *inverzní prvek* k a alebo *převrácená hodnota* prvku a.

Místo $a \cdot b^{-1}$ píšeme též $\frac{a}{b}$ nebo a/b.

Vlastnosti tělesa I

Tvrzení

Buď K těleso. Potom pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $a, b, c, b_1, \dots, b_n \in K$ platí

(a) $a + b = a + c \;\Rightarrow\; b = c$,

(b) $(ab = ac \;\&\; a \neq 0) \;\Rightarrow\; b = c$,

(c) $a \cdot 0 = 0$,

(d) $a \cdot b = 0 \;\Rightarrow\; (a = 0 \vee b = 0)$,

(e) $-a = (-1) \cdot a$,

(f) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$,

(g) $a \cdot (b_1 + \ldots + b_n) = a \cdot b_1 + \ldots + a \cdot b_n$.

Vlastnosti tělesa II

Doplňme, že podmínky (a) a (b) sa nazývají *zákony o krácení* pro sčítaní resp. násobení v tělese.

Vlastnosti tělesa II

Doplňme, že podmínky (a) a (b) sa nazývají *zákony o krácení* pro sčítaní resp. násobení v tělese.

Podmínka (e) nám umožňuje zavést libovolné celočíselné násobky prvků z tělesa.

Vlastnosti tělesa II

Doplňme, že podmínky (a) a (b) sa nazývají *zákony o krácení* pro sčítaní resp. násobení v tělese.

Podmínka (e) nám umožňuje zavést libovolné celočíselné násobky prvků z tělesa. Pro $a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ klademe

$(-n)a = -(na) = n(-a)$.

Vlastnosti tělesa II

Doplňme, že podmínky (a) a (b) sa nazývají *zákony o krácení* pro sčítaní resp. násobení v tělese.

Podmínka (e) nám umožňuje zavést libovolné celočíselné násobky prvků z tělesa. Pro $a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ klademe

$(-n)a = -(na) = n(-a)$.

Podobně lze pro nenulové prvky tělesa zavést i libovolné celočíselné mocniny. Pro $0 \neq a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ klademe $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.

Vlastnosti tělesa III

$$0a = 0, \quad 1a = a, \qquad a^0 = 1, \quad a^1 = a,$$

$$n(a+b) = na + nb,$$
$$(m+n)a = ma + na,$$

$$(mn)a = m(na),$$
$$(mn)(ab) = (ma)(nb),$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \qquad n < 0 \;\Rightarrow\; a \neq 0 \neq b,$$
$$a^{m+n} = a^m a^n, \qquad (m < 0 \vee n < 0) \;\Rightarrow\; a \neq 0,$$
$$a^{mn} = (a^m)^n, \qquad (m < 0 \vee n < 0) \;\Rightarrow\; a \neq 0$$
$$\forall a, b \in K,\;\; m, n \in \mathbb{Z}.$$

Vlastnosti tělesa IV

Nechť K je těleso a $L \subseteq K$. Říkáme, že L je *podtěleso* tělesa K, pokud $0, 1 \in L$ a pro všechna $a, b \in L$ platí $a + b \in L$, $ab \in L$, $-a \in L$ a, pokud $a \neq 0$, tak i $a^{-1} \in L$.

Vlastnosti tělesa IV

Nechť K je těleso a $L \subseteq K$. Říkáme, že L je *podtěleso* tělesa K, pokud $0, 1 \in L$ a pro všechna $a, b \in L$ platí $a + b \in L$, $ab \in L$, $-a \in L$ a, pokud $a \neq 0$, tak i $a^{-1} \in L$.

Podtěleso tělesa K je tedy jeho podmnožina L, která obsahuje nulu a jedničku a je uzavřená vzhledem ke sčítání, násobení, opačnému a inverznímu prvku. Zřejmě každé podtěleso tělesa K je s těmito operacemi zúženými z K na L i samo tělesem. Říkáme pak, že těleso K je *rozšířením* tělesa L.

Vlastnosti tělesa V

Zřejmě těleso $\mathbb{Q}$ je podtělesem tělesa $\mathbb{R}$ i tělesa $\mathbb{C}$; těleso $\mathbb{C}$ je rozšířením těles $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Vlastnosti tělesa V

Zřejmě těleso $\mathbb{Q}$ je podtělesem tělesa $\mathbb{R}$ i tělesa $\mathbb{C}$; těleso $\mathbb{C}$ je rozšířením těles $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Charakteristikou tělesa K, píšeme $\mathrm{char} K$, nazýváme nejmenší kladné celé číslo n takové, že $n1 = 0$; pokud takové n neexistuje, t. j. $n1 \neq 0$ pro každé celé $n > 0$, říkáme že K má charakteristiku ∞ (někteří autoři definují $\mathrm{char} K = 0$).

Vlastnosti tělesa VI

Je-li těleso K rozšířením tělesa L, tak obě tělesa K a L mají tutéž jedničku i nulu, a proto $\mathrm{char} K = \mathrm{char} L$.

Vlastnosti tělesa VI

Je-li těleso K rozšířením tělesa L, tak obě tělesa K a L mají tutéž jedničku i nulu, a proto $\mathrm{char} K = \mathrm{char} L$.

Zřejmě $\mathrm{char}\mathbb{Q} = \mathrm{char}\mathbb{R} = \mathrm{char}\mathbb{C} = \infty$.

Vlastnosti tělesa VI

Je-li těleso K rozšířením tělesa L, tak obě tělesa K a L mají tutéž jedničku i nulu, a proto $\mathrm{char} K = \mathrm{char} L$.

Zřejmě $\mathrm{char}\mathbb{Q} = \mathrm{char}\mathbb{R} = \mathrm{char}\mathbb{C} = \infty$.

Věta

Nechť K je těleso. Potom $\mathrm{char} K$ je rovna ∞ nebo prvočíslu.

Konečná tělesa I

V tomto odstavci si ukážeme příklady těles, jejichž charakteristika není ∞.
Z tohoto důvodu se tato tělesa podstatně liší od nám známých číselných těles.

Konečná tělesa I

V tomto odstavci si ukážeme příklady těles, jejichž charakteristika není ∞.
Z tohoto důvodu se tato tělesa podstatně liší od nám známých číselných těles.

Totiž, pro každé prvočíslo p sestrojíme jisté konečné těleso $\mathbb{Z}_p$, které má p prvků a charakteristiku p.
Naopak, dříve uvedená číselná tělesa jsou nekonečná.

Konečná tělesa II

Pro potřeby matematické analýzy, tedy i z hlediska fyzikálních aplikací, jsou nejdůležitějšími tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Konečná tělesa však v současnosti sehrávají důležitou úlohu např. v teorii kódování a kryptografii.

Konečná tělesa II

Pro potřeby matematické analýzy, tedy i z hlediska fyzikálních aplikací, jsou nejdůležitějšími tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Konečná tělesa však v současnosti sehrávají důležitou úlohu např. v teorii kódování a kryptografii.

Pro každé kladné celé číslo n označme

$$\mathbb{Z}_n = \{k \in \mathbb{N};\ k < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Konečná tělesa III

Množinu $\mathbb{Z}_n$ nazýváme ***množinou zbytkových tříd modulo*** n. Na této množině zavedeme dvě binární operace – sčítání $\oplus$ a násobení $\odot$ (je nutné odlišit sčítání a násobení v $\mathbb{Z}_n$ od příslušných operací v $\mathbb{Z}$).

Konečná tělesa III

Množinu $\mathbb{Z}_n$ nazýváme ***množinou zbytkových tříd modulo*** n. Na této množině zavedeme dvě binární operace – sčítání $\oplus$ a násobení $\odot$ (je nutné odlišit sčítání a násobení v $\mathbb{Z}_n$ od příslušných operací v $\mathbb{Z}$).

Pro $a, b \in \mathbb{Z}_n$ klademe

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \text{zbytek po dělení } (a+b)/n, \\ a \odot b &= \text{zbytek po dělení } (ab)/n. \end{aligned}$$

Konečná tělesa IV

$\oplus$ a $\odot$ jsou asociativní a komutativní operace na $\mathbb{Z}_n$, 0 je neutrální prvek sčítání a, pro $n > 1$, 1 je neutrální prvek násobení.

Konečná tělesa IV

$\oplus$ a $\odot$ jsou asociativní a komutativní operace na $\mathbb{Z}_n$, 0 je neutrální prvek sčítání a, pro $n > 1$, 1 je neutrální prvek násobení.

Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání a $\ominus a = n - a$ je opačný prvek k $a \in \mathbb{Z}_n$.

Konečná tělesa IV

$\oplus$ a $\odot$ jsou asociativní a komutativní operace na $\mathbb{Z}_n$, 0 je neutrální prvek sčítání a, pro $n > 1$, 1 je neutrální prvek násobení.

Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání a $\ominus a = n - a$ je opačný prvek k $a \in \mathbb{Z}_n$.

Věta

Množina $\mathbb{Z}_n$ s operacemi $\oplus$ a $\odot$ je těleso právě tehdy, když n je prvočíslo.

Konečná tělesa V

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

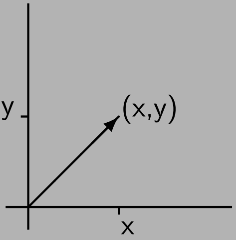
$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Multiplikativní tabulky sčítání a násobení v tělese $\mathbb{Z}_5$.

Interpretace I

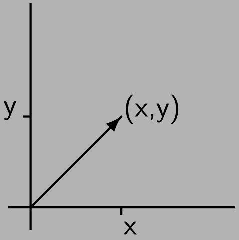
Vektory v rovině či v prostoru si představujeme jako orientované úsečky, t. j. úsečky, jejichž jeden krajní bod považujeme za počáteční a druhý za koncový – ten je označený obvykle šipkou.

Interpretace II



Vektor v rovině

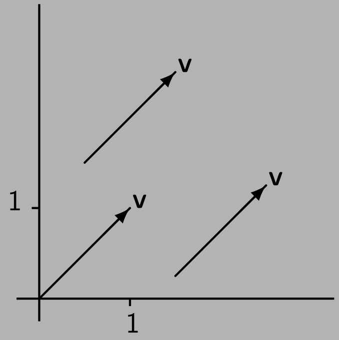
Interpretace II



Vektor v rovině

Přitom dvě stejně dlouhé, rovnoběžné a souhlasně orientované úsečky představují ten stejný vektor – říkáme, že jsou ***umístění*** téhož vektoru.

Interpretace III



Umístění téhož vektoru

Interpretace IV

Zvolíme-li si nějaký pevný bod O, pak všechny vektory v rovině či v prostoru můžeme jednoznačně reprezentovat jako orientované úsečky $\overrightarrow{OA}$ s počátkem v O.

Interpretace IV

Zvolíme-li si nějaký pevný bod O, pak všechny vektory v rovině či v prostoru můžeme jednoznačně reprezentovat jako orientované úsečky $\overrightarrow{OA}$ s počátkem v O.

Jejich koncem může být libovolný bod A roviny či prostoru, bod O nevyjímaje – orientovaná úsečka $\overrightarrow{OO}$ totiž představuje tzv. nulový vektor.

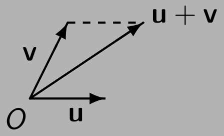
Interpretace V

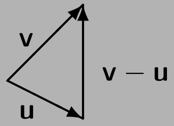
Vektory v rovině či v prostoru můžeme sčítat pomocí tzv. ***vektorového rovnoběžníku***.

Interpretace V

Vektory v rovině či v prostoru můžeme sčítat pomocí tzv. ***vektorového rovnoběžníku***.

Součet vektorů $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ je potom znázorněný orientovanou uhlopříčkou $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{OC}$ rovnoběžníka, jehož dvě přilehlé strany tvoří úsečky OA, OB.





Interpretace VI

Vektory můžeme rovněž násobit libovolnými skaláry, t. j. v našem případě reálnými čísly:

Interpretace VI

Vektory můžeme rovněž násobit libovolnými skaláry, t. j. v našem případě reálnými čísly:

pokud $c \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{v}$ je vektor, tak $c\mathbf{v}$ je vektor, t. j. orientovaná úsečka s počátkem v O, jejíž délka je $|c|$-násobkem délky úsečky $\mathbf{v}$, leží na té stejné přímce jako $\mathbf{v}$ a je orientovaná souhlasně s $\mathbf{v}$, pokud $c > 0$, resp. nesouhlasně s $\mathbf{v}$, pokud $c < 0$

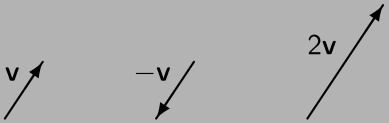
Interpretace VI

Vektory můžeme rovněž násobit libovolnými skaláry, t. j. v našem případě reálnými čísly:

pokud $c \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{v}$ je vektor, tak $c\mathbf{v}$ je vektor, t. j. orientovaná úsečka s počátkem v O, jejíž délka je $|c|$-násobkem délky úsečky $\mathbf{v}$, leží na té stejné přímce jako $\mathbf{v}$ a je orientovaná souhlasně s $\mathbf{v}$, pokud $c > 0$, resp. nesouhlasně s $\mathbf{v}$, pokud $c < 0$

(je-li $c = 0$ nebo $\mathbf{v}$ je nulový vektor, tak, samozřejmě, i $c\mathbf{v}$ je nulový vektor, takže nezáleží na jeho směru ani orientaci).

Interpretace VII



Násobení vektoru skalárem

Interpretace VII

Pokud si mimo počátek O zvolíme v rovině či prostoru ještě dvě resp. tři souřadné osy, t. j. navzájem kolmé přímky procházející počátkem, a na každé z nich jeden bod ve stejné jednotkové vzdálenosti od počátku, dostaneme pravouhlý souřadnicový systém v rovině či v prostoru.

Interpretace VII

Pokud si mimo počátek O zvolíme v rovině či prostoru ještě dvě resp. tři souřadné osy, t. j. navzájem kolmé přímky procházející počátkem, a na každé z nich jeden bod ve stejné jednotkové vzdálenosti od počátku, dostaneme pravouhlý souřadnicový systém v rovině či v prostoru.

Každý bod roviny či prostoru je potom jednoznačně určený uspořádanou dvojicí, resp. trojicí svých souřadnic a naopak, každá dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký bod roviny či prostoru.

Interpretace VIII

Rovněž každý vektor v rovině či v prostoru je potom jednoznačně určený souřadnicemi svého koncového bodu a naopak libovolná uspořádaná dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký vektor v rovině či prostoru.

Interpretace VIII

Rovněž každý vektor v rovině či v prostoru je potom jednoznačně určený souřadnicemi svého koncového bodu a naopak libovolná uspořádaná dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký vektor v rovině či prostoru.

Při pevném souřadnicovém systému tak můžeme množinu všech vektorů v rovině ztotožnit s množinou $\mathbb{R}^2$ a množinu všech vektorů v prostoru s množinou $\mathbb{R}^3$.

Interpretace IX

Jsou-li (při takovémto ztotožnění) $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ dva vektory v rovině, tak snadno ověříme, že pro jejich součet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, daný vektorovým rovnoběžníkem, platí

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Interpretace X

Je-li $c \in \mathbb{R}$, pak pro skalární násobek $c\mathbf{u}$ dostáváme

$$c\mathbf{u} = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2).$$

Podobně to můžeme ověřit pro vektory v prostoru, t. j. uspořádané trojice reálných čísel.

Interpretace XI

Navíc si všimněme, že předpoklady kolmosti souřadných os a rovnosti jednotkových délek v jednotlivých směrech nehrály v našich úvahách žádnou roli.

Interpretace XI

Navíc si všimněme, že předpoklady kolmosti souřadných os a rovnosti jednotkových délek v jednotlivých směrech nehrály v našich úvahách žádnou roli.

Stačí, aby systém souřadných os tvořily dvě různoběžné přímky (v rovině) resp. tři přímky neležící v rovině (v prostoru) protínající se v počátku O.

Interpretace XI

Navíc si všimněme, že předpoklady kolmosti souřadných os a rovnosti jednotkových délek v jednotlivých směrech nehrály v našich úvahách žádnou roli.

Stačí, aby systém souřadných os tvořily dvě různoběžné přímky (v rovině) resp. tři přímky neležící v rovině (v prostoru) protínající se v počátku O.

Za jednotkové délky ve směrech jednotlivých souřadných os můžeme zvolit délky libovolných (ne nutně stejně dlouhých) úseček.

Vektorové prostory I

Buď K (číselné) těleso. ***Vektorovým*** nebo též ***lineárním prostorem*** nad K nazýváme množinu V s význačným prvkem $\mathbf{0}$ a dvěma binárními operacemi –

Vektorové prostory I

Buď K (číselné) těleso. ***Vektorovým*** nebo též ***lineárním prostorem*** nad K nazýváme množinu V s význačným prvkem $\mathbf{0}$ a dvěma binárními operacemi –

sčítáním $+ : V \times V \to V$ a

Vektorové prostory I

Buď K (číselné) těleso. ***Vektorovým*** nebo též ***lineárním prostorem*** nad K nazýváme množinu V s význačným prvkem $\mathbf{0}$ a dvěma binárními operacemi –

sčítáním $+ : V \times V \to V$ a

násobením $\cdot : K \times V \to V$ – takovými, že platí

Vektorové prostory II

$$
\begin{aligned}
&(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)(\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z})),\\
&(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}),\\
&(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}),\\
&(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\forall a, b \in K)(\forall \mathbf{x} \in V)(a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x}),\\
&(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\forall a \in K)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (a \cdot \mathbf{x}) + (a \cdot \mathbf{y})),\\
&(\forall a, b \in K)(\forall \mathbf{x} \in V)((a + b) \cdot \mathbf{x} = (a \cdot \mathbf{x}) + (b \cdot \mathbf{x})).
\end{aligned}
$$

Vektorové prostory III

Skaláry značíme "obyčejnými" malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Vektorové prostory III

Skaláry značíme "obyčejnými" malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Poznámka. I když sčítání skalárů v (číselném(tělese K a sčítání vektorů značíme stejným znakem $+$, jde o různé operace.

Vektorové prostory III

Skaláry značíme "obyčejnými" malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Poznámka. I když sčítání skalárů v (číselném(tělese K a sčítání vektorů značíme stejným znakem $+$, jde o různé operace. Podobně násobení v (číselném) tělese a násobení vektoru skalárem jsou různé operace, ačkoliv obě značíme $\cdot$.

Vektorové prostory III

Skaláry značíme "obyčejnými" malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Poznámka. I když sčítání skalárů v (číselném(tělese K a sčítání vektorů značíme stejným znakem $+$, jde o různé operace.
Podobně násobení v (číselném) tělese a násobení vektoru skalárem jsou různé operace, ačkoliv obě značíme $\cdot$.
Později budeme stejně značit příslušné operace a nuly v různých vektorových prostorech.

Vektorové prostory IV

Z formálního hlediska připomínají axiómy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa K:

Vektorové prostory IV

Z formálního hlediska připomínají axiómy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa K:

sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na V s neutrálním prvkem $\mathbf{0} \in V$,

Vektorové prostory IV

Z formálního hlediska připomínají axiómy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa K:

sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na V s neutrálním prvkem $\mathbf{0} \in V$,

operace násobení vektoru skalárem splňuje jakousi podmínku "asociativity", $1 \in K$ je její "neutrální prvek"

Vektorové prostory IV

Z formálního hlediska připomínají axiómy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa K:

sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na V s neutrálním prvkem $\mathbf{0} \in V$,

operace násobení vektoru skalárem splňuje jakousi podmínku "asociativity", $1 \in K$ je její "neutrální prvek"

a platí dva "distributivní zákony".

Vektorové prostory V

Jeden podstatný rozdíl – násobení v (číselném) tělese K je binární operací na množině K, t. j. zobrazením $\cdot : K \times K \to K$, násobení ve vektorovém prostoru V nad číselným tělesem K není binární operace na V, ale binární operace $\cdot : K \times V \to V$.

Vektorové prostory VI

To nám však nebrání zavést obdobné dohody jako pro operace v (číselném) tělese: násobení má přednost před sčítáním a znak násobení budeme většinou vynechávat, t. j. budeme např. psát $a\mathbf{x} + \mathbf{y}$ namísto $(a \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{y}$.

Vektorové prostory VII

Rovněž budeme vynechávat závorky, jejichž umístění neovlivní výslednou hodnotu výrazů jako např. v $ab\mathbf{x}$ nebo $a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n$. Poslední výraz budeme taktéž značit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i$$

a nazývat ***lineární kombinací*** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ s koeficienty $a_1, \ldots, a_n$.

Vektorové prostory VIII

Speciálně pro $n = 1$ to znamená $\sum_{i=1}^{1} a_i \mathbf{x}_i = a_1 \mathbf{x}_1$; kvůli úplnosti pro $n = 0$ ještě klademe prázdnou lineární kombinaci $\sum_{i=1}^{0} a_i \mathbf{x}_i$ rovnou $\mathbf{0}$.

Tvrzení

Nechť V je vektorový prostor nad (číselným) tělesem K. Pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $a, b, a_1, \ldots, a_n \in K$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ platí

Vektorové prostory IX

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{z} \;\Rightarrow\; \mathbf{y}=\mathbf{z}, \\
\text{(b)} & (a\mathbf{x}=a\mathbf{y}\&\ a\neq 0) \;\Rightarrow\; \mathbf{x}=\mathbf{y}, \\
 & (a\mathbf{x}=b\mathbf{x}\&\ \mathbf{x}\neq \mathbf{0}) \;\Rightarrow\; a=b, \\
\text{(c)} & a\mathbf{0}=\mathbf{0}=0\mathbf{x}, \\
\text{(d)} & a\mathbf{x}=\mathbf{0} \;\Rightarrow\; (a=0 \vee \mathbf{x}=\mathbf{0}),
\end{array}$$

Vektorové prostory X

$$
\begin{array}{ll}
\text{(e)} & -\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}, \\
\text{(f)} & a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = a\mathbf{x} - a\mathbf{y}, \\
 & (a - b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} - b\mathbf{x}, \\
\text{(g)} & a(\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_n) = a\mathbf{x}_1 + \ldots + a\mathbf{x}_n, \\
 & (a_1 + \ldots + a_n)\mathbf{x} = a_1\mathbf{x} + \ldots + a_n\mathbf{x}.
\end{array}
$$

Příklady I

Zřejmě každé těleso K můžeme považovat za vektorový prostor nad sebou samým. Obecněji, pokud těleso L je rozšířením tělesa K, tak L můžeme považovat za vektorový prostor nad tělesem K (formálne stačí "zapomenout" na násobení některých dvojic prvků $a, b \in L$ a součin ab připustit jen pro $a \in K$, $b \in L$).

Příklady II

Podobným způsobem můžeme vektorový prostor V nad tělesem L zúžením násobení $L \times V \to V$ na násobení $K \times V \to V$ změnit na vektorový prostor nad tělesem K.

Příklady III

Pro libovolné těleso K a $n \in \mathbb{N}$ je množina

$$K^n = \{(x_1, \dots, x_n);\ x_1, \dots, x_n \in K\}$$

všech uspořádaných n-tic prvků z K spolu s operacemi

Příklady IV

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{y} =&(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\\ =&(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n),\\ c\mathbf{x} =&c(x_1,\dots,x_n)=(cx_1,\dots,cx_n),\end{aligned}$$

kde $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in K^n$, $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)\in K^n$ a $c\in K$, vektorový prostor nad tělesem K.

Příklady V

Zřejmě uspořádaná n-tice $\mathbf{0}_n = (0, \dots, 0)$ hraje úlohu nuly v K^n. Pokud bude potřebné rozlišit nulové vektory v prostorech K^n pro různá přirozená čísla n, budeme pro nulu v K^n používat označení $\mathbf{0}_n$. Opačný prvek k $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ je zřejmě

$$-\mathbf{x} = -(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Příklady VI

Říkáme, že operace na K^n jsou definované ***po složkách***. Prvky tohoto vektorového prostoru nazýváme ***n-rozměrné řádkové vektory*** nad tělesem K. Vektorový prostor K^0 sestává z jediného prvku $\emptyset$, představujícího "uspořádanou nultici", která je nutně nulou v K^0.

Příklady VII

Někdy bude výhodnější pracovat s ***n-rozměrnými sloupcovými vektory*** nad tělesem K, t. j. s vektory tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{kde } x_1, \ldots, x_n \in K. \\ \text{Píšeme rovněž } K^n. \end{array}$$

Příklady VIII

Polynomem nebo též ***mnohočlenem*** f *stupně* n, kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, v proměnné x nad tělesem K rozumíme formální výraz tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \end{aligned}$$

Příklady IX

kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in$ jsou skaláry, nazývané *koeficienty* polynomu f, a $a_n \neq 0$.

Nulu $0 \in K$ považujeme za polynom stupně -1 a nenulové skaláry $a \in K$ za polynomy stupně 0. Zřejmě každý polynom f definuje (stejně označovanou) funkci $f : K \to K$ danou předpisem $c \mapsto f(c)$, t. j. dosazením konkrétních hodnot $c \in K$ za proměnnou x do polynomu f.

Příklady X

Množinu všech polynomů v proměnné x nad K *stupně nejvýše* n, kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, budeme značit $K^{(n)}[x]$; množinu *všech polynomů* v proměnné x nad K značíme $K[x]$.
Libovolný polynom $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in K[x]$ stupně $m < n$ můžeme psát ve tvaru

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m + 0x^{m+1} + \ldots + 0x^n,$$

t. j. v tvaru $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, kde $b_i = 0$ pro $m < i \leq n$.

Příklady XI

S použitím této konvence lze definovat součet $f + g$ polynomů $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ z $K[x]$ předpisem

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i)x^i.$$

Příklady XII

Pokud navíc $c \in K$, klademe

$$(cf)(x) = cf(x) = \sum_{i=0}^{n} ca_i x^i.$$

Snadno ověříme, že s takto po složkách definovanými operacemi součtu a skalárního násobku tvoří každá z množin polynomů $K^{(n)}[x]$, kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, a zároveň i množina všech polynomů $K[x]$ vektorový prostor nad tělesem K.

2. ZÁKLADY MATICOVÉHO POČTU

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

21. září 2006

Abstrakt

V této kapitole se seznámíme s ***maticemi***, t. j. obdélníkovými tabulkami, s jejichž pomocí budeme kódovat nejrůznější důležité údaje o vektorových prostorech, a naučíme se s nimi pracovat.

Obsah přednášky I

- Matice nad danou množinou
  - Typy matic, řádky a sloupce matice.
  - Transponovaná matice, blokové matice.

Obsah přednášky I

- Matice nad danou množinou
  - Typy matic, řádky a sloupce matice.
  - Transponovaná matice, blokové matice.
- Matice nad daným tělesem
  - Vektorový prostor matic.
  - Násobení matic, operace s blokovými maticemi.

Obsah přednášky I

- Matice nad danou množinou
  - Typy matic, řádky a sloupce matice.
  - Transponovaná matice, blokové matice.
- Matice nad daným tělesem
  - Vektorový prostor matic.
  - Násobení matic, operace s blokovými maticemi.
- Matice nad daným vektorovým prostorem

Matice nad danou množinou I

Nechť X je libovolná množina a $m, n \in \mathbb{N}$.

Maticí typu $m \times n$, nebo též $m \times n$*-rozměrnou maticí* nad množinou X rozumíme obdélníkovou tabulku

Matice nad danou množinou II

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sestávající z prvků množiny X.

Matice nad danou množinou II

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sestávající z prvků množiny X.

Zkráceně píšeme $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ nebo $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Matice nad danou množinou III

Prvky $a_{ij} \in X$, kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, se nazývají ***prvky matice*** $\mathbf{A}$.

Matice nad danou množinou III

Prvky $a_{ij} \in X$, kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, se nazývají ***prvky matice*** $\mathbf{A}$.

Prvek a_{ij}, který se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$ nazýváme též ***prvek v místě*** (na pozici) (i, j), resp. (i, j)***-tý prvek*** matice $\mathbf{A}$.

Matice nad danou množinou III

Prvky $a_{ij} \in X$, kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, se nazývají ***prvky matice*** $\mathbf{A}$.

Prvek a_{ij}, který se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$ nazýváme též ***prvek v místě*** (na pozici) (i, j), resp. (i, j)-***tý prvek*** matice $\mathbf{A}$.

Množinu všech $m \times n$-rozměrných matic nad množinou X značíme $X^{m \times n}$ (též $Mat_{m,n}(X)$).

Matice nad danou množinou III

Prvky $a_{ij} \in X$, kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, se nazývají ***prvky matice*** $\mathbf{A}$.

Prvek a_{ij}, který se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$ nazýváme též ***prvek v místě*** (na pozici) (i,j), resp. (i,j)-***tý prvek*** matice $\mathbf{A}$.

Množinu všech $m \times n$-rozměrných matic nad množinou X značíme $X^{m \times n}$ (též $Mat_{m,n}(X)$).

Pokud $m = n$, mluvíme o ***čtvercových maticích řádu*** n nad množinou X.

Matice nad danou množinou IV

Poznamenejme, že v případě, když některé z čísel m, n je 0, množina $X^{m \times n}$ sestáva z jediné a to ***prázdné*** matice $\emptyset$. Dále se budeme vždy bavit jen o maticích kladných rozměrů $m \times n$.

Matice nad danou množinou IV

Poznamenejme, že v případě, když některé z čísel m, n je 0, množina $X^{m\times n}$ sestáva z jediné a to ***prázdné*** matice $\emptyset$. Dále se budeme vždy bavit jen o maticích kladných rozměrů $m \times n$.

Dvě matice nad množinou X považujeme za ***navzájem stejné*** neboli ***totožné***, pokud mají stejné rozměry a stejné prvky na příslušných místech.

Matice nad danou množinou V

To znamená, že pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p\times q}$ nad X klademe $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ právě tehdy, když $m = p$, $n = q$ a pro všechny $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ platí $a_{ij} = b_{ij}$.

Matice nad danou množinou V

To znamená, že pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p\times q}$ nad X klademe $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ právě tehdy, když $m = p$, $n = q$ a pro všechny $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ platí $a_{ij} = b_{ij}$.

Množina matic typu $1 \times n$ nad X splývá s množinou X^n, pokud uspořádané n-tice prvků z X zapisujeme do řádku. Podobně, pokud uspořádané m-tice prvků z X zapisujeme do sloupce, tak množina matic typu $m \times 1$ nad X splývá s množinou X^m.

Matice nad danou množinou VI

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in X^{m\times n}$. Uspořádanou n-tici

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in X^{1\times n},$$

kde $1 \leq i \leq m$, nazýváme ***i-tým řádkem*** matice $\mathbf{A}$.

Matice nad danou množinou VII

Podobně, uspořádanou m-tici

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \text{ kde } 1 \leq j \leq n$$

nazýváme ***j-tým sloupcem*** matice $\mathbf{A}$.

Matice nad danou množinou VIII

Matici $\mathbf{A}$ tak můžeme ztotožnit jak se sloupcem složeným z jejích řádků tak s řádkem složeným z jejích sloupců, t. j.

$$\mathbf{A} \quad = \quad \left(\ \mathbf{s}_1(\mathbf{A}),\ \ \mathbf{s}_2(\mathbf{A}),\ \ \ldots,\ \ \mathbf{s}_n(\mathbf{A})\ \right),$$

Matice nad danou množinou IX

a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

Matice nad danou množinou X

Matici, kterou získáme z matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ záměnou jejích řádků a sloupců, nazýváme ***transponovanou maticí*** k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\mathbf{A}^T$.

Matice nad danou množinou XI

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matice nad danou množinou XI

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $\mathbf{A}^T \in X^{n \times m}$ a prvek na pozici (i, j) matice $\mathbf{A}^T$ je a_{ji}.

Matice nad danou množinou XI

Zřejmě pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ platí

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}.$$

Matice nad danou množinou XI

Zřejmě pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ platí

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}.$$

Transpozicí matic-řádků z $X^{1 \times n}$ dostaneme matice-sloupce z $X^{n \times 1}$ a transpozicí matic-sloupců z $X^{m \times 1}$ matice-řádky z $X^{1 \times m}$.

Matice nad danou množinou XII

Na základě této poznámky lze snadno vidět, že pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ a $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ platí

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{A}^T) = \mathbf{r}_i(\mathbf{A})^T, \qquad \mathbf{r}_j(\mathbf{A}^T) = \mathbf{s}_j(\mathbf{A})^T.$$

Matice nad danou množinou XIII

Čtvercová matice $\mathbf{A} \in X^{n \times n}$ se nazývá ***symetrická***, pokud $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, t. j. pokud $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechny indexy $i, j = 1, \ldots, n$.

Matice nad danou množinou XIII

Čtvercová matice $\mathbf{A} \in X^{n \times n}$ se nazývá ***symetrická***, pokud $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, t. j. pokud $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechny indexy $i, j = 1, \ldots, n$.

Posloupnost prvků $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ nazýváme ***diagonálou*** čtvercové matice $\mathbf{A}$.

Matice nad danou množinou XIII

Čtvercová matice $\mathbf{A} \in X^{n \times n}$ se nazývá ***symetrická***, pokud $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, t. j. pokud $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechny indexy $i, j = 1, \ldots, n$.

Posloupnost prvků $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ nazýváme ***diagonálou*** čtvercové matice $\mathbf{A}$.

Transponovanou matici k čtvercové matici $\mathbf{A}$ zřejmě získáme "osovou souměrností" jejich prvků podle diagonály.

Matice nad danou množinou XIV

Někdy bude užitečné spojit dvě matice $\mathbf{A} \in X^{m \times n_1}$, $\mathbf{B} \in X^{m \times n_2}$ se stejným počtem řádků do jedné matice tak, že příslušné tabulky jednoduše napíšeme vedle sebe.

Matice nad danou množinou XIV

Někdy bude užitečné spojit dvě matice $\mathbf{A} \in X^{m \times n_1}$, $\mathbf{B} \in X^{m \times n_2}$ se stejným počtem řádků do jedné matice tak, že příslušné tabulky jednoduše napíšeme vedle sebe.

Výsledná matice je typu $m \times (n_1 + n_2)$ a značíme ji $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, případně $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{B})$.

Matice nad danou množinou XV

Podobně můžeme spojit dvě matice $\mathbf{A} \in X^{m_1 \times n}$, $\mathbf{B} \in X^{m_2 \times n}$ se stejným počtem sloupců do jedné matice tak, že příslušné tabulky napíšeme pod sebe.

Matice nad danou množinou XV

Podobně můžeme spojit dvě matice $\mathbf{A} \in X^{m_1 \times n}$, $\mathbf{B} \in X^{m_2 \times n}$ se stejným počtem sloupců do jedné matice tak, že příslušné tabulky napíšeme pod sebe.

Výsledná matice je typu $(m_1 + m_2) \times n$ a značíme ji

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \text{ případně } \left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right).$$

Matice nad danou množinou XVI

Právě popsané konstrukce jsou příklady tzv. ***blokových matic***. Původní matice, ze kterých takto vytváříme blokovou matici, potom nazývame jejími ***bloky***.

Matice nad danou množinou XVI

Právě popsané konstrukce jsou příklady tzv. ***blokových matic***. Původní matice, ze kterých takto vytváříme blokovou matici, potom nazýváme jejími ***bloky***.

Samozřejmě můžeme vedle sebe resp. pod sebe zařadit větší počet bloků než pouze dva.

Matice nad danou množinou XVI

Právě popsané konstrukce jsou příklady tzv. ***blokových matic***. Původní matice, ze kterých takto vytváříme blokovou matici, potom nazývame jejími ***bloky***.

Samozřejmě můžeme vedle sebe resp. pod sebe zařadit větší počet bloků než pouze dva.

Naopak, někdy může být účelné vyznačit v dané matici nějaké menší obdélníkové části jako její bloky.

Matice nad danou množinou XVII

Pak mluvíme o tzv. ***blokovém tvaru*** dané matice.

Matice nad danou množinou XVII

Pak mluvíme o tzv. ***blokovém tvaru*** dané matice.

Příkladem toho byl zápis matice $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ jako řádku složeného z jejích sloupců, případně jako sloupce složeného z jejích řádků.

Matice nad danou množinou XVII

Pak mluvíme o tzv. ***blokovém tvaru*** dané matice.

Příkladem toho byl zápis matice $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ jako řádku složeného z jejích sloupců, případně jako sloupce složeného z jejích řádků.

Uvedená dvě schemata vytváření blokových matic "vedle sebe" a "pod sebe" můžeme kombinovat.

Matice nad danou množinou XVIII

Např. z matic $\mathbf{A}_{11} \in X^{m_1 \times n_1}$, $\mathbf{A}_{12} \in X^{m_1 \times n_2}$, $\mathbf{A}_{21} \in X^{m_2 \times n_1}$, $\mathbf{A}_{22} \in X^{m_2 \times n_2}$ můžeme vytvořit blokovou matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

typu $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$.

Matice nad danou množinou XIX

Tuto konstrukci můžeme zřejmým způsobem zevšeobecnit i na větší systémy matic a zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{k \times l} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{k1} & \dots & \mathbf{A}_{kl} \end{pmatrix},$$

Matice nad danou množinou XX

přičemž jednotlivé bloky $\mathbf{A}_{ij}$ jsou matice nad X rozměrů $m_i \times n_j$, kde $(m_1, \ldots, m_k)$, $(n_1, \ldots, n_l)$ jsou nějaké konečné posloupnosti přirozených čísel.

Matice nad danou množinou XX

přičemž jednotlivé bloky $\mathbf{A}_{ij}$ jsou matice nad X rozměrů $m_i \times n_j$, kde $(m_1, \dots, m_k)$, $(n_1, \dots, n_l)$ jsou nějaké konečné posloupnosti přirozených čísel.

Matici nad množinou X z této "matice matic" dostaneme tak, že si v $\mathbf{A}$ odmyslíme vnitřní závorky oddělující její jednotlivé bloky $\mathbf{A}_{ij}$.

Matice nad daným tělesem I

Na množině X, nad kterou jsme vytvářeli příslušné matice, jsme doposud nepředpokládali žádnou další strukturu.

Matice nad daným tělesem I

Na množině X, nad kterou jsme vytvářeli příslušné matice, jsme doposud nepředpokládali žádnou další strukturu.

Na množinách matic $X^{m \times n}$ sa nám poměrně bohatá struktura přirozeným způsobem objevila.

Matice nad daným tělesem II

Všechny doposud zavedené maticové operace a vlastnosti však měly výlučně ***poziční charakter*** – zakládaly sa na reprezentaci každé matice jako příslušné obdélníkové tabulky.

Matice nad daným tělesem II

Všechny doposud zavedené maticové operace a vlastnosti však měly výlučně ***poziční charakter*** – zakládaly sa na reprezentaci každé matice jako příslušné obdélníkové tabulky.

Další maticové operace a vlastnosti, které hodláme zavést a později využívat, už budou podmíněné přítomností jisté struktury na množině X.

Matice nad daným tělesem III

Nejdůležitější a, až na pár vyjímek, vlastně jediný druh matic, jimiž se budeme zabývat, tvoří matice nad nějakým tělesem.

Matice nad daným tělesem III

Nejdůležitější a, až na pár vyjímek, vlastně jediný druh matic, jimiž se budeme zabývat, tvoří matice nad nějakým tělesem.

V celém odstavci K označuje pevně zvolené, jinak však libovolné těleso.

Matice nad daným tělesem III

Nejdůležitější a, až na pár vyjímek, vlastně jediný druh matic, jimiž se budeme zabývat, tvoří matice nad nějakým tělesem.

V celém odstavci K označuje pevně zvolené, jinak však libovolné těleso.

V souladu s předešlým odstavcem $K^{m \times n}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, označuje množinu všech matic typu $m \times n$ nad číselným tělesem K.

Matice nad daným tělesem IV

Pro pevné $m, n \in \mathbb{N}$ budeme na množině matic $K^{m \times n}$ definovat po složkách operace součtu a skalárního násobku.

Matice nad daným tělesem IV

Pro pevné $m, n \in \mathbb{N}$ budeme na množině matic $K^{m \times n}$ definovat po složkách operace součtu a skalárního násobku. Tedy pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$ nad K a $c \in K$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \\ c\mathbf{A} &= (ca_{ij})_{m \times n}. \end{aligned}$$

Matice nad daným tělesem V

Součet matic $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je definovaný jen pro matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ stejného typu a samotná matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je téhož typu jako $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.

Matice nad daným tělesem V

Součet matic $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je definovaný jen pro matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ stejného typu a samotná matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je téhož typu jako $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.

Neutrálním prvkem operace sčítání na $K^{m \times n}$ je matice typu $m \times n$, jejíž všechny prvky jsou nulové; nazýváme ji ***nulová matice*** typu $m \times n$ a označujeme ji $\mathbf{0}_{m,n}$, resp. $\mathbf{0}$, je-li její rozměr jasný z kontextu nebo na něm nezáleží.

Matice nad daným tělesem VI

Opačným prvkem k matici $A = (a_{ij})_{m \times n}$ je zřejmě matice $-\mathbf{A} = (-a_{ij})_{m \times n}$.

Matice nad daným tělesem VI

Opačným prvkem k matici $A = (a_{ij})_{m \times n}$ je zřejmě matice $-\mathbf{A} = (-a_{ij})_{m \times n}$.

Matice pevného typu $m \times n$ nad tělesem K s takto definovanými operacemi součtu a skalárního násobku tvoří ***vektorový prostor*** nad tělesem K tj. $K^{m \times n}$ bude dále označovat příslušný vektorový prostor.

Matice nad daným tělesem VII

Nejprve sa naučíme násobit některé dvojice vektorů.

Matice nad daným tělesem VII

Nejprve sa naučíme násobit některé dvojice vektorů.

Součinem $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ***řádkového vektoru*** $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^{1\times n}$ ***a sloupcového vektoru*** $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \in K^{n\times 1}$ rozumíme skalár

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \, .$$

Matice nad daným tělesem VIII

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= (x_1,\ldots,x_n)\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1+\ldots+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\,.\end{aligned}$$

V tomto případě jde o běžný "***skalární součin***" vektorů $\mathbf{x},\mathbf{y}\in K^n$.

Matice nad daným tělesem VIII

Snadno se ověří, že pre všechna $n \in \mathbb{N}$, $c \in K$ a $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in K^{1\times n}$, $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in K^{n\times 1}$ platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{y}') &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}', \\
(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}, \\
\mathbf{x} \cdot c\mathbf{y} = c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &= c\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \\
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x}^T.
\end{aligned}$$

Matice nad daným tělesem IX

Pro takto definovaný součin vektorů jsou splněné dobře známé vlastnosti "skalárního součinu".

Matice nad daným tělesem IX

Pro takto definovaný součin vektorů jsou splněné dobře známé vlastnosti "skalárního součinu".

Říkáme, že násobení řádkových a sloupcových vektorů je ***distributivní*** (z obou stran) vzhledem ke sčítání a ***komutuje***, t. j. je zaměnitelné s operací skalárního násobku.

Matice nad daným tělesem IX

Pro takto definovaný součin vektorů jsou splněné dobře známé vlastnosti "skalárního součinu".

Říkáme, že násobení řádkových a sloupcových vektorů je ***distributivní*** (z obou stran) vzhledem ke sčítání a ***komutuje***, t. j. je zaměnitelné s operací skalárního násobku.

Poslední rovnost můžeme chápat jako "komutativitu" tohoto součinu; vděčíme za ni komutativitě násobení v tělese K.

Matice nad daným tělesem X

Nechť $m, n, p \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n \times p}$.

Matice nad daným tělesem X

Nechť $m, n, p \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n\times p}$.
Součinem matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ rozumíme matici

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}))_{m\times p}.$$

Matice nad daným tělesem X

Nechť $m, n, p \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n \times p}$.
Součinem matic **A**, **B** rozumíme matici

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}))_{m \times p}.$$

Všimněme si, že součin matic **A**, **B** je definovaný, pouze pokud se počet sloupců matice **A** rovná počtu řádků matice **B**, t. j. právě tehdy, když řádky matice **A** a sloupce matice **B** mají stejný rozměr.

Matice nad daným tělesem XI

Součin matic typů $m \times n$ a $n \times p$ je matice typu $m \times p$, což si můžeme lehce zapamatovat v symbolickém tvaru

$$[m \times n] \cdot [n \times p] = [m \times p],$$

připomínajícím rozměrové vztahy ve fyzice.

Matice nad daným tělesem XI

Součin matic typů $m \times n$ a $n \times p$ je matice typu $m \times p$, což si můžeme lehce zapamatovat v symbolickém tvaru

$$[m \times n] \cdot [n \times p] = [m \times p],$$

připomínajícím rozměrové vztahy ve fyzice.

Součin dvou čtvercových matic typu $n \times n$ je tedy opět matice typu $n \times n$.

Matice nad daným tělesem XII

Prvek na pozici (i,k) matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ dostaneme jako součin i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a k-tého sloupce matice $\mathbf{B}$, tedy jako výraz

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}) = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1} b_{1k} + \ldots + a_{in} b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \,.$$

Matice nad daným tělesem XIII

Snadno pak ověříme následující rovnosti

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{s}_k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}).$$

Matice nad daným tělesem XIV

Násobení matic je (z obou stran) ***distributivní*** vzhledem ke sčítání. To znamená, že pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ a matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}' \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}' \in K^{n \times p}$ platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}') &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}', \\ (\mathbf{A} + \mathbf{A}') \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Matice nad daným tělesem XV

Z distributivity součinu vektorů vzhledem k jejich součtu je totiž jasné, že (i,k)-tý prvek matice $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{B}')$ je

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}+\mathbf{B}') &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot(\mathbf{s}_k(\mathbf{B})+\mathbf{s}_k(\mathbf{B}'))\\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B})+\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}'),\end{aligned}$$

tedy sa rovná (i,k)-tému prvku matice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}'$. Podobně pro druhou rovnost.

Matice nad daným tělesem XVI

Podobně, s využitím zaměnitelnosti součinu vektorů a skalárního násobku můžeme dokázat, že pre libovolný skalár $c \in K$ a všechny matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot c\mathbf{B} = c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = c\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Matice nad daným tělesem XVI

Podobně, s využitím zaměnitelnosti součinu vektorů a skalárního násobku můžeme dokázat, že pre libovolný skalár $c \in K$ a všechny matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot c\mathbf{B} = c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = c\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Říkáme pak, že násobení matic ***komutuje***, t. j. je zaměnitelné s operací skalárního násobku.

Matice nad daným tělesem XVII

Násobení matic je též ***asociativní***: pro $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

Matice nad daným tělesem XVII

Násobení matic je též ***asociativní***: pro $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

Pro důkaz toho si stačí uvědomit, že pro libovolné vektory $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^{1 \times n}$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)^T \in K^{p \times 1}$ platí:

Matice nad daným tělesem XVIII

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{y}) = (x_1,\dots,x_n)\cdot\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{p} b_{1k}y_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{p} b_{nk}y_k\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}y_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_{jk}\right) y_k =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_{j1},\dots,\sum_{j=1}^{n} x_j b_{jp}\right)\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_p\end{pmatrix} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{y}.$$

Matice nad daným tělesem XIX

Pak pro $1 \leq i \leq m$, $1 \leq l \leq q$, je (i, l)-tý prvek na pozici (i, l) matice $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{C})) \\ &= (\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{C}), \end{aligned}$$

tedy sa rovná (i, l)-tému prvku matice $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.

Matice nad daným tělesem XX

Čtvercovou matici řádu n, která má všechny prvky na diagonále rovné 1 a mimo diagonálu 0, označujeme $\mathbf{I}_n$ a nazýváme ***jednotková matice*** řádu n.

Matice nad daným tělesem XX

Čtvercovou matici řádu n, která má všechny prvky na diagonále rovné 1 a mimo diagonálu 0, označujeme $\mathbf{I}_n$ a nazývame ***jednotková matice*** řádu n.

S použitím tzv. ***Kroneckerova symbolu***

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j, \\ 0, & \text{pro } i \neq j, \end{cases}$$

Matice nad daným tělesem XXI

můžeme psát

$$\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice nad daným tělesem XXII

Jednotkové matice hrají úlohu neutrálních prvků pro násobení matic.

Matice nad daným tělesem XXII

Jednotkové matice hrají úlohu neutrálních prvků pro násobení matic.

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí

$$\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n.$$

Matice nad daným tělesem XXII

Jednotkové matice hrají úlohu neutrálních prvků pro násobení matic.

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí

$$\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n.$$

Množina $K^{n \times n}$ všech čtvercových matic řádu n je kromě struktury vektorového prostoru vybavená asociativní operací násobení, která je (z obou stran) distributivní vzhledem ke sčítání matic, komutuje s operací skalárního násobku a jednotková matice $\mathbf{I}_n$ je její neutrální prvek.

Matice nad daným tělesem XXIII

To nám, podobně jako pro prvky tělesa K, umožňuje zavést i ***mocniny čtvercových matic***.

Matice nad daným tělesem XXIII

To nám, podobně jako pro prvky tělesa K, umožňuje zavést i ***mocniny čtvercových matic***.
Pro $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, klademe $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$ a

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{k\text{-krát}},$$

pro $0 < k \in \mathbb{N}$;

Matice nad daným tělesem XXIII

To nám, podobně jako pro prvky tělesa K, umožňuje zavést i ***mocniny čtvercových matic***.
Pro $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, klademe $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$ a

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{k\text{-krát}},$$

pro $0 < k \in \mathbb{N}$;
tedy $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, atd.

Matice nad daným tělesem XXIV

Uvědomme si, že pro $n > 1$ – na rozdíl od komutativity násobení v tělese K – násobení matic z pozičních důvodů *není komutativní* na $K^{n\times n}$.

Matice nad daným tělesem XXIV

Uvědomme si, že pro $n > 1$ – na rozdíl od komutativity násobení v tělese K – násobení matic z pozičních důvodů *není komutativní* na $K^{n\times n}$. Například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix}.$$

Matice nad daným tělesem XXV

Naproti tomu komutativita násobení v tělese K má za důsledek, že pre všechna m, n, p a matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ platí rovnost

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

Matice nad daným tělesem XXV

Naproti tomu komutativita násobení v tělese K má za důsledek, že pre všechna m, n, p a matice $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times p}$ platí rovnost

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

Totiž

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}) = \mathbf{s}_k(\mathbf{B})^T \cdot \mathbf{r}_i(\mathbf{A})^T = \mathbf{r}_k(\mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{s}_i(\mathbf{A}^T).$$

Matice nad daným tělesem XXVI

Operace maticového součtu a skalárního násobku můžeme na blokových maticích rozložit na jednotlivé bloky.

Matice nad daným tělesem XXVI

Operace maticového součtu a skalárního násobku můžeme na blokových maticích rozložit na jednotlivé bloky.

Jsou-li $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{k\times l}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{ij})_{k\times l}$ blokové matice nad číselným tělesem K a odpovídající si si bloky $\mathbf{A}_{ij}$, $\mathbf{B}_{ij}$ se stejným typem $m_i \times n_j$, tak jejich součet je opět

Matice nad daným tělesem XXVII

bloková matice

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij})_{k \times l}$$

s bloky stejných typů.

Matice nad daným tělesem XXVII

bloková matice

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij})_{k \times l}$$

s bloky stejných typů.

S operací skalárního násobku je to ještě jednodušší, totiž nemusíme se starat o shodnost rozměrů jednotlivých bloků.

$$c\mathbf{A} = (c\mathbf{A}_{ij})_{k \times l}.$$

Matice nad daným tělesem XXVIII

Bloková struktura sa přenáší i na součin matic za podmínky, že sloupce první matice jsou ve stejném pořadí rozděleny na stejný počet stejně velkých skupin, řekněme $n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu$, jako sloupce druhé matice.

Matice nad daným tělesem XXVIII

Bloková struktura sa přenáší i na součin matic za podmínky, že sloupce první matice jsou ve stejném pořadí rozděleny na stejný počet stejně velkých skupin, řekněme $n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu$, jako sloupce druhé matice. Tedy pokud $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{\mu\times\nu}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{jk})_{\nu\times\vartheta}$ jsou blokové matice nad K, přičemž blok $\mathbf{A}_{ij}$ je typu $m_i \times n_j$ a blok $\mathbf{B}_{jk}$ typu $n_j \times p_k$,

Matice nad daným tělesem XXVIII

Bloková struktura sa přenáší i na součin matic za podmínky, že sloupce první matice jsou ve stejném pořadí rozděleny na stejný počet stejně velkých skupin, řekněme $n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu$, jako sloupce druhé matice. Tedy pokud $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{\mu\times\nu}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{jk})_{\nu\times\vartheta}$ jsou blokové matice nad K, přičemž blok $\mathbf{A}_{ij}$ je typu $m_i \times n_j$ a blok $\mathbf{B}_{jk}$ typu $n_j \times p_k$, tak jejich součin je bloková matice tvaru $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (\mathbf{C}_{ik})_{\mu\times\vartheta}$, kde blok

$$\mathbf{C}_{ik} = \mathbf{A}_{i1}\cdot\mathbf{B}_{1k} + \mathbf{A}_{i2}\cdot\mathbf{B}_{2k} + \ldots + \mathbf{A}_{in}\cdot\mathbf{B}_{nk}$$

je typu $m_i \times p_k$.

Matice nad daným tělesem XXIX

Blokové matice násobíme stejně jako "obyčejné" matice, jen s tím rozdílem, že součet resp. součin v číselném tělese K nahradíme součtem resp. součinem matic.

Matice nad daným tělesem XXIX

Blokové matice násobíme stejně jako "obyčejné" matice, jen s tím rozdílem, že součet resp. součin v číselném tělese K nahradíme součtem resp. součinem matic.

Jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ jsou příkladem tzv. diagonálních matic.

Matice nad daným tělesem XXIX

Blokové matice násobíme stejně jako "obyčejné" matice, jen s tím rozdílem, že součet resp. součin v číselném tělese K nahradíme součtem resp. součinem matic.

Jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ jsou příkladem tzv. diagonálních matic.

Čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ nazýváme ***diagonální***, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechny $i \neq j$, t. j. pokud všechny její prvky mimo diagonálu jsou nuly.

Matice nad daným tělesem XXX

Diagonální matici, která má na diagonále postupně prvky $d_1, d_2, \ldots, d_n \in K$ značíme $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Matice nad daným tělesem XXX

Diagonální matici, která má na diagonále postupně prvky $d_1, d_2, \ldots, d_n \in K$ značíme $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Tedy např.

$$\mathbf{I}_n = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n\text{-krát}}).$$

Matice nad daným tělesem XXX

Diagonální matici, která má na diagonále postupně prvky $d_1, d_2, \ldots, d_n \in K$ značíme $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Tedy např.

$$\mathbf{I}_n = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n\text{-krát}}).$$

Podobně můžeme definovat i tzv. blokově diagonální matice.

Matice nad daným tělesem XXXI

Pokud $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ jsou čtvercové matice řádů $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tak ***blokově diagonální maticí*** s bloky $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ nazýváme čtvercovou blokovou matici

$$\mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{A}_k \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{0}$ nacházející se na pozici (i, j) označuje nulovou matici $\mathbf{0}_{n_i n_j}$.

Matice nad daným tělesem XXXII

Pravidlo o součinu blokových matic se redukuje na zvlášť jednoduchý tvar pro blokově diagonální matice – násobení funguje ***diagonálně po složkách***.

Matice nad daným tělesem XXXII

Pokud $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k)$, $\mathbf{B} = \mathrm{diag}(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k)$ jsou blokově diagonální matice, přičemž odpovídající si bloky $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$ jsou čtvercové matice stejného řádu n_i, jejich součin je blokově diagonální matice tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{B}_k)$$

s čtvercovými bloky řádů $n_1, \ldots, n_k$.

Matice nad daným tělesem XXXII

Pravidlo o součinu blokových matic se redukuje na zvlášť jednoduchý tvar pro blokově diagonální matice – násobení funguje ***diagonálně po složkách***. Pokud $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k)$, $\mathbf{B} = \mathrm{diag}(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k)$ jsou blokově diagonální matice, přičemž odpovídající si bloky $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$ jsou čtvercové matice stejného řádu n_i, jejich součin je blokově diagonální matice tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{B}_k)$$

s čtvercovými bloky řádů $n_1, \ldots, n_k$.

Matice nad daným tělesem XXXIII

Speciálně, pro "obyčejné" diagonální matice platí

$$\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \cdot \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n) = \mathrm{diag}(a_1 b_1, \dots, a_n b_n).$$

Matice nad daným tělesem XXXIII

Speciálně, pro "obyčejné" diagonální matice platí

$$\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \cdot \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n) = \mathrm{diag}(a_1 b_1, \dots, a_n b_n).$$

Platí analogická pravidla pro součet a skalární násobek (blokově) diagonálních matic.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k) \\ c\mathbf{A} &= \mathrm{diag}(c\mathbf{A}_1, \dots, c\mathbf{A}_k) \end{aligned}$$

Matice nad vektorovým prostorem I

Matice typu $m \times n$ nad tělesem K jsou speciálním druhem blokových matic.

Matice nad vektorovým prostorem I

Matice typu $m \times n$ nad tělesem K jsou speciálním druhem blokových matic.

Matici $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ můžeme považovat jednak za blokovou matici s bloky a_{ij} typu 1×1, jednak se na ni můžeme dívat jako na řádek jejich sloupců resp. jako na sloupec jejích řádků.

Matice nad vekt. prostorem II

A pak chápeme jako matici typu $m \times 1$ nad vektorovým prostorem $K^{1\times n}$, resp. jako matici typu $1 \times n$ nad vektorovým prostorom $K^{m\times 1}$.

Matice nad vekt. prostorem II

A pak chápeme jako matici typu $m \times 1$ nad vektorovým prostorem $K^{1 \times n}$, resp. jako matici typu $1 \times n$ nad vektorovým prostorom $K^{m \times 1}$.

Pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ a libovolný (abstraktní) vektorový prostor V máme definovanou množinu $V^{m \times n}$ všech matic nad množinou V.

Matice nad vekt. prostorem II

A pak chápeme jako matici typu $m \times 1$ nad vektorovým prostorem $K^{1\times n}$, resp. jako matici typu $1 \times n$ nad vektorovým prostorom $K^{m\times 1}$.

Pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ a libovolný (abstraktní) vektorový prostor V máme definovanou množinu $V^{m\times n}$ všech matic nad množinou V.

Na množině $V^{m\times n}$ můžeme zavést operace součtu a skalárního násobku po složkách. $V^{m\times n}$ s těmito operacemi tvoří vektorový prostor nad tělesem K.

Matice nad vekt. prostorem III

Zobecníme nyní operaci skalárního násobku $K \times V \to V$ na operaci součinu mezi maticemi vhodných typů nad K a nad V.

Matice nad vekt. prostorem III

Zobecníme nyní operaci skalárního násobku $K \times V \to V$ na operaci součinu mezi maticemi vhodných typů nad K a nad V.

Pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_{jk}) \in V^{n \times p}$ klademe $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{v}_{ik}) \in V^{m \times p}$, kde

$$\mathbf{v}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{u}_{jk} \, .$$

Matice nad vekt. prostorem IV

Tedy součin $\mathbf{A} \cdot \alpha$ definujeme z formálního hlediska stejně jako součin matic nad tělesem K, jen s tím rozdílem že operace součtu v K je nahrazená operací součtu ve V a operace součinu v K je nahrazená operací skalárního násobku $K \times V \to V$.

Matice nad vekt. prostorem IV

Pro násobení matic nad V maticemi nad K platí distributivita (z obou stran) vzhledem ke sčítání, zaměnitelnost s operací skalárního násobku, asociativita a postavení jednotkových matic jako neutrálních prvků.

Matice nad vekt. prostorem IV

Tedy součin $\mathbf{A} \cdot \alpha$ definujeme z formálního hlediska stejně jako součin matic nad tělesem K, jen s tím rozdílem že operace součtu v K je nahrazená operací součtu ve V a operace součinu v K je nahrazená operací skalárního násobku $K \times V \to V$.

Pro násobení matic nad V maticemi nad K platí distributivita (z obou stran) vzhledem ke sčítání, zaměnitelnost s operací skalárního násobku, asociativita a postavení jednotkových matic jako neutrálních prvků.

Matice nad vekt. prostorem V

To znamená, že pro všechna $l, m, n, p \in \mathbb{N}$, $c \in K$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{C} \in K^{l\times m}$ $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in V^{n\times p}$ platí:

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\beta},\\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\alpha},\\
\mathbf{A}\cdot(c\boldsymbol{\alpha}) = c(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}) = (c\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{\alpha},\\
\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{\alpha},\\
\mathbf{I}_n\cdot\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}.
\end{gathered}$$

Matice nad vekt. prostorem VI

Dle úmluvy, že $\mathbf{x}c = c\mathbf{x}$ pro $c \in K$, $\mathbf{x} \in V$, lze definovat i součin matic $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_{ij}) \in V^{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{jk}) \in K^{n \times p}$ v obráceném pořadí jako matici $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{w}_{ik}) \in V^{m \times p}$ takovou, že

$$\mathbf{w}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \mathbf{v}_{ij} \,.$$

Matice nad vekt. prostorem VII

S využitím poslední definice můžeme pro $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{\alpha} \in V^{n\times p}$, $\boldsymbol{\beta} \in V^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times p}$ dokázat rovnosti

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha})^T = \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{A}^T, \qquad (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\beta}^T.$$

Matice nad vekt. prostorem VII

S využitím poslední definice můžeme pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\boldsymbol{\alpha} \in V^{n \times p}$, $\boldsymbol{\beta} \in V^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ dokázat rovnosti

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha})^T = \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{A}^T, \qquad (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\beta}^T.$$

Tedy i pro násobení matic nad K maticemi nad V platí distributivita (z obou stran) vzhledem ke sčítání, zaměnitelnost s operací skalárního násobku, asociativita a postavení jednotkových matic jako neutrálních prvků.

Matice nad vekt. prostorem VIII

To znamená, že pre všechna $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, $c \in K$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in V^{n\times p}$, $\mathbf{C} \in K^{p\times q}$ platí:

$$(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A},$$
$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B},$$
$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (c\mathbf{A}) = c(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}) = (c\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{A},$$
$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = (\boldsymbol{\alpha} \cdot A) \cdot \mathbf{C},$$
$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{I}_n = \boldsymbol{\alpha}.$$

Matice nad vekt. prostorem IX

Vztahy pro řádky a sloupce součinu z odstavce 2.2.2 zůstávají zachované pre oba typu součinů matic nad K a V, t. j.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}) &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{\alpha}, & \mathbf{s}_k(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}) &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{s}_k(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{r}_i(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B}) &= \mathbf{r}_i(\boldsymbol{\beta})\cdot\mathbf{B}, & \mathbf{s}_k(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B}) &= \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

pre všechny $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{\alpha} \in V^{n\times p}$ $\boldsymbol{\beta} \in V^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times p}$.

Matice nad vekt. prostorem X

Definice součinů $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}$ jsou ve shodě s původním násobením matic.

Matice nad vekt. prostorem X

Definice součinů $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}$ jsou ve shodě s původním násobením matic.

Chápeme-li matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ jakožto řádek, t. j. jakožto matici typu $1 \times n$ nad prostorem sloupcových vektorů K^m, tak pro $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ splývá matice $(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot \mathbf{B}$ vypočítaná podle "nové" definice s blokovým tvarem $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_1(\mathbf{B}), \ldots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_p(\mathbf{B}))$ matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Matice nad vekt. prostorem XI

Podobně, chápeme-li $\mathbf{B}$ jako sloupec, t. j. jako matici typu $n \times 1$ nad prostorem řádkových vektorů K^p, tak

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{B}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Matice nad vekt. prostorem XII

Speciálně, lineární kombinaci $a_1\mathsf{x}_1 + \ldots a_n\mathsf{x}_n$ vektorů $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n \in V$ s koeficienty $a_1, \ldots, a_n \in K$ můžeme s využitím vektorových matic zapsat ve tvaru součinů

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{x}_n \end{pmatrix} = (\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

3. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

26. září 2006

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole se seznámíme se soustavami lineárních rovnic nad obecným tělesem K a naučíme se je řešit.

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole se seznámíme se soustavami lineárních rovnic nad obecným tělesem K a naučíme se je řešit.

Využijeme při tom zápis soustavy pomocí jisté matice. Strukturní vlastnosti množiny všech řešení dané soustavy a jejich důsledky budeme studovat až později, poté, co se blíže seznámíme se strukturou vektorových prostorů.

Maticový zápis I

Základní pojem tohoto odstavce je pojem ***lineární rovnice***.

Maticový zápis II

Lineární rovnicí o n neznámych $x_1, \ldots, x_n$ nad číselným tělesem K rozumíme formuli tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in K$, v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Maticový zápis III

Soustavou m ***lineárních rovnic*** o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nad číselným tělesem K rozumíme konjunkci formulí tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{21}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m,
\end{array}$$

kde a_{ij}, b_i, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, jsou skaláry z K.

Maticový zápis IV

Matici $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ nazýváme ***maticí soustavy***, sloupcový vektor $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \in K^m$ nazýváme její ***pravou stranou***.

Maticový zápis IV

Matici $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ nazýváme ***maticí soustavy***, sloupcový vektor $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \in K^m$ nazýváme její ***pravou stranou***.

Rozšířenou maticí soustavy nazýváme blokovou matici $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$.

Maticový zápis IV

Matici $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ nazýváme ***maticí soustavy***, sloupcový vektor $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T \in K^m$ nazýváme její ***pravou stranou***.

Rozšířenou maticí soustavy nazýváme blokovou matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$.

Soustava sa nazývá ***homogenní***, je-li $\mathbf{b} = \mathbf{0}$; v opačném případě sa nazývá ***nehomogenní***.

Maticový zápis V

Uvedenou soustavu můžeme stručně a úsporně zapsat v ***maticovém tvaru***

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

Maticový zápis V

Uvedenou soustavu můžeme stručně a úsporně zapsat v ***maticovém tvaru***

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

resp., pokud jde o homogenní soustavu, v tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Maticový zápis V

Uvedenou soustavu můžeme stručně a úsporně zapsat v ***maticovém tvaru***

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

resp., pokud jde o homogenní soustavu, v tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Řešením soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nazýváme takový vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in K^n$, jehož složky vyhovují každé z rovnic této soustavy, t. j. platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Maticový zápis VI

Vyřešit soustavu znamená najít ***všechna*** její řešení, t. j. popsat ***množinu*** všech jejích řešení.

Maticový zápis VI

Vyřešit soustavu znamená najít ***všechna*** její řešení, t. j. popsat ***množinu*** všech jejích řešení.

Dvě soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$, kde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in K^{m \times 1}$, se nazývají ***ekvivalentní***, pokud mají stejnou množinu řešení, t. j. pokud pro všechna $\mathbf{x} \in K^n$ platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$.

Poznámka I

(a) Podtrhněme, že řešením soustavy rozumíme vždy ***sloupcový vektor*** $\mathbf{x}$ a ne jeho složky.

Poznámka I

(a) Podtrhněme, že řešením soustavy rozumíme vždy ***sloupcový vektor*** $\mathbf{x}$ a ne jeho složky.

Tak například soustava

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 12 \\ 3x - 2y & = & 5 \end{array}$$

nad tělesem $\mathbb{R}$ má jediné řešení $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ a nikoliv dvě řešení $x = 3$, $y = 2$.

Poznámka II

Budeme pak říkat, že soustava má ***jediné*** řešení $x = 3$, $y = 2$.

Poznámka II

Budeme pak říkat, že soustava má ***jediné*** řešení $x = 3$, $y = 2$.

(b) Všimněme si, že počet rovnic soustavy a počet neznámých se nemusí rovnat. V obvyklém případě, když rovnic je stejný počet jako neznámých, očekáváme, že soustava bude mít jediné řešení.

Poznámka II

Budeme pak říkat, že soustava má ***jediné*** řešení $x = 3$, $y = 2$.

(b) Všimněme si, že počet rovnic soustavy a počet neznámých se nemusí rovnat. V obvyklém případě, když rovnic je stejný počet jako neznámých, očekáváme, že soustava bude mít jediné řešení.

Pokud je rovnic méně než neznámých, lze očekávat, že soustava bude mít vícero (případně i nekonečně mnoho) řešení.

Poznámka III

Naopak, pokud je rovnic více než neznámých, může se stát, že soustava nebude mít žádné řešení. Naproti tomu, že tato očekávaní vyjadřují "převládající trend", lehce lze najít příklady, kdy se nemusí splnit.

Poznámka III

Naopak, pokud je rovnic více než neznámých, může se stát, že soustava nebude mít žádné řešení. Naproti tomu, že tato očekávaní vyjadřují "převládající trend", lehce lze najít příklady, kdy se nemusí splnit.

Poznamenejme, že homogenní soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ má (bez ohledu na počet neznámých a počet rovnic) vždy alespoň jedno řešení – je jím nulový vektor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Poznámka IV

Není důležité, jakými znaky jsou označené neznámé v soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Poznámka IV

Není důležité, jakými znaky jsou označené neznámé v soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Na její řešení nemá vliv, zda si vektor neznámých označíme $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ nebo $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ nebo nějak jinak.

Poznámka IV

Není důležité, jakými znaky jsou označené neznámé v soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Na její řešení nemá vliv, zda si vektor neznámých označíme $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ nebo $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ nebo nějak jinak.

To znamená, že celá informace o této soustavě, potřebná pro nalezení všech jejich řešení, je obsažená v rozšířené matici soustavy $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$, resp., pokud půjde o homogenní soustavu, jen v matici soustavy $\mathbf{A}$.

Poznámka V

Proto i metoda řešení soustav lineárních rovnic, se kterou se nyní seznámíme, bude založená jen na úpravě této matice.

Poznámka V

Proto i metoda řešení soustav lineárních rovnic, se kterou se nyní seznámíme, bude založená jen na úpravě této matice.

Rozšířenou matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ budeme upravovat tak, abychom dostali nějakou jinou matici $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$, která odpovídá nové soustavě $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$, přičemž tato splňuje nasledující dvě podmínky:

Poznámka VI

(a) Soustava $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ je ekvivalentní s původní soustavou $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, t. j. má stejnou množinu řešení.

Poznámka VI

(a) Soustava $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ je ekvivalentní s původní soustavou $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, t. j. má stejnou množinu řešení.

(b) Všechna její řešení můžeme přímo vyčíst z její rozšířené matice $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$.

Poznámka VI

(a) Soustava $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ je ekvivalentní s původní soustavou $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, t. j. má stejnou množinu řešení.

(b) Všechna její řešení můžeme přímo vyčíst z její rozšířené matice $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$.

Pak říkáme, že soustava $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ je ***vyřešená***.

Redukovaný tvar I

Říkáme, že prvek a_{ij} matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je ***vedoucí prvek*** i-tého řádku matice $\mathbf{A}$, pokud $a_{ij} \neq 0$, a $j = 1$ nebo $a_{il} = 0$ pro všechny $1 \leq l < j$.

Redukovaný tvar I

Říkáme, že prvek a_{ij} matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je ***vedoucí prvek*** i-tého řádku matice $\mathbf{A}$, pokud $a_{ij} \neq 0$, a $j = 1$ nebo $a_{il} = 0$ pro všechny $1 \leq l < j$.

Jinak řečeno, vedoucí prvek nenulového řádku je první nenulový prvek tohoto řádku.

Redukovaný tvar I

Říkáme, že prvek a_{ij} matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je ***vedoucí prvek*** i-tého řádku matice $\mathbf{A}$, pokud $a_{ij} \neq 0$, a $j = 1$ nebo $a_{il} = 0$ pro všechny $1 \leq l < j$.

Jinak řečeno, vedoucí prvek nenulového řádku je první nenulový prvek tohoto řádku.Nulový řádek nemá vedoucí prvek.

Redukovaný tvar II

Řekneme, že matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ je v ***redukovaném stupňovitém tvaru***, pokud splňuje nasledující čtyři podmínky:

Redukovaný tvar II

Řekneme, že matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ je v ***redukovaném stupňovitém tvaru***, pokud splňuje nasledující čtyři podmínky:

(a) Je-li $\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{r}_k(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, pak $i < k$;
t. j. ***každý nenulový řádek matice*** **A** ***leží nad každým jejím nulovým řádkem***.

Redukovaný tvar II

Řekneme, že matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ je v ***redukovaném stupňovitém tvaru***, pokud splňuje nasledující čtyři podmínky:

(a) Je-li $\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{r}_k(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, pak $i < k$;
t. j. ***každý nenulový řádek matice A leží nad každým jejím nulovým řádkem***.

(b) Jsou-li a_{ij}, a_{kl} vedoucí prvky i-tého resp. k-tého řádku a $i < k$, pak platí $j < l$; t. j. ***vedoucí prvek vyššího řádku leží více vlevo než vedoucí prvek nižšího řádku***.

Redukovaný tvar III

(c) Je-li a_{ij} vedoucí prvek i-tého řádku, pak $a_{ij} = 1$; t. j. ***vedoucí prvek každého nenulového řádku je 1***.

Redukovaný tvar III

(c) Je-li a_{ij} vedoucí prvek i-tého řádku, pak $a_{ij} = 1$; t. j. ***vedoucí prvek každého nenulového řádku je 1***.

(d) Je-li a_{ij} vedoucí prvek i-tého řádku, tak $a_{kj} = 0$ pro každé $k \neq i$; t. j. ***v sloupci, v kterém sa nachází vedoucí prvek nějakého řádku, jsou všechny ostatní prvky rovné 0***.

Redukovaný tvar IV

Pokud matice **A** splňuje pouze podmínky (a), (b), říkáme, že je v ***stupňovitém tvaru***.

Redukovaný tvar IV

Pokud matice $\mathbf{A}$ splňuje pouze podmínky (a), (b), říkáme, že je v ***stupňovitém tvaru***. Používá se též název (redukovaný) ***schodovitý tvar***.

Redukovaný tvar IV

Pokud matice **A** splňuje pouze podmínky (a), (b), říkáme, že je v ***stupňovitém tvaru***. Používá se též název (redukovaný) ***schodovitý tvar***.

Následující matice nejsou ve stupňovitém tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Redukovaný tvar V

Matice jsou ve stupňovitém tvaru, ale nejsou v redukovaném stupňovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Redukovaný tvar VI

Matice jsou v redukovaném stupňovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Redukovaný tvar VII

Jednotková a nulová matice jsou v redukovaném stupňovitém tvaru.

Redukovaný tvar VII

Jednotková a nulová matice jsou v redukovaném stupňovitém tvaru.

Příklad

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

je matice v redukovaném stupňovitém tvaru nad $\mathbb{R}$.

Redukovaný tvar VIII

Tato matice odpovídá soustavě

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 \qquad\quad &= 3 \\ x_2 + 6x_3 \qquad\quad &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

v neznámých x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Redukovaný tvar VIII

Tato matice odpovídá soustavě

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 \qquad\quad &= 3 \\ x_2 + 6x_3 \qquad\quad &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

v neznámých x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení.

Redukovaný tvar IX

Každé volbě *parametrů* $s, t \in \mathbb{R}$ zodpovídá jedno řešení

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3 + 2s \\
x_2 &= \quad - 6s \\
x_3 &= \qquad s \\
x_4 &= 1 \\
x_5 &= \qquad\qquad t.
\end{aligned}
$$

Redukovaný tvar X

Přeznačení neznámých za parametry $x_3 = s$, $x_5 = t$ a jejich přesun na pravou stranu je natolik bezprostřední úprava, že soustavu příslušnou k matici $(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c})$ můžeme považovat za vyřešenou.

Redukovaný tvar X

Přeznačení neznámých za parametry $x_3 = s$, $x_5 = t$ a jejich přesun na pravou stranu je natolik bezprostřední úprava, že soustavu příslušnou k matici $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ můžeme považovat za vyřešenou.

Řešení lze napsat přímo na základě matice $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$.

Redukovaný tvar X

Přeznačení neznámých za parametry $x_3 = s$, $x_5 = t$ a jejich přesun na pravou stranu je natolik bezprostřední úprava, že soustavu příslušnou k matici $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ můžeme považovat za vyřešenou.

Řešení lze napsat přímo na základě matice $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$.

Soustavu lineárních rovnic $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ nad tělesem K budeme nazývat ***vyřešenou soustavou***, pokud její rozšířená matice $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ je v redukovaném stupňovitém tvaru.

Redukovaný tvar XI

V případě homogenní soustavy se stačí omezit pouze na matici $\mathbf{B}$.

Redukovaný tvar XI

V případě homogenní soustavy se stačí omezit pouze na matici $\mathbf{B}$.

Nyní ukážeme, jak můžeme k dané blokové matici $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ v redukovaném stupňovitém tvaru najít všechna řešení soustavy $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$.

Redukovaný tvar XI

V případě homogenní soustavy se stačí omezit pouze na matici $\mathbf{B}$.

Nyní ukážeme, jak můžeme k dané blokové matici $(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c})$ v redukovaném stupňovitém tvaru najít všechna řešení soustavy $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$.

Nejprve si ujasníme, kdy je takováto soustava ***řešitelná***, t. j. má alespoň jedno řešení.

Redukovaný tvar XII

Soustava $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ má řešení právě tehdy, když se v matici $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ nenachází řádek tvaru

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n\text{-krát}} \mid 1).$$

Redukovaný tvar XII

Soustava $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ má řešení právě tehdy, když se v matici $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ nenachází řádek tvaru

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n\text{-krát}} \mid 1).$$

Takový řádek odpovídá rovnici $0 = 1$, která očividně nemá řešení.

Redukovaný tvar XII

Soustava $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ má řešení právě tehdy, když se v matici $(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c})$ nenachází řádek tvaru

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n\text{-krát}} \,|\, 1).$$

Takový řádek odpovídá rovnici $0 = 1$, která očividně nemá řešení.

To, že nepřítomnost takovéhoto řádku je i postačující podmínkou řešitelnosti soustavy, vyplýva z následujícího postupu, jak toto řešení najít.

Redukovaný tvar XIII

Pokud se v j-tém sloupci matice $\mathbf{B}$ nenachází vedoucí prvek žádného řádku, tak si neznámou x_j zvolíme za parametr.

Redukovaný tvar XIII

Pokud se v j-tém sloupci matice $\mathbf{B}$ nenachází vedoucí prvek žádného řádku, tak si neznámou x_j zvolíme za parametr.

Pokud se v j-tém sloupci nachází vedoucí prvek nějakého řádku, tak si vyjádříme neznámou x_j pomocí parametrů tak, že sloupce matice $\mathbf{B}$ příslušné těmto parametrům "přehodíme s opačným znaménkem na druhou stranu".

Redukovaný tvar XIV

Příklad.

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2/5 & -2 \end{array} \right)$$

je matice v redukovaném stupňovitém tvaru nad $\mathbb{R}$.

Redukovaný tvar XIV

Příklad.

$$(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2/5 & -2 \end{array} \right)$$

je matice v redukovaném stupňovitém tvaru nad $\mathbb{R}$.
Vidíme, že se v ní nenachází řádek tvaru $(0, 0, 0, 0 \,|\, 1)$, tedy soustava $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ by měla mít řešení.

Redukovaný tvar XV

Vedoucí prvky řádků matice **B** sa nacházají ve sloupcích 1, 2 a 3. Za parametry si tedy zvolíme neznámé x_4 a x_5.

Redukovaný tvar XV

Vedoucí prvky řádků matice **B** sa nacházají ve sloupcích 1, 2 a 3. Za parametry si tedy zvolíme neznámé x_4 a x_5. Řešením soustavy je každý vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}$ tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - \tfrac{2}{3}s + \tfrac{1}{2}t \\ x_2 &= 2 - \tfrac{3}{4}s \\ x_3 &= -2 + 4s + \tfrac{2}{5}t \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t, \end{aligned}$$

Redukovaný tvar XVI

Parametry $s, t \in \mathbb{R}$ mohou nabývat libovolné hodnoty. Zlomků u parametrů se můžeme zbavit. Je jedno, zda si parametrické proměnné zvolíme ve tvaru $x_4 = s$, $x_5 = t$ nebo ve tvaru $x_4 = 12s$, $x_5 = 10t$, kde $s, t \in \mathbb{R}$.

Redukovaný tvar XVI

Parametry $s, t \in \mathbb{R}$ mohou nabývat libovolné hodnoty. Zlomků u parametrů se můžeme zbavit. Je jedno, zda si parametrické proměnné zvolíme ve tvaru $x_4 = s$, $x_5 = t$ nebo ve tvaru $x_4 = 12s$, $x_5 = 10t$, kde $s, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 5- & 8s & +5t \\ x_2 & = & 2 & -9s & \\ x_3 & = & -2+ & 36s+ & 4t \\ x_4 & = & & 12s & \\ x_5 & = & & & 10t \end{array}$$

Při takovéto volbě parametrů dostaneme všechna řešení soustavy ve tvaru bez zlomků.

ERO a ESO I

Elementární řádkovou operací (transformací), zkráceně ***ERO***, na matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ rozumíme

I. ***Výměnu*** dvou řádků matice $\mathbf{A}$;

ERO a ESO I

Elementární řádkovou operací (transformací), zkráceně ***ERO***, na matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ rozumíme

I. ***Výměnu*** dvou řádků matice $\mathbf{A}$;

II. ***Vynásobení*** některého řádku matice $\mathbf{A}$ ***nenulovým*** skalárem z číselného tělesa K;

ERO a ESO I

Elementární řádkovou operací (transformací), zkráceně ***ERO***, na matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ rozumíme

I. ***Výměnu*** dvou řádků matice $\mathbf{A}$;

II. ***Vynásobení*** některého řádku matice $\mathbf{A}$ ***nenulovým*** skalárem z číselného tělesa K;

III. ***Přičtení*** skalárního násobku některého řádku matice $\mathbf{A}$ k jejímu jinému řádku.

ERO a ESO II

Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ sa nazývají ***řádkově ekvivalentní***, označení $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pokud jednu z nich můžeme upravit na druhou konečným počtem elementárních řádkových operací.

ERO a ESO II

Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ sa nazývají ***řádkově ekvivalentní***, označení $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pokud jednu z nich můžeme upravit na druhou konečným počtem elementárních řádkových operací.

Analogické pojmy – ***elementární sloupcové operace*** (ESO) a ***sloupcová ekvivalence*** matic, označení $\mathbf{A} \wr \mathbf{B}$.

ERO a ESO III

Výměnou i-tého a k-tého řádku v matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \quad \text{dostaneme matici} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

ERO a ESO IV

Vynásobením i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ skalárem $c \neq 0$ dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ c\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

Vynásobením i-tého řádku této matice skalárem $c^{-1} \neq 0$ získáme opět matici $\mathbf{A}$.

ERO a ESO V

Přičtením c-násobku i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ k jejímu k-tému řádku z ní dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) + c\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

ERO a ESO VI

Všimněme si, že i-tý řádek při této úpravě zůstává nezměněný. Matici $\mathbf{A}$ z této matice získáme přičtením $(-c)$-násobku jejího i-tého řádku k jejímu k-tému řádku.

ERO a ESO VI

Všimněme si, že i-tý řádek při této úpravě zůstává nezměněný. Matici $\mathbf{A}$ z této matice získáme přičtením $(-c)$-násobku jejího i-tého řádku k jejímu k-tému řádku.

Poznamenejme, že, v případě výměny opětovnou výměnou i-tého a k-tého řádku v matici vzniklé výměnou i-tého a k-tého řádku, získame zase matici $\mathbf{A}$.

ERO a ESO VII

Je-li $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ soustava s rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ a bloková matica $(\mathbf{A}' \,|\, \mathbf{b}')$ vznikne z $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ provedením jedné (nezáleží které) ERO, pak soustava $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$ ***je ekvivalentní*** s původní soustavou $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

ERO a ESO VIII

Elementární řádkové operace na matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ totiž odpovídají

ERO a ESO VIII

Elementární řádkové operace na matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ totiž odpovídají

- ***postupné záměně pořadí dvou rovnic soustavy,***

ERO a ESO VIII

Elementární řádkové operace na matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ totiž odpovídají

- ***postupné záměně pořadí dvou rovnic soustavy,***
- ***vynásobení některé rovnice nenulovým skalárem***

ERO a ESO VIII

Elementární řádkové operace na matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ totiž odpovídají

- ***postupné záměně pořadí dvou rovnic soustavy,***
- ***vynásobení některé rovnice nenulovým skalárem***
- ***přičtení nějakého násobku jedné rovnice k jiné rovnici.***

ERO a ESO IX

Přesněji nahrazením dvojice rovnic

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = b_i, \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = b_k$$

dvojicí rovnic

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = b_i, (\mathbf{r}_k(\mathbf{A}) + c\mathbf{r}_i(\mathbf{A})) \cdot \mathbf{x} = b_k + cb_i.$$

ERO a ESO X

Je-li $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ soustava s rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ a $(\mathbf{A}' \,|\, \mathbf{b}')$ rozšířená matice nové ekvivalentní soustavy $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$, můžeme se od nové soustavy vhodnou ERO provedenou na její rozšířené matici opět vrátit k původní soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

ERO a ESO XI

Tvrzení

Nechť K je těleso, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in K^m$. Jsou-li blokové matice $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ řádkově ekvivalentní, pak jsou i soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ ekvivalentní.

ERO a ESO XII

Věta

Každá matice nad číselným tělesem K je řádkově ekvivalentní s nějakou (právě jednou) maticí v redukovaném stupňovitém tvaru.

Poznámka. Uvedený redukovaný stupňovitý tvar dané matice je jednoznačně určený.

ERO a ESO XIII

Příklad

Je daná soustava

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +3x_2 & & -\ x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ x_1 & -\ x_2 & +4x_3 & -\ x_4 & = & 2 \end{array}$$

třech rovnic o čtyřech neznámých nad tělesem $\mathbb{R}$.

ERO a ESO XIV

Její rozšířená matice je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Při její úpravě na redukovaný stupňovitý tvar budeme vynechávat některé mezikroky a zaznamenáme jen některé výsledky vícero provedených ERO.

ERO a ESO XV

Poslední řádek matice dáme na první místo, potom jeho (-2)-násobek přičteme k původnímu prvnímu řádku, který posuneme na druhé místo, a (-3)-násobek původního posledního řádku přičteme k původnímu druhému řádku, který posuneme na třetí místo. Dostaneme tak matici

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right).$$

ERO a ESO XVI

Přičtením (-1)-násobku druhého řádku k třetímu řádku dostaneme matici

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Z tohoto tvaru vidíme, že soustava odpovídající poslední matici nemá řešení – obsahuje totiž rovnici $0 = -3$. Tedy ani původní soustava nemá řešení.

ERO a ESO XVII

Dokončíme úpravu na redukovaný stupňovitý tvar, který dostaneme vynásobením třetího řádku skalárem $-1/3$, přičtením (-2)-násobku resp. 3-násobku tohoto nového řádku k prvnímu resp. druhému řádku a, konečně, vynásobením druhého řádku skalárem $1/5$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 12/5 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1 & -8/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

ERO a ESO XVIII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$ *a* $m < n$, *t. j. soustavy* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *obsahují méně rovnic než neznámých. Potom*

(a) homogenní soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ *má s řešením* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ *alespoň jedno řešení* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$*;*

(b) pokud existuje alespoň jedno řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, *pak má tato soustava více než jedno řešení.*

Gaussova EM I

Dále uvedeme tzv. ***Gaussovu eliminační metodu*** řešení soustav lineárních rovnic. Rozšířenou matici soustavy upravíme jen na ***stupňovitý*** (tedy ne nutně redukovaný stupňovitý) tvar.

Gaussova EM II

Z tohoto tvaru můžeme snadno určit, zda má soustava nějaké řešení (příslušná matice nesmí obsahovat řádek tvaru $(0, \ldots, 0 \,|\, d)$, kde $0 \neq d \in K$). V tomto případě můžeme všechna řešení soustavy získat volbou parametrů (opět si za ně volíme neznámé x_j takové, že v j-tém sloupci se nevyskytuje vedoucí prvek žádného řádku) a zpětným dosazováním, t. j. ***eliminací*** neznámých pomocí parametrů.

Gaussova EM III

Příklad

Předpokládejme, že rozšířenou matici nějaké soustavy nad $\mathbb{R}$ jsme si pomocí ERO upravili na stupňovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Gaussova EM IV

Tato matice odpovídá soustavě

$$\begin{array}{rrrrrcr} 2x_2 & +3x_3 & & -\ x_5 & +4x_6 & = & 1 \\ & & -2x_4 & +5x_5 & +4x_6 & = & 0 \\ & & & 3x_5 & +\ x_6 & = & 4. \end{array}$$

Za parametry si zvolíme proměnné x_1, x_3 a x_6.

Gaussova EM V

Zpětným dosazováním postupně dostaneme všechna řešení v parametrickém tvaru

$$\begin{aligned}
x_6 &= t \\
x_5 &= \tfrac{1}{3}(4 - x_6) = \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}t \\
x_4 &= \tfrac{1}{2}(5x_5 + 4x_6) = \tfrac{10}{3} - \tfrac{7}{6}t \\
x_3 &= s \\
x_2 &= \tfrac{1}{2}(1 - 3x_3 + x_5 - 4x_6) = \tfrac{7}{6} - \tfrac{3}{2}s - \tfrac{13}{6}t \\
x_1 &= r,
\end{aligned}$$

kde $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Gaussova EM VI

Případně, po trochu "vhodnější" volbě parametrů, bude řešení v tvaru

$$
\begin{aligned}
x_6 &= 6t,\\
x_5 &= \tfrac{4}{3} - 2t,\\
x_4 &= \tfrac{10}{3} - 7t,\\
x_3 &= 2s,\\
x_2 &= \tfrac{7}{6} - 3s + 13t,\\
x_1 &= r.
\end{aligned}
$$

Gaussova EM VII

Zpětné dosazování můžeme nahradit další úpravou rozšířené matice soustavy pomocí ERO na ***redukovaný*** stupňovitý tvar.

Stačí totiž vynásobit nenulové řádky převrácenými hodnotami jejich vedoucích prvků a přičtením vhodných násobků těchto řádků vynulovat zbývající nenulové prvky ve sloupcích obsahujících vedoucí prvky jednotlivých řádků.

Gaussova EM VIII

Gaussova eliminační metoda je užitečná zejména tehdy, pokud nám nejde ani tak o explicitní tvar řešení, ale spíše o samotnou otázku řešitelnosti soustavy, případně o počet parametrů, které se v nich vyskytují.

Gaussova EM VIII

Gaussova eliminační metoda je užitečná zejména tehdy, pokud nám nejde ani tak o explicitní tvar řešení, ale spíše o samotnou otázku řešitelnosti soustavy, případně o počet parametrů, které se v nich vyskytují.

Toto vše je možné zjistit už na základě nějaké matice ve stupňovitém tvaru, která je řádkově ekvivalentní s původní rozšířenou maticí soustavy. V tomto případě si tedy můžeme odpustit další úpravu na redukovaný stupňovitý tvar i zpětné dosazování.

LINEÁRNÍ PODPROSTORY a LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

2. října 2006

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole se vrátíme ke studiu abstraktních vektorových prostorů nad obecným tělesem. K tedy bude v celé kapitole označovat nějaké pevné, jinak libovolné těleso a V bude pevně zvolený vektorový prostor nad K.

Obsah přednášky

- Lineární prostory

Obsah přednášky

- Lineární prostory
  - Lineární podprostory

Obsah přednášky

- Lineární prostory
  - Lineární podprostory
  - Lineární obal množiny vektorů

Obsah přednášky

- Lineární prostory
  - Lineární podprostory
  - Lineární obal množiny vektorů
  - Průnik a součet lineárních podprostorů

Obsah přednášky

- Lineární prostory
  - Lineární podprostory
  - Lineární obal množiny vektorů
  - Průnik a součet lineárních podprostorů
  - Lineární nezávislost

Obsah přednášky

- Lineární prostory
  - Lineární podprostory
  - Lineární obal množiny vektorů
  - Průnik a součet lineárních podprostorů
  - Lineární nezávislost
  - Lineární obal v prostorech K^m

Obsah přednášky

- Lineární prostory
  - Lineární podprostory
  - Lineární obal množiny vektorů
  - Průnik a součet lineárních podprostorů
  - Lineární nezávislost
  - Lineární obal v prostorech K^m
  - Lineárně nezávislé posloupnosti

Lineární podprostory I

Množina $S \subseteq V$ se nazývá ***lineární (vektorový) podprostor*** vektorového prostoru V, pokud $S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} \in S$ a $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$.

Lineární podprostory II

Jinak řečeno, neprázdná podmnožina $S \subseteq V$ je lineární podprostor právě tehdy, když je uzavřená na operace skalárního násobku a součtu vektorů.

Lineární podprostory II

Jinak řečeno, neprázdná podmnožina $S \subseteq V$ je lineární podprostor právě tehdy, když je uzavřená na operace skalárního násobku a součtu vektorů.

Tvrzení

Nechť S je lineární podprostor vektorového prostoru V. Pak $\mathbf{0} \in S$ a S s operacemi součtu vektorů a skalárního násobku zúženými z V na S **tvoří vektorový prostor** *nad (číselným) tělesem K.*

Lineární podprostory III

V každém vektorovém prostoru V jsou $\{\mathbf{0}\}$ a V lineární podprostory (v případě, když $V = \{\mathbf{0}\}$, dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) –

Lineární podprostory III

V každém vektorovém prostoru V jsou $\{\mathbf{0}\}$ a V lineární podprostory (v případě, když $V = \{\mathbf{0}\}$, dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) – $\{\mathbf{0}\}$ nazývame ***triviální*** nebo též ***nulový*** a V ***nevlastní*** alebo též ***plný*** lineární podprostor.

Lineární podprostory III

V každém vektorovém prostoru V jsou $\{\mathbf{0}\}$ a V lineární podprostory (v případě, když $V = \{\mathbf{0}\}$, dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) – $\{\mathbf{0}\}$ nazývame ***triviální*** nebo též ***nulový*** a V ***nevlastní*** alebo též ***plný*** lineární podprostor.

Tedy pro ***vlastní netriviální*** lineární podprostor $S \subseteq V$ platí $\{\mathbf{0}\} \neq S \neq V$.

Lineární podprostory IV

Např. ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ netriviální vlastní podprostory jsou právě všechny přímky a roviny procházející počátkem $\mathbf{0}$.

Lineární podprostory IV

Např. ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ netriviální vlastní podprostory jsou právě všechny přímky a roviny procházející počátkem $\mathbf{0}$.

To si můžeme graficky vyjádřit pomocí následujícího obrázku, který samozřejmě ukáže pouze několik z nekonečně mnoha lineárních podprostorů.

Lineární podprostory IV

Např. ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ netriviální vlastní podprostory jsou právě všechny přímky a roviny procházející počátkem $\mathbf{0}$.

To si můžeme graficky vyjádřit pomocí následujícího obrázku, který samozřejmě ukáže pouze několik z nekonečně mnoha lineárních podprostorů.

Lineární podprostory jsou popsány pomocí minimálního počtu generátorů.

Lineární podprostory V

$$\left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \cdots$$

$$\left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \left\{ y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \left\{ y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \left\{ y\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \cdots$$

$$\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Lineární podprostory V

$$\left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \cdots$$

$$\left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \left\{ y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \left\{ y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \left\{ y\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \cdots$$

$$\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Následující tvrzení charakterizuje lineární podprostory jako množiny uzavřené na lineární kombinace.

Lineární podprostory VI

Tvrzení

Pro libovolnou podmnožinu S vektorového prostoru V jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) S *je lineární podprostor ve* V;

(ii) $S \neq \emptyset$ *a pro všechny skaláry* $a, b \in K$ *a vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ *platí* $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in S$;

(iii) *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a pro všechny skaláry* $a_1, \ldots, a_n \in K$ *a vektory* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in S$ *platí*

$$a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n \in S.$$

Lineární podprostory VII

Příklad

(a) Označme $K^{(X)}$ *množinu všech funkí* $f : X \to K$ *takových, že množina* $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ *je konečná.*

Lineární podprostory VII

Příklad

(a) Označme $K^{(X)}$ *množinu všech funkí* $f : X \to K$ *takových, že množina* $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ *je konečná. Pro libovolnou lineární kombinaci funkcí* $f, g \in K^{(X)}$ *platí*

$$\{x \in X;\ af(x) + bg(x) \neq 0\} \subseteq$$
$$\{x \in X;\ f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X;\ g(x) \neq 0\}.$$

Lineární podprostory VII

Příklad

(a) Označme $K^{(X)}$ *množinu všech funkí* $f : X \to K$ *takových, že množina* $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ *je konečná. Pro libovolnou lineární kombinaci funkcí* $f, g \in K^{(X)}$ *platí*

$$\begin{aligned}&\{x \in X;\ af(x) + bg(x) \neq 0\} \subseteq \\ &\{x \in X;\ f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X;\ g(x) \neq 0\}.\end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že $K^{(X)}$ *je lineární podprostor vektorového prostoru* K^X*.*

Lineární podprostory VII

Příklad

(a) Označme $K^{(X)}$ *množinu všech funkí* $f : X \to K$ *takových, že množina* $\{x \in X;\, f(x) \neq 0\}$ *je konečná. Pro libovolnou lineární kombinaci funkcí* $f, g \in K^{(X)}$ *platí*

$$\{x \in X;\, af(x) + bg(x) \neq 0\} \subseteq \\ \{x \in X;\, f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X;\, g(x) \neq 0\}.$$

Z toho vyplývá, že $K^{(X)}$ *je lineární podprostor vektorového prostoru* K^X*.Je-li* X *je konečná, tak* $K^{(X)} = K^X$*, je-li* X *je nekonečná, tak* $K^{(X)}$ *je netriviální vlastní podprostor v* K^X*.*

Lineární podprostory VIII

(b)*Nechť* $X \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná množina reálných čísel. Potom $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, nebo jen stručně $\mathcal{C}(X)$ označuje ***množinu všech spojitých funkcí*** $f : X \to \mathbb{R}$.

Lineární podprostory VIII

(b)*Nechť* $X \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná množina reálných čísel. Potom $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, nebo jen stručně $\mathcal{C}(X)$ označuje ***množinu všech spojitých funkcí*** $f : X \to \mathbb{R}$.

Protože lineární kombinace spojitých funkcií je zřejmě opět spojitá funkce, $\mathcal{C}(X)$ je lineární podprostor v $\mathbb{R}^X$.

Lineární obal I

Množinu všech lineárních kombinací vektorů z podmnožiny X vektorového prostoru V nazýváme ***lineárním obalem*** množiny X a označujeme ji $[X]$.

Lineární obal I

Množinu všech lineárních kombinací vektorů z podmnožiny X vektorového prostoru V nazýváme ***lineárním obalem*** množiny X a označujeme ji $[X]$.

Tedy

$$
\begin{aligned}
[X] \; = \{ \; & a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n;\; n \in \mathbb{N} \\
& \& \; a_1, \ldots, a_n \in K \; \& \; \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X \}.
\end{aligned}
$$

Lineární obal II

Je-li $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ konečná množina, tak místo $[\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}]$ píšeme jen $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal II

Je-li $X = \{\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n\}$ konečná množina, tak místo $[\{\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n\}]$ píšeme jen $[\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n]$.

Zřejmě tento zápis má smysl i pro libovolou uspořádanou n-tici (ne nutně různých) vektorů $(\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n)$, a platí

$$[\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n] = \{a_1\mathsf{x}_1 + \ldots + a_n\mathsf{x}_n;\ a_1, \ldots, a_n \in K\}.$$

Lineární obal III

Tvrzení

Nechť X je podmnožina vektorového priestoru V. Potom lineární obal $[X]$ množiny X je nejmenší lineární podprostor vektorového prostoru V takový, že $X \subseteq [X]$.

Lineární obal III

Tvrzení

Nechť X je podmnožina vektorového priestoru V. Potom lineární obal $[X]$ množiny X je nejmenší lineární podprostor vektorového prostoru V takový, že $X \subseteq [X]$.

Dokázané tvrzení nás opravňuje nazývat lineární obal $[X]$ množiny $X \subseteq V$ též lineárním podprostorem ***generovaným*** množinou X.

Lineární obal IV

Pokud $[X] = S$, říkáme, že X ***generuje*** lineární podprostor S, případně, že X je ***generující množina*** nebo též ***množina generátorů*** lineárního podprostoru $S \subseteq V$.

Lineární obal IV

Pokud $[X] = S$, říkáme, že X ***generuje*** lineární podprostor S, případně, že X je ***generující množina*** nebo též ***množina generátorů*** lineárního podprostoru $S \subseteq V$.

Je-li $S = V$, t. j. je-li $[X] = V$, mluvíme o ***generující množině***. Používá se též název ***vytvářející či vytvořující množina***.

Lineární obal IV

Pokud $[X] = S$, říkáme, že X ***generuje*** lineární podprostor S, případně, že X je ***generující množina*** nebo též ***množina generátorů*** lineárního podprostoru $S \subseteq V$.

Je-li $S = V$, t. j. je-li $[X] = V$, mluvíme o ***generující množině***. Používá se též název ***vytvářející či vytvořující množina***.

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu $X \mapsto [X]$.

Lineární obal V

Tvrzení

Pro libovolné podmnožiny X, Y *vektorového prostoru* V *a* $\mathbf{v} \in V$ *platí:*

Lineární obal V

Tvrzení

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$; *(b)* $X \subseteq [X]$;

Lineární obal V

Tvrzení

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$; *(b)* $X \subseteq [X]$;

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;

Lineární obal V

Tvrzení

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$; *(b)* $X \subseteq [X]$;

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;

(d) *X je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $X = [X]$;*

Lineární obal V

Tvrzení

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$; (b) $X \subseteq [X]$;

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;

(d) X *je lineární podprostor ve* V *právě tehdy, když* $X = [X]$;

(e) $[[X]] = [X]$;

Lineární obal V

Tvrzení

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$; *(b)* $X \subseteq [X]$;

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;

(d) X *je lineární podprostor ve* V *právě tehdy, když* $X = [X]$;

(e) $[[X]] = [X]$;

(f) $\mathbf{v} \in [X] \Leftrightarrow [X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X]$.

Součet I

Nechť X, Y jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru V.

Součet I

Nechť X, Y jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru V.

Potom množinu

$$X + Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y};\ \mathbf{x} \in X \ \&\ \mathbf{y} \in Y\}$$

nazýváme ***součtem*** množin X, Y.

Součet II

Tvrzení

Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Potom i $S \cap T$ a $S + T$ jsou lineární podprostory ve V. Navíc platí

$$S + T = [S \cup T],$$

t. j. $S + T$ je nejmenší lineární podprostor ve V, který obsahuje S i T.

Součet II

Tvrzení

Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Potom i $S \cap T$ a $S + T$ jsou lineární podprostory ve V. Navíc platí

$$S + T = [S \cup T],$$

t. j. $S + T$ je nejmenší lineární podprostor ve V, který obsahuje S i T.

Sjednocení dvou lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nemusí být lineárním podprostorem.

Součet III

Přesněji, $S \cup T$ je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$.

Součet III

Přesněji, $S \cup T$ je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$.

Součet lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nazýváme ***přímý*** nebo též ***direktní součet***, pokud $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$; píšeme pak $S \oplus T$.

Součet IV

Tvrzení

Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

Součet IV

Tvrzení

Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, *t.j. součet $S + T$ je direktní;*

Součet IV

Tvrzení

Nechť S, T *jsou lineární podprostory vektorového prostoru* V*.*
Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, *t.j. součet* $S + T$ *je direktní;*

(ii) *každý vektor* $\mathbf{z} \in S + T$ *má jednoznačné vyjádření ve tvaru* $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, *kde* $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{y} \in T$*.*

Závislost I

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$.

Závislost I

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$.

Říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ***lineárně závislá***, pokud existují skaláry $c_1, \dots, c_n \in K$ tak, že $(c_1, \dots, c_n) \neq \mathbf{0}$ a $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.

Závislost I

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$.

Říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je ***lineárně závislá***, pokud existují skaláry $c_1, \ldots, c_n \in K$ tak, že $(c_1, \ldots, c_n) \neq \mathbf{0}$ a $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.

V opačném případě říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je ***lineárně nezávislá***.

Závislost II

Pro $n = 0$ kvůli úplnosti dodávame, že uspořádanou 0-**tici** (t. j. ***prázdnou posloupnost***) vektorů považujeme za lineárně nezávislou.

Závislost II

Pro $n = 0$ kvůli úplnosti dodávame, že uspořádanou 0-**tici** (t. j. ***prázdnou posloupnost***) vektorů považujeme za lineárně nezávislou.

Místo o "lineárně (ne)závislé uspořádané n-tici vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$" budeme často mluvit jen o lineárně (ne)závislých vektorech $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Závislost III

Podle definice lineární nezávislosti jsou vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislé právě tehdy, když

Závislost III

Podle definice lineární nezávislosti jsou vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislé právě tehdy, když

$$(\forall\, c_1, \dots, c_n \in K)$$
$$(c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; c_1 = \ldots = c_n = 0).$$

Závislost III

Podle definice lineární nezávislosti jsou vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislé právě tehdy, když

$$(\forall\, c_1, \ldots, c_n \in K)$$
$$(c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; c_1 = \ldots = c_n = 0).$$

Pro n-tici skalárů $(c_1, \ldots, c_n) = \mathbf{0}$ platí

$$c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

pro libovolnou n-tici vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, bez ohledu na to, zda je lineárně závislá nebo nezávislá.

Závislost IV

Pro některé n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ můžeme jako výsledek lineární kombinace $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ dostat $\mathbf{0}$ i s pomocí ***jiné*** n-tice skalárů $(c_1, \ldots, c_n)$ než jen $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ – takovéto uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ nazýváme ***lineárně závislé***.

Závislost IV

Pro některé n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ můžeme jako výsledek lineární kombinace $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ dostat $\mathbf{0}$ i s pomocí ***jiné*** n-tice skalárů $(c_1, \ldots, c_n)$ než jen $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ – takovéto uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ nazýváme ***lineárně závislé***.

Pro některé uspořádané n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je volba $(c_1, \ldots, c_n) = \mathbf{0}$ ***jediná možnost*** jak pomocí lineární kombinace $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ získáme výsledek $\mathbf{0}$ – takovéto n-tice nazýváme ***lineárně nezávislé***.

Závislost V

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

(a) jediný vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;

Závislost V

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

(a) jediný vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;

(b) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého;

Závislost V

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

(a) jediný vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;

(b) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého;

(c) je-li některý z vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ roven $\mathbf{0}$, pak jsou tyto vektory lineárně závislé;

Závislost V

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

(a) jediný vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;
(b) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého;
(c) je-li některý z vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ roven $\mathbf{0}$, pak jsou tyto vektory lineárně závislé;
(d) pokud se některé dva z vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ rovnají, pak jsou tyto vektory lineárně závislé.

Závislost VI

Jinak řečeno, pouze uspořádaná n-tice nenulových a navzájem různých vektorů, z kterých žádný není násobkem druhého, může (ale stále ještě nemusí) být lineárně nezávislá.

Závislost VI

Jinak řečeno, pouze uspořádaná n-tice nenulových a navzájem různých vektorů, z kterých žádný není násobkem druhého, může (ale stále ještě nemusí) být lineárně nezávislá.

Následující tabulka shrnuje vztah lineární závislosti vzhledem k relaci inkluze.

	$S_1 \subseteq S$	$S_1 \supseteq S$
S *nezávislá*	S_1 bude nezávislá	S_1 může být oboje
S *závislá*	S_1 může být oboje	S_1 bude závislá

Závislost VII

Tvrzení

Pre libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně závislé;*

(ii) *některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací předcházejících;*

(ii') *některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací nasledujících;*

(iii) *některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinace ostatních.*

Závislost VIII

Každý vektor $\mathbf{x}$ z lineárního obalu $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$$

pro nějakou n-tici skalárů $(c_1, \ldots, c_n)$.

Tvrzení

Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když každý vektor* $\mathbf{x} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ *můžeme vyjádřit ve tvaru* $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ *pro jedinou uspořádanou n-tici* $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$.

Závislost IX

Nasledující tvrzení dává do souvislosti lineární (ne)závislost s lineárním obalom.

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \in V$, *přičemž vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$;

(ii) *vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}$ *jsou lineárně závislé;*

(iii) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$.

Závislost X

Věta

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$, *přičemž vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé. Potom z množiny* $\{1, \ldots, m\}$ *můžeme vybrat indexy* $i_1 < \ldots < i_k$ *tak, že vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_k}$ *jsou lineárně nezávislé a generují stejný podprostor jako vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Lineární obal v K^m I

Použití téže metody úpravy matic pomocí ERO na (redukovaný) stupňovitý tvar na řešení následujících tří otázek:

Lineární obal v K^m I

Použití téže metody úpravy matic pomocí ERO na (redukovaný) stupňovitý tvar na řešení následujících tří otázek:

(1) rozhodnout pre dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$ zda $\mathbf{y}$ patří nebo nepatří do lineárního obalu $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$;

Lineární obal v K^m II

(2) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$ zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé;

Lineární obal v K^m II

(2) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$ zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé;

(3) vybrat z vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$ lineárně nezávislé vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ ($j_1 < \ldots < j_k$) tak, aby vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ generovaly ve V stejný lineární podprostor jako vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Lineární obal v K^m II

(2) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$ zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé;

(3) vybrat z vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$ lineárně nezávislé vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ $(j_1 < \ldots < j_k)$ tak, aby vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ generovaly ve V stejný lineární podprostor jako vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Zavedeme dále označení, kterého sa budeme držet v celém odstavci.

Lineární obal v K^m III

Nechť $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$ jsou sloupcové vektory, přičemž

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Lineární obal v K^m III

Nechť $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$ jsou sloupcové vektory, přičemž

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Označme $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in K^{m \times n}$ matici se sloupci $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, a $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y}) \in K^{m \times (n+1)}$ blokovou matici složenou z matice $\mathbf{X}$ a vektoru $\mathbf{y}$.

Lineární obal v K^m IV

Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in K^n$ platí:

Lineární obal v K^m IV

Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ platí:

(1) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$;

Lineární obal v K^m IV

Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ platí:

(1) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$;

(2) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Lineární obal v K^m IV

Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ platí:

(1) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$;

(2) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Jinak řečeno:

(1) $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ právě tehdy, když soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$ s rozšírenou maticí $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y})$ má alespoň jedno řešení;

Lineární obal v K^m V

(2) vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když homogenní soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ má jediné řešení $\mathbf{c} = \mathbf{0}$; pokud tato soustava má i nějaké nenulové řešení, tak vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně závislé.

Lineární obal v K^m V

(2) vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když homogenní soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ má jediné řešení $\mathbf{c} = \mathbf{0}$; pokud tato soustava má i nějaké nenulové řešení, tak vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně závislé.

Otázku (1) umíme řešit. Stačí pomocí ERO upravit matici $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y})$ na stupňovitý tvar. Pokud výsledná matice obsahuje řádek tvaru $(0, \ldots, 0 \,|\, z)$, kde $z \neq 0$, tak soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$ nemá řešení a $\mathbf{y} \notin [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v K^m VI

Pokud sa takovýto řádek ve výsledné matici nenachází, tak soustava má alespoň jedno řešení a $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v K^m VI

Pokud sa takovýto řádek ve výsledné matici nenachází, tak soustava má alespoň jedno řešení a $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Podobně je tomu s otázkou (2). Opět stačí pomocí ERO upravit matici $\mathbf{X}$ na stupňovitý tvar a podívat se, zda v každém sloupci leží vedoucí prvek nějakého řádku.

Lineární obal v K^m VI

Pokud sa takovýto řádek ve výsledné matici nenachází, tak soustava má alespoň jedno řešení a $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Podobně je tomu s otázkou (2). Opět stačí pomocí ERO upravit matici $\mathbf{X}$ na stupňovitý tvar a podívat se, zda v každém sloupci leží vedoucí prvek nějakého řádku.

Pokud tento případ nastane, nemáme možnost zvolit parametry, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ je jediným řešením soustavy $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ a vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Lineární obal v K^m VII

V opačném případě máme možnost volby alespoň jednoho parametru, soustava má tedy nějaké nenulové řešení a vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně závislé.

Lineární obal v K^m VII

V opačném případě máme možnost volby alespoň jednoho parametru, soustava má tedy nějaké nenulové řešení a vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně závislé.

Vedoucím prvkem řádku $(0, \ldots, 0 \,|\, z)$, kde $z \neq 0$, je právě v $(n+1)$-ním sloupci ležící prvek z.

Lineární obal v K^m VII

V opačném případě máme možnost volby alespoň jednoho parametru, soustava má tedy nějaké nenulové řešení a vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně závislé.

Vedoucím prvkem řádku $(0, \ldots, 0 \,|\, z)$, kde $z \neq 0$, je právě v $(n+1)$-ním sloupci ležící prvek z.

Tedy matice v stupňovitém tvaru, která je řádkově ekvivalentní s $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y})$ neobsahuje takový řádek právě tehdy, když v jejím posledním sloupci neleží vedoucí prvek žádného řádku.

Lineární obal v K^m VIII

Příklad

Uvažme sloupcové vektory $\mathbf{x}_1 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, 1)^T$, $\mathbf{x}_3 = (3, 1, -3, -5)^T$, $\mathbf{x}_4 = (0, 0, 1, 2)^T$, $\mathbf{y} = (3, 5, -2, 1)^T$, $\mathbf{z} = (1, 1, 1, 1)^T$ *v prostoru* $\mathbb{R}^4$.

Máme rozhodnout, zda vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ *leží v lineárním obalu* $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$.

Lineární obal v K^m IX

Označme si následující matice

$$(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right),$$

Lineární obal v K^m IX

Označme si následující matice

$$(\mathbf{X} \mid \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right),$$

$$(\mathbf{X} \mid \mathbf{z}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Lineární obal v K^m X

Matice $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y})$, $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{z})$ jsou řádkově ekvivalentní s maticemi

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ resp. } \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Lineární obal v K^m X

Matice $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y})$, $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{z})$ jsou řádkově ekvivalentní s maticemi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ resp. } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Okamžitě vidíme, že platí $\quad \mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$
a $\quad \mathbf{z} \notin [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$.

Lineární obal v K^m XI

Příklad

Zjistíme, zda sloupce reálné matice

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

Lineární obal v K^m XII

Tato matice je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že slouce matice $\mathbf{X}$ jsou lineárně nezávislé.

Lineární obal v K^m XIII

Z druhé strany, $\mathbf{X}$ jakožto matice nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lineární obal v K^m XIII

Z druhé strany, $\mathbf{X}$ jakožto matice nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy sloupce matice $\mathbf{X}$, chápané jakožto vektory z vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^4$, jsou lineárně závislé.

Lineární obal v K^m XIV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in K^{m\times n}$ *jsou řádkově ekvivalentní matice, přičemž matice* $\mathbf{Y}$ *je ve stupňovitém tvaru. Pro* $1 \leq j \leq n$ *označme* $\mathbf{x}_j = \mathbf{s}_j(\mathbf{X})$ *j-tý sloupec matice* $\mathbf{X}$*. Nechť* $j_1 < \ldots < j_k$ *jsou indexy všech sloupců matice* $\mathbf{Y}$*, ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků. Potom platí:*

Lineární obal v K^m XV

(a) *vektory* $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ *jsou lineárně nezávislé*;

Lineární obal v K^m XV

(a) *vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ jsou lineárně nezávislé;*

(b) *pokud v j-tém sloupci matice $\mathbf{Y}$ neleží vedoucí prvek žádného jejího řádku (t. j. $1 \leq j \leq n$ a $j \neq j_1, \ldots, j_k$), tak vektor $\mathbf{x}_j$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_l}$, kde $l \leq k$ je největší index, pro který platí $j_l < j$;*

Lineární obal v K^m XV

(a) *vektory* $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}$ *jsou lineárně nezávislé;*

(b) *pokud v j-tém sloupci matice* $\mathbf{Y}$ *neleží vedoucí prvek žádného jejího řádku (t. j.* $1 \leq j \leq n$ *a* $j \neq j_1, \dots, j_k$*), tak vektor* $\mathbf{x}_j$ *je lineární kombinací vektorů* $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_l}$*, kde* $l \leq k$ *je největší index, pro který platí* $j_l < j$*;*

(c) $[\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}] = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v K^m XVI

Výše uvedené tvrzení nám dáva přímý návod na řešení otázky (3).

Stačí pomocí ERO upravit matici $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ na matici $\mathbf{Y}$ v stupňovitém tvaru a zjistit v ní indexy $j_1 < \ldots < j_k$ všech sloupců, ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků.

Potom $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ jsou hledané lineární nezávislé vektory, které generují lineární podprostor $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v K^m XVII

Příklad

Ze sloupců reálné matice

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je třeba vybrat lineární nezávislé sloupce, které generují lineární obal všech sloupců matice $\mathbf{X}$.

Lineární obal v K^m XVIII

Matice $\mathbf{X}$ je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve stupňovitém tvaru. Vedoucí prvky řádků matice $\mathbf{Y}$ se nachází ve sloupcích 1, 2 a 4.

Lineární obal v K^m XIX

Hledané vektory jsou tedy sloupce 1, 2 a 4 matice $\mathbf{X}$. Zapsané vedle sebe pak tvoří matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lineární obal v K^m XX

Poznámka. Výše uvedený postup řešení otázek (1), (2) a (3) pro prostory sloupcových vektorů K^m lze modifikovat na prostory řádkových vektorů K^m – např. transponováním příslušných matic řádkových vektorů nebo nahrazením elementárních řádkových operací sloupcovými.

Lineárně nezávislé posloupnosti I

Nekonečnou posloupnost $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \dots)$ vektorů z prostoru V nazýváme ***lineárně nezávislou***, pokud každá její konečná podposloupnost $(\mathbf{u}_{k_1}, \dots, \mathbf{u}_{k_n})$, kde $0 \leq k_1 < \dots < k_n$, je lineárně nezávislá.

Lineárně nezávislé posloupnosti II

Tvrzení

Nekonečná posloupnost $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ *vektorů z* V *je lineárně nezávislá právě tehdy, když pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je její počáteční úsek* $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *lineárně nezávislý.*

Lineárně nezávislé posloupnosti II

Tvrzení

Nekonečná posloupnost $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ *vektorů z* V *je lineárně nezávislá právě tehdy, když pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je její počáteční úsek* $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *lineárně nezávislý.*

Například posloupnost $(1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots)$ všech mocnin x je lineárně nezávislá posloupnost ve vektorovém prostoru $K[x]$ všech polynomů v proměnné x nad tělesem K.
Polynom $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ je (definitoricky) nulový právě tehdy, když $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Lineárně nezávislé posloupnosti III

Množina $X \subseteq V$ sa nazývá ***lineárně nezávislá***, pokud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ každá uspořádaná n-tice ***navzájem různých*** vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ z množiny X je lineárně nezávislá.

Lineárně nezávislé posloupnosti III

Množina $X \subseteq V$ sa nazývá ***lineárně nezávislá***, pokud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ každá uspořádaná n-tice ***navzájem různých*** vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ z množiny X je lineárně nezávislá.

Kdyby totiž $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ nebyly navzájem různé vektory, nemohly by být lineárně nezávislé.

Lineární závislost či nezávislost uspořádané n-tice vektorů nezávisí na jejich pořadí.

Lineárně nezávislé posloupnosti IV

Zřejmě uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{\sigma(n)})$, kde σ je libovolná permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$.

Lineárně nezávislé posloupnosti IV

Zřejmě uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{\sigma(n)})$, kde σ je libovolná permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$.

Tedy, lineární (ne)závislost uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů je vlastností množiny $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Lineárně nezávislé posloupnosti V

Tvrzení

Uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *navzájem různých vektorů z V je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina* $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subseteq V$ *je lineárně nezávislá.*

Lineárně nezávislé posloupnosti VI

Tvrzení

Nechť $X \subseteq V$ *je lineárně nezávislá množina a* $\mathbf{v} \in V$*. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{v} \in [X]$;

(ii) množina $X \cup \{\mathbf{v}\}$ *je lineárně závislá;*

(iii) $[X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X]$.

BÁZE A DIMENZE

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

20. října 2006

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole sa seznámíme s pojmem ***báze*** vektorového prostoru.

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole sa seznámíme s pojmem ***báze*** vektorového prostoru.

To nám umožní ve vektorových prostorech zavést ***souřadnice***.

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole sa seznámíme s pojmem ***báze*** vektorového prostoru.

To nám umožní ve vektorových prostorech zavést ***souřadnice***.

Dále budeme definovat ***dimenzi*** vektorového prostoru a odvodíme si některé jeho základní vlastnosti.

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole sa seznámíme s pojmem ***báze*** vektorového prostoru.

To nám umožní ve vektorových prostorech zavést ***souřadnice***.

Dále budeme definovat ***dimenzi*** vektorového prostoru a odvodíme si některé jeho základní vlastnosti.

V následující kapitole si potom mimo jiné dokážeme, že dimenze je základní strukturní invariant tzv. ***konečně rozměrných*** vektorových prostorů.

Obsah přednášky

Steinitzova věta I

Věta (Steinitzova věta)

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. *Jsou-li vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *lineárně nezávislé a všechny patří do lineárního obalu* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$, *pak* $n \leq m$.

Steinitzova věta II

Tvrzení

Pro libovolný vektorový prostor V jsou nasledující podmínky ekvivalentní:

Steinitzova věta II

Tvrzení

Pro libovolný vektorový prostor V jsou nasledující podmínky ekvivalentní:

(i) existuje konečná množina $X \subseteq V$ tak, že $[X] = V$;

Steinitzova věta II

Tvrzení

Pro libovolný vektorový prostor V jsou nasledující podmínky ekvivalentní:

(i) *existuje konečná množina $X \subseteq V$ tak, že $[X] = V$;*

(ii) *každá lineárně nezávislá množina $Y \subseteq V$ je konečná.*

Steinitzova věta III

Říkáme, že vektorový prostor V je ***konečně rozměrný*** (***konečně dimenzionální***), pokud splňuje některou (tedy nutně obě) z ekvivalentních podmínek (i), (ii) právě dokázaného tvrzení.

Steinitzova věta III

Říkáme, že vektorový prostor V je ***konečně rozměrný*** (***konečně dimenzionální***), pokud splňuje některou (tedy nutně obě) z ekvivalentních podmínek (i), (ii) právě dokázaného tvrzení.

V opačném případě říkáme, že V je ***nekonečně rozměrný*** (***nekonečně dimenzionální***) vektorový prostor.

Báze a dimenze I

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Báze a dimenze I

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Bází prostoru V nazýváme každou lineárně nezávislou uspořádanou n-tici $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ vektorů z V, která generuje celý prostor V.

Báze a dimenze I

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Bází prostoru V nazýváme každou lineárně nezávislou uspořádanou n-tici $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ vektorů z V, která generuje celý prostor V.

Říkáme pak, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ ***tvoří bázi*** prostoru V.

Báze a dimenze II

Následující tvrzení je důsledkem věty 4.4.4.

Tvrzení

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

Báze a dimenze II

Následující tvrzení je důsledkem věty 4.4.4.

Tvrzení

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *libovolnou lineárně nezávislou uspořádanou k-tici $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z V můžeme doplnit do nějaké báze $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prostoru V;*

Báze a dimenze II

Následující tvrzení je důsledkem věty 4.4.4.

Tvrzení

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *libovolnou lineárně nezávislou uspořádanou k-tici $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z V můžeme doplnit do nějaké báze $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_n)$ prostoru V;*

(b) *z libovolné generující uspořádané m-tice $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ vektorů z V můžeme vybrat nějakou bázi $(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n})$ prostoru V.*

Báze a dimenze III

Věta

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

Báze a dimenze III

Věta

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

Báze a dimenze III

Věta

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

Báze a dimenze III

Věta

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat ***dimenzi*** nebo též ***rozměr*** konečně rozměrného vektorového prostoru V jako počet prvků jeho libovolné báze.

Báze a dimenze III

Věta

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat ***dimenzi*** nebo též ***rozměr*** konečně rozměrného vektorového prostoru V jako počet prvků jeho libovolné báze.

Dimenzi vektorového prostoru V značíme $\dim V$.

Báze a dimenze IV

Pokud $\dim V = n$, říkáme, že V je ***n*-rozměrný** vektorový prostor.

Báze a dimenze IV

Pokud $\dim V = n$, říkáme, že V je ***n-rozměrný*** vektorový prostor.

Pokud V je nekonečně rozměrný prostor, klademe $\dim V = \infty$.

Báze a dimenze IV

Pokud $\dim V = n$, říkáme, že V je ***n-rozměrný*** vektorový prostor.

Pokud V je nekonečně rozměrný prostor, klademe $\dim V = \infty$.

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu číselného tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Báze a dimenze IV

Pokud $\dim V = n$, říkáme, že V je ***n*-rozměrný** vektorový prostor.

Pokud V je nekonečně rozměrný prostor, klademe $\dim V = \infty$.

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu číselného tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Báze a dimenze V

Tvrzení

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. *Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:*

Báze a dimenze V

Tvrzení

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. *Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:*

(i) *vektory* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *jsou lineárně nezávislé;*

Báze a dimenze V

Tvrzení

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. *Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:*

(i) *vektory* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *jsou lineárně nezávislé;*

(ii) $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m] = V$;

Báze a dimenze V

Tvrzení

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. *Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:*

(i) *vektory* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *jsou lineárně nezávislé;*

(ii) $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m] = V$;

(iii) $m = n$.

Báze a dimenze V

Tvrzení

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. *Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:*

(i) *vektory* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ *jsou lineárně nezávislé;*

(ii) $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m] = V$;

(iii) $m = n$.

To kromě jiného znamená, že na ověření, zda n vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tvoří bázi n-rozměrného vektorového prostoru V, stačí ověřit jen jednu (a to libovolnou) z podmínek (i), (ii).

Souřadnice vektoru I

Následující věta je speciálním případem věty z předchozí kapitoly o lineární nezávislosti.

Souřadnice vektoru I

Následující věta je speciálním případem věty z předchozí kapitoly o lineární nezávislosti.

Věta

Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *tvoří bázi vektorového prostoru* V *právě tehdy, když každý vektor* $\mathbf{x} \in V$ *můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace* $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$.

Souřadnice vektoru II

Existence aspoň jednoho vyjádření $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ je ekvivalentní s podmínkou, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ generují V.

Souřadnice vektoru II

Existence aspoň jednoho vyjádření $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ je ekvivalentní s podmínkou, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ generují V.

Jednoznačnost tohoto vyjádření je zase ekvivalentní s lineární nezávislostí vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Souřadnice vektoru II

Existence aspoň jednoho vyjádření $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ je ekvivalentní s podmínkou, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ generují V.

Jednoznačnost tohoto vyjádření je zase ekvivalentní s lineární nezávislostí vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Tedy $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je bází V tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{x} \in V$ existuje právě jedno $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ tak, že

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c}.$$

Souřadnice vektoru III

Uvědomme si, že

Souřadnice vektoru III

Uvědomme si, že

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c}$$

Souřadnice vektoru III

Uvědomme si, že

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Souřadnice vektoru IV

Tento jednoznačně určený sloupcový vektor $\mathbf{c} \in K^n$ budeme nazývat ***souřadnice vektoru*** x ***vzhledem na bázi*** α

Souřadnice vektoru IV

Tento jednoznačně určený sloupcový vektor $\mathbf{c} \in K^n$ budeme nazývat ***souřadnice vektoru*** x ***vzhledem na bázi*** α a označovat

$$\mathbf{c} = (\mathsf{x})_\alpha.$$

Tedy každá báze α v n-rozměrném vektorovém prostoru V definuje ***souřadnicové zobrazení*** $\mathsf{x} \mapsto (\mathsf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n.

Souřadnice vektoru V

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je báze konečně rozměrného vektorového prostoru* V*.*

Souřadnice vektoru V

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *je báze konečně rozměrného vektorového prostoru* V*.*

Potom příslušné souřadnicové zobrazení $(-)_{\boldsymbol{\alpha}} : V \to K^n$ *je bijektivní a zachovává lineární kombinace,*

Souřadnice vektoru V

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je báze konečně rozměrného vektorového prostoru* V.

Potom příslušné souřadnicové zobrazení $(-)_{\boldsymbol{\alpha}} : V \to K^n$ *je bijektivní a zachovává lineární kombinace,*

t. j. pro libovolná $a, b \in K$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ *platí*

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})_{\boldsymbol{\alpha}} = a(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} + b(\mathbf{y})_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Souřadnice vektoru V

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *je báze konečně rozměrného vektorového prostoru* V.

Potom příslušné souřadnicové zobrazení $(-)_{\boldsymbol{\alpha}} : V \to K^n$ *je bijektivní a zachovává lineární kombinace,*

t. j. pro libovolná $a, b \in K$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ *platí*

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})_{\boldsymbol{\alpha}} = a(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} + b(\mathbf{y})_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

K němu inverzní zobrazení $(-)_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1} : K^n \to V$ *je dané předpisem* $\mathbf{c} \mapsto \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c}$.

Souřadnice vektoru VI

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{c}.$$

Souřadnice vektoru VI

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor $\mathbf{x}$ zrekonstruovat z dané báze $\boldsymbol{\alpha}$ a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}$ v této bázi;

Souřadnice vektoru VI

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor $\mathbf{x}$ zrekonstruovat z dané báze $\boldsymbol{\alpha}$ a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}$ v této bázi;

druhá, že souřadnice lineární kombinace $\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c}$ v bázi $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ tvoří právě vektor $(c_1, \ldots, c_n)^T$.

Souřadnice vektoru VII

Takto zavedené souřadnice můžeme nazvat ***sloupcovými souřadnicemi*** vzhledem k dané bázi.

Souřadnice vektoru VII

Takto zavedené souřadnice můžeme nazvat ***sloupcovými souřadnicemi*** vzhledem k dané bázi.

Podobným způsobem můžeme zavést i ***řádkové souřadnice*** a dokázat pro ně analogická tvrzení jako pro sloupcové.

Souřadnice vektoru VIII

Příklad

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ *sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo i-té složky, která je 1.*

Souřadnice vektoru VIII

Příklad

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ *sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo i-té složky, která je 1.*

Potom $\varepsilon^{(n)} = \left(\mathbf{e}_1^{(n)}, \ldots, \mathbf{e}_n^{(n)}\right)$ *je báze sloupcového vektorového prostoru* K^n.

Souřadnice vektoru VIII

Příklad

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ *sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo i-té složky, která je 1.*

Potom $\varepsilon^{(n)} = \left(\mathbf{e}_1^{(n)}, \ldots, \mathbf{e}_n^{(n)}\right)$ *je báze sloupcového vektorového prostoru* K^n.

Nazýváme ji **kanonickou bází** *tohoto prostoru. Můžeme ji ztotožnit s jednotkovou maticí* $\mathbf{I}_n$.

Souřadnice vektoru IX

Občas budeme horní index (n) vynechávat a příslušnou bázi označovat stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Souřadnice vektoru IX

Občas budeme horní index (n) vynechávat a příslušnou bázi označovat stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

proto $(\mathbf{x})_{\varepsilon} = \mathbf{x}$,

Souřadnice vektoru IX

Občas budeme horní index (n) vynechávat a příslušnou bázi označovat stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

proto $(\mathbf{x})_{\varepsilon} = \mathbf{x}$,

t. j. každý vektor $\mathbf{x} \in K^n$ splýva se svými vlastními souřadnicemi v kanonické bázi.

Souřadnice vektoru X

Kanonická báze řádkového vektorového prostoru K^n je tvořená řádky jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ a značíme ji stejně jako v předcházejícím případě $\varepsilon^{(n)} = \left(\mathbf{e}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(n)}\right)^T$ nebo stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)^T$, s tím rozdílem, že $\varepsilon^{(n)} = \varepsilon$ je sloupec vektorů a každé $\mathbf{e}_i$ je řádek skládající se ze samých nul, mimo i-té pozice, na které je 1.

Souřadnice vektoru X

Kanonická báze řádkového vektorového prostoru K^n je tvořená řádky jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ a značíme ji stejně jako v předcházejícím případě $\varepsilon^{(n)} = \left(\mathbf{e}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(n)}\right)^T$ nebo stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)^T$, s tím rozdílem, že $\varepsilon^{(n)} = \varepsilon$ je sloupec vektorů a každé $\mathbf{e}_i$ je řádek skládající se ze samých nul, mimo i-té pozice, na které je 1.

Věta

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\dim K^n = n$.

Souřadnice vektoru XI

Příklad

Sloupce matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi α *sloupcového vektorového prostoru* K^4.

Souřadnice vektoru XII

Souřadnice vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in K^n$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$ jsou dané vztahem

$$(x)_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_4, x_3 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_2)^T.$$

Souřadnice vektoru XII

Souřadnice vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in K^n$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$ jsou dané vztahem

$$(x)_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_4, x_3 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_2)^T.$$

Platí totiž

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_3 - x_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ & \qquad (x_2 - x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Souřadnice vektoru XIII

Příklad

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. *Pro libovolné* $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ *označme* $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)} = \mathbf{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m \times n}$ *matici typu* $m \times n$ *nad tělesem* K, *která sestává ze samých nul, kromě pozice* (k, l), *na které je 1.*

Souřadnice vektoru XIII

Příklad

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. *Pro libovolné* $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ *označme* $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)} = \mathbf{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m \times n}$ *matici typu* $m \times n$ *nad tělesem* K, *která sestává ze samých nul, kromě pozice* (k, l), *na které je 1.*

Zřejmě každou matici $\mathbf{A} = (a_{kl}) \in K^{m \times n}$ *lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \mathbf{E}_{kl}.$$

Souřadnice vektoru XIV

Z toho vyplývá, že matice $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, tvoří bázi vektorového prostoru $K^{m \times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad tělesem K.

Souřadnice vektoru XIV

Z toho vyplývá, že matice $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, tvoří bázi vektorového prostoru $K^{m\times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad tělesem K.

Speciálním případem je kanonická báze $\varepsilon^{(n)}$ v prostoru K^n.

Souřadnice vektoru XIV

Z toho vyplývá, že matice $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, tvoří bázi vektorového prostoru $K^{m \times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad tělesem K.

Speciálním případem je kanonická báze $\varepsilon^{(n)}$ v prostoru K^n.

Dostáváme tak vztah:

$$\dim K^{m \times n} = mn.$$

Dimenze součtu a součinu I

Věta

Nechť $S, T \subseteq V$ *jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru* V*.*

Dimenze součtu a součinu I

Věta

Nechť $S, T \subseteq V$ jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.

Potom

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

Dimenze součtu a součinu II

Důsledek

Nechť S, T jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.

Dimenze součtu a součinu II

Důsledek

Nechť S, T *jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru* V.

Potom $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, *t. j. součet* $S + T$ *je direktní právě tehdy, když*

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T.$$

Dimenze součtu a součinu III

Tvrzení

Nech't V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad K.

Dimenze součtu a součinu III

Tvrzení

Nech't V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad K.

Potom pro dimenzi jejich přímého součinu platí

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

27. října 2006

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole prozkoumáme pojem ***lineárního zobrazení***, které nám umožní porovnávat struktury různých vektorových prostorů nad týmž tělesem.

Obsah přednášky

Lineární zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Lineární zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Říkáme, že $\varphi : V \to U$ je ***lineární zobrazení***, pokud φ zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku,

Lineární zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Říkáme, že $\varphi : V \to U$ je ***lineární zobrazení***, pokud φ zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku,

t. j. pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $c \in K$ platí

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}),$$

Lineární zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Říkáme, že $\varphi : V \to U$ je ***lineární zobrazení***, pokud φ zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku,

t. j. pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $c \in K$ platí

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}), \\ \varphi(c\mathbf{x}) &= c\varphi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Lineární zobrazení II

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory,

Lineární zobrazení II

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory, t. j. pro lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ a $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Lineární zobrazení II

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory, t. j. pro lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ a $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Pro každý vektorový prostor V je identické zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$, $x \mapsto x$ lineární.

Lineární zobrazení II

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory,

t. j. pro lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ a $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Pro každý vektorový prostor V je identické zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$, $x \mapsto x$ lineární.

Pro libovolné vektorové prostory U, V nad tělesem K zobrazení $\mathbf{0} : V \to U$, které každému vektoru $\mathbf{x} \in V$ přiřadí nulový vektor $\mathbf{0} \in U$, je lineární.

Lineární zobrazení III

Komutativita operace součinu v tělese a jeho distributivita vzhledem na sčítaní znamená, že pro libovolný pevný skalár $a \in K$ je přiřazením $x \mapsto ax$ definované lineární zobrazení $K \to K$.

Lineární zobrazení III

Komutativita operace součinu v tělese a jeho distributivita vzhledem na sčítaní znamená, že pro libovolný pevný skalár $a \in K$ je přiřazením $x \mapsto ax$ definované lineární zobrazení $K \to K$.

Lineární zobrazení můžeme charakterizovat jako zobrazení mezi vektorovými prostory (nad tím stejným tělesem), které zachovávají lineární kombinace.

Lineární zobrazení IV

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je libovolné zobrazení.

Lineární zobrazení IV

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je libovolné zobrazení.

Nasledující podmínky jsou ekvivalentní:

Lineární zobrazení IV

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je libovolné zobrazení.

Nasledující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) φ *je lineární zobrazení;*

Lineární zobrazení IV

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je libovolné zobrazení.

Nasledující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) *φ je lineární zobrazení;*

(ii) *pre všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a, b \in K$ platí*

$$\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\varphi(\mathbf{x}) + b\varphi(\mathbf{y});$$

Lineární zobrazení IV

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je libovolné zobrazení.

Nasledující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) *φ je lineární zobrazení;*

(ii) *pre všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a, b \in K$ platí*

$$\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\varphi(\mathbf{x}) + b\varphi(\mathbf{y});$$

(iii) *pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a všechna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$, $c_1, \ldots, c_n \in K$ platí*

$$\varphi(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n) = c_1\varphi(\mathbf{x}_1) + \ldots + c_n\varphi(\mathbf{x}_n).$$

Lineární zobrazení V

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

Lineární zobrazení V

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

Lineární zobrazení V

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Lineární zobrazení V

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\psi : W \to V, \varphi : V \to U$ jsou lineární zobrazení.

Lineární zobrazení V

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ jsou lineární zobrazení.

Potom i jejich složení $\varphi \circ \psi : W \to U$ je lineární zobrazení.

Lineární zobrazení VI

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení.

Lineární zobrazení VI

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení.

(a) *Je-li S lineární podprostor prostoru V, tak i $\varphi(S)$ je lineární podprostor prostoru U.*

Lineární zobrazení VI

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení.

(a) *Je-li S lineární podprostor prostoru V, tak i $\varphi(S)$ je lineární podprostor prostoru U.*

(b) *Je-li T lineární podprostor prostoru U, tak $\varphi^{-1}(T)$ je lineární podprostor prostoru V.*

Lineární zobrazení VII

Příklad

Nechť K je těleso.

Lineární zobrazení VII

Příklad

Nechť K je těleso.

Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho záměnitelnosti s operací skalárního násobku říká,

Lineární zobrazení VII

Příklad

Nechť K je těleso.

Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho záměnitelnosti s operací skalárního násobku říká,

že pro pevné $m, n, p \in \mathbb{N}$ a libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je přiřazením $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ definované lineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic $K^{n \times p} \to K^{m \times p}$.

Lineární zobrazení VII

Příklad

Nechť K je těleso.

Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká,

že pro pevné $m, n, p \in \mathbb{N}$ a libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je přiřazením $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ definované lineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic $K^{n \times p} \to K^{m \times p}$.

Podobně je přiřazením $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}$ definované lineární zobrazení $K^{p \times m} \to K^{p \times n}$.

Lineární zobrazení VIII

Speciálně pro $p = 1$ *je takto definované lineární zobrazení* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ *mezi sloupcovými vektorovými prostory* $K^n \to K^m$*, resp. lineární zobrazení* $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}$ *mezi řádkovými vektorovými prostory* $K^m \to K^n$*.*

Lineární zobrazení VIII

Speciálně pro $p = 1$ *je takto definované lineární zobrazení* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ *mezi sloupcovými vektorovými prostory* $K^n \to K^m$, *resp. lineární zobrazení* $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}$ *mezi řádkovými vektorovými prostory* $K^m \to K^n$.

Každé lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad K má v podstatě takovýto tvar.

Lineární zobrazení IX

Příklad

Nechť K je těleso.

Lineární zobrazení IX

Příklad

Nechť K je těleso.

Pro $m, n \in \mathbb{N}$ a pevné $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ jsou předpisy

Lineární zobrazení IX

Příklad

Nechť K je těleso.

Pro $m, n \in \mathbb{N}$ a pevné $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ jsou předpisy

$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{r}_i(\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{s}_j(\mathbf{A})$ *definovaná lineární zobrazení* $K^{m \times n} \to K^{1 \times n}$ *resp.* $K^{m \times n} \to K^{m \times 1}$.

Lineární zobrazení IX

Příklad

Nechť K je těleso.

Pro $m, n \in \mathbb{N}$ a pevné $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ jsou předpisy

$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{r}_i(\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{s}_j(\mathbf{A})$ definovaná lineární zobrazení $K^{m\times n} \to K^{1\times n}$ resp. $K^{m\times n} \to K^{m\times 1}$.

Rovněž $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^T$ je lineární zobrazení $K^{m\times n} \to K^{n\times m}$.

Lineární zobrazení X

Příklad

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K, X je množina a $x \in X$ je pevně zvolený prvek.

Lineární zobrazení X

Příklad

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K, X je množina a $x \in X$ je pevně zvolený prvek.

Připomeňme, že V^X je vektorový prostor všech funkcí $f : X \to V$. Dosazení prvku x do funkce f, t. j. přiřazení $f \mapsto f(x)$, je lineární zobrazení $V^X \to V$.

Lineární zobrazení X

Příklad

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K, X je množina a $x \in X$ je pevně zvolený prvek.

Připomeňme, že V^X je vektorový prostor všech funkcí $f : X \to V$. Dosazení prvku x do funkce f, t. j. přiřazení $f \mapsto f(x)$, je lineární zobrazení $V^X \to V$.

Podobně, pro libovolnou podmnožinu $Y \subseteq X$ je zúžení $f \mapsto f \restriction Y$ lineární zobrazení $V^X \to V^Y$.

Lineární zobrazení XI

Příklad

Označme V množinu všetch konvergentních posloupností reálných čísel.

Lineární zobrazení XI

Příklad

Označme V množinu všetch konvergentních posloupností reálných čísel.

Zřejmě V je lineární podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všech posloupností reálných čísel.

Lineární zobrazení XI

Příklad

Označme V množinu všetch konvergentních posloupností reálných čísel.

Zřejmě V je lineární podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všech posloupností reálných čísel.

Pak zobrazení $V \to \mathbb{R}$, které posloupnosti $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in V$ přiřadí její limitu $\lim_{n\to\infty} a_n$, je lineární.

Lineární zobrazení XII

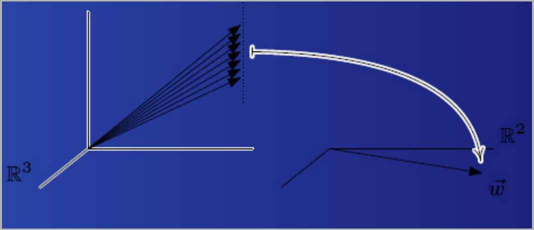
Příklad

Uvažujme projekci $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

Lineární zobrazení XII

Příklad

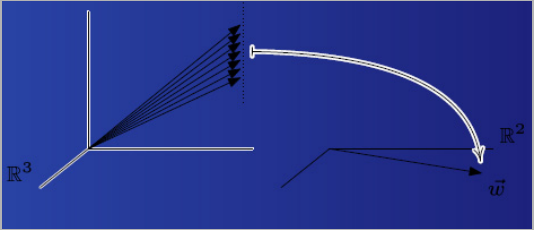
Uvažujme projekci $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$



Lineární zobrazení XII

Příklad

Uvažujme projekci $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

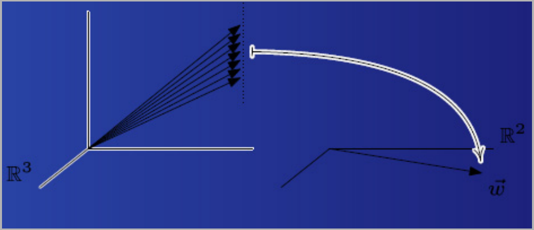


Tato projekce je lineární zobrazení, které není prosté a je surjektivní.

Lineární zobrazení XII

Příklad

Uvažujme projekci $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Tato projekce je lineární zobrazení, které není prosté a je surjektivní.

Totiž vzor nějakého vektoru v $\mathbb{R}^2$ *je vertikální přímka vektorů z* $\mathbb{R}^3$.

Lineární zobrazení XIII

Příklad

Následující lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ *dané předpisem*

Lineární zobrazení XIII

Příklad

Následující lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ *dané předpisem*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{h} x + y$$

není rovněž prosté.

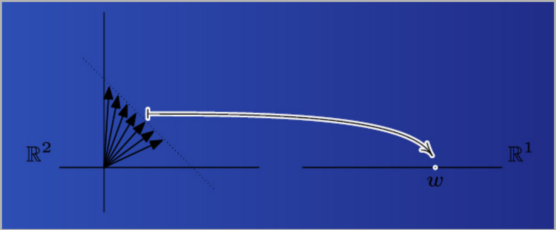
Lineární zobrazení XIII

Příklad

Následující lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ *dané předpisem*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{h} x + y$$

není rovněž prosté. Pro pevné $w \in \mathbb{R}^1$ *je totiž jeho vzor* $h^{-1}(w)$ *množina všech vektorů v rovině,*



jejichž souřadnice po sečtení dávají právě w.

Lineární zobrazení XIV

Příklad

Vzory mohou samozřejmě být jiné struktury než výše použité přímky.

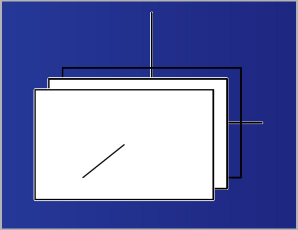
Lineární zobrazení XIV

Příklad

Vzory mohou samozřejmě být jiné struktury než výše použité přímky.

Pro lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definované předpisem*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$



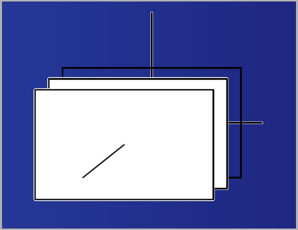
Lineární zobrazení XIV

Příklad

Vzory mohou samozřejmě být jiné struktury než výše použité přímky.

Pro lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$



jsou příslušné vzory roviny $x = 0$, $x = 1$, atd., kolmé k ose x.

Jádro a obraz I

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K.

Jádro a obraz I

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K.

Jeho ***jádrem*** nazýváme množinu

$$\mathrm{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in V;\ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Jádro a obraz I

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K.

Jeho ***jádrem*** nazýváme množinu

$$\mathrm{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in V;\ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Obrazem lineárního zobrazení φ nazývame množinu

$$\mathrm{Im}\varphi = \varphi(V) = \{\varphi(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in V\}.$$

Jádro a obraz II

Výše zavedené označení pochází z anglických slov ***kernel*** a ***image***.

Jádro a obraz II

Výše zavedené označení pochází z anglických slov ***kernel*** a ***image***.

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V, jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Jádro a obraz II

Výše zavedené označení pochází z anglických slov ***kernel*** a ***image***.

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V, jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Tvrzení

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K.

Jádro a obraz II

Výše zavedené označení pochází z anglických slov ***kernel*** a ***image***.

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V, jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Tvrzení

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K.

Potom $\mathrm{Ker}\varphi$ je lineární podprostor prostoru V a $\mathrm{Im}\varphi$ je lineární podprostor prostoru U.

Jádro a obraz III

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Jádro a obraz III

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení. Potom*

Jádro a obraz III

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Potom

(a) *φ je injektivní právě tehdy, když $\mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;*

Jádro a obraz III

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Potom

(a) *φ je injektivní právě tehdy, když $\mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;*

(b) *φ je surjektivní právě tehdy, když $\mathrm{Im}\varphi = U$.*

Jádro a obraz IV

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení, přičemž vektorový prostor* V *je konečně rozměrný.*

Jádro a obraz IV

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení, přičemž vektorový prostor V je konečně rozměrný.

Potom i $\mathrm{Ker}\varphi$ a $\mathrm{Im}\varphi$ jsou konečně rozměrné prostory a platí

Jádro a obraz IV

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení, přičemž vektorový prostor* V *je konečně rozměrný.*

Potom i $\mathrm{Ker}\varphi$ *a* $\mathrm{Im}\varphi$ *jsou konečně rozměrné prostory a platí*

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi.$$

Jádro a obraz V

Dimenzi obrazu $\mathrm{Im}\varphi$ nazýváme ***hodností*** lineárního zobrazení φ a značíme ji

Jádro a obraz V

Dimenzi obrazu $\mathrm{Im}\varphi$ nazýváme ***hodností*** lineárního zobrazení φ a značíme ji

$$h(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\varphi.$$

Jádro a obraz V

Dimenzi obrazu $\mathrm{Im}\varphi$ nazýváme ***hodností*** lineárního zobrazení φ a značíme ji

$$h(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\varphi.$$

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ vektorového prostoru V do sebe nazýváme ***lineárním operátorem***

Jádro a obraz V

Dimenzi obrazu $\mathrm{Im}\varphi$ nazýváme ***hodností*** lineárního zobrazení φ a značíme ji

$$h(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\varphi.$$

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ vektorového prostoru V do sebe nazýváme ***lineárním operátorem***

neboli ***lineární transformací***.

Jádro a obraz VI

Důsledek

Nechť $\varphi : V \to V$ *je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru* V.

Jádro a obraz VI

Důsledek

Nechť $\varphi : V \to V$ *je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru* V.

Potom φ *je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.*

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi vektorovými prostory V, U nad tímž tělesem K nazýváme ***lineární izomorfismus***.

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi vektorovými prostory V, U nad týmž tělesem K nazýváme ***lineární izomorfismus***.

Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou ***lineárně izomorfní*** nebo jen krátce ***izomorfní*** a píšeme $V \cong U$,

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi vektorovými prostory V, U nad týmž tělesem K nazýváme ***lineární izomorfismus***.

Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou ***lineárně izomorfní*** nebo jen krátce ***izomorfní*** a píšeme $V \cong U$,

pokud existuje nějaký lineární izomorfismus $\varphi : V \to U$.

Lineární izomorfismy II

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Lineární izomorfismy II

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K.

(a) $\mathrm{id}_V : V \to V$ *je lineární izomorfismus.*

Lineární izomorfismy II

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K.

(a) $\mathrm{id}_V : V \to V$ *je lineární izomorfismus.*

(b) *Je-li $\varphi : V \to U$ lineární izomorfismus, pak i $\varphi^{-1} : U \to V$ je lineární izomorfismus.*

Lineární izomorfismy II

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K.

(a) $\mathrm{id}_V : V \to V$ *je lineární izomorfismus.*

(b) *Je-li* $\varphi : V \to U$ *lineární izomorfismus, pak i* $\varphi^{-1} : U \to V$ *je lineární izomorfismus.*

(c) *Jsou-li* $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ *lineární izomorfismy, pak i* $\varphi \circ \psi : W \to U$ *je lineární izomorfismus.*

Lineární izomorfismy III

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Lineární izomorfismy III

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:

Lineární izomorfismy III

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:

(a) $V \cong V$;

Lineární izomorfismy III

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:

(a) $V \cong V$;

(b) $V \cong U \Rightarrow U \cong V$;

Lineární izomorfismy III

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:

(a) $V \cong V$;

(b) $V \cong U \;\Rightarrow\; U \cong V$;

(c) $W \cong V \;\&\; V \cong U \;\Rightarrow\; W \cong U$.

Lineární izomorfismy IV

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je ***reflexivní***, ***symetrický*** a ***tranzitivní***,

Lineární izomorfismy IV

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je ***reflexivní***, ***symetrický*** a ***tranzitivní***,

t. j. je vztahem ***ekvivalence***.

Lineární izomorfismy IV

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je ***reflexivní***, ***symetrický*** a ***tranzitivní***,

t. j. je vztahem ***ekvivalence***.

Z formálního hlediska s ním můžeme pracovat podobně jako se vztahem rovnosti $=$.

Lineární izomorfismy IV

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je ***reflexivní***, ***symetrický*** a ***tranzitivní***,

t. j. je vztahem ***ekvivalence***.

Z formálního hlediska s ním můžeme pracovat podobně jako se vztahem rovnosti $=$.

Příklad

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K, $\dim V = n$ a $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ je nějaká jeho báze.

Lineární izomorfismy IV

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je ***reflexivní***, ***symetrický*** a ***tranzitivní***,

t. j. je vztahem ***ekvivalence***.

Z formálního hlediska s ním můžeme pracovat podobně jako se vztahem rovnosti $=$.

Příklad

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K, $\dim V = n$ a $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ je nějaká jeho báze.

Potom souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$ je lineární izomorfizmus $V \to K^n$.

Lineární izomorfismy V

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Lineární izomorfismy V

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Věta

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K.

Lineární izomorfismy V

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Věta

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K.

Potom

$$V \cong U \iff \dim V = \dim U.$$

Lineární izomorfismy VI

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$.

Lineární izomorfismy VI

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$.

Přitom každá báze β prostoru V určuje jeden takovýto izomorfismus $V \to K^n$ –

Lineární izomorfismy VI

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$.

Přitom každá báze β prostoru V určuje jeden takovýto izomorfismus $V \to K^n$ –

je jím souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_{\beta}$.

Matice lineárního zobrazení I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Matice lineárního zobrazení I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m, můžeme vytvořit matici

Matice lineárního zobrazení I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m, můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m \times n},$$

Matice lineárního zobrazení I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m, můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m \times n},$$

jejímiž sloupci jsou právě tyto vektory,

Matice lineárního zobrazení I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m, můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m \times n},$$

jejímiž sloupci jsou právě tyto vektory,

t. j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{e}_j)$ pro $1 \leq j \leq n$.

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n)$$

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n)\\ &= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n)\end{aligned}$$

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) \\
&= (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot (x_1, \ldots, x_n)^T
\end{aligned}$$

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$
\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) \\
&= (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot (x_1, \ldots, x_n)^T \\
&= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Matice lineárního zobrazení III

Tedy ***každé*** lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro vhodnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Matice lineárního zobrazení III

Tedy ***každé*** lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro vhodnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorom K^n pro $n = \dim V$,

Matice lineárního zobrazení III

Tedy ***každé*** lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro vhodnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorom K^n pro $n = \dim V$,

při volbě pevných bazí v konečně rozměrných prostoroch U, V, bude možné libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ zakódovat pomocí vhodné matice **A**.

Matice lineárního zobrazení IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U, resp. ve V.

Matice lineárního zobrazení IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$, $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U, resp. ve V.

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ ***vzhledem k bazím*** $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nazývame matici

$$\mathbf{A} = \big((\varphi(\mathbf{v}_1))_{\boldsymbol{\alpha}}, \dots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_{\boldsymbol{\alpha}}\big) \in K^{m \times n},$$

Matice lineárního zobrazení IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$, $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U, resp. ve V.

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ ***vzhledem k bazím*** $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nazývame matici

$$\mathbf{A} = \left((\varphi(\mathbf{v}_1))_{\boldsymbol{\alpha}}, \ldots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_{\boldsymbol{\alpha}}\right) \in K^{m \times n},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{v}_j)$ vektorů báze $\boldsymbol{\beta}$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{\alpha}$,

Matice lineárního zobrazení IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$, $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U, resp. ve V.

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ ***vzhledem k bazím*** $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nazývame matici

$$\mathbf{A} = \big((\varphi(\mathbf{v}_1))_{\boldsymbol{\alpha}}, \ldots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_{\boldsymbol{\alpha}}\big) \in K^{m \times n},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{v}_j)$ vektorů báze $\boldsymbol{\beta}$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{\alpha}$,

t. j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = (\varphi(\mathbf{v}_j))_{\boldsymbol{\alpha}}$ pro $1 \leq j \leq n$.

Matice lineárního zobrazení V

Tuto matici značíme též

$$\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Matice lineárního zobrazení V

Tuto matici značíme též

$$\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

(Všimněme si obrácené pořadí znaků bazí vůči pořadí vektorových prostorů v označení zobrazení $\varphi : V \to U$.)

Matice lineárního zobrazení V

Tuto matici značíme též

$$\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

(Všimněme si obrácené pořadí znaků bazí vůči pořadí vektorových prostorů v označení zobrazení $\varphi : V \to U$.)

Matici **A** ze začátku tohoto paragrafu můžeme nazvat ***maticí lineárního zobrazení*** $\varphi : K^n \to K^m$ ***vzhledem na kanonickou bázi*** $\varepsilon^{(n)}$, $\varepsilon^{(m)}$.

Matice lineárního zobrazení VI

Pokud neřekneme jinak, budeme pod maticí lineárního zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ mezi sloupcovými vektorovými prostory vždy rozumět matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bazím.

Matice lineárního zobrazení VI

Pokud neřekneme jinak, budeme pod maticí lineárního zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ mezi sloupcovými vektorovými prostory vždy rozumět matici $(\varphi)_{\varepsilon^{(m)},\varepsilon^{(n)}}$ zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bazím.

Maticí lineární transformace $\varphi : V \to V$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru V tedy rozumíme matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}}$.

Matice lineárního zobrazení VII

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_\beta = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v}_j$ báze $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ prostoru V.

Matice lineárního zobrazení VII

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_\beta = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v}_j$ báze $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ prostoru V.

Z toho je zřejmé, že pro každou bázi β n-rozměrného vektorového prostoru V platí

Matice lineárního zobrazení VII

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v}_j$ báze $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ prostoru V.

Z toho je zřejmé, že pro každou bázi β n-rozměrného vektorového prostoru V platí

$$(\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{e}_j^{(n)})_{j=1}^n = \mathbf{I}_n.$$

Matice lineárního zobrazení VIII

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad číselným tělesem* K*,* $\dim V = n$*,* $\dim U = m$ *a* α*,* β *jsou báze prostorů* U *resp.* V*.*

Matice lineárního zobrazení VIII

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad číselným tělesem* K*,* $\dim V = n$*,* $\dim U = m$ *a* $\boldsymbol{\alpha}$*,* $\boldsymbol{\beta}$ *jsou báze prostorů* U *resp.* V*.*

Potom pro všechna $\mathbf{x} \in V$ *platí*

$$(\varphi(\mathbf{x}))_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}}$$

Matice lineárního zobrazení VIII

Věta

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad číselným tělesem K, $\dim V = n$, $\dim U = m$ a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou báze prostorů U resp. V.

Potom pro všechna $\mathbf{x} \in V$ platí

$$(\varphi(\mathbf{x}))_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}}$$

a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je jediná matice touto vlastností.

Matice lineárního zobrazení IX

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Matice lineárního zobrazení IX

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta

Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, α je báze U, β je báze V a γ je báze W.

Matice lineárního zobrazení IX

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta

Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, α je báze U, β je báze V a γ je báze W.

Potom pro libovolné lineární zobrazení $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ platí

Matice lineárního zobrazení IX

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta

Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\boldsymbol{\alpha}$ *je báze U,* $\boldsymbol{\beta}$ *je báze V a* $\boldsymbol{\gamma}$ *je báze W.*

Potom pro libovolné lineární zobrazení $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ *platí*

$$(\varphi \circ \psi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\psi)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}.$$

Matice lineárního zobrazení X

Příklad

Otočení *roviny okolo počátku o úhel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je lineární zobrazení* $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Matice lineárního zobrazení X

Příklad

Otočení *roviny okolo počátku o úhel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je lineární zobrazení* $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*.*

Matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε *budeme značiť rovněž* $\mathbf{R}_\alpha$*,*

Matice lineárního zobrazení X

Příklad

Otočení *roviny okolo počátku o úhel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je lineární zobrazení* $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε *budeme značiť rovněž* $\mathbf{R}_\alpha$,

tedy pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *budeme psát* $\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}$.

Matice lineárního zobrazení X

Příklad

Otočení *roviny okolo počátku o úhel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je lineární zobrazení* $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*.*

Matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε *budeme značiť rovněž* $\mathbf{R}_\alpha$*,*

tedy pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *budeme psát* $\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}$*.*

Její sloupce získáme otočením vektorů $\mathbf{e}_1 = (1,0)^T$*,* $\mathbf{e}_2 = (0,1)^T$ *o úhel* α*.*

Matice lineárního zobrazení XI

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

Matice lineárního zobrazení XI

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

Matice lineárního zobrazení XI

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \end{pmatrix}$$

Matice lineárního zobrazení XI

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XII

To znamená, že

Matice lineárního zobrazení XII

To znamená, že

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Matice lineárního zobrazení XII

To znamená, že

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a obrazem libovolného vektoru $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ *v otočení* $\mathbf{R}_\alpha$ *je vektor*

Matice lineárního zobrazení XII

To znamená, že

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a obrazem libovolného vektoru $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ *v otočení* $\mathbf{R}_\alpha$ *je vektor*

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XIII

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix}$$

Matice lineárního zobrazení XIII

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Matice lineárního zobrazení XIII

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

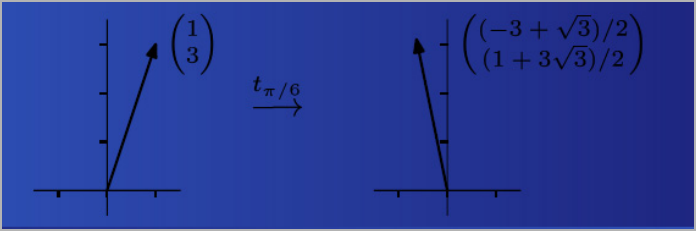
reprezentuje vzhledem ke standardní bázi transformaci $\mathbf{R}_{\pi/6} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, která otočí vektory o* $\pi/6$ *radiánů proti směru hodinových ručiček.*

Matice lineárního zobrazení XIII

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

reprezentuje vzhledem ke standardní bázi transformaci $\mathbf{R}_{\pi/6} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, která otočí vektory o* $\pi/6$ *radiánů proti směru hodinových ručiček.*



Matice lineárního zobrazení XIV

Příklad

Osová souměrnost *roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení* $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *kde* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou* x.

Matice lineárního zobrazení XIV

Příklad

Osová souměrnost *roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení* $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, kde* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou* x.

Pomocí obdobné úvahy jako v případě otočení můžeme ověřit, že i $\mathbf{S}_\alpha$ *je lineární zobrazení.*

Matice lineárního zobrazení XIV

Příklad

Osová souměrnost *roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení* $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, kde* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou* x.

Pomocí obdobné úvahy jako v případě otočení můžeme ověřit, že i $\mathbf{S}_\alpha$ *je lineární zobrazení.*

Jeho matici vzhledem ke kanonické bázi ε *budeme značit stejně tj.* $\mathbf{S}_\alpha$.

Matice lineárního zobrazení XV

Zřejmě matice souměrnosti podle osy x je

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matice lineárního zobrazení XV

Zřejmě matice souměrnosti podle osy x je

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a osovou souměrnost $\S_\alpha$ můžeme obdržet jako složení otočení $\mathbf{R}_{-\alpha}$, osové souměrnosti $\mathbf{S}_0$ a otočení $\mathbf{R}_\alpha$,

Matice lineárního zobrazení XV

Zřejmě matice souměrnosti podle osy x je

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a osovou souměrnost $\S_\alpha$ můžeme obdržet jako složení otočení $\mathbf{R}_{-\alpha}$, osové souměrnosti $\mathbf{S}_0$ a otočení $\mathbf{R}_\alpha$,

t. j.

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{-\alpha}.$$

Matice lineárního zobrazení XV

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

Matice lineárního zobrazení XV

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XV

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Tedy osová souměrnost $\mathbf{S}_\alpha$ *zobrazí vektor* $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ *na vektor*

Matice lineárního zobrazení XV

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Tedy osová souměrnost $\mathbf{S}_\alpha$ *zobrazí vektor* $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ *na vektor*

$$\mathbf{S}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \\ x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XVI

Příklad

Stejnolehlost *neboli též* **homotetie** *se středem v počátku a s koeficientem podobnosti* $0 \neq c \in \mathbb{R}$ *je opět lineární zobrazení* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *s maticí* $c\mathbf{I}_2 = \mathrm{diag}(c, c)$.

Matice lineárního zobrazení XVI

Příklad

Stejnolehlost *neboli též* **homotetie** *se středem v počátku a s koeficientem podobnosti* $0 \neq c \in \mathbb{R}$ *je opět lineární zobrazení* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *s maticí* $c\mathbf{I}_2 = \operatorname{diag}(c, c)$*.*

Tento příklad můžeme evidentním způsobem zevšeobecnit na libovolnou dimenzi n*.*

Matice lineárního zobrazení XVII

Příklad

Zkosení *(kroucení, střih) způsobuje deformace tvarů.*

Matice lineárního zobrazení XVII

Příklad

Zkosení *(kroucení, střih) způsobuje deformace tvarů.*

Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.

Matice lineárního zobrazení XVII

Příklad

Zkosení *(kroucení, střih) způsobuje deformace tvarů.*

Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.

Dvě základní transformace jsou zkosení ve směru x a zkosení ve směru y.

Matice lineárního zobrazení XVIII

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

Matice lineárního zobrazení XVIII

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

$$\varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ ax + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XVIII

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ ax + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Je tak definovaná lineární transformace roviny, která posouvá její každou "vodorovnou vrstvu" $\{(x, y);\ y = s\}$, $s \in K$, o vektor $as\mathbf{e}_1$.

Matice lineárního zobrazení XVIII

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ ax + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Je tak definovaná lineární transformace roviny, která posouvá její každou "vodorovnou vrstvu" $\{(x, y);\ y = s\}$, $s \in K$, o vektor $as\mathbf{e}_1$.

Analogické lineární transformace fungují i ve vícerozměrných prostorech K^n.

Prostory lineárních zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K.

Prostory lineárních zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K.

Uvažme vektorový prostor U^V ***všech*** zobrazení $f : V \to U$ s operacemi součtu a skalárního násobku definovanými po složkách.

Prostory lineárních zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K.

Uvažme vektorový prostor U^V ***všech*** zobrazení $f : V \to U$ s operacemi součtu a skalárního násobku definovanými po složkách.

Pak pro množinu $\mathcal{L}(V, U)$ všech ***lineárních*** zobrazení $\varphi : V \to U$ platí $\mathcal{L}(V, U) \subseteq U^V$.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V.

Tedy $\mathcal{L}(V, U)$ je vektorový prostor nad K.

Tvrzení

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = m$, $\dim V = n$.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V.

Tedy $\mathcal{L}(V, U)$ je vektorový prostor nad K.

Tvrzení

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = m$, $\dim V = n$.

Potom

$$\mathcal{L}(V, U) \cong K^{m\times n},$$

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V.

Tedy $\mathcal{L}(V, U)$ je vektorový prostor nad K.

Tvrzení

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = m$, $\dim V = n$.

Potom

$$\mathcal{L}(V, U) \cong K^{m \times n},$$

tedy $\dim \mathcal{L}(V, U) = mn$.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi α v prostoru U a β v prostoru V.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi $\boldsymbol{\alpha}$ v prostoru U a $\boldsymbol{\beta}$ v prostoru V.

Na matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m\times n}$, vzhledem na dvojici bazí $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi $\boldsymbol{\alpha}$ v prostoru U a $\boldsymbol{\beta}$ v prostoru V.

Na matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m\times n}$, vzhledem na dvojici bazí $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Lineární zobrazení $\varphi : V \to K$ z vektorového prostoru V do tělesa K se nazývá ***lineární funkcionál*** nebo též ***lineární forma*** na V.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi $\boldsymbol{\alpha}$ v prostoru U a $\boldsymbol{\beta}$ v prostoru V.

Na matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m\times n}$, vzhledem na dvojici bazí $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Lineární zobrazení $\varphi : V \to K$ z vektorového prostoru V do tělesa K se nazývá ***lineární funkcionál*** nebo též ***lineární forma*** na V.

Vektorový prostor $\mathcal{L}(V, K)$ všech lineárních forem na V se nazývá ***duální prostor*** nebo jen krátce ***duál*** vektorového prostoru V.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi $\boldsymbol{\alpha}$ v prostoru U a $\boldsymbol{\beta}$ v prostoru V.

Na matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m\times n}$, vzhledem na dvojici bazí $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Lineární zobrazení $\varphi : V \to K$ z vektorového prostoru V do tělesa K se nazývá ***lineární funkcionál*** nebo též ***lineární forma*** na V.

Vektorový prostor $\mathcal{L}(V, K)$ všech lineárních forem na V se nazývá ***duální prostor*** nebo jen krátce ***duál*** vektorového prostoru V.

Budeme používat označení $\mathcal{L}(V, K) = V^*$.

Prostory lineárních zobrazení IV

Pokud v tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$,

Prostory lineárních zobrazení IV

Pokud v tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$,

libovolná báze β v konečně rozměrném prostoru V určuje lineární izomorfismus $V^* \to V$ daný předpisem $\varphi \mapsto (\varphi)_{1,\boldsymbol{\beta}}$.

Prostory lineárních zobrazení IV

Pokud v tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$,

libovolná báze β v konečně rozměrném prostoru V určuje lineární izomorfismus $V^* \to V$ daný předpisem $\varphi \mapsto (\varphi)_{1,\boldsymbol{\beta}}$.

Platí tedy

Tvrzení

Pro libovolný konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K platí $V^* \cong V$.

Prostory lineárních zobrazení V

Matice $(\varphi)_{1,\boldsymbol{\beta}}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \to K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1\times n}$.

Prostory lineárních zobrazení V

Matice $(\varphi)_{1,\boldsymbol{\beta}}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \to K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1\times n}$.

Při volbě kanonické báze $\boldsymbol{\varepsilon}$ v sloupcovém prostoru $K^{n\times 1}$ můžeme řádkový prostor $K^{1\times n}$ ztotožnit s duálem $\left(K^{n\times 1}\right)^*$ sloupcového prostoru $K^{n\times 1}$.

Prostory lineárních zobrazení V

Matice $(\varphi)_{1,\boldsymbol{\beta}}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \to K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1\times n}$.

Při volbě kanonické báze ε v sloupcovém prostoru $K^{n\times 1}$ můžeme řádkový prostor $K^{1\times n}$ ztotožnit s duálem $\left(K^{n\times 1}\right)^*$ sloupcového prostoru $K^{n\times 1}$.

Izomorfismus konečně rozměrného prostoru V a jeho duálu V^* závisí od výběru báze ve V.

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,

t. j. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho ***druhého duálu*** V^{**}

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,

t. j. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho ***druhého duálu*** V^{**}

dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$, kde

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,

t. j. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho ***druhého duálu*** V^{**}

dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$, kde

$$\widehat{\mathbf{x}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{x})$$

pro $\mathbf{x} \in V$, $\varphi \in V^*$.

Prostory lineárních zobrazení VII

Tvrzení

Nech V je vektorový prostor nad tělesem K.

Prostory lineárních zobrazení VII

Tvrzení

Nech V je vektorový prostor nad tělesem K.

Potom

(a) $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ *je injektivní lineární zobrazení* $V \to V^{**}$;

Prostory lineárních zobrazení VII

Tvrzení

Nech V je vektorový prostor nad tělesem K.

Potom

(a) $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ *je injektivní lineární zobrazení* $V \to V^{**}$;

(b) *pokud je V konečně rozměrný, pak* $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ *je lineární izomorfismus* $V \to V^{**}$.

Prostory lineárních zobrazení VIII

Každý vektor $\mathbf{x} \in V$ definuje lineární funkcionál $\widehat{\mathbf{x}}$ na duálním prostoru V^*.

Prostory lineárních zobrazení VIII

Každý vektor $\mathbf{x} \in V$ definuje lineární funkcionál $\widehat{\mathbf{x}}$ na duálním prostoru V^*.

Konečně rozměrný vektorový prostor V můžeme přiřazením $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ ***přirozeně*** ztotožnit s duálem prostoru V^*.

7. HODNOST MATICE, INVERZNÍ MATICE A ZMĚNA BÁZE

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

2. listopadu 2006

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Nakonec prozkoumáme vliv změny báze na matici lineárního zobrazení.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Nakonec prozkoumáme vliv změny báze na matici lineárního zobrazení.

Přednáška začne pojmem ***hodnosti matice***, který nám umožní rozhodnout o existenci inverzní matice.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Nakonec prozkoumáme vliv změny báze na matici lineárního zobrazení.

Přednáška začne pojmem ***hodnosti matice***, který nám umožní rozhodnout o existenci inverzní matice.

V celé kapitole K označuje pevné těleso, m, n, p jsou kladná celá čísla.

Obsah přednášky

Hodnost matice I

V této části je potřebné rozlišovat mezi vektorovými prostory řádkových resp. sloupcových vektorů. Prostor řádkových vektorů budeme značit $K^{1\times n}$ a prostor sloupcových vektorů $K^{n\times 1}$.

Hodnost matice II

$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \in K^{1\times n}$ označuje i-tý řádek a $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) \in K^{m\times 1}$ j-tý sloupec matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

Hodnost matice II

$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \in K^{1\times n}$ označuje i-tý řádek a $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) \in K^{m\times 1}$ j-tý sloupec matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

Tuto matici můžeme zapsat blokově jako

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})).$$

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1\times n}$ generovaného řádky matice $\mathbf{A}$.

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice **A** nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1\times n}$ generovaného řádky matice **A**.

Podobně, ***sloupcovou hodností*** $h_s(\mathbf{A})$ matice **A** nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{m\times 1}$ generovaného sloupci matice **A**.

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice **A** nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1\times n}$ generovaného řádky matice **A**.

Podobně, ***sloupcovou hodností*** $h_s(\mathbf{A})$ matice **A** nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{m\times 1}$ generovaného sloupci matice **A**.

Tedy

$$\begin{aligned} h_r(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})], \\ h_s(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})]. \end{aligned}$$

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n\times 1}$.

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n\times 1}$.

Hodností lineárního zobrazení φ nazýváme dimenzi jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim Im\varphi$.

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n\times 1}$.

Hodností lineárního zobrazení φ nazýváme dimenzi jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim Im\varphi$.

Zřejmě platí $h(\varphi) = h_s(\mathbf{A})$, protože lineární podprostor $\mathrm{Im}\varphi \subseteq K^{m\times 1}$ je generovaný sloupci matice $\mathbf{A}$.

Hodnost matice V

Lemma

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Hodnost matice V

Lemma

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) Nechť matice $\mathbf{B}$ *vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *provedením jedné elementární řádkové operace (ERO). Pak* $[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \mathbf{r}_2(\mathbf{B}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})]$.

Hodnost matice V

Lemma

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$*.*

(a) *Nechť matice* **B** *vznikne z matice* **A** *provedením jedné elementární řádkové operace (ERO). Pak* $[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \mathbf{r}_2(\mathbf{B}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})]$*.*

(b) *Nechť matice* **C** *vznikne z matice* **A** *vykonáním jedné elementární sloupcové operace (ESO). Pak* $[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})] = [\mathbf{s}_1(\mathbf{C}), \mathbf{s}_2(\mathbf{C}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{C})]$*.*

Hodnost matice VI

Tvrzení

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí* $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$*.*

Hodnost matice VI

Tvrzení

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí* $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat ***hodností matice*** $\mathbf{A}$.

Hodnost matice VI

Tvrzení

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí* $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat ***hodností matice*** $\mathbf{A}$.

Zřejmě pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Hodnost matice VI

Tvrzení

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí* $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$*.*

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat ***hodností matice*** $\mathbf{A}$.

Zřejmě pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$*. Potom* $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$*.*

Hodnost matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ *jsou libovolné vektory a* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *je matice taková, že* $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ *pro* $1 \leq j \leq n$*.*

Hodnost matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ *jsou libovolné vektory a* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *je matice taková, že* $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ *pro* $1 \leq j \leq n$*.*

Potom

(a) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = n$*;*

Hodnost matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ *jsou libovolné vektory a* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *je matice taková, že* $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ *pro* $1 \leq j \leq n$.

Potom

(a) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = n$*;*

(b) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] = K^{m\times 1}$ *právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = m$.

Hodnost matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ *jsou libovolné vektory a* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *je matice taková, že* $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ *pro* $1 \leq j \leq n$.

Potom

(a) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = n$;

(b) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] = K^{m\times 1}$ *právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = m$.

Případ (a) může nastat tehdy, když $n \leq m$; naopak, (b) může nastat jedině za předpokladu $m \leq n$.

Hodnost matice VIII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$. *Potom*

Hodnost matice VIII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$. *Potom*

$$h(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min\big(h(\mathbf{A}), h(\mathbf{B})\big).$$

Inverzní matice I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, t. j. $\mathbf{A}$ je ***čtvercová*** matice typu $n \times n$.
Inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$ rozumíme matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Inverzní matice I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, t. j. $\mathbf{A}$ je ***čtvercová*** matice typu $n \times n$.
Inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$ rozumíme matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Zřejmě k dané čtvercové matici $\mathbf{A}$ existuje nanejvýš jedna inverzní matice.

Inverzní matice I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, t. j. $\mathbf{A}$ je ***čtvercová*** matice typu $n \times n$.
Inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$ rozumíme matici $\mathbf{B} \in K^{n\times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Zřejmě k dané čtvercové matici $\mathbf{A}$ existuje nanejvýš jedna inverzní matice.

Tuto jednoznačně určenou matici (pokud existuje) budeme značit $\mathbf{A}^{-1}$.

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Nechť dále $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou nějaké báze v U, resp. ve V a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na báze $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Nechť dále $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou nějaké báze v U, resp. ve V a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na báze $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Potom k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ právě tehdy, když k zobrazení φ existuje inverzní zobrazení φ^{-1}.

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Nechť dále $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou nějaké báze v U, resp. ve V a* $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ *je matice lineárního zobrazení* $\varphi : V \to U$ *vzhledem na báze* $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Potom k matici $\mathbf{A}$ *existuje inverzní matice* $\mathbf{A}^{-1}$ *právě tehdy, když k zobrazení* φ *existuje inverzní zobrazení* φ^{-1}.

V tomto případě $\mathbf{A}^{-1}$ *je maticí lineárního zobrazení* $\varphi^{-1} : U \to V$ *vzhledem na báze* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, *t. j.*

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Nechť dále $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou nějaké báze v U, resp. ve V a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na báze $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Potom k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ právě tehdy, když k zobrazení φ existuje inverzní zobrazení φ^{-1}.

V tomto případě $\mathbf{A}^{-1}$ je maticí lineárního zobrazení $\varphi^{-1} : U \to V$ vzhledem na báze $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, t. j.

$$\mathbf{A}^{-1} = \left((\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\right)^{-1} = \left(\varphi^{-1}\right)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}.$$

Inverzní matice III

Říkáme, že čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je ***regulární***, pokud k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$; v opačném případě $\mathbf{A}$ je ***singulární***.

Inverzní matice III

Říkáme, že čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je ***regulární***, pokud k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$; v opačném případě $\mathbf{A}$ je ***singulární***.

Věta

Matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je regulární právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$.

Inverzní matice III

Říkáme, že čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je ***regulární***, pokud k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$; v opačném případě $\mathbf{A}$ je ***singulární***.

Věta

Matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulární právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$.

Věta

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *jsou regulární matice.*

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *jsou regulární matice.*

Potom i matice $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *a* $\mathbf{A}^T$ *jsou regulární a platí:*

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *jsou regulární matice.*

Potom i matice $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *a* $\mathbf{A}^T$ *jsou regulární a platí:*

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A},$$

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *jsou regulární matice.*

Potom i matice $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *a* $\mathbf{A}^{T}$ *jsou regulární a platí:*

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1},$$

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ *jsou regulární matice.*

Potom i matice $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ *a* $\mathbf{A}^{T}$ *jsou regulární a platí:*

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1},$$

$$\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}.$$

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$.

(a) *Nechť* $\mathbf{B} \in K^{m\times n}$ *vznikne z* $\mathbf{A}$ *provedením jedné ERO. Označme* $\mathbf{E}$ *matici, která vznikne z matice* $\mathbf{I}_m$ *provedením stejné ERO. Potom* $\mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$.

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) *Nechť* $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ *vznikne z* $\mathbf{A}$ *provedením jedné ERO. Označme* $\mathbf{E}$ *matici, která vznikne z matice* $\mathbf{I}_m$ *provedením stejné ERO. Potom* $\mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$.

(b) *Nechť* $\mathbf{C} \in K^{m \times n}$ *vznikne z* $\mathbf{A}$ *provedením jedné ESO. Označme* $\mathbf{F}$ *matici, která vznikne z matice* $\mathbf{I}_n$ *provedením stejné ESO. Potom* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}$.

Realizace ERO a ESO II

Čtvercové matice $\mathbf{E} \in K^{n\times n}$, které vzniknou z jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ provedením jediné ERO nebo ESO, nazýváme ***elementární matice***.

Realizace ERO a ESO II

Čtvercové matice $\mathbf{E} \in K^{n \times n}$, které vzniknou z jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ provedením jediné ERO nebo ESO, nazýváme ***elementární matice***.

Libovolnou ERO (ESO) na matici $\mathbf{A}$ můžeme realizovat vynásobením matice $\mathbf{A}$ vhodnou elementární maticí $\mathbf{E}$ (F) zleva (zprava).

Výpočet inverzní matice I

Návod na výpočet inverzní matice k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$:

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1}).$$

Výpočet inverzní matice I

Návod na výpočet inverzní matice k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1}).$$

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ a $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_k \in K^{n \times n}$ jsou elementární matice tak, že $\mathbf{E}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Výpočet inverzní matice I

Návod na výpočet inverzní matice k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$:

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1}).$$

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ *a* $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_k \in K^{n \times n}$ *jsou elementární matice tak, že* $\mathbf{E}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Potom $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1$.

Výpočet inverzní matice II

K stejnému cíli vede též postup reprezentovaný schématem:

$$\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}_n} \right) \xrightarrow{\text{ESO}} \left(\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{A}^{-1}} \right).$$

Výpočet inverzní matice II

K stejnému cíli vede též postup reprezentovaný schématem:

$$\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}_n}\right) \xrightarrow{\text{ESO}} \left(\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{A}^{-1}}\right).$$

Tvrzení

Matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je regulární právě tehdy, když ji můžeme rozložit na součin $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k$ konečného počtu elementárních matic $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k \in K^{n\times n}$.

Výpočet inverzní matice III

Tvrzení

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ *platí:*

Výpočet inverzní matice III

Tvrzení

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ *platí:*

(a) $\mathbf{A}$ *je řádkově ekvivalentní s* $\mathbf{B}$ *právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$ *tak, že* $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$*;*

Výpočet inverzní matice III

Tvrzení

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ *platí:*

(a) $\mathbf{A}$ *je řádkově ekvivalentní s* $\mathbf{B}$ *právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$ *tak, že* $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$*;*

(b) $\mathbf{A}$ *je sloupcově ekvivalentní s* $\mathbf{B}$ *právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ *tak, že* $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}$*.*

Výpočet inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$, *přičemž* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *jsou regulární matice.*

Výpočet inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$, *přičemž* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *jsou regulární matice.*

Potom

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) = h(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}) = h(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}).$$

Výpočet inverzní matice V

Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí A^{-1} (pokud existuje) zleva resp. zprava

Výpočet inverzní matice V

Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí $\mathbf{A}^{-1}$ (pokud existuje) zleva resp. zprava

Buď $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ regulární a $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m \times n}$ libovolné.

Výpočet inverzní matice V

Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí $\mathbf{A}^{-1}$ (pokud existuje) zleva resp. zprava

Buď $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ regulární a $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m\times n}$ libovolné.

Pak

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{B}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})$$

Výpočet inverzní matice V

Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí $\mathbf{A}^{-1}$ (pokud existuje) zleva resp. zprava

Buď $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ regulární a $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m\times n}$ libovolné.

Pak

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})$$

a

$$\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}}\right) \xrightarrow{\text{ESO}} \left(\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{-1}}\right).$$

Výpočet inverzní matice VI

Řešení soustavy lineárních rovnic

Výpočet inverzní matice VI

Řešení soustavy lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{B} \mid \mathbf{c}),$$

Výpočet inverzní matice VI

Řešení soustavy lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c}),$$

které má pro regulární $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ tvar

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}).$$

Výpočet inverzní matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in K^n$. *Je-li* $\mathbf{A}$ *regulární, tak soustava* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má jediné řešení* $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Matice přechodu I

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou jeho dvě báze.

Maticí přechodu z báze β do báze α nazýváme matici identického zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$ vzhledem na bázi β, α, kterou značíme $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$. Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = (\mathrm{id}_V)_{\alpha,\beta}.$$

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze $\boldsymbol{\beta}$ vzhledem na bázi $\boldsymbol{\alpha}$,

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α,

t. j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α,

t. j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \big((\mathbf{v}_1)_\alpha, (\mathbf{v}_2)_\alpha, \ldots, (\mathbf{v}_n)_\alpha\big),$$

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α,

t. j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Tedy
$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \big((\mathbf{v}_1)_\alpha, (\mathbf{v}_2)_\alpha, \dots, (\mathbf{v}_n)_\alpha\big),$$

a tato matice je jednoznačně určená podmínkou transformace souřadnic
$$(\mathbf{x})_\alpha = \mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{x})_\beta$$
pro libovolné $\mathbf{x} \in V$.

Matice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ budeme za $\mathbf{x}$ postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bázi β, s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

Matice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ budeme za $\mathbf{x}$ postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bázi β, s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

$$\mathbf{v}_j = \alpha \cdot (\mathbf{v}_j)_\alpha = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = \mathbf{s}_j(\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta})$$

pro každé $1 \leq j \leq n$.

Matice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}$ budeme za $\mathbf{x}$ postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bázi $\boldsymbol{\beta}$, s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

$$\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{v}_j)_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{s}_j(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$$

pro každé $1 \leq j \leq n$.

Tedy

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}.$$

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť α, β jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť α, β *jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru* V *nad tělesem* K.

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{P} = (\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, *t. j.* $\mathbf{P}$ *je matice přechodu z báze* $\boldsymbol{\beta}$ *do báze* $\boldsymbol{\alpha}$;

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{P} = (\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, *t. j.* $\mathbf{P}$ *je matice přechodu z báze* $\boldsymbol{\beta}$ *do báze* $\boldsymbol{\alpha}$*;*

(ii) $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}}$ *pro každé* $\mathbf{x} \in V$*;*

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{P} = (\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, *t. j.* $\mathbf{P}$ *je matice přechodu z báze* $\boldsymbol{\beta}$ *do báze* $\boldsymbol{\alpha}$*;*

(ii) $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}}$ *pro každé* $\mathbf{x} \in V$*;*

(iii) $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\beta}$.

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ *jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru* V *nad tělesem* K*.*

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{I}_n,$$

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{-1},$$

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ *jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru* V *nad tělesem* K*.*

Potom

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = {\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}}.$$

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha,\alpha} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\beta,\alpha} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\gamma} = \mathbf{P}_{\alpha,\gamma}.$$

Z druhé z uvedených podmínek vidíme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ je vždy ***regulární***.

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}}.$$

Z druhé z uvedených podmínek vidíme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je vždy ***regulární***.

Naopak, každá regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je maticí přechodu mezi vhodnou dvojicí bazí.

Matice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Matice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V. Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P},$$

Matice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V. Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P},\ \gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Matice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V. Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}, \ \gamma = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Potom $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze β do báze α a zároveň z báze α do báze γ,

Matice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V. Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}, \ \gamma = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Potom $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze β do báze α a zároveň z báze α do báze γ, t. j.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \mathbf{P}_{\gamma,\alpha}.$$

Matice přechodu VII

Speciálně, $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v K^n

Matice přechodu VII

Speciálně, $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v K^n

a taktéž z báze ε do báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}^{-1}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}^{-1}))$.

Matice přechodu VII

Speciálně, $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v K^n

a taktéž z báze ε do báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}^{-1}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}^{-1}))$.

Tvrzení

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou dvě báze sloupcového vektorového prostoru K^n. Potom $\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \alpha^{-1} \cdot \beta$.

Matice přechodu VIII

Návod na výpočet matice přechodu pro báze α, β vektorového prostoru K^n

Matice přechodu VIII

Návod na výpočet matice přechodu pro báze α, β vektorového prostoru K^n

$$(\boldsymbol{\alpha} \,|\, \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = (\boldsymbol{\varepsilon} \,|\, \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}).$$

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta

Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\varphi : V_1 \to V_2$ je lineární zobrazení, α_1, β_1 jsou dvě báze prostoru V_1 a α_2, β_2 jsou dvě báze prostoru V_2.

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta

Nechť V_1, V_2 *jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem* K, $\varphi : V_1 \to V_2$ *je lineární zobrazení,* α_1, β_1 *jsou dvě báze prostoru* V_1 *a* α_2, β_2 *jsou dvě báze prostoru* V_2.

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta

Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\varphi : V_1 \to V_2$ je lineární zobrazení, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ jsou dvě báze prostoru V_1 a $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2$ jsou dvě báze prostoru V_2.

Potom

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2} \cdot (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze II

Výše uvedenou transformační formuli si můžeme zapamatovat pomocí následujícího diagramu:

$$
\begin{tikzcd}
(V_1, \boldsymbol{\alpha}_1) \arrow[r, "\mathbf{A}"] & (V_2, \boldsymbol{\alpha}_2) \arrow[d, "\mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_2}"] \\
(V_1, \boldsymbol{\beta}_1) \arrow[u, "\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1}"'] \arrow[r, "\mathbf{B}"] & (V_2, \boldsymbol{\beta}_2)
\end{tikzcd}
$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad

Nechť $\varphi : K^n \to K^m$ *je lineární zobrazení a* α, β *jsou nějaké báze prostorů* K^m *resp.* K^n.

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad

Nechť $\varphi : K^n \to K^m$ *je lineární zobrazení a* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou nějaké báze prostorů* K^m *resp.* K^n.

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ *matice zobrazení* φ *vzhledem k bazím* $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ *resp. vzhledem ke kanonickým bazím* $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$.

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad

Nechť $\varphi : K^n \to K^m$ *je lineární zobrazení a* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou nějaké báze prostorů* K^m *resp.* K^n*.*

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ *matice zobrazení* φ *vzhledem k bazím* $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ *resp. vzhledem ke kanonickým bazím* $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$*.*

Pak platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)},\boldsymbol{\beta}}$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad

Nechť $\varphi : K^n \to K^m$ *je lineární zobrazení a* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou nějaké báze prostorů* K^m *resp.* K^n*.*

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ *matice zobrazení* φ *vzhledem k bazím* $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ *resp. vzhledem ke kanonickým bazím* $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$*.*

Pak platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)},\boldsymbol{\beta}}$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\beta},$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\beta},$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_m^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1} \cdot \mathbf{I}_n = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K.

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K.

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m\times n}$ *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K.

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice stejného lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V;*

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K.

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou matice stejného lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V;*

(ii) *existují regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;*

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K.

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice stejného lineárního zobrazení* $\varphi : V \to U$ *vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů* U, V;

(ii) *existují regulární matice* $\mathbf{P} \in K^{m\times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n\times n}$ *tak, že* $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;

(iii) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Matice LZ vzhledem na různé báze V

Věta

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi β prostoru V a bázi α prostoru U tak, že

Matice LZ vzhledem na různé báze V

Věta

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi $\boldsymbol{\beta}$ prostoru V a bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru U tak, že

φ má vzhledem k bazím $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ matici v blokovém tvaru

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h,n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h,h} & \mathbf{0}_{m-h,n-h} \end{pmatrix},$$

Matice LZ vzhledem na různé báze V

Věta

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi $\boldsymbol{\beta}$ prostoru V a bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru U tak, že

φ má vzhledem k bazím $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ matici v blokovém tvaru

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h,n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h,h} & \mathbf{0}_{m-h,n-h} \end{pmatrix},$$

kde $n = \dim V$, $m = \dim U$ a $h = h(\varphi)$.

8. AFINNÍ PODPROSTORY A AFINNÍ ZOBRAZENÍ

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

10. listopadu 2006

Abstrakt přednášky I

V této kapitole zavedeme takový pojem podprostoru, který by např. v $\mathbb{R}^3$ zahrňoval ***všechny*** přímky a roviny, tj. nejen ty procházející počátkem.

Abstrakt přednášky I

V této kapitole zavedeme takový pojem podprostoru, který by např. v $\mathbb{R}^3$ zahrňoval ***všechny*** přímky a roviny, tj. nejen ty procházející počátkem.

Zavedeme tedy definici pojmu ***afinního podprostoru*** nebo též ***lineární variety*** a pojmu ***afinního zobrazení*** .

Abstrakt přednášky I

V této kapitole zavedeme takový pojem podprostoru, který by např. v $\mathbb{R}^3$ zahrňoval ***všechny*** přímky a roviny, tj. nejen ty procházející počátkem.

Zavedeme tedy definici pojmu ***afinního podprostoru*** nebo též ***lineární variety*** a pojmu ***afinního zobrazení*** .

Těžištěm kapitoly bude klasifikace vzájemné polohy lineárních variet ve vektorovém prostoru.

Abstrakt přednášky II

V celé kapitole K označuje pevné těleso, V označuje nějaký pevný, ale jinak libovolný, vektorový prostor nad tělesem K, m, n jsou přirozená čísla.

Abstrakt přednášky II

V celé kapitole K označuje pevné těleso, V označuje nějaký pevný, ale jinak libovolný, vektorový prostor nad tělesem K, m, n jsou přirozená čísla.

V případě potřeby budeme mlčky předpokládat, že charakteristika našeho tělesa bude různá od 2, tj. $2 \cdot 1 \neq 0$.

Obsah přednášky

Body a vektory I

Na vektory se díváme jako na orientované úsečky s počátkem v bodě **0**.

Celý prostor chápeme jako ***homogenní***, t. j. všechny body považujeme za rovnocenné a nevyčleňujeme v něm žádný privilegovaný bod za počátek.

Body a vektory II

Afinním prostorem nad tělesem K rozumíme vektorový prostor V nad tímto tělesem (prvky se z vektorů staly opět body a počátek, t. j. nulový vektor, ztratil svoje výsadní postavení – stal se z něho bod jako každý jiný).

Body a vektory II

Afinním prostorem nad tělesem K rozumíme vektorový prostor V nad tímto tělesem (prvky se z vektorů staly opět body a počátek, t. j. nulový vektor, ztratil svoje výsadní postavení – stal se z něho bod jako každý jiný).

Přesněji:

Body a vektory III

Afinním prostorem $\mathcal{A}$ se ***zaměřením*** V rozumíme množinu P spolu se zobrazením $+ : P \times V \to P$ daným $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{p} + \mathbf{v}$ tak, že platí:

Body a vektory III

Afinním prostorem $\mathcal{A}$ se ***zaměřením*** V rozumíme množinu P spolu se zobrazením $+ : P \times V \to P$ daným $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{p} + \mathbf{v}$ tak, že platí:

1. $\mathbf{p} + 0 = \mathbf{p}$ pro všechny body $\mathbf{p} \in P$

Body a vektory III

Afinním prostorem $\mathcal{A}$ se ***zaměřením*** V rozumíme množinu P spolu se zobrazením $+ : P \times V \to P$ daným $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{p} + \mathbf{v}$ tak, že platí:

1. $\mathbf{p} + 0 = \mathbf{p}$ pro všechny body $\mathbf{p} \in P$
2. $\mathbf{p} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{p} + \mathbf{v}) + w$ pro všechny vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $\mathbf{p} \in P$

Body a vektory III

Afinním prostorem $\mathcal{A}$ se ***zaměřením*** V rozumíme množinu P spolu se zobrazením $+ : P \times V \to P$ daným $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{p} + \mathbf{v}$ tak, že platí:

1. $\mathbf{p} + 0 = \mathbf{p}$ pro všechny body $\mathbf{p} \in P$
2. $\mathbf{p} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{p} + \mathbf{v}) + w$ pro všechny vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $\mathbf{p} \in P$
3. pro každé dva body $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in P$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{v} \in P$ takový, že $\mathbf{p} + \mathbf{v} = \mathbf{q}$. Značíme jej $\vec{\mathbf{pq}}$ nebo $\mathbf{q} - \mathbf{p}$.

Body a vektory IV

Běžně budeme užívat značení $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$ místo $\mathbf{p} \in P$, tj. nebudeme rozlišovat mezi afinním prostorem a jeho nosnou množinou.

Body a vektory IV

Běžně budeme užívat značení $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$ místo $\mathbf{p} \in P$, tj. nebudeme rozlišovat mezi afinním prostorem a jeho nosnou množinou.

Uvědomme si, že mezi vektory z V a body z P existuje vzájemně jednoznačná korespondence, můžeme tedy bez újmy na obecnosti ztotožnit V s P.

Afinní podprostory I

Písmeny **p**, **q**, **r** budeme (i s indexy) značit výlučně body, **u**, **v**, **w** označují zase výlučně vektory, **x**, **y**, **z** mohou podle potřeby označovat body i vektory.

Rovněž se dohodneme, že *rozdíl dvou bodů budeme chápat jako vektor* a *součet bodu a vektoru jako bod*.

Afinní podprostory II

Nechť $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$. ***Přímkou*** procházející nebo též určenou body $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ rozumíme množinu $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, kterou dostaneme tak, že do bodu $\mathbf{p}$ umístíme všechny možné skalární násobky vektoru $\mathbf{q} - \mathbf{p}$.

Afinní podprostory II

Nechť $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$. ***Přímkou*** procházející nebo též určenou body $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ rozumíme množinu $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, kterou dostaneme tak, že do bodu $\mathbf{p}$ umístíme všechny možné skalární násobky vektoru $\mathbf{q} - \mathbf{p}$.

Typický bod přímky $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ má tedy tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q},$$

kde $t \in K$,

Afinní podprostory II

Nechť $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$. ***Přímkou*** procházející nebo též určenou body $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ rozumíme množinu $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, kterou dostaneme tak, že do bodu $\mathbf{p}$ umístíme všechny možné skalární násobky vektoru $\mathbf{q} - \mathbf{p}$.

Typický bod přímky $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ má tedy tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q},$$

kde $t \in K$, tj.

$$\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \{s\mathbf{p} + t\mathbf{q};\ s, t \in K \ \& \ s + t = 1\} \subseteq V.$$

Afinní podprostory III

Tento výraz má smysl i pro $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, tehdy však nejde o přímku ale o jednobodovou množinu $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \{\mathbf{p}\}$.

Afinní podprostory III

Tento výraz má smysl i pro $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, tehdy však nejde o přímku ale o jednobodovou množinu $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \{\mathbf{p}\}$.

Z uvedeného tvaru ihned vidíme, že

$$\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \ell(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

pro libovolné $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$.

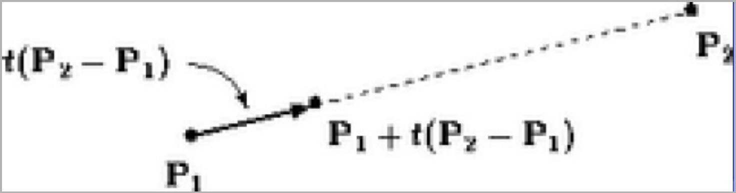
Afinní podprostory III

Tento výraz má smysl i pro $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, tehdy však nejde o přímku ale o jednobodovou množinu $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \{\mathbf{p}\}$.

Z uvedeného tvaru ihned vidíme, že

$$\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \ell(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

pro libovolné $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$.



Afinní podprostory IV

Podmnožinu M vektorového prostoru V nazýváme jeho ***afinním podprostorem*** nebo též ***lineární varietou*** ve V, pokud $M \neq \emptyset$ a pre všechna $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$ platí $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \subseteq M$.

Afinní podprostory IV

Podmnožinu M vektorového prostoru V nazýváme jeho ***afinním podprostorem*** nebo též ***lineární varietou*** ve V, pokud $M \neq \emptyset$ a pre všechna $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$ platí $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \subseteq M$.

Lineární kombinaci, t. j. výraz tvaru

$$t_0\mathbf{p}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \ldots + t_n\mathbf{p}_n = \sum_{i=0}^{n} t_i\mathbf{p}_i,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$, $t_0, t_1, \ldots, t_n \in K$, nazýváme ***afinní kombinací*** bodů $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$, pokud navíc platí

$$t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1.$$

Afinní podprostory V

Afinní kombinací bodů budeme chápat jako bod; jiné lineární kombinace bodů než afinní se v našich úvahách nevyskytují.

Afinní podprostory V

Afinní kombinací bodů budeme chápat jako bod; jiné lineární kombinace bodů než afinní se v našich úvahách nevyskytují.

Každá afinní kombinace je neprázdná, t. j. obsahuje alespoň jeden člen.

Afinní podprostory V

Afinní kombinací bodů budeme chápat jako bod; jiné lineární kombinace bodů než afinní se v našich úvahách nevyskytují.

Každá afinní kombinace je neprázdná, t. j. obsahuje alespoň jeden člen.

Tvrzení

Pro libovolnou neprázdnou množinu $M \subseteq V$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

Afinní podprostory VI

(i) M je afinní podprostor ve V;

Afinní podprostory VI

(i) M je afinní podprostor ve V;

(ii) pro libovolné $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$, $s \in K$ platí

$$s\mathbf{p} + (1 - s)\mathbf{q} \in M;$$

Afinní podprostory VI

(i) M je afinní podprostor ve V;

(ii) pro libovolné $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$, $s \in K$ platí

$$s\mathbf{p} + (1 - s)\mathbf{q} \in M;$$

(iii) pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolné $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in M$, $t_0, t_1 \ldots, t_n \in K$ takové, že

$$t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1, \text{ platí}$$

$$t_0\mathbf{p}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \ldots + t_n\mathbf{p}_n \in M.$$

Afinní podprostory VII

Věta

Nechť $M \subseteq V$. *Potom* M *je afinní podprostor ve* V *právě tehdy, když existuje bod* $\mathbf{p} \in V$ *a lineární podprostor* $S \subseteq V$ *tak, že*

$$M = \mathbf{p} + S = \{\mathbf{p} + \mathbf{u};\ \mathbf{u} \in S\}.$$

Afinní podprostory VII

Věta

Nechť $M \subseteq V$. Potom M je afinní podprostor ve V právě tehdy, když existuje bod $\mathbf{p} \in V$ a lineární podprostor $S \subseteq V$ tak, že

$$M = \mathbf{p} + S = \{\mathbf{p} + \mathbf{u};\ \mathbf{u} \in S\}.$$

V tomto případě pro všechny $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in M$, $\mathbf{u} \in S$ platí

$$\mathbf{q} - \mathbf{r} \in S, \qquad \mathbf{q} + \mathbf{u} \in M, \qquad M = \mathbf{q} + S,$$

Afinní podprostory VII

Věta

Nechť $M \subseteq V$*. Potom* M *je afinní podprostor ve* V *právě tehdy, když existuje bod* $\mathbf{p} \in V$ *a lineární podprostor* $S \subseteq V$ *tak, že*

$$M = \mathbf{p} + S = \{\mathbf{p} + \mathbf{u};\ \mathbf{u} \in S\}.$$

V tomto případě pro všechny $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in M$*,* $\mathbf{u} \in S$ *platí*

$$\mathbf{q} - \mathbf{r} \in S, \qquad \mathbf{q} + \mathbf{u} \in M, \qquad M = \mathbf{q} + S,$$

$$S = \{\mathbf{x} - \mathbf{q};\ \mathbf{x} \in M\} = \{\mathbf{x} - \mathbf{y};\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\}.$$

Afinní podprostory VIII

Důsledek

Každý lineární podprostor S vektorového prostoru V je jeho afinním podprostorem.

Afinní podprostory VIII

Důsledek

Každý lineární podprostor S vektorového prostoru V je jeho afinním podprostorem.

Afinní podprostor M vektorového prostoru V je jeho lineárním podprostorem právě tehdy, když $\mathbf{0} \in M$.

Afinní podprostory VIII

Důsledek

Každý lineární podprostor S vektorového prostoru V je jeho afinním podprostorem.

Afinní podprostor M vektorového prostoru V je jeho lineárním podprostorem právě tehdy, když $\mathbf{0} \in M$.

Zaměřením nebo též ***směrovým podprostorem*** afinního podprostoru $M \subseteq V$ nazýváme lineární podprostor

$$\mathrm{Dir} M = \{\mathbf{x} - \mathbf{y};\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\} \subseteq V.$$

Afinní podprostory IX

$\mathrm{Dir} M$ je jediný lineární podprostor ve V takový, že $M = \mathbf{p} + \mathrm{Dir} M$ pro nějaké (pro každé) $\mathbf{p} \in M$.

Afinní podprostory IX

$\mathrm{Dir} M$ je jediný lineární podprostor ve V takový, že $M = \mathbf{p} + \mathrm{Dir} M$ pro nějaké (pro každé) $\mathbf{p} \in M$.

Pro každé $\mathbf{p} \in M$ platí

$$\mathrm{Dir} M = \{\mathbf{x} - \mathbf{p};\ \mathbf{x} \in M\}.$$

Afinní podprostory IX

$\mathrm{Dir}M$ je jediný lineární podprostor ve V takový, že $M = \mathbf{p} + \mathrm{Dir}M$ pro nějaké (pro každé) $\mathbf{p} \in M$.

Pro každé $\mathbf{p} \in M$ platí

$$\mathrm{Dir}M = \{\mathbf{x} - \mathbf{p};\ \mathbf{x} \in M\}.$$

Zejména je tedy každý afinní podprostor afinním prostorem ve smyslu odstavce 1.

Afinní podprostory X

Pro libovolnou uspořádanou $(n+1)$-tici bodů $(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n)$, vektorového prostoru V, případně pro jeho konečnou podmnožinu $\{\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n\} \neq \emptyset$, označme

$$\ell(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n) =$$
$$\{t_0\mathbf{p}_0 + \ldots + t_n\mathbf{p}_n;\ t_0, \ldots, t_n \in K \ \&\ t_0 + \ldots + t_n = 1\}$$

množinu všech afinních kombinací bodů $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$.

Afinní podprostory XI

Z právě dokázaného tvrzení vyplývá, že $\ell(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n)$ je nejmenší afinní podprostor ve V, který obsahuje všechny body $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$;

Afinní podprostory XI

Z právě dokázaného tvrzení vyplývá, že $\ell(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n)$ je nejmenší afinní podprostor ve V, který obsahuje všechny body $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$;

nazýváme ho ***afinní obal*** bodů nebo i afinní podprostor ***generovaný*** body $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$.

Afinní podprostory XI

Z právě dokázaného tvrzení vyplývá, že $\ell(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n)$ je nejmenší afinní podprostor ve V, který obsahuje všechny body $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$;

nazýváme ho ***afinní obal*** bodů nebo i afinní podprostor ***generovaný*** body $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$.

Pro každou neprázdnou množinu $X \subseteq V$ můžeme definovat její ***afinní obal*** $\ell(X)$, nazývaný též afinní podprostor ***generovaný*** množinou X, jako množinu všech (konečných) afinních kombinací bodů z X.

Afinní podprostory XII

Opět platí, že $\ell(X)$ je nejmenší afinní podprostor ve V tak, že $X \subseteq \ell(X)$.

Afinní podprostory XII

Opět platí, že $\ell(X)$ je nejmenší afinní podprostor ve V tak, že $X \subseteq \ell(X)$.

Tvrzení

Nechť $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$. *Potom*

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) &= \mathbf{p}_0 + [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0], \\ \mathrm{Dir}\,\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) &= [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0]. \end{aligned}$$

Afinní podprostory XIII

Dimenzí nebo též ***rozměrem*** afinního podprostoru $M \subseteq V$, píšeme $\mathrm{dim} M$, nazýváme dimenzi jeho zameření, tedy

$$\mathrm{dim} M = \mathrm{dim} \mathrm{Dir} M.$$

Afinní podprostory XIII

Dimenzí nebo též ***rozměrem*** afinního podprostoru $M \subseteq V$, píšeme $\mathrm{dim} M$, nazýváme dimenzi jeho zameření, tedy

$$\mathrm{dim} M = \mathrm{dim}\mathrm{Dir} M.$$

Body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ vektorového prostoru V nazýváme ***afinně nezávislé***, pokud vektory $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0$ jsou lineárně nezávislé.

Afinní podprostory XIV

Z následujícího očividného tvrzení vyplývá, že body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$ jsou afinně nezávislé právě tehdy,

Afinní podprostory XIV

Z následujícího očividného tvrzení vyplývá, že body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$ jsou afinně nezávislé právě tehdy,

když pro nějaké (pro každé) $0 \leq k \leq n$ vektory $\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k$, kde $0 \leq j \leq n$ a $j \neq k$, jsou lineárně nezávislé.

Afinní podprostory XIV

Z následujícího očividného tvrzení vyplývá, že body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$ jsou afinně nezávislé právě tehdy,

když pro nějaké (pro každé) $0 \leq k \leq n$ vektory $\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k$, kde $0 \leq j \leq n$ a $j \neq k$, jsou lineárně nezávislé.

Tvrzení

Body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$ *jsou afinně nezávislé právě tehdy, když*

$$\dim \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = n.$$

Afinní podprostory XV

Zřejmě 0-rozměrné afinní podprostory ve V jsou právě všechny body $\mathbf{p} \in V$ (přesněji, všechny jednobodové podmnožiny ve V). Tyto afinní podprostory nazýváme též ***triviální***.

Afinní podprostory XV

Zřejmě 0-rozměrné afinní podprostory ve V jsou právě všechny body $\mathbf{p} \in V$ (přesněji, všechny jednobodové podmnožiny ve V). Tyto afinní podprostory nazýváme též ***triviální***.

Jednorozměrné afinní podprostory ve V nazýváme ***přímkami***.

Afinní podprostory XV

Zřejmě 0-rozměrné afinní podprostory ve V jsou právě všechny body $\mathbf{p} \in V$ (přesněji, všechny jednobodové podmnožiny ve V). Tyto afinní podprostory nazýváme též ***triviální***.

Jednorozměrné afinní podprostory ve V nazýváme ***přímkami***.

Každá přímka má skutečně tvar $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pro nějaké afinně nezávislé (t. j. různé) body $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$.

Afinní podprostory XV

Zřejmě 0-rozměrné afinní podprostory ve V jsou právě všechny body $\mathbf{p} \in V$ (přesněji, všechny jednobodové podmnožiny ve V). Tyto afinní podprostory nazýváme též ***triviální***.

Jednorozměrné afinní podprostory ve V nazýváme ***přímkami***.

Každá přímka má skutečně tvar $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pro nějaké afinně nezávislé (t. j. různé) body $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$.

Dvojrozměrné afinní podprostory ve V nazýváme ***rovinami***.

Afinní podprostory XVI

Samotný prostor V je svým ***nevlastním*** afinním podprostorem.

Pokud $\dim V = n$, tak $(n-1)$-rozměrné afinní podprostory ve V nazýváme ***nadrovinami***.

Pojmy "bod", "přímka" a "rovina" jsou absolutní v tom smyslu, že závisí jen na dimenzi příslušného afinního podprostoru.

Pojem nadroviny je relativní, protože závisí na vztahu dimenzí afinního podprostoru a celého prostoru.

Afinní podprostory XVII

Pokud $\dim V = 1$ (t. j. pokud samotné V je přímka), tak každý bod ve V je zároveň nadrovinou.

Afinní podprostory XVII

Pokud $\dim V = 1$ (t. j. pokud samotné V je přímka), tak každý bod ve V je zároveň nadrovinou.

Nadrovinami v dvojrozměrném prostoru (t. j. v rovině) jsou zase všechny přímky.

Afinní podprostory XVII

Pokud $\dim V = 1$ (t. j. pokud samotné V je přímka), tak každý bod ve V je zároveň nadrovinou.

Nadrovinami v dvojrozměrném prostoru (t. j. v rovině) jsou zase všechny přímky.

V trojrozměrném prostoru V pojmy roviny a nadroviny splývají.

Afinní podprostory XVII

Pokud $\dim V = 1$ (t. j. pokud samotné V je přímka), tak každý bod ve V je zároveň nadrovinou.

Nadrovinami v dvojrozměrném prostoru (t. j. v rovině) jsou zase všechny přímky.

V trojrozměrném prostoru V pojmy roviny a nadroviny splývají.

V čtyřrozměrném prostoru jsou nadrovinami trojrozměrné podprostory; atd.

Afinní podprostory XVII

Pokud $\dim V = 1$ (t. j. pokud samotné V je přímka), tak každý bod ve V je zároveň nadrovinou.

Nadrovinami v dvojrozměrném prostoru (t. j. v rovině) jsou zase všechny přímky.

V trojrozměrném prostoru V pojmy roviny a nadroviny splývají.

V čtyřrozměrném prostoru jsou nadrovinami trojrozměrné podprostory; atd.

V 0-rozměrném (t. j. jednobodovém) prostoru V nejsou přímky, roviny ani nadroviny.

Průnik a spojení AP I

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ *jsou afinní podprostory.*

Průnik a spojení AP I

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ *jsou afinní podprostory.*

Potom $M \cap N$ *je afinní podprostor ve* V *právě tehdy, když* $M \cap N \neq \emptyset$.

Průnik a spojení AP I

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ *jsou afinní podprostory.*

Potom $M \cap N$ *je afinní podprostor ve* V *právě tehdy, když* $M \cap N \neq \emptyset$.

V tomto případě

$$\mathrm{Dir}(M \cap N) = \mathrm{Dir} M \cap \mathrm{Dir} N.$$

Průnik a spojení AP I

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ jsou afinní podprostory.

Potom $M \cap N$ je afinní podprostor ve V právě tehdy, když $M \cap N \neq \emptyset$.

V tomto případě

$$\mathrm{Dir}(M \cap N) = \mathrm{Dir} M \cap \mathrm{Dir} N.$$

Neprázdnost průniku $M \cap N$ můžeme zaručit za předpokladu, že lineární prostor $\mathrm{Dir} M + \mathrm{Dir} N$ je dostatečně velký.

Průnik a spojení AP II

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ *jsou afinní podprostory.*

Průnik a spojení AP II

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ jsou afinní podprostory. Potom

$$\mathrm{Dir} M + \mathrm{Dir} N = V \;\Rightarrow\; M \cap N \neq \emptyset.$$

Průnik a spojení AP II

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ jsou afinní podprostory. Potom

$$\mathrm{Dir} M + \mathrm{Dir} N = V \;\Rightarrow\; M \cap N \neq \emptyset.$$

Spojením afinních podprostorů $M, N \subseteq V$, píšeme $M \sqcup N$, nazýváme afinní obal jejich sjednocení.

Průnik a spojení AP II

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ jsou afinní podprostory. Potom

$$\mathrm{Dir} M + \mathrm{Dir} N = V \;\Rightarrow\; M \cap N \neq \emptyset.$$

Spojením afinních podprostorů $M, N \subseteq V$, píšeme $M \sqcup N$, nazýváme afinní obal jejich sjednocení.

Tedy

$$M \sqcup N = \ell(M \cup N).$$

Průnik a spojení AP III

Zřejmě $M \sqcup N$ je nejmenší afinní podprostor ve V, který obsahuje M i N, a pro lineární podprostory $S, T \subseteq V$ platí $S \sqcup T = S + T$.

Průnik a spojení AP IV

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ jsou afinní podprostory.

Průnik a spojení AP IV

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ jsou afinní podprostory.

(a) Pokud $M \cap N \neq \emptyset$, tak

$$\mathrm{Dir}(M \sqcup N) = \mathrm{Dir} M + \mathrm{Dir} N,$$

$$M \sqcup N = M + \mathrm{Dir} N = N + \mathrm{Dir} M.$$

Průnik a spojení AP IV

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ jsou afinní podprostory.

(a) Pokud $M \cap N \neq \emptyset$, tak

$$\mathrm{Dir}(M \sqcup N) = \mathrm{Dir} M + \mathrm{Dir} N,$$

$$M \sqcup N = M + \mathrm{Dir} N = N + \mathrm{Dir} M.$$

(b) Pokud $M \cap N = \emptyset$, tak pro $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in N$ platí

$$\mathrm{Dir}(M \sqcup N) = [\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \mathrm{Dir} M + \mathrm{Dir} N,$$

$$M \sqcup N = M + ([\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \mathrm{Dir} N) = N + ([\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \mathrm{Dir} M).$$

Průnik a spojení AP V

Poznámka Obě rovnosti z (b) jsou splněné i za předpokladu $M \cap N \neq \emptyset$.

Průnik a spojení AP V

Poznámka Obě rovnosti z (b) jsou splněné i za předpokladu $M \cap N \neq \emptyset$.

V tomto případě však pro libovolné $\mathbf{r} \in M \cap N$ platí

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = (\mathbf{r} - \mathbf{p}) + (\mathbf{q} - \mathbf{r}) \in \mathrm{Dir} M + \mathrm{Dir} N,$$

takže vektor $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ můžeme vynechat.

Průnik a spojení AP VI

Důsledek

Nechť $M, N \subseteq V$ *jsou konečně rozměrné afinní podprostory.*

Průnik a spojení AP VI

Důsledek

Nechť $M, N \subseteq V$ jsou konečně rozměrné afinní podprostory.

Potom

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim M + \dim N - \dim(M \cap N), & \textit{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim M + \dim N - \dim(\mathrm{Dir} M \cap \mathrm{Dir} N) + 1, & \textit{pro } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

Průnik a spojení AP VII

Příklad

Ve vektorovém prostoru V uvažujme konečně rozměrné afinní podprostory

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m], \qquad N = \mathbf{q} + [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n].$$

Průnik a spojení AP VII

Příklad

Ve vektorovém prostoru V uvažujme konečně rozměrné afinní podprostory

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m], \qquad N = \mathbf{q} + [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n].$$

Potom

$$M \sqcup N = \begin{cases} \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], & \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], & \text{pro } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

Průnik a spojení AP VIII

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n], & \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim[\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n], & \text{pro } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

Průnik a spojení AP IX

Pokud předpokládáme, že jak vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ tak vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ jsou lineárně nezávislé, pak

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} m + n - k, & \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ m + n - k + 1, & \text{pro } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

kde $k = \dim([\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m] \cap [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n])$.

Průnik a spojení AP X

Příklad

V sloupcovém prostoru $\mathbb{R}^4$ *jsou dané vektory* $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)^T$, $\mathbf{y} = (0, -3, 1, -1)^T$, $\mathbf{z} = (1, 1, 0, 0)^T$, $\mathbf{u} = (0, -2, 4, 3)^T$, $\mathbf{v} = (2, 6, 2, 5)^T$, $\mathbf{w} = (0, 0, 1, 1)^T$ *a blíže neurčené body* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Průnik a spojení AP X

Příklad

V sloupcovém prostoru $\mathbb{R}^4$ *jsou dané vektory* $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)^T$, $\mathbf{y} = (0, -3, 1, -1)^T$, $\mathbf{z} = (1, 1, 0, 0)^T$, $\mathbf{u} = (0, -2, 4, 3)^T$, $\mathbf{v} = (2, 6, 2, 5)^T$, $\mathbf{w} = (0, 0, 1, 1)^T$ *a blíže neurčené body* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Potom $S = [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$, $T = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ *jsou lineární podprostory a* $M = \mathbf{p} + S$, $N = \mathbf{q} + N$ *jsou afinní podprostory v* $\mathbb{R}^4$.

Průnik a spojení AP X

Příklad

V sloupcovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dané vektory $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)^T$, $\mathbf{y} = (0, -3, 1, -1)^T$, $\mathbf{z} = (1, 1, 0, 0)^T$, $\mathbf{u} = (0, -2, 4, 3)^T$, $\mathbf{v} = (2, 6, 2, 5)^T$, $\mathbf{w} = (0, 0, 1, 1)^T$ *a blíže neurčené body* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Potom $S = [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$, $T = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ *jsou lineární podprostory a* $M = \mathbf{p} + S$, $N = \mathbf{q} + N$ *jsou afinní podprostory v* $\mathbb{R}^4$.

Najdeme dimenze lineárních podprostorů $S + T$, $S \cap T$ *a afinních podprostorů* $M \cap N$, $M \sqcup N$ *v závislosti na* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Průnik a spojení AP XI

Lineární podprostor $S + T$ je generovaný sloupci blokové matice

Průnik a spojení AP XI

Lineární podprostor $S + T$ je generovaný sloupci blokové matice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right),$$

Průnik a spojení AP XI

Lineární podprostor $S + T$ je generovaný sloupci blokové matice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right),$$

přičemž sloupce levého bloku generují lineární podprostor S a sloupce pravého bloku lineární podprostor T.

Průnik a spojení AP XII

Tato matice je řádkově ekvivalentní s následující blokovou maticí

Průnik a spojení AP XII

Tato matice je řádkově ekvivalentní s následující blokovou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ve stupňovitém tvaru, jejíž řádky mají vedoucí prvky ve sloupcích 1, 2, 3 a 6.

Průnik a spojení AP XIII

Vidíme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ tvoří bázi S a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ bázi $S + T$.

Průnik a spojení AP XIII

Vidíme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ tvoří bázi S a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ bázi $S + T$.

Doupravením pravého bloku na řádkově ekvivalentní stupňovitý tvar

Průnik a spojení AP XIII

Vidíme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ tvoří bázi S a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ bázi $S + T$.

Doupravením pravého bloku na řádkově ekvivalentní stupňovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se můžeme přesvědčit, že i vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi T.

Průnik a spojení AP XIV

Celkem $\dim S = \dim T = 3$, $\dim(S + T) = 4$.

Průnik a spojení AP XIV

Celkem $\dim S = \dim T = 3$, $\dim(S + T) = 4$.

Odtud dle věty o dimenzi součtu a průniku vyplývá $\dim(S \cap T) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Průnik a spojení AP XIV

Celkem $\dim S = \dim T = 3$, $\dim(S + T) = 4$.

Odtud dle věty o dimenzi součtu a průniku vyplývá $\dim(S \cap T) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Tedy $S + T = \mathbb{R}^4$. Odtud pak $M \cap N \neq \emptyset$.

Průnik a spojení AP XIV

Celkem $\dim S = \dim T = 3$, $\dim(S + T) = 4$.

Odtud dle věty o dimenzi součtu a průniku vyplývá $\dim(S \cap T) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Tedy $S + T = \mathbb{R}^4$. Odtud pak $M \cap N \neq \emptyset$.

Proto $\dim(M \cap N) = \dim(S \cap T) = 2$.

Průnik a spojení AP XIV

Celkem $\dim S = \dim T = 3$, $\dim(S + T) = 4$.

Odtud dle věty o dimenzi součtu a průniku vyplývá $\dim(S \cap T) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Tedy $S + T = \mathbb{R}^4$. Odtud pak $M \cap N \neq \emptyset$.

Proto $\dim(M \cap N) = \dim(S \cap T) = 2$.

Odtud $\dim(M \sqcup N) = \dim(S + T) = 4$.

Vzájemná poloha AP I

Polohu netriviálních vlastních afinních podprostorů (lineárních variet) $M, N \subseteq V$ budeme klasifikovat na základě dvou kritérií:

Vzájemná poloha AP II

(A) Pokud platí $\mathrm{Dir} M \subseteq \mathrm{Dir} N \vee \mathrm{Dir} N \subseteq \mathrm{Dir} M$, říkáme, že M, N jsou ***rovnoběžné*** a píšeme $M \parallel N$.

Vzájemná poloha AP II

(A) Pokud platí $\mathrm{Dir} M \subseteq \mathrm{Dir} N \vee \mathrm{Dir} N \subseteq \mathrm{Dir} M$, říkáme, že M, N jsou ***rovnoběžné*** a píšeme $M \parallel N$.

V opačném případě, t. j. pokud platí $\mathrm{Dir} M \not\subseteq \mathrm{Dir} N \mathbin{\&} \mathrm{Dir} N \not\subseteq \mathrm{Dir} M$, říkáme, že M, N ***nejsou rovnoběžné***, a píšeme $M \nparallel N$.

Vzájemná poloha AP III

(B) Pokud platí $M \cap N \neq \emptyset$, říkáme, že M, N ***se protínají***.

Vzájemná poloha AP III

(B) Pokud platí $M \cap N \neq \emptyset$, říkáme, že M, N ***se protínají***.

V opačném případě, t. j. pokud $M \cap N = \emptyset$, říkáme, že M, N ***se neprotínají***, neboli, že jsou ***disjunktní***.

Vzájemná poloha AP IV

Celkově tedy dostáváme čtyři možnosti:

Vzájemná poloha AP IV

Celkově tedy dostáváme čtyři možnosti:

(1) $M \parallel N$ & $M \cap N \neq \emptyset$, tj. M, N jsou rovnoběžné a protínají se.

Vzájemná poloha AP IV

Celkově tedy dostáváme čtyři možnosti:

(1) $M \parallel N$ & $M \cap N \neq \emptyset$, tj. M, N jsou rovnoběžné a protínají se.

V tomto případě platí $\mathrm{Dir}M \subseteq \mathrm{Dir}N \Leftrightarrow M \subseteq N$ a $\mathrm{Dir}N \subseteq \mathrm{Dir}M \Leftrightarrow N \subseteq M$.

Vzájemná poloha AP IV

Celkově tedy dostáváme čtyři možnosti:

(1) $M \parallel N$ & $M \cap N \neq \emptyset$, tj. M, N jsou rovnoběžné a protínají se.

V tomto případě platí $\mathrm{Dir} M \subseteq \mathrm{Dir} N \;\Leftrightarrow\; M \subseteq N$ a $\mathrm{Dir} N \subseteq \mathrm{Dir} M \;\Leftrightarrow\; N \subseteq M$.

Tedy $M \subseteq N$ nebo $M \subseteq N$. Říkáme, že jedna z lineárních variet M, N je ***podvarietou*** druhé, neboli, že M, N jsou ve vztahu ***inkluze***.

Vzájemná poloha AP V

(2) $M \parallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, tj. M, N jsou rovnoběžné a neprotínají se.

Vzájemná poloha AP V

(2) $M \parallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, tj. M, N jsou rovnoběžné a neprotínají se.

Tento případ nazýváme vztahem ***pravé rovnoběžnosti***.

Vzájemná poloha AP VI

(3) $M \not\parallel N$ & $M \cap N \neq \emptyset$, tj. M, N nejsou rovnoběžné a protínají se.

Vzájemná poloha AP VI

(3) $M \not\parallel N$ & $M \cap N \neq \emptyset$, tj. M, N nejsou rovnoběžné a protínají se.

Říkáme, že M, N jsou ***různoběžné***.

Vzájemná poloha AP VII

(4) $M \not\parallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, tj. M, N nejsou rovnoběžné a neprotínají se.

Vzájemná poloha AP VII

(4) $M \not\parallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, tj. M, N nejsou rovnoběžné a neprotínají se.

V tomto případě ještě rozlišujeme dvě další možnosti:

Vzájemná poloha AP VII

(4) $M \not\parallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, tj. M, N nejsou rovnoběžné a neprotínají se.

V tomto případě ještě rozlišujeme dvě další možnosti:

(4a) Ak $\mathrm{Dir} M \cap \mathrm{Dir} N = \{\mathbf{0}\}$, říkáme, že M, N jsou ***mimoběžné***.

Vzájemná poloha AP VII

(4) $M \nparallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, tj. M, N nejsou rovnoběžné a neprotínají se.

V tomto případě ještě rozlišujeme dvě další možnosti:

(4a) Ak $\mathrm{Dir} M \cap \mathrm{Dir} N = \{\mathbf{0}\}$, říkáme, že M, N jsou ***mimoběžné***.

(4b) Pokud $\mathrm{Dir} M \cap \mathrm{Dir} N \neq \{\mathbf{0}\}$, říkáme, že M, N jsou ***částečně rovnoběžné***.

Vzájemná poloha AP VIII

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ *jsou částečně rovnoběžné lineární variety. Potom* $\dim M \geq 2$, $\dim N \geq 2$ *a* $\dim V \geq 4$.

Vzájemná poloha AP VIII

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ jsou částečně rovnoběžné lineární variety. Potom $\dim M \geq 2$, $\dim N \geq 2$ a $\dim V \geq 4$.

Na druhé straně v libovolném vektorovém prostoru V dimenze ≥ 4 není těžké najít příklady částečne rovnobežných lineárních variet.

Vzájemná poloha AP VIII

Tvrzení

Nechť $M, N \subseteq V$ jsou částečně rovnoběžné lineární variety. Potom $\dim M \geq 2$, $\dim N \geq 2$ a $\dim V \geq 4$.

Na druhé straně v libovolném vektorovém prostoru V dimenze ≥ 4 není těžké najít příklady částečne rovnobežných lineárních variet.

Např.

$$M = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], \qquad N = \mathbf{e}_4 + [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$$

jsou částečně rovnoběžné roviny v K^4.

Afinní zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tímž tělesem K.
Říkáme, že f $V \to U$ je ***afinní zobrazení***, pokud pro libovolné body $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$ a skalár $s \in V$ platí

$$f(s\mathbf{p} + (1-s)\mathbf{q}) = sf(\mathbf{p}) + (1-s)f(\mathbf{q}).$$

Afinní zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Afinní zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom zobrazení f V $\rightarrow$ U je afinní právě tehdy, když pro každé $n \in \mathbb{N}$, všechny body $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$ a skaláry $t_0, \ldots, t_n \in K$ takové, že $t_0 + \ldots + t_n = 1$, platí

Afinní zobrazení II

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom zobrazení $f\ V \to U$ je afinní právě tehdy, když pro každé $n \in \mathbb{N}$, všechny body $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$ a skaláry $t_0, \ldots, t_n \in K$ takové, že $t_0 + \ldots + t_n = 1$, platí

$$f(t_0\mathbf{p}_0 + \ldots + t_n\mathbf{p}_n) = t_0 f(\mathbf{p}_0) + \ldots + t_n f(\mathbf{p}_n).$$

Afinní zobrazení III

Posunutím neboli ***translací*** vektorového prostoru V o vektor $\mathbf{u} \in V$ nazýváme zobrazení $V \to V$ dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{u}$.

Afinní zobrazení III

Posunutím neboli ***translací*** vektorového prostoru V o vektor $\mathbf{u} \in V$ nazýváme zobrazení $V \to V$ dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{u}$.

Zřejmě kompozicí posunutí o vektor $\mathbf{u} \in V$ a posunutí o vektor $\mathbf{v} \in V$ je posunutí o vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Afinní zobrazení III

Posunutím neboli ***translací*** vektorového prostoru V o vektor $\mathbf{u} \in V$ nazýváme zobrazení $V \to V$ dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{u}$.

Zřejmě kompozicí posunutí o vektor $\mathbf{u} \in V$ a posunutí o vektor $\mathbf{v} \in V$ je posunutí o vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Každé posunutí je bijektivní zobrazení; inverzní zobrazení k posunutí o vektor $\mathbf{u}$ je posunutí o opačný vektor $-\mathbf{u}$.

Afinní zobrazení IV

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Afinní zobrazení IV

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom zobrazení $f : V \to U$ je afinní právě tehdy, když existuje vektor $\mathbf{u} \in U$ a lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in V$ platí

Afinní zobrazení IV

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom zobrazení $f : V \to U$ je afinní právě tehdy, když existuje vektor $\mathbf{u} \in U$ a lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in V$ platí

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{u}.$$

Afinní zobrazení V

Důsledek

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K. Potom

Afinní zobrazení V

Důsledek

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K. Potom

(a) *Libovolná translace prostoru V je afinní zobrazení;*

Afinní zobrazení V

Důsledek

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K. Potom

(a) *Libovolná translace prostoru V je afinní zobrazení;*

(b) *libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ je afinní;*

Afinní zobrazení V

Důsledek

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K. Potom

(a) *Libovolná translace prostoru V je afinní zobrazení;*

(b) *libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ je afinní;*

(c) *afinní zobrazení $f : V \to U$ je lineární právě tehdy, když $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

Afinní zobrazení VI

Zřejmě vektor $\mathbf{u} \in U$ a lineární zobrazení φ jsou podmínkou věty určené jednoznačně.

Afinní zobrazení VI

Zřejmě vektor $\mathbf{u} \in U$ a lineární zobrazení φ jsou podmínkou věty určené jednoznačně.

Zobrazení $\varphi = f - f(\mathbf{0})$ nazýváme ***lineární částí*** a vektor $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$ ***absolutním členem*** afinního zobrazení f.

Afinní zobrazení VI

Zřejmě vektor $\mathbf{u} \in U$ a lineární zobrazení φ jsou podmínkou věty určené jednoznačně.

Zobrazení $\varphi = f - f(\mathbf{0})$ nazýváme ***lineární částí*** a vektor $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$ ***absolutním členem*** afinního zobrazení f.

Píšeme též $f = \varphi + \mathbf{u}$.

Afinní zobrazení VI

Zřejmě vektor $\mathbf{u} \in U$ a lineární zobrazení φ jsou podmínkou věty určené jednoznačně.

Zobrazení $\varphi = f - f(\mathbf{0})$ nazývame ***lineární částí*** a vektor $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$ ***absolutním členem*** afinního zobrazení f.

Píšeme též $f = \varphi + \mathbf{u}$.

Afinní zobrazení jsou zevšeobecněním funkcí $f : K \to K$ tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in K$, které (v případě $K = \mathbb{R}$) v matematické analýze nazýváme lineárními.

Afinní zobrazení VII

Tvrzení

Nechť U, V, W *jsou vektorové prostory nad tělesem* K *a* $g : W \to V$, $f : V \to U$ *jsou afinní zobrazení.*

Afinní zobrazení VII

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $g : W \to V$, $f : V \to U$ jsou afinní zobrazení.

Potom i jejich kompozice $f \circ g : W \to U$ je afinní zobrazení.

Afinní zobrazení VII

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $g : W \to V$, $f : V \to U$ jsou afinní zobrazení.

Potom i jejich kompozice $f \circ g : W \to U$ je afinní zobrazení.

$$(f \circ g)(\mathbf{z}) = \varphi(\psi(\mathbf{z}) + \mathbf{v}) + \mathbf{u} = (\varphi \circ \psi)(\mathbf{z}) + \varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{u}.$$

Afinní zobrazení VII

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $g : W \to V$, $f : V \to U$ jsou afinní zobrazení.

Potom i jejich kompozice $f \circ g : W \to U$ je afinní zobrazení.

$$(f \circ g)(\mathbf{z}) = \varphi(\psi(\mathbf{z}) + \mathbf{v}) + \mathbf{u} = (\varphi \circ \psi)(\mathbf{z}) + \varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{u}.$$

Pro lineární zobrazení $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ a vektory $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} \in U$ platí

$$(\varphi + \mathbf{u}) \circ (\psi + \mathbf{v}) = (\varphi \circ \psi) + (\varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{u}).$$

Afinní zobrazení VIII

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K, $f : V \to U$ je afinní zobrazení a $M \subseteq V$, $N \subseteq U$ jsou afinní podprostory.

Afinní zobrazení VIII

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K, $f : V \to U$ je afinní zobrazení a $M \subseteq V$, $N \subseteq U$ jsou afinní podprostory.

Potom $f(M)$ je afinní podprostor v U a $f^{-1}(N)$ je afinní podprostor ve V nebo prázdná množina.

Afinní zobrazení VIII

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K, $f : V \to U$ je afinní zobrazení a $M \subseteq V$, $N \subseteq U$ jsou afinní podprostory.

Potom $f(M)$ je afinní podprostor v U a $f^{-1}(N)$ je afinní podprostor ve V nebo prázdná množina.

Protože každé posunutí je bijekce, afinní zobrazení $f = \varphi + \mathbf{u} : V \to U$ s lineární částí φ je injektivní právě tehdy, když φ je injektivní.

Afinní zobrazení VIII

Tvrzení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K, $f : V \to U$ je afinní zobrazení a $M \subseteq V$, $N \subseteq U$ jsou afinní podprostory.

Potom $f(M)$ je afinní podprostor v U a $f^{-1}(N)$ je afinní podprostor ve V nebo prázdná množina.

Protože každé posunutí je bijekce, afinní zobrazení $f = \varphi + \mathbf{u} : V \to U$ s lineární částí φ je injektivní právě tehdy, když φ je injektivní.

Podobně, f je surjektivní právě tehdy, když φ je surjektivní.

Afinní zobrazení IX

Věta

Nechť $f : V \to U$ *je afinní zobrazení, přičemž* V *je konečně rozměrný vektorový prostor.*

Afinní zobrazení IX

Věta

Nechť $f : V \to U$ je afinní zobrazení, přičemž V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Potom pro libovolné $\mathbf{y} \in \mathrm{Im} f$ platí

$$\dim V = \dim f^{-1}(\mathbf{y}) + \dim \mathrm{Im} f.$$

Afinní zobrazení IX

Věta

Nechť $f : V \to U$ je afinní zobrazení, přičemž V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Potom pro libovolné $\mathbf{y} \in \mathrm{Im} f$ platí

$$\dim V = \dim f^{-1}(\mathbf{y}) + \dim \mathrm{Im} f.$$

Afinní transformací vektorového prostoru V nazýváme libovolné afinní zobrazení $f : V \to V$.

Afinní zobrazení X

Důsledek

Nechť $f : V \to V$ je afinní transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V.

Afinní zobrazení X

Důsledek

Nechť $f : V \to V$ *je afinní transformace konečně rozměrného vektorového prostoru* V.

Potom f *je injektívní právě tehdy, když je surjektivní.*

Afinní zobrazení X

Důsledek

Nechť $f : V \to V$ *je afinní transformace konečně rozměrného vektorového prostoru* V*.*

Potom f *je injektívní právě tehdy, když je surjektivní.*

Tvrzení

Nechť $f : V \to U$ *je afinní zobrazení s lineární částí* φ *a* $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$*.*

Afinní zobrazení X

Důsledek

Nechť $f : V \to V$ je afinní transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V.

Potom f je injektívní právě tehdy, když je surjektivní.

Tvrzení

Nechť $f : V \to U$ je afinní zobrazení s lineární částí φ a $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$.

Potom f je bijektivní právě tehdy, když φ je bijektívní.

Afinní zobrazení X

Důsledek

Nechť $f : V \to V$ je afinní transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V.

Potom f je injektívní právě tehdy, když je surjektivní.

Tvrzení

Nechť $f : V \to U$ je afinní zobrazení s lineární částí φ a $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$.

Potom f je bijektivní právě tehdy, když φ je bijektívní.

V tomto případě i inverzní zobrazení $f^{-1} : U \to V$ je afinní a platí $f^{-1} = \varphi^{-1} - \varphi^{-1}(\mathbf{u})$.

Afinní zobrazení X

Důsledek

Nechť $f : V \to V$ je afinní transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V.

Potom f je injektívní právě tehdy, když je surjektivní.

Tvrzení

Nechť $f : V \to U$ je afinní zobrazení s lineární částí φ a $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$.

Potom f je bijektivní právě tehdy, když φ je bijektívní.

V tomto případě i inverzní zobrazení $f^{-1} : U \to V$ je afinní a platí $f^{-1} = \varphi^{-1} - \varphi^{-1}(\mathbf{u})$.

Tedy f^{-1} je kompozicí lineárního zobrazení φ^{-1} a posunutí o vektor $-\varphi^{-1}(\mathbf{u})$.

Afinní zobrazení XI

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory a α, β jsou báze v U resp. ve V.

Afinní zobrazení XI

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou báze v U resp. ve V.

Rozšířenou maticí afinního zobrazení $f : V \to U$ s lineární částí φ a absolutním členem $\mathbf{u}$ vzhledem na báze $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nazýváme blokovou matici

$$(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \big((\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \,|\, (\mathbf{u})_{\boldsymbol{\alpha}}\big).$$

Afinní zobrazení XII

Pokud $\dim U = m$, $\dim V = n$, $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je matice lineárního zobrazení φ v bazích $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, $\boldsymbol{\alpha}$ a $\mathbf{a} = (\mathbf{u})_{\boldsymbol{\alpha}}$ je vektor souřadnic vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$,

Afinní zobrazení XII

Pokud $\dim U = m$, $\dim V = n$, $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je matice lineárního zobrazení φ v bazích $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, $\boldsymbol{\alpha}$ a $\mathbf{a} = (\mathbf{u})_{\boldsymbol{\alpha}}$ je vektor souřadnic vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$,

tak rozšířenou maticí afinního zobrazení f v bazích $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ je bloková matice

$$(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \big((\varphi(\mathbf{v}_1))_{\boldsymbol{\alpha}}, \dots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_{\boldsymbol{\alpha}} \,|\, (\mathbf{u})_{\boldsymbol{\alpha}}\big) = (\mathbf{A} \,|\, \mathbf{a}).$$

Afinní zobrazení XIII

Souřadnice bodu $\mathbf{x} \in V$ v bázi $\boldsymbol{\beta}$ a souřadnice jeho obrazu $f(\mathbf{x}) \in U$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$ jsou tak spojené rovností

$$(f(\mathbf{x}))_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\alpha,\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{u})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{a}.$$

Afinní zobrazení XIII

Souřadnice bodu $\mathbf{x} \in V$ v bázi β a souřadnice jeho obrazu $f(\mathbf{x}) \in U$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$ jsou tak spojené rovností

$$(f(\mathbf{x}))_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\alpha,\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{u})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{a}.$$

Je-li f lineární zobrazení, t. j. pokud $f = \varphi$ a $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, nemá význam rozšiřovat matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ o nulový sloupec.

Afinní zobrazení XIV

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a α, β, γ jsou nějaké báze prostorů U, V, resp. W.

Afinní zobrazení XIV

Tvrzení

Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a α, β, γ jsou nějaké báze prostorů U, V, resp. W.

(a) *Jsou-li $g : W \to V$, $f : V \to U$ afinní zobrazení, které mají v příslušných bazích rozšířené matice $(g)_{\beta,\gamma} = (\mathbf{B} \,|\, \mathbf{b})$, $(f)_{\alpha,\beta} = (\mathbf{A} \,|\, \mathbf{a})$, tak jejich kompozice $f \circ g : W \to U$ má v bazích γ, α rozšířenou matici*

$$(f \circ g)_{\alpha,\gamma} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \,|\, \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}).$$

Afinní zobrazení XV

(b) Je-li $f : V \to U$ afinní bijekce s rozšířenou maticí $(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{A} \,|\, \mathbf{a})$ v bazích $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$, tak k ní inverzní zobrazení je afinní bijekce $f^{-1} : U \to V$, která má v bazích $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ rozšířenou matici

$$\left(f^{-1}\right)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = \left(\mathbf{A}^{-1} \mid -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{a}\right).$$

9. AFINNÍ PODPROSTORY A SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

30. listopadu 2006

Abstrakt přednášky

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic.

Abstrakt přednášky

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic.

Dokážeme, že množina řešení každé lineární (homogenní) soustavy tvoří afinní (lineární) podprostor vhodného sloupcového prostoru K^n

Abstrakt přednášky

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic.

Dokážeme, že množina řešení každé lineární (homogenní) soustavy tvoří afinní (lineární) podprostor vhodného sloupcového prostoru K^n

a obráceně, každý takový afinní (lineární) podprostor lze popsat jakožto množinu řešení vhodné lineární (homogenní) soustavy.

Abstrakt přednášky

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic.

Dokážeme, že množina řešení každé lineární (homogenní) soustavy tvoří afinní (lineární) podprostor vhodného sloupcového prostoru K^n

a obráceně, každý takový afinní (lineární) podprostor lze popsat jakožto množinu řešení vhodné lineární (homogenní) soustavy.

V celé kapitole K označuje pevné těleso, m, n jsou přirozená čísla.

Obsah přednášky

Afinní podprostory a soustavy lineárních rovnic

- Podprostor řešení homogenní soustavy a jeho báze
- Frobeniova věta a řešení nehomogenní soustavy
- Parametrické a všeobecné rovnice afinních podprostorů
- Rovnice průniku a spojení afinních podprostorů

Podprostor řešení I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$. Uvažujme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Podprostor řešení II

Dále uvažme nehomogenní soustavu s maticí **A** a pravou stranou **b**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Podprostor řešení II

Dále uvažme nehomogenní soustavu s maticí **A** a pravou stranou **b**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Množiny jejich řešení označíme

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

Podprostor řešení II

Dále uvažme nehomogenní soustavu s maticí $\mathbf{A}$ a pravou stranou $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Množiny jejich řešení označíme

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

resp.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

Podprostor řešení III

Předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ je definované lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$, přičemž $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}\varphi$.

Podprostor řešení III

Předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ je definované lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$, přičemž $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}\varphi$.

Z toho okamžitě vyplývá

Tvrzení

Pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ množina $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ řešení homogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru K^n.

Podprostor řešení IV

Každou bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Podprostor řešení IV

Každou bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení,

Podprostor řešení IV

Každou bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení,

a naopak, každá lineární kombinace vektorů fundamentálního systému je řešením příslušné soustavy.

Podprostor řešení IV

Každou bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení,

a naopak, každá lineární kombinace vektorů fundamentálního systému je řešením příslušné soustavy.

Fundamentální systém řešení najdeme následujícím postupem:

Podprostor řešení V

Matici **A** upravíme pomocí ERO na redukovaný stupňovitý tvar $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$.

Podprostor řešení V

Matici **A** upravíme pomocí ERO na redukovaný stupňovitý tvar $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$.

Množinu $\{1, \ldots, n\}$ rozdělíme na dvě podmnožiny J a J', podle toho, zda se v j-tém sloupci matice **B** nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku.

Podprostor řešení V

Matici **A** upravíme pomocí ERO na redukovaný stupňovitý tvar $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$.

Množinu $\{1, \dots, n\}$ rozdělíme na dvě podmnožiny J a J', podle toho, zda se v j-tém sloupci matice **B** nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku.

Označme k počet prvků množiny J' a zapišme ji ve tvaru $J' = \{j_1 < j_2 < \dots < j_k\}$.

Podprostor řešení VI

Pro každý index $j_l \in J'$ sestrojíme vektor $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \dots, v_{nl})^T \in K^n$ takto:

Podprostor řešení VI

Pro každý index $j_l \in J'$ sestrojíme vektor $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \ldots, v_{nl})^T \in K^n$ takto:

Zvolíme $v_{j_l l} = 1$ a $v_{j_i l} = 0$ pro $i \neq l$.

Podprostor řešení VI

Pro každý index $j_l \in J'$ sestrojíme vektor $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \ldots, v_{nl})^T \in K^n$ takto:

Zvolíme $v_{j_l l} = 1$ a $v_{j_i l} = 0$ pro $i \neq l$.

Pro $j \in J$ vypočítáme hodnoty v_{jl} k uvedeným hodnotám parametrů $v_{j_1 l}, \ldots, v_{j_k l}$ tak, aby celý vektor $\mathbf{v}_l$ vyhovoval podmínce $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$.

Podprostor řešení VI

Pro každý index $j_l \in J'$ sestrojíme vektor $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \ldots, v_{nl})^T \in K^n$ takto:

Zvolíme $v_{j_l l} = 1$ a $v_{j_i l} = 0$ pro $i \neq l$.

Pro $j \in J$ vypočítáme hodnoty v_{jl} k uvedeným hodnotám parametrů $v_{j_1 l}, \ldots, v_{j_k l}$ tak, aby celý vektor $\mathbf{v}_l$ vyhovoval podmínce $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$.

Potom vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ tvoří bázi podprostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A})$. Přitom zřejmě platí $k = n - h(\mathbf{A})$.

Podprostor řešení VII

Příklad

Předpokládejme, že jsme matici **A** *pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 3 a 4.

Podprostor řešení VIII

Tedy neznámé x_2 a x_5 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_3 a x_4 si vyjádříme s jejich pomocí.

Podprostor řešení VIII

Tedy neznámé x_2 a x_5 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_3 a x_4 si vyjádříme s jejich pomocí.

Naše první volba je $x_2 = 1$, $x_5 = 0$. Tomu odpovídá vektor $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$.

Podprostor řešení VIII

Tedy neznámé x_2 a x_5 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_3 a x_4 si vyjádříme s jejich pomocí.

Naše první volba je $x_2 = 1$, $x_5 = 0$. Tomu odpovídá vektor $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$.

Druhá volba parametrů je $x_2 = 0$, $x_5 = 1$. Tomu odpovídá vektor $\mathbf{v}_2 = (1/3, 0, -1/2, 2, 1)^T$.

Podprostor řešení VIII

Tedy neznámé x_2 a x_5 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_3 a x_4 si vyjádříme s jejich pomocí.

Naše první volba je $x_2 = 1$, $x_5 = 0$. Tomu odpovídá vektor $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$.

Druhá volba parametrů je $x_2 = 0$, $x_5 = 1$. Tomu odpovídá vektor $\mathbf{v}_2 = (1/3, 0, -1/2, 2, 1)^T$.

Potom vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ tvoří bázi podprostoru (fundamentální systém) řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^5$.

Podprostor řešení IX

Tvrzení

Pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí*

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}).$$

Podprostor řešení NS I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

Podprostor řešení NS I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

(a) *Pokud* $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \underline{\;})$, *pak* $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Podprostor řešení NS I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

(a) *Pokud* $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \,)$, *pak* $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

(b) *Pokud* $\mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$, *pak* $\mathbf{z} + \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Podprostor řešení NS I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

(a) *Pokud* $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \underline{\ })$, *pak* $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

(b) *Pokud* $\mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$, *pak* $\mathbf{z} + \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) &= \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z} + \mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})\} \\
&= \mathbf{z} + [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] \\
&= \{\mathbf{z} + c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k;\ c_1, \ldots, c_k \in K\}.
\end{aligned}
$$

Podprostor řešení NS II

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^{m}$.

Podprostor řešení NS II

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

Pokud soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má aspoň jedno řešení, tak* $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ *je afinní podprostor v* K^n *se zaměřením* $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Podprostor řešení NS II

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

Pokud soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má aspoň jedno řešení, tak* $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ *je afinní podprostor v* K^n *se zaměřením* $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

To znamená, že

$$\mathrm{Dir}\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$$

a

$$\dim\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \dim\mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}).$$

Frobeniova věta I

Věta

(Frobenius) *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.
Potom nehomogenní soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má řešení právě tehdy, když* $h(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = h(\mathbf{A})$.

Frobeniova věta II

Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má alespoň jedno řešení $\mathbf{z} \in K^n$ právě tehdy, když $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}\varphi$ (kde $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$). Pak $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Frobeniova věta II

Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má alespoň jedno řešení $\mathbf{z} \in K^n$ právě tehdy, když $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}\varphi$ (kde $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$). Pak $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Frobeniova věta říká: nehomogenní soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá řešení právě tehdy, když se při úpravě její rozšířené matice $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ na redukovaný stupňovitý tvar objeví nějaký řádek tvaru $(0, \ldots, 0 \,|\, d) \in K^{n+1}$, kde $0 \neq d \in K$. Takovýto řádek totiž zodpovídá rovnici $0 = d$.

Frobeniova věta III

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ na redukovaný stupňovitý tvar $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$, kde $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ a $\mathbf{c} \in K^{m}$, tak $\mathbf{B}$ je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

Frobeniova věta III

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ na redukovaný stupňovitý tvar $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$, kde $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ a $\mathbf{c} \in K^m$, tak $\mathbf{B}$ je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

Potom $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) \neq \emptyset$ právě tehdy, když se žádný vedoucí prvek nějakého řádku matice $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ nenachází v posledním, t. j. $n + 1$-ním sloupci.

Frobeniova věta IV

Bázi prostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ najdeme postupem popsaným v paragrafu 9.1.

Frobeniova věta IV

Bázi prostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ najdeme postupem popsaným v paragrafu 9.1.

Nech J, J' a k mají dříve uvedený význam.

Frobeniova věta IV

Bázi prostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ najdeme postupem popsaným v paragrafu 9.1.

Nech J, J' a k mají dříve uvedený význam.

Jedno řešení $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$ nehomogenní soustavy dostaneme volbou parametrů $z_{j_1} = \ldots = z_{j_k} = 0$ pro $j_l \in J'$.

Frobeniova věta IV

Bázi prostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ najdeme postupem popsaným v paragrafu 9.1.

Nech J, J' a k mají dříve uvedený význam.

Jedno řešení $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$ nehomogenní soustavy dostaneme volbou parametrů $z_{j_1} = \ldots = z_{j_k} = 0$ pro $j_l \in J'$.

Zbývající hodnoty z_j potom vypočítáme tak, aby $\mathbf{z}$ vyhovovalo podmínce $\mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{c}$, t. j. $z_j = c_j$ pro $j \in J$.

Frobeniova věta V

Příklad

Předpokládejme, že jsme matici $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ *pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1/4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & 6 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Frobeniova věta VI

Vidíme, že $h(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$, tedy $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) \neq \emptyset$.

Frobeniova věta VI

Vidíme, že $h(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$, tedy $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) \neq \emptyset$.

Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 2 a 3.

Frobeniova věta VI

Vidíme, že $h(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$, tedy $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) \neq \emptyset$.

Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 2 a 3.

Tedy neznámé x_4, x_5 a x_6 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_2 a x_3 si vyjádříme pomocí nich.

Frobeniova věta VI

Vidíme, že $h(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$, tedy $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) \neq \emptyset$.

Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 2 a 3.

Tedy neznámé x_4, x_5 a x_6 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_2 a x_3 si vyjádříme pomocí nich.

První volbě $x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = 0$ odpovídá vektor $\mathbf{v}_1 = (-3, -4, -1, 1, 0, 0)^T$.

Frobeniova věta VII

Druhá volba $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ nám dá vektor $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$.

Frobeniova věta VII

Druhá volba $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ nám dá vektor $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$.

Třetí volbou $x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 1$ získáme vektor $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$.

Frobeniova věta VII

Druhá volba $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ nám dá vektor $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$.

Třetí volbou $x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 1$ získáme vektor $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$.

Potom vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ tvoří bázi podprostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^6$ příslušní homogenní soustavy.

Frobeniova věta VII

Druhá volba $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ nám dá vektor $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$.

Třetí volbou $x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 1$ získáme vektor $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$.

Potom vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ tvoří bázi podprostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^6$ příslušní homogenní soustavy.

Konečně volbou parametrů $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ získáme jedno řešení $\mathbf{z} = (2, -1, -2/7, 0, 0, 0)^T$ nehomogenní soustavy.

Frobeniova věta VIII

Výsledek můžeme zapsat do tabulky:

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{z}$
x_1	-3	$-1/4$	0	2
x_2	-4	-2	1	-1
x_3	-1	5	-6	$-2/7$
x_4	1	0	0	0
x_5	0	1	0	0
x_6	0	0	1	0

Parametrické a všeobecné rovnice I

Každý afinní podprostor $M \subseteq K^n$ má tvar

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] = \mathbf{p} + [\alpha]$$

pro nějaký bod $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T \in M$ a vhodnou uspořádanou k-tici $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z K^n, kde $\mathbf{u}_j = (u_{1j}, \dots, u_{nj})^T$.

Parametrické a všeobecné rovnice II

To znamená, že pro libovolné $\mathbf{x} \in K^n$ platí $\mathbf{x} \in M$ právě tehdy, když existuje $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)^T \in K^k$ tak, že

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t},$$

kde jsme uspořádanou k-tici α jako obyčejně ztotožnili s maticí $(u_{ij}) \in K^{n \times k}$ se sloupci $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Parametrické a všeobecné rovnice III

Rovnost $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$ je maticovým zápisem ***parametrických rovnic*** afinního podprostoru $M \subseteq K^n$.

Parametrické a všeobecné rovnice III

Rovnost $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$ je maticovým zápisem ***parametrických rovnic*** afinního podprostoru $M \subseteq K^n$.

Vektor $\mathbf{t} \in K^n$ nazýváme ***vektorem parametrů*** a jeho složky $t_1, \ldots, t_k \in K$ ***parametry***.

Parametrické a všeobecné rovnice IV

Po rozepsání do složek

$$\begin{aligned}
x_1 &= p_1 + u_{11}t_1 + u_{12}t_2 + \ldots + u_{1k}t_k \\
x_2 &= p_2 + u_{21}t_1 + u_{22}t_2 + \ldots + u_{2k}t_k \\
\\
x_n &= p_n + u_{n1}t_1 + u_{n2}t_n + \ldots + u_{nk}t_k
\end{aligned}$$

dostaneme obvyklejší tvar, se kterým jsme sa v dimenzi $n = 2$ resp. $n = 3$ už potkali v středoškolské analytické geometrii.

Parametrické a všeobecné rovnice V

Jsou-li navíc vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislé, což můžeme vždy dosáhnout vynecháním "nadbytečných vektorů", pak parametrické rovnice podprostoru M nám přímo ukáží jeho dimenzi: $\mathrm{dim} M = k$.

Parametrické a všeobecné rovnice VI

Zápis afinního podprostoru $M \subseteq K^n$ ve tvaru $M = \mathbf{p} + [\alpha]$, kde $\mathbf{p} \in M$ a α je nejaká uspořádaná k-tice, která generuje jeho zaměření $\mathrm{Dir} M$ (můžeme si dovolit předpokládat, že α je dokonce báze v $\mathrm{Dir} M$), budeme nazývat jeho ***parametrickým vyjádřením***.

Parametrické a všeobecné rovnice VI

Zápis afinního podprostoru $M \subseteq K^n$ ve tvaru $M = \mathbf{p} + [\alpha]$, kde $\mathbf{p} \in M$ a α je nejaká uspořádaná k-tice, která generuje jeho zaměření $\mathrm{Dir} M$ (můžeme si dovolit předpokládat, že α je dokonce báze v $\mathrm{Dir} M$), budeme nazývat jeho ***parametrickým vyjádřením***.

Parametrické vyjádření $M = \mathbf{p} + [\alpha]$ afinního podprostoru můžeme přímo přepsat do jeho parametrických rovnic $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$, ($\mathbf{t} \in K^k$). Naopak, z jeho parametrických rovnic můžeme okamžitě získat jeho parametrické vyjádření.

Parametrické a všeobecné rovnice VII

Každá soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ s rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$ (pokud má řešení), popisuje afinní podprostor $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \subseteq K^n$.

Parametrické a všeobecné rovnice VII

Každá soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ s rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$ (pokud má řešení), popisuje afinní podprostor $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \subseteq K^n$.

Vyřešit soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ znamená vlastne najít nějaké pěkné parametrické rovnice afinního podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$.

Parametrické a všeobecné rovnice VIII

Nechť tedy $M = \mathbf{p} + [\alpha]$ je afinní podprostor v K^n, daný bodom $\mathbf{p} \in K^n$ a uspořádanou k-ticí $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z K^n, kterou ztotožníme s maticí $\alpha = (u_{ij}) \in K^{n \times k}$ se sloupci $\mathbf{u}_j$.

Parametrické a všeobecné rovnice IX

Parametrické rovnice $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$ podprostoru M, kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ je vektor neznámých a $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)^T \in K^k$ je vektor parametrů, můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{t} + \mathbf{p},$$

který lze reprezentovat pomocí blokové matice

$$(\mathbf{I}_n \,|\, \alpha \,|\, \mathbf{p}).$$

Parametrické a všeobecné rovnice X

Naše metoda bude založená na ***eliminaci parametrů*** $t_1, \ldots, t_k$ úpravou této matice pomocí ERO.

Parametrické a všeobecné rovnice X

Naše metoda bude založená na ***eliminaci parametrů*** $t_1, \dots, t_k$ úpravou této matice pomocí ERO.

Matici $(\mathbf{I}_n \,|\, \boldsymbol{\alpha} \,|\, \mathbf{p})$ budeme upravovat na řádkově ekvivalentní matici tak, aby prostřední blok vo výsledné matici byl ve stupňovitém tvaru. Mohou pak nastat dvě možnosti

Parametrické a všeobecné rovnice XI

(1) $h(\alpha) = n$, což poznáme podle toho, že všechny řádky prostředního bloku výsledné matice jsou nenulové.

Parametrické a všeobecné rovnice XI

(1) $h(\alpha) = n$, což poznáme podle toho, že všechny řádky prostředního bloku výsledné matice jsou nenulové.

V tomto případě $M = V$ a všeobecné rovnice tohoto podprostoru tvoří prázdná soustava (t. j. soustava, která neobsahuje žádnou rovnici).

Parametrické a všeobecné rovnice XII

(2) $h(\alpha) < n$. Pak můžeme prostřední blok výsledné matice rozdělit do dvou pod sebou umístěných bloků $\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{0}}\right)$, kde horní blok $\mathbf{D}$ je stupňovitá matice typu $h(\alpha) \times k$, která má všechny řádky nenulové, tedy dolní nulový blok má rozměr $(n - h(\alpha)) \times k$.

Parametrické a všeobecné rovnice XIII

Toto rozdělení prostředního bloku indukuje rozdělení celé výsledné matice do bloků

Parametrické a všeobecné rovnice XIII

Toto rozdělení prostředního bloku indukuje rozdělení celé výsledné matice do bloků

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right).$$

Parametrické a všeobecné rovnice XIII

Toto rozdělení prostředního bloku indukuje rozdělení celé výsledné matice do bloků

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right).$$

Potom $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ jsou všeobecné rovnice afinního podprostoru M, t. j. platí $M = \mathbf{p} + [\alpha] = \mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$.

Parametrické a všeobecné rovnice XIV

Popsaný algoritmus můžeme stručně shrnout do následujícího schématu

$$(\mathbf{I}_n \,|\, \alpha \,|\, \mathbf{p}) \xrightarrow{ERO} \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right),$$

Parametrické a všeobecné rovnice XIV

Popsaný algoritmus můžeme stručně shrnout do následujícího schématu

$$(\mathbf{I}_n \,|\, \alpha \,|\, \mathbf{p}) \xrightarrow{ERO} \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right),$$

kde $\mathbf{D}$ je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky (jejichž počet je tedy nutně $h(\mathbf{D}) = h(\alpha)$).

Parametrické a všeobecné rovnice XV

Z k-tice α můžeme vybrat bázi zaměření $\mathrm{Dir} M = [\alpha]$: je tvořená vektory $\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_l}$, kde $1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq k$ jsou indexy těch sloupců matice $\mathbf{D}$, ve kterých se nacházejí vedoucí prvky jejich řádků.

Parametrické a všeobecné rovnice XVI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{n\times k}$ *a* $\mathbf{p} \in K^n$.

Parametrické a všeobecné rovnice XVI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{n\times k}$ *a* $\mathbf{p} \in K^{n}$.

Pokud bloková matice $(\mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mid \mathbf{p})$ *je řádkově ekvivalentní s blokovou maticí*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right).$$

Parametrické a všeobecné rovnice XVI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{n\times k}$ *a* $\mathbf{p} \in K^n$.

Pokud bloková matice $(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{C} \,|\, \mathbf{p})$ *je řádkově ekvivalentní s blokovou maticí*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right).$$

kde $\mathbf{D}$ *je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky, tak*

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \left\{\mathbf{x} \in K^m;\ (\exists\, \mathbf{t} \in K^k)(\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{p})\right\}.$$

Rovnice průniku a spojení afinních podprostorů

Uvažujme tři možnosti zadání původních podprostorů:

(1) Oba podprostory jsou zadané všeobecnými rovnicemi.
(2) Oba podprostory jsou zadané parametricky.
(3) Jeden podprostor je zadaný pomocí všeobecných rovnic a druhý parametricky.

(1) Nechť afinní podprostory $M, N \subseteq K^n$ mají všeobecné rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ resp. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$, kde $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$, $\mathbf{B} \in K^{l \times n}$, $\mathbf{c} \in K^l$. Potom všeobecnými rovnicemi průniku $M \cap N$ je soustava

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{c} \end{aligned}$$

s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{B} & \mathbf{c} \end{array} \right).$$

Parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ můžeme získat vyřešením této soustavy.

Parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ můžeme získat vyřešením této soustavy.

Parametrické vyjádření podprostoru $M \sqcup N$ můžeme získat tak, že nejprve najdeme parametrická vyjádření podprostorů M a N a použijeme úvahy z předchozí kapitoly. Následně pak můžeme odvodit všeobecné rovnice podprostoru $M \sqcup N$.

Příklad

Afinní podprostory M, N vektorového prostoru $\mathbf{Q}^4$ *jsou dané soustavami*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned} \; .$$

Upravme rozšířené matice původních soustav:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & -1 \end{array}\right).$$

Z upravených matic okamžitě dostáváme parametrické vyjádření původních podprostorů (matice v hranatých závorkách označuje lineární podprostor generovaný jejími sloupci)

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pokud napíšeme obě upravené rozšírené matice všeobecných rovnic podprostorů M a N do bloků pod sebe, dostaneme rozšířenou matici všeobecných rovníc podprostoru $M \cap N$.

Pokud napíšeme obě upravené rozšírené matice všeobecných rovnic podprostorů M a N do bloků pod sebe, dostaneme rozšířenou matici všeobecných rovníc podprostoru $M \cap N$.

Její úpravou na redukovaný stupňovitý tvar vyjde

$$\left(\begin{array}{rrrrr|} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & -21/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Odtud už přímo vyplývá parametrické vyjádření

$$M \cap N = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 9/5 \\ -21/5 \\ 0 \end{array} \right) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{array} \right].$$

Odtud už přímo vyplývá parametrické vyjádření

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 3 \\ 9/5 \\ -21/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Zjistili jsme, že dvojrozměrné afinní podprostory M, N mají jednorozměrný průnik, tedy jsou *různoběžné*. Preto též $\dim(M \sqcup N) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Dáme-li vedle sebe generátory směrových podprostorů $\mathrm{Dir} M$ a $\mathrm{Dir} N$, úpravou příslušné matice zjistíme, že první tři jsou lineárně nezávislé a poslední z nich je lineární kombinací předcházejících.

Dáme-li vedle sebe generátory směrových podprostorů $\mathrm{Dir} M$ a $\mathrm{Dir} N$, úpravou příslušné matice zjistíme, že první tři jsou lineárně nezávislé a poslední z nich je lineární kombinací předcházejících.

Tedy sloupce matice

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi zaměření afinního podprostoru $M \sqcup N$.

Jeho parametrické vyjádření je

$$M \sqcup N = \mathbf{p} + [\beta],$$

kde $\mathbf{p} = (3, 9/5, -21/5, 0)^T$.

Jeho parametrické vyjádření je

$$M \sqcup N = \mathbf{p} + [\beta],$$

kde $\mathbf{p} = (3, 9/5, -21/5, 0)^T$.

Úpravou blokové matice $(\mathbf{I}_4 \,|\, \beta \,|\, \mathbf{p})$ podle našeho algoritmu, výměnou prvého a posledního řádku dostaneme všeobecné rovnice podprostoru $M \sqcup N$:

$$x_1 = 3\,.$$

(2) Nechť $M = \mathbf{p} + [\alpha]$, $N = \mathbf{q} + [\beta]$ jsou parametrické vyjádření dvou afinních podprostorů v K^n.

(2) Nechť $M = \mathbf{p} + [\alpha]$, $N = \mathbf{q} + [\beta]$ jsou parametrické vyjádření dvou afinních podprostorů v K^n.

Potom $M \sqcup N = \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta]$ a vynecháním vhodných sloupců z blokové matice $(\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta)$ můžeme dostat bázi zaměření $\mathrm{Dir}(M \sqcup N)$.

(2) Nechť $M = \mathbf{p} + [\alpha]$, $N = \mathbf{q} + [\beta]$ jsou parametrické vyjádření dvou afinních podprostorů v K^n.

Potom $M \sqcup N = \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta]$ a vynecháním vhodných sloupců z blokové matice $(\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta)$ můžeme dostat bázi zaměření $\mathrm{Dir}(M \sqcup N)$.

Všeobecné rovnice podprostoru $M \sqcup N$ dostaneme úpravou blokové matice $(\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta \,|\, \mathbf{p})$, případně matice, v které je prostřední blok nahrazený bází zaměření $\mathrm{Dir}(M \sqcup N)$ podle našeho algoritmu.

Všeobecné rovnice průniku $M \cap N$, získáme tak, že parametrické rovnice každého z podprostorů M, N převedeme na všeobecné rovnice a ty pak spojíme dohromady.

Všeobecné rovnice průniku $M \cap N$, získáme tak, že parametrické rovnice každého z podprostorů M, N převedeme na všeobecné rovnice a ty pak spojíme dohromady.

Parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ dostaneme vyřešením jeho všeobecných rovnic.

Jiná cesta k parametrickým rovnicím průniku $M \cap N$: lze při ní jako vedlejší produkt získat báze zaměření $\mathrm{Dir} M$, $\mathrm{Dir} N$, $\mathrm{Dir}(M \sqcup N)$, tedy i parametrické rovnice spojení $M \sqcup N$.

Jiná cesta k parametrickým rovnicím průniku $M \cap N$: lze při ní jako vedlejší produkt získat báze zaměření $\mathrm{Dir} M$, $\mathrm{Dir} N$, $\mathrm{Dir}(M \sqcup N)$, tedy i parametrické rovnice spojení $M \sqcup N$.

Metoda: blokovou matici $(\alpha \,|\, \beta \,|\, \mathbf{q} - \mathbf{p})$ upravujeme pomocí ERO na stupňovitý tvar

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' & \mathbf{c}' \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{c} \end{array}\right),$$

kde matice $\mathbf{A}'$ má všechny řádky nenulové (tedy lineárně nezávislé a jejich počet je $h(\mathbf{A}') = h(\alpha) = \mathrm{dim} M$).

Průnik $M \cap N$ je tvořený všemi $\mathbf{x} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t} \in N$, které patří zároveň do M, t. j. existuje vektor parametrů $\mathbf{s}$ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{s}$. Hledáme tedy všechny vektory parametrů $\mathbf{t}$, ke kterým existuje nějaký vektor parametrů $\mathbf{s}$ tak, že platí

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{s} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{q} - \mathbf{p}).$$

K danému $\mathbf{t}$ existuje takovéto $\mathbf{s}$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{c}$.

K danému $\mathbf{t}$ existuje takovéto $\mathbf{s}$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{c}$.

Vyřešením této soustavy dostaneme parametrické vyjádření

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z},$$

které dosadíme do parametrických rovnic podprostoru N.

K danému **t** existuje takovéto **s** právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{c}$.

Vyřešením této soustavy dostaneme parametrické vyjádření

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z},$$

které dosadíme do parametrických rovnic podprostoru N.

Dostaneme tak parametrické rovnice

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \gamma) \cdot \mathbf{z}$$

podprostoru $M \cap N$.

Příklad

Nechť

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

jsou afinní podprostory v $\mathbf{R}^4$.

Zřejmě $\mathrm{Dir} N_1 = \mathrm{Dir} N_2$; označme tento lineární podprostor D. Obě úlohy o dvojicích podprostorů M, N_1 i M, N_2 budeme řešit současně.

Zřejmě $\mathrm{Dir} N_1 = \mathrm{Dir} N_2$; označme tento lineární podprostor D. Obě úlohy o dvojicích podprostorů M, N_1 i M, N_2 budeme řešit současně.
Platí

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 11 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Pokud si z matice na pravé straně odmyslíme krajní pravý blok, po vynechání rovnice $0 = 0$ z ní dostaneme soustavu

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 0.$$

Pokud si z matice na pravé straně odmyslíme krajní pravý blok, po vynechání rovnice $0 = 0$ z ní dostaneme soustavu

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 0.$$

Lineární podprostor $\mathrm{Dir} M \cap D$ je tvořený právě všemi lineárními kombinacemi $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t}$, kde $\boldsymbol{\beta}$ je matice generátorů D (a jeho báze) a $\mathbf{t}$ vyhovuje uvedené homogenní rovnici.

Pokud si z matice na pravé straně odmyslíme krajní pravý blok, po vynechání rovnice $0 = 0$ z ní dostaneme soustavu

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 0.$$

Lineární podprostor $\mathrm{Dir} M \cap D$ je tvořený právě všemi lineárními kombinacemi $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t}$, kde $\boldsymbol{\beta}$ je matice generátorů D (a jeho báze) a $\mathbf{t}$ vyhovuje uvedené homogenní rovnici.

Tedy $\dim(\mathrm{Dir} M \cap D) = \dim \mathrm{Dir} M = 2$. Proto $\mathrm{Dir} M \subseteq D$ a platí $M \parallel N_1$ a $M \parallel N_2$.

Soustava

$$\begin{aligned} 4t_1 - 2t_2 + 6t_3 &= 2 \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

které musí vyhovovat vektor parametrů $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$, aby jím určený bod z N_1 patřil i do M, nemá řešení.

Soustava

$$\begin{aligned} 4t_1 - 2t_2 + 6t_3 &= 2 \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

které musí vyhovovat vektor parametrů $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$, aby jím určený bod z N_1 patřil i do M, nemá řešení.

Proto $M \cap N_1 = \emptyset$ a M, N_1 jsou *pravé rovnobežky*.

Naopak, analogická soustava pro dvojici M, N_2 vede na jedinou, očividně řešitelnou rovnici

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 1.$$

Naopak, analogická soustava pro dvojici M, N_2 vede na jedinou, očividně řešitelnou rovnici

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 1.$$

Tedy $M \subseteq N_2$.

(3) Nechť afinní podprostor $M \subseteq K^n$ je daný všeobecnými rovnicemi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a afinní podprostor $N = \mathbf{q} + [\beta] \subseteq K^n$ je daný parametricky.

(3) Nechť afinní podprostor $M \subseteq K^n$ je daný všeobecnými rovnicemi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a afinní podprostor $N = \mathbf{q} + [\beta] \subseteq K^n$ je daný parametricky.

Pokud hledáme všeobecné rovnice průniku $M \cap N$, stačí najít všeobecné rovnice podprostoru N a přidat je k soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(3) Nechť afinní podprostor $M \subseteq K^n$ je daný všeobecnými rovnicemi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a afinní podprostor $N = \mathbf{q} + [\beta] \subseteq K^n$ je daný parametricky.

Pokud hledáme všeobecné rovnice průniku $M \cap N$, stačí najít všeobecné rovnice podprostoru N a přidat je k soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Jejich vyřešením potom můžeme obdržet i parametrické vyjádření $M \cap N$.

Pokud hledáme popis spojení $M \sqcup N$, nejvýhodnější je vyřešit všeobecné rovnice podprostoru M a z parametrických vyjádření obou podprostorů M, N sestavit parametrické vyjádření $M \sqcup N$.

Pokud hledáme popis spojení $M \sqcup N$, nejvýhodnější je vyřešit všeobecné rovnice podprostoru M a z parametrických vyjádření obou podprostorů M, N sestavit parametrické vyjádření $M \sqcup N$.

Eliminací parametrů dostaneme všeobecné rovnice podpriestoru $M \sqcup N$.

Jiná metoda, jak najít parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ spočívá v dosazení parametrického vyjádření podprostoru N do všeobecných rovnic podprostoru M.

Jiná metoda, jak najít parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ spočívá v dosazení parametrického vyjádření podprostoru N do všeobecných rovnic podprostoru M.

Tím dostaneme soustavu

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{b},$$

Jiná metoda, jak najít parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ spočívá v dosazení parametrického vyjádření podprostoru N do všeobecných rovnic podprostoru M.

Tím dostaneme soustavu

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{b},$$

nebo po úpravě s ní ekvivalentní soustavu

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q},$$

které musí vyhovovat vektor parametrů $\mathbf{t}$, aby jím určený bod $\mathbf{x} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t} \in N$ patřil i do podprostoru M, tedy do průniku $M \cap N$.

Uvedenou soustavu vyřešíme úpravou její rozšířené matice $(\mathbf{A}\cdot\beta\,|\,\mathbf{b}\,-\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{q})$.

Uvedenou soustavu vyřešíme úpravou její rozšířené matice $(\mathbf{A} \cdot \beta \,|\, \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q})$.

Podobně jako v případě (2) řešení dostaneme v parametrickém tvaru

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}$$

a dosadíme ho do parametrických rovnic podprostoru N.

Uvedenou soustavu vyřešíme úpravou její rozšířené matice $(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \,|\, \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q})$.

Podobně jako v případě (2) řešení dostaneme v parametrickém tvaru
$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}$$
a dosadíme ho do parametrických rovnic podprostoru N.

Tak získáme parametrické rovnice

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \gamma) \cdot \mathbf{z}$$

podprostoru $M \cap N$.

Příklad

Afinní podprostor $M \subseteq \mathbf{R}^4$ má všeobecné rovnice

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Příklad

Afinní podprostor $M \subseteq \mathbf{R}^4$ *má všeobecné rovnice*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Afinní podprostor $N \subseteq \mathbf{R}^4$ *je určený jako afinní obal* $N = \ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ *bodů* $\mathbf{p} = (3, 0, 1, 1)^T$, $\mathbf{q} = (4, -1, 2, 2)^T$, $\mathbf{r} = (4, 1, 2, 0)^T$ *a* $\mathbf{s} = (7, 3, 4, 5)^T$.

Příklad

Afinní podprostor $M \subseteq \mathbf{R}^4$ má všeobecné rovnice

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Afinní podprostor $N \subseteq \mathbf{R}^4$ je určený jako afinní obal $N = \ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ bodů $\mathbf{p} = (3, 0, 1, 1)^T$, $\mathbf{q} = (4, -1, 2, 2)^T$, $\mathbf{r} = (4, 1, 2, 0)^T$ a $\mathbf{s} = (7, 3, 4, 5)^T$.

Jeho parametrické vyjádření potom je

$$\begin{aligned} N &= \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{s} - \mathbf{p}] \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Protože

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Protože

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

bod tvaru $\mathbf{p} + t_1(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + t_2(\mathbf{r} - \mathbf{p}) + t_3(\mathbf{s} - \mathbf{p}) \in N$ patří do průniku $M \cap N$ právě tehdy, když příslušný vektor parametrů $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$ vyhovuje soustavě s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Podprostor řešení této soustavy má parametrické vyjádření

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podprostor řešení této soustavy má parametrické vyjádření

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right].$$

Dosazením do parametrického vyjádření N dostaneme

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Tedy

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right]$$

Tedy

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right]$$

a $\dim(M \cap N) = 1$.

Hodnost matice soustavy podprostoru M je 2, proto $\dim M = 4 - 2 = 2$, a $\dim N = 3$.

Tedy

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a $\dim(M \cap N) = 1$.

Hodnost matice soustavy podprostoru M je 2, proto $\dim M = 4 - 2 = 2$, a $\dim N = 3$.

Z tohoto důvodu $M \cap N$ je vlastní podprostor jak v M tak v N, tj. M, N jsou *různoběžné*.

10. DETERMINANTY

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

8. prosince 2006

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme ***determinanty*** čtvercových matic libovolného rozměru $n \times n$ nad pevným tělesem K, řekneme si jejich základní vlastnosti a naučíme se je vypočítat včetně příkladů jejich aplikace.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme ***determinanty*** čtvercových matic libovolného rozměru $n \times n$ nad pevným tělesem K, řekneme si jejich základní vlastnosti a naučíme se je vypočítat včetně příkladů jejich aplikace.

V celé kapitole K označuje pevné těleso, m, n jsou přirozená čísla.

Obsah přednášky

Permutace I

Nechť X je libovolná množina. ***Permutací*** množiny X rozumíme libovolné bijektivní zobrazení $\sigma : X \to X$.

Množinu všech permutací množiny X značíme $\mathcal{S}(X)$.

Permutace II

Je-li X konečná množina, tak počet prvků množiny $\mathcal{S}(X)$ je daný známým vztahem

$$\#\,\mathcal{S}(X) = (\#\,X)!\,,$$

kde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ je ***faktoriál*** přirozeného čísla n (přitom $0! = 1! = 1$).

Permutace III

Transformace $f : X \to X$ ***konečné*** množiny X je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.

Permutace III

Transformace $f : X \to X$ ***konečné*** množiny X je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.

Protože složení $\sigma \circ \tau$ dvou permutací $\sigma, \tau \in \mathcal{S}(X)$ dává opět permutaci množiny X, kompozice $\circ$ je asociativní binární operace na množině $\mathcal{S}(X)$ a id_X je její neutrální prvek.

Permutace III

Transformace $f : X \to X$ ***konečné*** množiny X je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.

Protože složení $\sigma \circ \tau$ dvou permutací $\sigma, \tau \in \mathcal{S}(X)$ dává opět permutaci množiny X, kompozice $\circ$ je asociativní binární operace na množině $\mathcal{S}(X)$ a id_X je její neutrální prvek.

Snadno se můžeme přesvědčit, že – mimo případ, když $\# X \leq 2$, – tato operace není komutativní.

Permutace IV

Pro $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ místo $\mathcal{S}(X)$ píšeme $\mathcal{S}_n$.

Permutace IV

Pro $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ místo $\mathcal{S}(X)$ píšeme $\mathcal{S}_n$.

Permutaci $\sigma \in \mathcal{S}_n$ obvykle zapisujeme ve tvaru

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Permutace V

Prvky množiny $\mathcal{S}_3$, t. j. permutace množiny $\{1, 2, 3\}$, si můžeme představit jako symetrie rovnostranného trojúhelníka s vrcholy označenými čísly 1, 2, 3.

Permutace V

Prvky množiny $\mathcal{S}_3$, t. j. permutace množiny $\{1, 2, 3\}$, si můžeme představit jako symetrie rovnostranného trojúhelníka s vrcholy označenými čísly 1, 2, 3.

Označme si identickou permutaci této množiny jako ι,

Permutace V

Prvky množiny $\mathcal{S}_3$, t. j. permutace množiny $\{1, 2, 3\}$, si můžeme představit jako symetrie rovnostranného trojúhelníka s vrcholy označenými čísly 1, 2, 3.

Označme si identickou permutaci této množiny jako ι,

otočení kolem těžiště trojúhelníka proti směru resp. ve směru hodinových ručiček o uhel $\pi/3$ jako ϱ resp. ϱ^{-1},

Permutace V

Prvky množiny $\mathcal{S}_3$, t. j. permutace množiny $\{1, 2, 3\}$, si můžeme představit jako symetrie rovnostranného trojúhelníka s vrcholy označenými čísly 1, 2, 3.

Označme si identickou permutaci této množiny jako ι,

otočení kolem těžiště trojúhelníka proti směru resp. ve směru hodinových ručiček o uhel $\pi/3$ jako ϱ resp. ϱ^{-1},

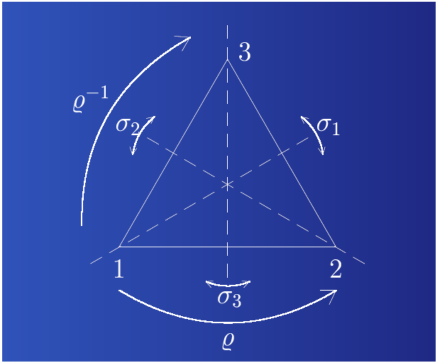
a osovou souměrnost podle osy procházející i-tým vrcholem a středem protilehlé strany jako σ_i, pro $i = 1,\ 2,\ 3$.

Permutace VI

Množina permutací $\mathcal{S}_3$ se bude skládat z permutací

$$\begin{aligned} \iota &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \varrho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\ \varrho^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Permutace VII



Permutace VIII

Multiplikativní tabulka binární operace $\circ$ na množině $\mathcal{S}_3$ má následující tvar:

$\circ$	ι	ϱ	ϱ^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
ι	ι	ϱ	ϱ^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
ϱ	ϱ	ϱ^{-1}	ι	σ_3	σ_1	σ_2
ϱ^{-1}	ϱ^{-1}	ι	ϱ	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	ι	ϱ	ϱ^{-1}
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ϱ^{-1}	ι	ϱ
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ϱ	ϱ^{-1}	ι

Permutace IX

Permutaci $\sigma \in \mathcal{S}(X)$ nazýváme ***transpozicí***, pokud existují $x, y \in X$ tak, že $x \neq y$, $\sigma(x) = y$, $\sigma(y) = x$ a $\sigma(z) = z$ pro každé $z \in X \setminus \{x, y\}$.

Permutace IX

Permutaci $\sigma \in \mathcal{S}(X)$ nazýváme ***transpozicí***, pokud existují $x, y \in X$ tak, že $x \neq y$, $\sigma(x) = y$, $\sigma(y) = x$ a $\sigma(z) = z$ pro každé $z \in X \setminus \{x, y\}$.

Jinak řečeno, transpozice je výměna dvou prvků množiny X.

Permutace IX

Permutaci $\sigma \in \mathcal{S}(X)$ nazýváme ***transpozicí***, pokud existují $x, y \in X$ tak, že $x \neq y$, $\sigma(x) = y$, $\sigma(y) = x$ a $\sigma(z) = z$ pro každé $z \in X \setminus \{x, y\}$.

Jinak řečeno, transpozice je výměna dvou prvků množiny X.

Zřejmě $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{S}_3$ jsou transpozice.

Permutace IX

Permutaci $\sigma \in \mathcal{S}(X)$ nazýváme ***transpozicí***, pokud existují $x, y \in X$ tak, že $x \neq y$, $\sigma(x) = y$, $\sigma(y) = x$ a $\sigma(z) = z$ pro každé $z \in X \setminus \{x, y\}$.

Jinak řečeno, transpozice je výměna dvou prvků množiny X.

Zřejmě $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{S}_3$ jsou transpozice.

Z názoru je zřejmé, že každou permutaci σ konečné množiny X můžeme obdržet postupnými výměnami dvojic prvků, je tedy každá takováto permutace je kompozicí transpozic.

Permutace X

Tento rozklad na transpozice není jednoznačný:

Permutace X

Tento rozklad na transpozice není jednoznačný:

např. $\iota \in \mathcal{S}_3$ můžeme vyjádřit jako ι, t. j. kompozici 0 transpozic, a rovněž jakožto

Permutace X

Tento rozklad na transpozice není jednoznačný:

např. $\iota \in \mathcal{S}_3$ můžeme vyjádřit jako ι, t. j. kompozici 0 transpozic, a rovněž jakožto

$$\iota = \sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_2 = \sigma_3 \circ \sigma_3,$$

t. j. alespoň třemi dalšími možnostmi jakožto kompozici dvou transpozic.

Permutace XI

Délkou permutace σ konečné množiny X nazveme nejmenší počet transpozic, na jejichž kompozici můžeme σ rozložit, a označíme ji $|\sigma|$.

Permutace XI

Délkou permutace σ konečné množiny X nazveme nejmenší počet transpozic, na jejichž kompozici můžeme σ rozložit, a označíme ji $|\sigma|$.

Samotná délka $|\sigma|$ není ve skutečnosti důležitá, význam má pouze parita tohoto čísla, t. j. vlastně výraz $\mathrm{sgn}\sigma = (-1)^{|\sigma|}$, který nazýváme ***znaménkem permutace*** σ.

Permutace XII

Permutace σ konečné množiny X sa nazývá ***sudá*** resp. ***lichá***, je-li číslo $|\sigma|$ sudé resp. liché, t. j. pokud její znak je 1 resp. -1.

Permutace XII

Permutace σ konečné množiny X sa nazývá ***sudá*** resp. ***lichá***, je-li číslo $|\sigma|$ sudé resp. liché, t. j. pokud její znak je 1 resp. -1.

Z následující věty vyplývá, že při určování znaménka permutace σ můžeme použít její ***libovolný*** rozklad na transpozice $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ a nemusíme sa starat o to, zda tento rozklad je skutečně nejkratší

Permutace XII

Permutace σ konečné množiny X sa nazývá ***sudá*** resp. ***lichá***, je-li číslo $|\sigma|$ sudé resp. liché, t. j. pokud její znak je 1 resp. -1.

Z následující věty vyplývá, že při určování znaménka permutace σ můžeme použít její ***libovolný*** rozklad na transpozice $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ a nemusíme sa starat o to, zda tento rozklad je skutečně nejkratší

– pro libovolný takovýto rozklad totiž platí

$$(-1)^{|\sigma|} = (-1)^k.$$

Permutace XIII

Věta

Nechť X je konečná množina. Potom pro libovolné $\sigma, \tau \in \mathcal{S}(X)$ platí

$$(-1)^{|\sigma\circ\tau|} = (-1)^{|\sigma|} \cdot (-1)^{|\tau|}.$$

Permutace XIII

Věta

Nechť X je konečná množina. Potom pro libovolné $\sigma, \tau \in \mathcal{S}(X)$ platí

$$(-1)^{|\sigma \circ \tau|} = (-1)^{|\sigma|} \cdot (-1)^{|\tau|}.$$

Člen $\sigma(j) - \sigma(i)$ je záporný právě tehdy, když $i < j$ a $\sigma(i) > \sigma(j)$, – každou takovouto dvojici (i, j) nazýváme ***inverzí*** permutace σ.

Orientovaný objem a MAF I

Orientovaný objem a multilineární alternující funkce

Otázka: Jak vypadají vzorce pro plošný obsah rovnoběžníku v rovině v $\mathbb{R}^2$, jehož dvě sousední strany tvoří vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$?

Orientovaný objem a MAF II

Otázka: Jak vypadají vzorce pro objem rovnoběžnostěnu v prostoru $\mathbb{R}^3$, jehož tři sousední hrany tvoří vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$?

Orientovaný objem a MAF II

Otázka: Jak vypadají vzorce pro objem rovnoběžnostěnu v prostoru $\mathbb{R}^3$, jehož tři sousední hrany tvoří vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$?

Ujasníme si vlastností takovýchto vzorců. Uvidíme, že tyto vlastnosti už jednoznačně (až na volbu jednotkového obsahu či objemu) určují hledané vzorce nejen v rovině či v třírozměrném prostoru.

Orientovaný objem a MAF II

Otázka: Jak vypadají vzorce pro objem rovnoběžnostěnu v prostoru $\mathbb{R}^3$, jehož tři sousední hrany tvoří vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$?

Ujasníme si vlastností takovýchto vzorců. Uvidíme, že tyto vlastnosti už jednoznačně (až na volbu jednotkového obsahu či objemu) určují hledané vzorce nejen v rovině či v třírozměrném prostoru.

Zobecníme je na n-rozměrné vektorové prostory K^n nad libovolným tělesem K.

Orientovaný objem a MAF III

Označme $P(X)$ obsah rovinného útvaru X.

Orientovaný objem a MAF III

Označme $P(X)$ obsah rovinného útvaru X.

Zřejmě $P(X)$ je vždy nezáporné reálné číslo a pro shodné útvary X, Y platí $P(X) = P(Y)$.

Orientovaný objem a MAF III

Označme $P(X)$ obsah rovinného útvaru X.

Zřejmě $P(X)$ je vždy nezáporné reálné číslo a pro shodné útvary X, Y platí $P(X) = P(Y)$.

Obsah je navíc ***aditivní*** funkce, t. j. pro útvary X, Y takové, že $P(X \cap Y) = 0$, platí

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y).$$

Orientovaný objem a MAF III

Označme $P(X)$ obsah rovinného útvaru X.

Zřejmě $P(X)$ je vždy nezáporné reálné číslo a pro shodné útvary X, Y platí $P(X) = P(Y)$.

Obsah je navíc ***aditivní*** funkce, t. j. pro útvary X, Y takové, že $P(X \cap Y) = 0$, platí

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y).$$

Konečně, $P(X) = 0$ pro libovolnou úsečku X.

Orientovaný objem a MAF IV

Obsah rovnoběžníka $\{a\mathbf{u} + b\mathbf{v};\ a, b \in \langle 0, 1\rangle\}$ určeného vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ budeme značit $P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Orientovaný objem a MAF IV

Obsah rovnoběžníka $\{a\mathbf{u} + b\mathbf{v};\ a, b \in \langle 0, 1\rangle\}$ určeného vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ budeme značit $P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Platí pak rovnosti

$$P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = P(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \qquad P(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |c|P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

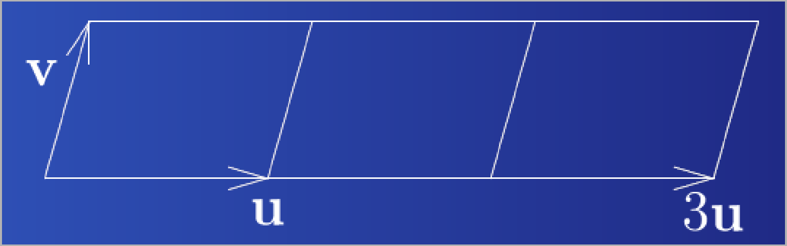
pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{Z}$.

Orientovaný objem a MAF V

Situace pro $c = 3$ je znázorněná na následujícím obrázku.

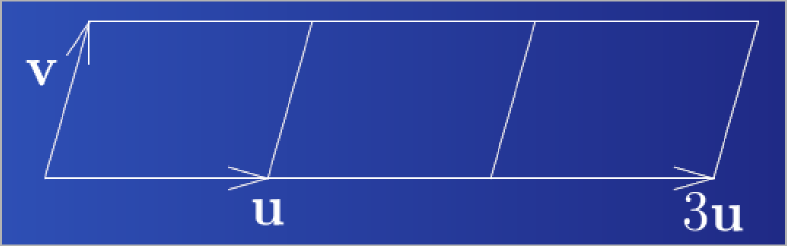
Orientovaný objem a MAF V

Situace pro $c = 3$ je znázorněná na následujícím obrázku.



Orientovaný objem a MAF V

Situace pro $c = 3$ je znázorněná na následujícím obrázku.



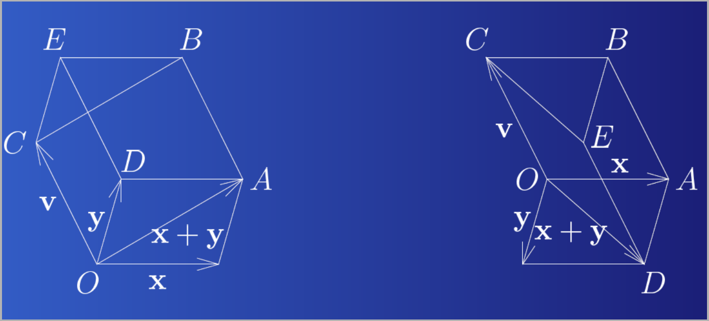
Platnost druhé rovnosti pro všechna $c \in \mathbb{Q}$ plyne z platnosti pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{Z}$. Platnost pre všechna $c \in \mathbb{R}$ plyne ze spojitosti obsahu.

Orientovaný objem a MAF VI

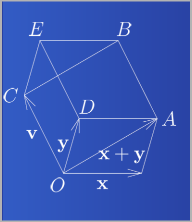
Uvažme následující dva obrázky.

Orientovaný objem a MAF VI

Uvažme následující dva obrázky.

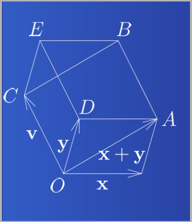


Orientovaný objem a MAF VII



V prvním případě určují vektory $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník $OABC$, vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník $ODEC$ a rovnoběžník vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ je shodný s rovnoběžníkem $DABE$.

Orientovaný objem a MAF VII

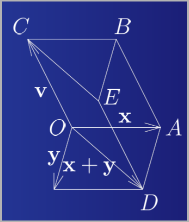


V prvním případě určují vektory $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník $OABC$, vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník $ODEC$ a rovnoběžník vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ je shodný s rovnoběžníkem $DABE$.

Ze shodnosti trojúhelníků OAD, CBE potom na základě uvedených vlastností obsahu vyplývá rovnost

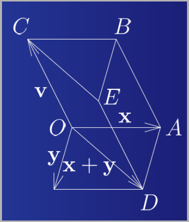
$$P(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{v}) = P(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + P(\mathbf{y}, \mathbf{v})$$

Orientovaný objem a MAF VIII



V druhém případě určují vektory **x**, **v** rovnoběžník *OABC*, vektory $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, **v** rovnoběžník *ODEC* a rovnoběžník vektorů **y**, **v** je shodný s rovnoběžníkem *DABE*.

Orientovaný objem a MAF VIII



V druhém případě určují vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník *OABC*, vektory $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník *ODEC* a rovnoběžník vektorů $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ je shodný s rovnoběžníkem *DABE*.

Ze shodnosti trojúhelníků *ODA*, *CEB* vyplývá $P(\mathbf{x},\mathbf{v}) = P(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{v}) + P(\mathbf{y},\mathbf{v})$, tedy

$$P(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{v}) = P(\mathbf{x},\mathbf{v}) - P(\mathbf{y},\mathbf{v}),$$

což je nepříjemné překvapení, určitě bychome dali přednost stejnému vzorci.

Orientovaný objem a MAF IX

Všimněme si však, že kratší otočení vektoru $\mathbf{y}$ do vektoru $\mathbf{v}$ je orientované proti kratším otočením vektorů $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ do vektoru $\mathbf{v}$.

Orientovaný objem a MAF IX

Všimněme si však, že kratší otočení vektoru $\mathbf{y}$ do vektoru $\mathbf{v}$ je orientované proti kratším otočením vektorů $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ do vektoru $\mathbf{v}$.

V druhém případě by sa nám proto hodilo, aby obsah rovnoběžníka určeného vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ měl z tohoto důvodu opačné znaménko než obsahy rovnoběžníků příslušejících vektorům $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ resp. $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{v}$.

Orientovaný objem a MAF X

Tento cíl můžeme dosáhnou, pokud místo plošného obsahu vektorových rovnoběžníků budeme uvažovat jejich ***orientovaný plošný obsah***, který mění znaménko záměnou pořadí dvou vektorů, tedy může nabývat i záporné hodnoty.

Orientovaný objem a MAF X

Tento cíl můžeme dosáhnou, pokud místo plošného obsahu vektorových rovnoběžníků budeme uvažovat jejich ***orientovaný plošný obsah***, který mění znaménko záměnou pořadí dvou vektorů, tedy může nabývat i záporné hodnoty.

Původní nezáporný plošný obsah potom dostaneme jako absolutní hodnotu orientovaného obsahu.

Orientovaný objem a MAF X

Tento cíl můžeme dosáhnou, pokud místo plošného obsahu vektorových rovnoběžníků budeme uvažovat jejich ***orientovaný plošný obsah***, který mění znaménko záměnou pořadí dvou vektorů, tedy může nabývat i záporné hodnoty.

Původní nezáporný plošný obsah potom dostaneme jako absolutní hodnotu orientovaného obsahu.

Tento přístup nám navíc umožní zbavit se absolutní hodnoty v rovnosti $P(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |c|P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Orientovaný objem a MAF XI

Pokud nahradíme reálná čísla libovolným tělesem K, provedené úvahy nás přivádí k následujícím definicím.

Orientovaný objem a MAF XI

Pokud nahradíme reálná čísla libovolným tělesem K, provedené úvahy nás přivádí k následujícím definicím.

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Orientovaný objem a MAF XI

Pokud nahradíme reálná čísla libovolným tělesem K, provedené úvahy nás přivádí k následujícím definicím.

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Říkáme, že zobrazení $F : V^n \to K$ je

(a) *n-**lineární*** nebo též ***multilineární***,

Orientovaný objem a MAF XI

Pokud nahradíme reálná čísla libovolným tělesem K, provedené úvahy nás přivádí k následujícím definicím.

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Říkáme, že zobrazení $F : V^n \to K$ je

(a) *n-**lineární*** nebo též ***multilineární***,

pokud pro každé $1 \leq j \leq n$ a libovolné vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ přiřazení

$$\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n)$$

Orientovaný objem a MAF XII

definuje lineární zobrazení $V \to K$, t. j. pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a, b \in K$ platí

$$\begin{aligned} F(&\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n) \\ &= aF(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n) \\ &+ bF(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n); \end{aligned}$$

Orientovaný objem a MAF XIII

(b) ***antisymetrické***, pokud pro všechna $1 \leq i < j \leq n$ a všechny vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ platí

$$F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) =$$

$$-F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n).$$

Orientovaný objem a MAF XIV

(c) ***alternující***, pokud pro všechna $1 \leq i < j \leq n$ a všechny vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ z podmínky $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j$ vyplývá

$$F(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_n) = 0.$$

Orientovaný objem a MAF XV

Lemma

Nechť $F : V^n \to K$ je libovolné zobrazení, K těleso, V vektorový prostor nad K.

(a) *Je-li $\mathrm{char} K \neq 2$ a F je antisymetrické, tak F je alternující.*

(b) *Je-li F je multilineární a alternující, je F je antisymetrické.*

Orientovaný objem a MAF XVI

Lemma

Nechť $F : V^n \to K$ je funkce, K těleso, V vektorový prostor nad K, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ a σ je libovolné zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$ do sebe.

Orientovaný objem a MAF XVI

Lemma

Nechť $F : V^n \to K$ *je funkce,* K *těleso,* V *vektorový prostor nad* K*,* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ *a* σ *je libovolné zobrazení množiny* $\{1, \dots, n\}$ *do sebe.*

(a) *Je-li* σ *permutace a* F *je antisymetrické, tak* $F(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$*;*

Orientovaný objem a MAF XVI

Lemma

Nechť $F : V^n \to K$ *je funkce,* K *těleso,* V *vektorový prostor nad* K*,* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ *a* σ *je libovolné zobrazení množiny* $\{1, \ldots, n\}$ *do sebe.*

(a) *Je-li* σ *permutace a* F *je antisymetrické, tak* $F(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$*;*

(b) *Pokud* σ *není permutace a* F *je alternující, tak*

$$F(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{\sigma(n)}) = 0.$$

Orientovaný objem a MAF XVII

Lemma

Nechť $F : V^n \to K$ *je multilineární alternující funkce. Potom pro libovolné* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ *platí:*

Orientovaný objem a MAF XVII

Lemma

Nechť $F : V^n \to K$ je multilineární alternující funkce. Potom pro libovolné $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ platí:

(a) *Připočtením skalárního násobku nějakého z vektorů k jinému vektoru se hodnota $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ nezmění, t. j. pro libovolné $c \in K$ a $i, j \le n$ platí*

$$\begin{aligned} &F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j + c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) \\ &\qquad = F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_n). \end{aligned}$$

Orientovaný objem a MAF XVII

(b) Pokud jsou vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárně závislé, tak $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$.

Orientovaný objem a MAF XVII

(b) Pokud jsou vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineárně závislé, tak $F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0$.

Jak vypadají všechny bilineární (t. j. 2-lineární) alternující funkce $F : K^2 \times K^2 \to K^2$ nad tělesem K?

Orientovaný objem a MAF XVIII

Zvolme libovolné vektory $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ z K^2.

Orientovaný objem a MAF XVIII

Zvolme libovolné vektory $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ z K^2.

Pokud dvakrát po sobě využijeme bilinearitu a na závěr alternaci a antisymetrii F, postupně dostaneme

Orientovaný objem a MAF XVIII

Zvolme libovolné vektory $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ z K^2.

Pokud dvakrát po sobě využijeme bilinearitu a na závěr alternaci a antisymetrii F, postupně dostaneme

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= F(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{v}) = u_1 F(\mathbf{e}_1,\mathbf{v}) + u_2 F(\mathbf{e}_2,\mathbf{v}) \\
&= u_1 F(\mathbf{e}_1,\ v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) + u_2 F(\mathbf{e}_2,\ v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\
&= u_1 v_1 F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) + u_1 v_2 F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) \\
&\quad + u_2 v_1 F(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) + u_2 v_2 F(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) \\
&= F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\ \cdot (u_1 v_2 - u_2 v_1) = F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

Orientovaný objem a MAF XIX

kde výraz

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

je determinant matice

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}.$$

Orientovaný objem a MAF XX

Podobným způsobem můžeme odvodit tvar libovolné n-lineární alternující funkce $F : K^{n \times n} \to K$.

Orientovaný objem a MAF XX

Podobným způsobem můžeme odvodit tvar libovolné n-lineární alternující funkce $F : K^{n\times n} \to K$.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ je matice se sloupci

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = a_{1j}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{nj}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i .$$

Orientovaný objem a MAF XXI

S využitím n-linearity F pro každý z n sloupců matice **A** můžeme výraz $F(\mathbf{A})$ postupně roznásobit, čímž dostaneme součet n^n členů tvaru

$$a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n} F(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}),$$

z kterých každý odpovídá právě jednomu zobrazení σ množiny $\{1, \dots, n\}$ do sebe.

Orientovaný objem a MAF XXII

Podle předchozího lemmatu o nulové hodnotě alternující funkce sčítance příslušející zobrazením $\sigma \notin \mathcal{S}_n$ jsou všechny rovné 0

Orientovaný objem a MAF XXII

Podle předchozího lemmatu o nulové hodnotě alternující funkce sčítance příslušející zobrazením $\sigma \notin \mathcal{S}_n$ jsou všechny rovné 0

a pro $\sigma \in \mathcal{S}_n$ platí

$$F(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

Orientovaný objem a MAF XXII

Podle předchozího lemmatu o nulové hodnotě alternující funkce sčítance příslušející zobrazením $\sigma \notin \mathcal{S}_n$ jsou všechny rovné 0

a pro $\sigma \in \mathcal{S}_n$ platí

$$F(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Na závěr tak dostáváme

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}) &= F(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n} \\ &= F(\mathbf{I}_n) \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n}, \end{aligned}$$

kde příslušná suma obsahuje $n!$ sčítanců, jeden pro každou permutaci $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Základní vlastnosti determinantu I

Determinantem čtvercové matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ nazýváme výraz

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n}.$$

Základní vlastnosti determinantu II

Pokud nehrozí záměna s absolutní hodnotou, používáme též označení $|\mathbf{A}|$.

Základní vlastnosti determinantu II

Pokud nehrozí záměna s absolutní hodnotou, používáme též označení $|\mathbf{A}|$.

Determinant čtvercové matice řádu n budeme nazývat ***determinant řádu*** n.

Základní vlastnosti determinantu II

Pokud nehrozí záměna s absolutní hodnotou, používame též označení $|\mathbf{A}|$.

Determinant čtvercové matice řádu n budeme nazývat ***determinant řádu*** n.

Pro matici $(a_{ij}) \in K^{3\times 3}$ dostáváme vzorec

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23},$$

známý jako ***Sarrusovo pravidlo***.

Základní vlastnosti determinantu III

Tvrzení

Determinant transponované matice sa rovná determinantu původní matice, t. j.

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$.

Základní vlastnosti determinantu III

Tvrzení

Determinant transponované matice sa rovná determinantu původní matice, t. j.

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$.

Všechny výsledky o determinantech matic si zachovají svou platnost, pokud v nich každý výskyt slova "sloupec" nahradíme slovem "řádek" a naopak.

Základní vlastnosti determinantu IV

Tvrzení

Nechť $1 \leq m < n$ *a* $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *je bloková matice tvaru*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{B} \in K^{m\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m\times(n-m)}$ *a* $\mathbf{D} \in K^{(n-m)\times(n-m)}$. *Potom*

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{D}.$$

Základní vlastnosti determinantu V

(1) Pokud $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ jsou čtvercové matice, tak

$$\det \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k) = \det \mathbf{A}_1 \cdot \ldots \cdot \det \mathbf{A}_k.$$

(2) Matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ se nazývá ***horní (dolní) trojúhelníková matice***, pokud $a_{ij} = 0$ pro $i < j$ (resp. pre $i > j$). Pro horní i dolní trojúhelníkové matice (tedy i diagonální) platí

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \ldots a_{nn},$$

t. j. determinant takové matice je součinem jejích diagonálních prvků.

Charakterizace determinantu I

Věta

Determinant řádu n je n-lineární alternující funkce $K^{n\times n} \to K$ sloupců matice.
Navíc, pro každý skalár $c \in K$ existuje jediné multilineární alternující zobrazení $F : K^{n\times n} \to K$ sloupců matice tak, že $F(\mathbf{I}_n) = c$.
Toto F je dané předpisem

$$F(\mathbf{A}) = c \det \mathbf{A}.$$

Charakterizace determinantu II

Determinant $\det : K^{n \times n} \to K$ je jednoznačně určený jako n-lineární alternující funkce sloupců matice tak, že

$$\det \mathbf{I}_n = \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

Charakterizace determinantu II

Determinant $\det : K^{n\times n} \to K$ je jednoznačně určený jako n-lineární alternující funkce sloupců matice tak, že

$$\det \mathbf{I}_n = \det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

Tato rovnost koresponduje s přirozenou volbou jednotky orientovaného n-rozměrného objemu v K^n – je jí orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ (v tomto pořadí).

Charakterizace determinantu III

Věta

*(**Cauchyho věta o determinantu součinu matic**)*
Pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *platí*

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B};$$

Charakterizace determinantu III

Věta

*(**Cauchyho věta o determinantu součinu matic**)*
Pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *platí*

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B};$$

t. j. determinant součinu matic se rovná součinu jejich determinantů.

Charakterizace determinantu IV

Věta

Čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *je regulární právě tehdy, když* $\det \mathbf{A} \neq 0$. *V tomto*

Charakterizace determinantu IV

Věta

Čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *je regulární právě tehdy, když* $\det \mathbf{A} \neq 0$. *V tomto případě*

$$\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = (\det \mathbf{A})^{-1}.$$

Laplaceův rozvoj determinantu I

Pro $n = 0, 1$ není co dokazovat. Budeme v dalším předpokládat, že $n \geq 2$.

Důkaz věty o charakterizaci determinantu Nejprve dokážeme, že determinant je alternující funkce.
Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je taková matice, že

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{A}) = \mathbf{s}_j(\mathbf{A}))$$

pro nějaké $i < j$.

Laplaceův rozvoj determinantu II

Označme $\tau \in \mathcal{S}_n$ transpozici, která zamění prvky i a j (a ostatní prvky ponechá na místě).

Laplaceův rozvoj determinantu II

Označme $\tau \in \mathcal{S}_n$ transpozici, která zamění prvky i a j (a ostatní prvky ponechá na místě).

Pro všechna $k, l \leq n$ platí

$$a_{kl} = a_{\tau(k)l}.$$

Laplaceův rozvoj determinantu II

Označme $\tau \in \mathcal{S}_n$ transpozici, která zamění prvky i a j (a ostatní prvky ponechá na místě).

Pro všechna $k, l \leq n$ platí

$$a_{kl} = a_{\tau(k)l}.$$

Množinu všech sudých permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ budeme označovat jako $\tau \in \mathcal{A}_n$.

Laplaceův rozvoj determinantu II

Označme $\tau \in \mathcal{S}_n$ transpozici, která zamění prvky i a j (a ostatní prvky ponechá na místě).

Pro všechna $k, l \leq n$ platí

$$a_{kl} = a_{\tau(k)l}.$$

Množinu všech sudých permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ budeme označovat jako $\tau \in \mathcal{A}_n$.

Zřejmě přiřazením $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ je daná bijekce $\mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$.

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$\det \mathbf{A} = \quad \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A}))$$

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n}
\end{aligned}
$$

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \\
&= \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} \\
&= \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n - \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n}
\end{aligned}
$$

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} = &\ \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \\
= &\ \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} \\
= &\ \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n - \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} \\
= &\ \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{(\tau \circ \sigma)(1)\,1} \ldots a_{(\tau \circ \sigma)(n)\,n}
\end{aligned}
$$

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n - \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{(\tau\circ\sigma)(1)\,1} \ldots a_{(\tau\circ\sigma)(n)\,n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \left(a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} - a_{(\tau\circ\sigma)(1)\,1} \ldots a_{(\tau\circ\sigma)(n)\,n}\right)
\end{aligned}
$$

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \\
&= \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n} \\
&= \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n} - \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n - \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n} \\
&= \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n} - \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{(\tau\circ\sigma)(1)\,1} \dots a_{(\tau\circ\sigma)(n)\,n} \\
&= \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \left(a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n} - a_{(\tau\circ\sigma)(1)\,1} \dots a_{(\tau\circ\sigma)(n)\,n} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Laplaceův rozvoj determinantu IV

Dokážeme, že $\det \mathbf{A}$ je lineární funkce j-tého sloupce $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T$.

Laplaceův rozvoj determinantu IV

Dokážeme, že $\det \mathbf{A}$ je lineární funkce j-tého sloupce $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T$.

Pro $i \leq n$ označme $\mathcal{S}_n(i,j) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n;\ i = \sigma(j)\}$ a položme

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n(i,j)} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(j-1)\,j-1} a_{\sigma(j+1)\,j+1} \ldots a_{\sigma(n)\,n}.$$

Laplaceův rozvoj determinantu IV

Dokážeme, že det **A** je lineární funkce j-tého sloupce $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T$.

Pro $i \leq n$ označme $\mathcal{S}_n(i,j) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n;\ i = \sigma(j)\}$ a položme

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n(i,j)} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(j-1)\,j-1} a_{\sigma(j+1)\,j+1} \ldots a_{\sigma(n)\,n}.$$

Potom zřejmě

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} a_{ij} = (\tilde{a}_{1j}, \ldots, \tilde{a}_{nj}) \cdot (a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T,$$

což dokazuje linearitu.

Laplaceův rozvoj determinantu V

Determinant je rovněž multilineární alternující funkce řádků matice a (protože $\sigma \in \mathcal{S}_n(i,j) \Leftrightarrow \sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n(j,i)$) pro i-tý řádek $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ matice $\mathbf{A}$ její determinant má rozvoj

Laplaceův rozvoj determinantu V

Determinant je rovněž multilineární alternující funkce řádků matice a (protože $\sigma \in \mathcal{S}_n(i,j) \Leftrightarrow \sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n(j,i)$) pro i-tý řádek $(a_{i1},\ldots,a_{in})$ matice $\mathbf{A}$ její determinant má rozvoj

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij} \\ &= (a_{i1},\ldots,a_{in})\cdot(\tilde{a}_{i1},\ldots,\tilde{a}_{in})^T.\end{aligned}$$

se stejně definovanými koeficienty $\tilde{a}_{ij}$.

Laplaceův rozvoj determinantu VI

Uvedený prvek $\tilde{a}_{ij}$ nazývame ***algebraickým doplňkem*** prvku a_{ij} v matici **A**.

Laplaceův rozvoj determinantu VI

Uvedený prvek $\tilde{a}_{ij}$ nazýváme ***algebraickým doplňkem*** prvku a_{ij} v matici $\mathbf{A}$.

Matici $\widetilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$ nazýváme ***maticí algebraických doplňků*** k matici $\mathbf{A}$.

Laplaceův rozvoj determinantu VI

Uvedený prvek $\tilde{a}_{ij}$ nazýváme ***algebraickým doplňkem*** prvku a_{ij} v matici $\mathbf{A}$.

Matici $\widetilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{n \times n}$ nazýváme ***maticí algebraických doplňků*** k matici $\mathbf{A}$.

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}_{ij}$ označuje matici řádu $n - 1$, která vznikne z matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Laplaceův rozvoj determinantu VI

Uvedený prvek $\tilde{a}_{ij}$ nazývame ***algebraickým doplňkem*** prvku a_{ij} v matici $\mathbf{A}$.

Matici $\widetilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$ nazýváme ***maticí algebraických doplňků*** k matici $\mathbf{A}$.

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}_{ij}$ označuje matici řádu $n-1$, která vznikne z matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Potom

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|.$$

Laplaceův rozvoj determinantu VII

Determinanty matic, které vzniknou vynecháním některých řádků a stejného počtu sloupců z matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, nazýváme jejími ***minory***, případně ***subdeterminanty*** determinantu $|\mathbf{A}|$.

Laplaceův rozvoj determinantu VIII

Věta

*(**Laplaceova věta o rozvoji determinantu**)*
Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, $1 \leq k, l \leq n$. *Potom*

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \, |\mathbf{A}_{kj}| \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} |\mathbf{A}_{il}| \, a_{il}. \end{aligned}$$

Laplaceův rozvoj determinantu VIII

Věta

*(**Laplaceova věta o rozvoji determinantu**)*
Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, $1 \leq k, l \leq n$. *Potom*

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \, |\mathbf{A}_{kj}| \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} |\mathbf{A}_{il}| \, a_{il}. \end{aligned}$$

Uvedené součty nazýváme ***Laplaceovými rozvoji*** determinantu $|\mathbf{A}|$ – první podle k-tého řádku, druhý podle l-tého sloupce.

Výpočet determinantu I

Každý determinant je multilineární alternující funkcí jak řádků tak i sloupců matice.

Pravidla

(0) Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu jejích diagonálních prvků.

Výpočet determinantu II

(1) Výměnou pořadí dvou řádků nebo sloupců matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.

Výpočet determinantu II

(1) Výměnou pořadí dvou řádků nebo sloupců matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.

(2) Vynásobením nějakého řádku nebo sloupce matice nenulovým skalárem $c \in K$ sa její determinant změní na c-násobek původní hodnoty.

Výpočet determinantu II

(1) Výměnou pořadí dvou řádků nebo sloupců matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.

(2) Vynásobením nějakého řádku nebo sloupce matice nenulovým skalárem $c \in K$ sa její determinant změní na c-násobek původní hodnoty.

(3) Pripočtením skalárního násobku nějakého řádku matice k jejímu jinému řádku, resp. násobku nějakého jejího sloupce k jinému sloupci se hodnota jejího determinantu nezmění.

Výpočet determinantu III

(4) Pokud matice obsahuje nulový řádek nebo sloupec, případně dva stejné řádky nebo sloupce, tak její determinant je 0.

Výpočet determinantu III

(4) Pokud matice obsahuje nulový řádek nebo sloupec, případně dva stejné řádky nebo sloupce, tak její determinant je 0.

(5) Nechť všechny prvky i-tého řádku případně j-tého sloupce matice $\mathbf{A}$ s výjimkou prvku a_{ij} jsou rovné 0. Potom

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} \, |\mathbf{A}_{ij}|.$$

Výpočet determinantu III

(4) Pokud matice obsahuje nulový řádek nebo sloupec, případně dva stejné řádky nebo sloupce, tak její determinant je 0.

(5) Nechť všechny prvky i-tého řádku případně j-tého sloupce matice $\mathbf{A}$ s výjimkou prvku a_{ij} jsou rovné 0. Potom

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} \, |\mathbf{A}_{ij}|.$$

(6) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Výpočet determinantu IV

Vypočítáme tzv. ***Vandermondův determinant*** řádu n

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Výpočet determinantu V

Odečtením prvního řádku od všech ostatních řádků dostaneme

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Výpočet determinantu VI

Následným rozvojem podle prvního sloupce dostaneme

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Výpočet determinantu VI

Následným rozvojem podle prvního sloupce dostaneme

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Odečtěme nyní od každého sloupce počínaje druhým x_1-násobek předcházejícího sloupce.

Výpočet determinantu VII

V determinantu, který získáme, je na místě (i, k), kde $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-1$, prvek

$$(x_{i+1}^k - x_1^k) - x_1(x_{i+1}^{k-1} - x_1^{k-1}) = x_{i+1}^{k-1}(x_{i+1} - x_1).$$

Výpočet determinantu VII

V determinantu, který získáme, je na místě (i, k), kde $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-1$, prvek

$$(x_{i+1}^k - x_1^k) - x_1(x_{i+1}^{k-1} - x_1^{k-1}) = x_{i+1}^{k-1}(x_{i+1} - x_1).$$

Pokud vytkneme z i-tého řádku činitel $x_{i+1} - x_1$, postupně nám vyjde

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left| \begin{array}{cccc} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ & & & \\ & & & \end{array} \right.$$

Výpočet determinantu VII

V determinantu, který získáme, je na místě (i, k), kde $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-1$, prvek

$$(x_{i+1}^k - x_1^k) - x_1(x_{i+1}^{k-1} - x_1^{k-1}) = x_{i+1}^{k-1}(x_{i+1} - x_1).$$

Pokud vytkneme z i-tého řádku činitel $x_{i+1} - x_1$, postupně nám vyjde

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad = \left| \begin{matrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{matrix} \right.$$

Výpočet determinantu VII

V determinantu, který získáme, je na místě (i, k), kde $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-1$, prvek

$$(x_{i+1}^k - x_1^k) - x_1(x_{i+1}^{k-1} - x_1^{k-1}) = x_{i+1}^{k-1}(x_{i+1} - x_1).$$

Pokud vytkneme z i-tého řádku činitel $x_{i+1} - x_1$, postupně nám vyjde

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix},$$

Výpočet determinantu VIII

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad = \quad (x_2 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \left| \begin{matrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \right.$$

Výpočet determinantu VIII

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)\ldots(x_n - x_1)\left|\begin{array}{cccc} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \end{array}\right.$$

Výpočet determinantu VIII

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu VIII

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (x_2 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)\ldots(x_n - x_1)\,\mathrm{VD}_{n-1}(x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}
$$

Podobně

$$
\mathrm{VD}_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) = (x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_2)\,\mathrm{VD}_{n-2}(x_3, \ldots, x_n),
$$

atd.

Výpočet determinantu IX

Protože zejména $\mathrm{VD}_1(x_n) = 1$, dostaneme výsledek

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i),$$

kde symbolom $\prod$ označujeme součin príslušných činitelů.

Inverzní matice a Cramerovo prav. I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ a $1 \leq i, k \leq n$ jsou různé indexy. Označme $\mathbf{B}$ matici, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ nahrazením jejího k-tého řádku i-tým řádkem.

Potom matice $\mathbf{B}$ má (aspoň) dva řádky stejné, a to i-tý a k-tý, proto $|\mathbf{B}| = 0$.

Na druhé straně se matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ liší nanejvýš v k-tém řádku, proto $\mathbf{A}_{kj} = \mathbf{B}_{kj}$ pro každé $1 \leq j \leq n$.

Inverzní matice a Cramerovo prav. II

Z tohoto důvodu jsou algebraické doplňky odpovídajících si prvků k-tých řádků obou matic stejné:

$$\tilde{b}_{kj} = (-1)^{k+j}|\mathbf{B}_{kj}| = (-1)^{k+j}|\mathbf{A}_{kj}| = \tilde{a}_{kj}.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. II

Z tohoto důvodu jsou algebraické doplňky odpovídajících si prvků k-tých řádků obou matic stejné:

$$\tilde{b}_{kj} = (-1)^{k+j}|\mathbf{B}_{kj}| = (-1)^{k+j}|\mathbf{A}_{kj}| = \tilde{a}_{kj}.$$

Rozvineme-li determinant matice **B** podle jejího k-tého řádku, dostaneme

$$\det \mathbf{B} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\tilde{b}_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{kj} = 0.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. III

Spojení této rovnosti s Laplaceovým rozvojem determinantu matice **A** podle *k*-tého řádku dává

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{kj} \quad = \quad \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{r}_k\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right)^T$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. III

Spojení této rovnosti s Laplaceovým rozvojem determinantu matice **A** podle k-tého řádku dává

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{kj} &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{r}_k\big(\widetilde{\mathbf{A}}\big)^T \\
&= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k\big(\widetilde{\mathbf{A}}^T\big) = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & \text{pro } i = k, \\ & \end{cases}
\end{aligned}$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. III

Spojení této rovnosti s Laplaceovým rozvojem determinantu matice **A** podle k-tého řádku dává

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{kj} &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{r}_k\big(\widetilde{\mathbf{A}}\big)^T \\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k\big(\widetilde{\mathbf{A}}^T\big) = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & \text{pro } i = k, \\ 0, & \text{pro } i \neq k. \end{cases}\end{aligned}$$

Jinak řečeno,

$$\mathbf{A} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}^T = |\mathbf{A}|\, \mathbf{I}_n.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. IV

Inverzní matici k regulární čtvercové matici $\mathbf{A}$ potom dostaneme tak, že transponovanou matici jejich algebraických doplňků vydělíme determinantem $|\mathbf{A}|$.

Inverzní matice a Cramerovo prav. IV

Inverzní matici k regulární čtvercové matici $\mathbf{A}$ potom dostaneme tak, že transponovanou matici jejich algebraických doplňků vydělíme determinantem $|\mathbf{A}|$.

Věta

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ *je regulární matice. Potom*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \widetilde{\mathbf{A}}^T .$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. V

Příklad

Najděme inverzní matici k reálné matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. V

Příklad

Najděme inverzní matici k reálné matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Její determinant a matici algebraických doplňků vypočteme snadno:

$$|\mathbf{A}| = 1 \cdot (-3) - 5 \cdot (-2) = 7, \qquad \widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. VI

Proto

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. VII

Věta

(***Cramerovo pravidlo***)

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ *je regulární matice,* $\mathbf{b} \in K^n$ *a pro* $1 \leq j \leq n$ *nechť* $\mathbf{A}_j^{\mathbf{b}}$ *označuje matici, která vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *nahrazením jejího* j*-tého sloupce sloupcovým vektorem* $\mathbf{b}$*.*

Inverzní matice a Cramerovo prav. VII

Věta

*(**Cramerovo pravidlo**)*
Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *je regulární matice,* $\mathbf{b} \in K^n$ *a pro* $1 \le j \le n$ *nechť* $\mathbf{A}_j^{\mathbf{b}}$ *označuje matici, která vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *nahrazením jejího* j*-tého sloupce sloupcovým vektorem* $\mathbf{b}$*.*

Potom soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má jediné řešení*

$$\mathbf{x} = \left(\frac{|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \frac{|\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \dots, \frac{|\mathbf{A}_n^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|} \right)^T .$$

11. EUKLIDOVSKÉ PROSTORY

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

22. prosince 2006

Abstrakt přednášky

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Abstrakt přednášky

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Při našich dosavadních úvahách o vektorových prostorech jsme pomocí operací sčítání vektorů a násobení čísla s vektorem vyšetřovali pojmy jako byla lineární závislost a nezávislost vektorů, generovatelnost, souřadnice vektoru, atd.

Abstrakt přednášky

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Při našich dosavadních úvahách o vektorových prostorech jsme pomocí operací sčítání vektorů a násobení čísla s vektorem vyšetřovali pojmy jako byla lineární závislost a nezávislost vektorů, generovatelnost, souřadnice vektoru, atd.

Prozatím jsme však neměli možnost ve vektorových prostorech "měřit", tzn. zjišťovat a porovnávat délky vektorů, resp. odchylky (tj. velikosti úhlů), což jsou pojmy, které hrají podstatnou roli např. v geometrii.

Abstrakt přednášky

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Při našich dosavadních úvahách o vektorových prostorech jsme pomocí operací sčítání vektorů a násobení čísla s vektorem vyšetřovali pojmy jako byla lineární závislost a nezávislost vektorů, generovatelnost, souřadnice vektoru, atd.

Prozatím jsme však neměli možnost ve vektorových prostorech "měřit", tzn. zjišťovat a porovnávat délky vektorů, resp. odchylky (tj. velikosti úhlů), což jsou pojmy, které hrají podstatnou roli např. v geometrii.

Ukazuje se, že celou základní geometrickou strukturu, včetně délek a úhlů, můžeme odvodit z pojmu skalárního součinu.

Skalární součin I

Skalární součin

Skalární nebo též *vnitřním součinem* na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ rozumíme binární operaci $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z $\mathbf{V}$ přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{V}$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \quad \text{(aditivita)},$$

$$\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \text{(homogenita)},$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \quad \text{(symetrie)},$$

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \quad \text{(kladná definitnost)}.$$

Skalární součin II

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu nám dává jeho linearitu jako funkci první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Skalární součin II

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu nám dává jeho linearitu jako funkci první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Ze symetrie plyne i linearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{V}$ a $c \in \mathbb{R}$.

Skalární součin II

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu nám dává jeho linearitu jako funkci první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Ze symetrie plyne i linearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\
\langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,
\end{aligned}
$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{V}$ a $c \in \mathbb{R}$.

Z (bi)linearity plyne podmínka kladné definitnosti

$$
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \;\&\; \big(\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{0} \big)
$$

pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Skalární součin III

První část této podmínky nám umožňuje definovat *normu* neboli *délku vektoru* $\mathbf{x}$ rovností

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Skalární součin III

První část této podmínky nám umožňuje definovat *normu* neboli *délku vektoru* $\mathbf{x}$ rovností

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Euklidovským prostorem nazýváme libovolný *konečně rozměrný* reálný vektorový prostor se skalárním součinem.

Skalární součin IV

Příklad

Ze střední školy v rámci analytické geometrie, případně v rámci fyziky, jsme se potkali s skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ *v rovině* $\mathbb{R}^2$ *a se skalárním součinem* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ *v prostoru* $\mathbb{R}^3$*.*

Skalární součin IV

Příklad

Ze střední školy v rámci analytické geometrie, případně v rámci fyziky, jsme se potkali s skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ v rovině $\mathbb{R}^2$ a se skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Lehce se můžeme přesvědčit, že stejný vzoreček funguje pro každé n, t. j. pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ je předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Skalární součin IV

Příklad

Ze střední školy v rámci analytické geometrie, případně v rámci fyziky, jsme se potkali s skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ *v rovině* $\mathbb{R}^2$ *a se skalárním součinem* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ *v prostoru* $\mathbb{R}^3$.

Lehce se můžeme přesvědčit, že stejný vzoreček funguje pro každé n, t. j. pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ *je předpisem*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

definovaný skalární součin na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$.

Skalární součin IV

Příklad

Ze střední školy v rámci analytické geometrie, případně v rámci fyziky, jsme se potkali s skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ *v rovině* $\mathbb{R}^2$ *a se skalárním součinem* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ *v prostoru* $\mathbb{R}^3$*.*

Lehce se můžeme přesvědčit, že stejný vzoreček funguje pro každé n, t. j. pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ *je předpisem*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

definovaný skalární součin na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$*. V případě řádkového prostoru* $\mathbb{R}^n$ *máme*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Skalární součin V

Takovýto skalární součin budeme nazývat *standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$.

Skalární součin V

Takovýto skalární součin budeme nazývat *standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$.

Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Skalární součin V

Takovýto skalární součin budeme nazývat *standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$.

Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Délka vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Skalární součin V

Takovýto skalární součin budeme nazývat *standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$.

Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Délka vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

V rámci analytické geometrie se pro nenulové vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ dokazuje známý vztah

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \alpha,$$

který spojuje standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ či v $\mathbb{R}^3$ s délkou příslušných vektorů a jimi sevřeným úhlem α.

Skalární součin VI

Příklad

Položíme-li

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 2u_2 v_1 + 3u_2 v_2,$$

pak jsou opět splněny axiomy skalárního součinu, tzn. $\mathbb{R}^2$ *s tímto skalárním součinem je euklidovským prostorem.*

Skalární součin VI

Příklad

Položíme-li

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 3u_2v_2,$$

pak jsou opět splněny axiomy skalárního součinu, tzn. $\mathbb{R}^2$ *s tímto skalárním součinem je euklidovským prostorem.*

Srovnáme-li výše uvedený skalární součin se standardním skalárním součinem, je vidět, že i když se v obou případech jedná o tentýž vektorový prostor $\mathbb{R}^2$*, jsou definované skalární součiny různé, a tedy různé jsou pak i pomocí nich získané euklidovské prostory.*

Skalární součin VII

Každý podprostor vektorového prostoru V nad T je sám vektorovým prostorem nad T. Je-li specielně V euklidovským prostorem, tzn. je reálný s definovaným skalárním součinem, pak zřejmě axiomy skalárního součinu budou jistě splněny i v jeho libovolném (vektorovém) podprostoru.

Skalární součin VII

Každý podprostor vektorového prostoru V nad T je sám vektorovým prostorem nad T. Je-li specielně V euklidovským prostorem, tzn. je reálný s definovaným skalárním součinem, pak zřejmě axiomy skalárního součinu budou jistě splněny i v jeho libovolném (vektorovém) podprostoru.

To znamená, že každý (vektorový) podprostor euklidovského prostoru V je sám euklidovským prostorem. Budeme jej stručně nazývat *podprostor euklidovského prostoru*.

Skalární součin VIII

Příklad

Nechť $V = \mathbf{R}_n[x]$ *a nechť* $\mathbf{f} = f(x), \mathbf{g} = g(x) \in \mathbf{R}_n[x]$ *jsou libovolné vektory – polynomy. Položíme-li*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, \mathbf{dx},$$

pak rozepsáním (užitím základních vět o integrování známých z analýzy) se ověří platnost axiomů skalárního součinu.

Skalární součin VIII

Příklad

Nechť $V = \mathbf{R}_n[x]$ *a nechť* $\mathbf{f} = f(x), \mathbf{g} = g(x) \in \mathbf{R}_n[x]$ *jsou libovolné vektory – polynomy. Položíme-li*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, \mathbf{dx},$$

pak rozepsáním (užitím základních vět o integrování známých z analýzy) se ověří platnost axiomů skalárního součinu.

Tedy $\mathbb{R}_n[x]$ *s tímto skalárním součinem je euklidovský prostor.*

Skalární součin IX

Věta

V každém reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ *lze definovat skalární součin.*

Skalární součin IX

Věta

V každém reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ *lze definovat skalární součin.*

Můžeme tedy prohlásit, že z každého reálného vektorového prostoru lze utvořit euklidovský prostor, obecně však nikoliv jediným způsobem.

Skalární součin IX

Věta

Nechť **V** *je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,

Skalární součin IX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
2. $\langle \mathbf{u}, r \cdot \mathbf{v} \rangle = r \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,

Skalární součin IX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
2. $\langle \mathbf{u}, r \cdot \mathbf{v} \rangle = r \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,
3. $\langle \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \mathbf{u}_i \right), \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \cdot \mathbf{v}_j \right) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i r_j \cdot \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \rangle$,

Skalární součin IX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
2. $\langle \mathbf{u}, r \cdot \mathbf{v} \rangle = r \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,
3. $\langle \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \mathbf{u}_i \right), \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \cdot \mathbf{v}_j \right) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i r_j \cdot \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \rangle$,
4. $\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = 0$,

Skalární součin IX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
2. $\langle \mathbf{u}, r \cdot \mathbf{v} \rangle = r \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,
3. $\langle \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \mathbf{u}_i \right), \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \cdot \mathbf{v}_j \right) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i r_j \cdot \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \rangle$,
4. $\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = 0$,
5. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Skalární součin IX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
2. $\langle \mathbf{u}, r \cdot \mathbf{v} \rangle = r \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,
3. $\langle \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \mathbf{u}_i \right), \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \cdot \mathbf{v}_j \right) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i r_j \cdot \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \rangle$,
4. $\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = 0$,
5. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u} = \mathbf{0}$

pro $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \in \mathbf{V}$, $r, p_i, r_j \in \mathbb{R}$ *libovolná.*

Skalární součin X

Definice

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$*. Pak nezáporné reálné číslo:*

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

se nazývá délka nebo též velikost či norma vektoru $\mathbf{u}$*.*

Skalární součin X

Definice

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$*. Pak nezáporné reálné číslo:*

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

se nazývá délka nebo též velikost či norma vektoru $\mathbf{u}$*.*

Je-li $\|\mathbf{u}\| = 1$, pak říkáme, že *vektor* $\mathbf{u}$ *je normovaný*.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova nerovnost

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je libovolná uspořádaná k-tice vektorů ve vektorovém prostoru **V** se skalárním součinem. Téměř všechny podstatné informace o těchto vektorech jsou ukryté v tzv. *Gramově matici*

$$\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = \big(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle\big)_{k \times k}$$

vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova nerovnost II

Determinant Gramovy matice

$$\begin{aligned}\det \mathbf{G}(\alpha) &= |\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| \\ &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle \end{vmatrix}\end{aligned}$$

se nazývá *Gramovým determinantem* vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. III

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou libovolné vektory ve vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem. Potom*

(a) $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je symetrická matice tak, že* $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \geq 0$ *pro libovolný vektor* $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$*;*

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. III

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou libovolné vektory ve vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem. Potom*

(a) $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je symetrická matice tak, že* $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \geq 0$ *pro libovolný vektor* $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$*;*

(b) vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je* $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T > 0$ *pro libovolný nenulový vektor* $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$*.*

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IV

Důkaz. Označme $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$.
(a) Symetrie matice $\mathbf{G}$ je přímým důsledkem symetrie skalárního součinu.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IV

Důkaz. Označme $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$.
(a) Symetrie matice $\mathbf{G}$ je přímým důsledkem symetrie skalárního součinu.

Zbývá dokázat, že pro libovolný vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \geq 0$.
Položme $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$. Potom z bilinearity a kladné definitnosti skalárního součinu vyplývá

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_i c_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IV

Důkaz. Označme $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$.
(a) Symetrie matice $\mathbf{G}$ je přímým důsledkem symetrie skalárního součinu.

Zbývá dokázat, že pro libovolný vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \geq 0$.
Položme $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$. Potom z bilinearity a kladné definitnosti skalárního součinu vyplývá

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_i c_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{u}_j \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. V

(b) Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé a předpokládejme, že existuje nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ tak, že $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T = 0$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. V

(b) Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé a předpokládejme, že existuje nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ tak, že $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T = 0$.
Položme $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$. Pak

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_i c_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \quad = \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. V

(b) Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé a předpokládejme, že existuje nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ tak, že $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T = 0$.
Položme $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$. Pak

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_i c_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \quad = \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Protože $\langle -, - \rangle$ je skalární součin, je nutně $v = 0$ tj. z lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ máme, že $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k) = 0$. Spor.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VI

Nechť $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T > 0$ pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VI

Nechť $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T > 0$ pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$.

Jsou-li $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, tak v $\mathbb{R}^n$ existuje vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \neq \mathbf{0}$ takový, že $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VI

Nechť $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T > 0$ pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$.

Jsou-li $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, tak v $\mathbb{R}^n$ existuje vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \neq \mathbf{0}$ takový, že $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.

Potom podle (a)

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = 0,$$

spor. $\blacksquare$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VII

Důsledek

Pro libovolné $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ *platí*

$$|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| \geq 0.$$

Přitom $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$ *právě tehdy, když vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně závislé.*

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VII

Důsledek

Pro libovolné $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ *platí*

$$|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| \geq 0.$$

Přitom $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$ *právě tehdy, když vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně závislé.*

Důkaz. Každá symetrická matice lze zapsat ve tvaru $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je regulární matice a $\mathbf{D}$ je diagonální matice.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VII

Důsledek

Pro libovolné $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ *platí*

$$|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| \geq 0.$$

Přitom $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$ *právě tehdy, když vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně závislé.*

Důkaz. Každá symetrická matice lze zapsat ve tvaru $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je regulární matice a $\mathbf{D}$ je diagonální matice.

Protože $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \geq 0$ pro libovolný vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$, má matice $\mathbf{D}$ na diagonále nezáporné prvky.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VIII

Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, jsou nutně i lineárně závislé sloupce Gramovy matice a tedy $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VIII

Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, jsou nutně i lineárně závislé sloupce Gramovy matice a tedy $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)| = 0$.

Obráceně, je-li $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)| = 0$, jsou nutně lineárně závislé sloupce Gramovy matice. Nechť například i-tý sloupec Gramovy matice je lineární kombinací ostatních.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VIII

Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, jsou nutně i lineárně závislé sloupce Gramovy matice a tedy $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$.

Obráceně, je-li $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$, jsou nutně lineárně závislé sloupce Gramovy matice. Nechť například i-tý sloupec Gramovy matice je lineární kombinací ostatních.

Tedy $\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha)) = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{s}_j(\mathbf{G}(\alpha))$ pro vhodné koeficienty c_j, zde $c_i = -1$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VIII

Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, jsou nutně i lineárně závislé sloupce Gramovy matice a tedy $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$.

Obráceně, je-li $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$, jsou nutně lineárně závislé sloupce Gramovy matice. Nechť například i-tý sloupec Gramovy matice je lineární kombinací ostatních.

Tedy $\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha)) = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{s}_j(\mathbf{G}(\alpha))$ pro vhodné koeficienty c_j, zde $c_i = -1$.

Odtud
$0 = \sum_j c_j \mathbf{s}_j(\mathbf{G}(\alpha)) = (\mathbf{s}_1(\mathbf{G}(\alpha)), \ldots, \mathbf{s}_k(\mathbf{G}(\alpha))) \cdot (c_1, \ldots, c_k)^T$.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. VIII

Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, jsou nutně i lineárně závislé sloupce Gramovy matice a tedy $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$.

Obráceně, je-li $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$, jsou nutně lineárně závislé sloupce Gramovy matice. Nechť například i-tý sloupec Gramovy matice je lineární kombinací ostatních.

Tedy $\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha)) = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{s}_j(\mathbf{G}(\alpha))$ pro vhodné koeficienty c_j, zde $c_i = -1$.

Odtud
$0 = \sum_j c_j \mathbf{s}_j(\mathbf{G}(\alpha)) = (\mathbf{s}_1(\mathbf{G}(\alpha)), \ldots, \mathbf{s}_k(\mathbf{G}(\alpha))) \cdot (c_1, \ldots, c_k)^T$.

Celkem
$0 = (c_1, \ldots, c_k) \cdot (\mathbf{s}_1(\mathbf{G}(\alpha)), \ldots, \mathbf{s}_k(\mathbf{G}(\alpha))) \cdot (c_1, \ldots, c_k)^T$, tj. vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IX

Speciálně pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$|\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix}$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IX

Speciálně pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix} \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle
\end{aligned}
$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IX

Speciálně pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \geq 0, \end{aligned}$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. IX

Speciálně pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix} \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory **u**, **v** jsou lineárně závislé.

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. X

Tím je dokázaná tzv. *Cauchyho-Schwarzova nerovnost*:

Tvrzení

Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *v prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem platí*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \,,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *jsou lineárně závislé.*

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. XI

Cauchyho-Schwarzovu nerovnost často zapisujeme v ekvivalentním tvaru:

$$(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2.$$

Gramova matice a Cauchyho-Schwarzova ner. XI

Cauchyho-Schwarzovu nerovnost často zapisujeme v ekvivalentním tvaru:

$$(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2.$$

Poznamenejme ještě, že pro tuto nerovnost se v literatuře používá též pojmenování "Cauchyho nerovnost", resp. "Cauchyho-Bunjakovského nerovnost", event. "Schwarzova nerovnost".

Délka vektoru a úhel dvou vektorů I

Délka vektoru a úhel dvou vektorů

Normou na reálném vektorovém prostoru **V** rozumíme libovolné zobrazení $\| - \| : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, které vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ přiřadí reálné číslo $\|\mathbf{x}\|$, nazývané *normou* nebo též *délkou vektoru* **x**, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \qquad \text{(trojúhelníková nerovnost),}$$

$$\|c\mathbf{x}\| = |c| \, \|\mathbf{x}\| \qquad \text{(pozitivní homogenita),}$$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{(oddělitelnost).}$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů II

Z uvedených podmínek vyplývá nezápornost normy, t. j. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů II

Z uvedených podmínek vyplývá nezápornost normy, t. j. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Z pozitivní homogenity platí $\|\mathbf{0}\| = 0$ a $\|-\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$,

Délka vektoru a úhel dvou vektorů II

Z uvedených podmínek vyplývá nezápornost normy, t. j. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Z pozitivní homogenity platí $\|\mathbf{0}\| = 0$ a $\|-\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$,

s použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{x}\| + \|-\mathbf{x}\|\right) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{0}\| = 0.$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů II

Z uvedených podmínek vyplývá nezápornost normy, t. j. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Z pozitivní homogenity platí $\|\mathbf{0}\| = 0$ a $\|-\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$,

s použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{1}{2}\big(\|\mathbf{x}\| + \|-\mathbf{x}\|\big) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{0}\| = 0.$$

Z oddělitelnosti máme $\|\mathbf{x}\| > 0$ pro každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů III

Reálný vektorový prostor s normou nazýváme *normovaný prostor*.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů III

Reálný vektorový prostor s normou nazýváme *normovaný prostor*.

Intuitivně sa na normovaný prostor díváme jako na vektorový prostor, ve kterém můžeme měřit délky vektorů.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů III

Reálný vektorový prostor s normou nazýváme *normovaný prostor*.

Intuitivně sa na normovaný prostor díváme jako na vektorový prostor, ve kterém můžeme měřit délky vektorů.

Tři definující podmínky pro normu zaručují, že takovéto měření délek, t. j. přiřazení $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, má rozumné vlastnosti, jaké od délek očekáváme.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů III

Reálný vektorový prostor s normou nazýváme *normovaný prostor*.

Intuitivně sa na normovaný prostor díváme jako na vektorový prostor, ve kterém můžeme měřit délky vektorů.

Tři definující podmínky pro normu zaručují, že takovéto měření délek, t. j. přiřazení $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, má rozumné vlastnosti, jaké od délek očekáváme.

Vzdáleností bodů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ s normou $\|\cdot\|$ nazýváme délku vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, t. j. číslo $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů III

Reálný vektorový prostor s normou nazýváme *normovaný prostor*.

Intuitivně sa na normovaný prostor díváme jako na vektorový prostor, ve kterém můžeme měřit délky vektorů.

Tři definující podmínky pro normu zaručují, že takovéto měření délek, t. j. přiřazení $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, má rozumné vlastnosti, jaké od délek očekáváme.

Vzdáleností bodů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ s normou $\|\cdot\|$ nazýváme délku vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, t. j. číslo $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Pomocí vzdálenosti bodů můžeme trojúhelníkovou nerovnost vyjádřit jiným, ekvivalentním způsobem:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$$

pre všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$*.*

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$*.*

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$.

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$.

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$*.*

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2
\end{aligned}$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$.

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$. S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= \left(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\right)^2 .
\end{aligned}$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na $\mathbf{V}$.

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

To dokazuje trojúhelníkovou nerovnost. ■

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti vyplývá, že pro libovolné *nenulové* vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti vyplývá, že pro libovolné *nenulové* vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Proto existuje jediné reálné číslo α takové, že $0 \leq \alpha \leq \pi$ a

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}.$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti vyplývá, že pro libovolné *nenulové* vektory **x**, **y** ve vektorovém prostoru se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Proto existuje jediné reálné číslo α takové, že $0 \leq \alpha \leq \pi$ a

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}.$$

Číslo α nazýváme *úhlem* nebo též *odchylkou vektorů* **x**, **y** a značíme ho $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů IV

Z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti vyplývá, že pro libovolné *nenulové* vektory **x**, **y** ve vektorovém prostoru se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Proto existuje jediné reálné číslo α takové, že $0 \leq \alpha \leq \pi$ a

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}.$$

Číslo α nazýváme *úhlem* nebo též *odchylkou vektorů* **x**, **y** a značíme ho $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Ze symetrie skalárního součinu vyplývá $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, to znamená, že se jedná o *neorientovaný úhel*.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů V

Při této definici úhlu dvou nenulových vektorů zůstáva vztah

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

platný pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, zachovaný v libovolném prostoru se skalárním součinem.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů V

Při této definici úhlu dvou nenulových vektorů zůstává vztah

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

platný pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, zachovaný v libovolném prostoru se skalárním součinem.

Říkáme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ jsou (navzájem) *kolmé* nebo též *ortogonální*, píšeme $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, pokud $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Délka vektoru a úhel dvou vektorů VI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro libovolné nenulové vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *platí:*

Délka vektoru a úhel dvou vektorů VI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro libovolné nenulové vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *platí:*

(a) *(***kosinová věta***)*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y}),\\ \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y});\end{aligned}$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů VI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro libovolné nenulové vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *platí:*

(a) *(***kosinová věta***)*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y});$$

(b) *(***Pythagorova věta***)*

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \;\Rightarrow$$
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2;$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů VII

(c) (**pravidlo rovnoběžníka**)

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\right);$$

Délka vektoru a úhel dvou vektorů VII

(c) (**pravidlo rovnoběžníka**)

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\big);$$

(d) (**úhlopříčky kosoštvorce jsou na sebe kolmé**)

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| \;\Rightarrow\; \mathbf{x}+\mathbf{y} \perp \mathbf{x}-\mathbf{y}.$$

Ortogonální podprostory I

Ortogonálnost

Definice

Nechť V je euklidovský prostor a nechť:

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \tag{1}$$

je konečná posloupnost vektorů z $\mathbf{V}$. *Řekneme, že:*

- *posloupnost (1) je ortogonální (nebo stručně, že vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou ortogonální), jestliže je:*

  $$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0 \text{ pro každé } i, j = 1, \ldots, k \ \wedge \ i \neq j,$$

Ortogonální podprostory II

- posloupnost (1) je **ortonormální** (nebo stručně, že *vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou* ***ortonormální***), je-li ortogonální a každý její vektor je normovaný,

Ortogonální podprostory II

- posloupnost (1) je **ortonormální** (nebo stručně, že *vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou* ***ortonormální***), je-li ortogonální a každý její vektor je normovaný,
- posloupnost 1 je ***ortogonální báze*** (resp. ***ortonormální báze***) euklidovského prostoru $\mathbf{V}$, jestliže je ortogonální (resp. ortonormální) a navíc je bází prostoru $\mathbf{V}$.

Ortogonální podprostory III

Rozebereme-li si definici ortogonálnosti pro nejjednodušší případy, pak vidíme, že pro:

$k = 1$: Posloupnost sestávající z jednoho vektoru je vždy ortogonální (bez ohledu na to, zda např. daný vektor je nulový či nikoliv).

Ortogonální podprostory IV

$k = 2$: Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou ortogonální, právě když $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$.

Ortogonální podprostory IV

$k = 2$: Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou ortogonální, právě když $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$.

V tomto případě budeme psát $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ nebo $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$ (zřejmě zde nezáleží na pořadí vektorů).

Ortogonální podprostory IV

$k = 2$: Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou ortogonální, právě když $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$.

V tomto případě budeme psát $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ nebo $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$ (zřejmě zde nezáleží na pořadí vektorů).

Dále, jsou-li oba vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ nenulové, pak zřejmě jsou ortogonální, právě když jejich odchylka je $\frac{\pi}{2}$ (plyne z definice odchylky).

Ortogonální podprostory IV

$k = 2$: Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou ortogonální, právě když $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$.

V tomto případě budeme psát $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ nebo $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$ (zřejmě zde nezáleží na pořadí vektorů).

Dále, jsou-li oba vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ nenulové, pak zřejmě jsou ortogonální, právě když jejich odchylka je $\frac{\pi}{2}$ (plyne z definice odchylky).

Na druhé straně, dva vektory, z nichž alespoň jeden je nulový, jsou vždy ortogonální (přičemž jejich odchylka samozřejmě není definována).

Ortogonální podprostory V

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor. Pak pro vektory z* $\mathbf{V}$ *platí:*

1. $\mathbf{u} \perp \mathbf{u} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u} = \mathbf{o}$*,*
2. $\mathbf{u} \perp \mathbf{x}$ *pro každé* $\mathbf{x} \in V \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u} = \mathbf{o}$*,*
3. $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}_i$ *pro* $i = 1, \dots, k \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u} \perp \left(\sum_{i=1}^{k} r_i \cdot \mathbf{w}_i\right)$ *pro každé* $r_i \in \mathbb{R}$*.*

Ortogonální podprostory VI

Věta

Nenulové ortogonální vektory euklidovského prostoru $\mathbf{V}$ *jsou lineárně nezávislé.*

Ortogonální podprostory VI

Věta

Nenulové ortogonální vektory euklidovského prostoru **V** *jsou lineárně nezávislé.*

Poznamenejme, že předpoklad nenulovosti všech vektorů je v předchozí větě podstatný a bez něj věta neplatí. Jinak řečeno, jsou-li ortogonální vektory z **V** lineárně závislé, znamená to, že alespoň jeden z nich musí být nulový.

Ortogonální podprostory VII

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}$ *libovolné. Pak existují ve* $\mathbf{V}$ *ortogonální vektory* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$*, které generují tentýž podprostor jako vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$*, tzn. platí:*

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k].$$

Ortogonální podprostory VII

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}$ *libovolné. Pak existují ve* $\mathbf{V}$ *ortogonální vektory* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$*, které generují tentýž podprostor jako vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$*, tzn. platí:*

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k].$$

$$\mathbf{e}_k = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + p_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{u}_k, \tag{2}$$

Ortogonální podprostory VII

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}$ *libovolné. Pak existují ve* $\mathbf{V}$ *ortogonální vektory* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$*, které generují tentýž podprostor jako vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$*, tzn. platí:*

$$[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k].$$

$$\mathbf{e}_k = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + p_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{u}_k, \tag{2}$$

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i \rangle = 0 = p_i \cdot (\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle) + (\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{e}_i \rangle),$$

Ortogonální podprostory VII

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}$ *libovolné. Pak existují ve* $\mathbf{V}$ *ortogonální vektory* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$*, které generují tentýž podprostor jako vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$*, tzn. platí:*

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k].$$

$$\mathbf{e}_k = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + p_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{u}_k, \tag{2}$$

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i \rangle = 0 = p_i \cdot (\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle) + (\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{e}_i \rangle),$$

$$p_i = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{e}_i \rangle}{\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle} & \textit{je-li } \mathbf{e}_i \neq \mathbf{o} \\ \textit{libovolné} & \textit{je-li } \mathbf{e}_i = \mathbf{o}. \end{array} \right.$$

Ortogonální podprostory VII

- Důkaz předchozí věty byl konstruktivní a jeho algoritmus se nazývá *Gram-Schmidtův ortogonalizační proces* (používá se při řešení konkrétních příkladů!).

Ortogonální podprostory VII

- Důkaz předchozí věty byl konstruktivní a jeho algoritmus se nazývá *Gram-Schmidtův ortogonalizační proces* (používá se při řešení konkrétních příkladů!).

- V předchozí větě se nic nepředpokládá o lineární závislosti nebo nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Proto výsledné ortogonální vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ mohou, ale nemusí být všechny nenulové.

Ortogonální podprostory VIII

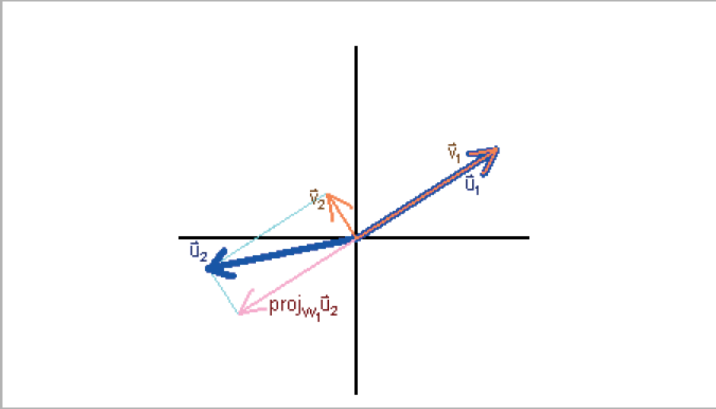
Přesněji řečeno, je-li $\dim[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] = r$ ($\leq k$), pak tedy i $\dim[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k] = r$, což znamená, že právě $(k - r)$ z vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ je nulových a zbývajících r vektorů je nenulových a tvoří ortogonální bázi podprostoru $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k]$, tj. podprostoru generovaného vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

Ortogonální podprostory VIII

Přesněji řečeno, je-li $\dim[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] = r$ ($\leq k$), pak tedy i $\dim[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k] = r$, což znamená, že právě $(k - r)$ z vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ je nulových a zbývajících r vektorů je nenulových a tvoří ortogonální bázi podprostoru $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k]$, tj. podprostoru generovaného vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

Speciálně tedy, jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislé, tzn. tvoří bázi podprostoru $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k]$, pak vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ tvoří ortogonální bázi tohoto podprostoru.

Ortogonální podprostory IX



Gram-Schmidtův algoritmus

Ortogonální podprostory X

Věta

V každém nenulovém euklidovském prostoru $\mathbf{V}$ *existuje ortogonální báze (resp. ortonormální báze).*

Ortogonální podprostory XI

Příklad

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ *se skalárním součinem definovaným:*

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

nalezněte ortogonální bázi podprostoru $\mathbf{W}$ *generovaného vektory* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. *Přitom:*

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1), \ \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1, 1), \ \mathbf{u}_3 = (1, 0, 1, 0).$$

Ortogonální podprostory XII

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:
$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

Ortogonální podprostory XII

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

$\mathbf{e}_2 = p \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $p = -\frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = -\frac{2}{3}$. Tedy

$\mathbf{e}_2 = (-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Ortogonální podprostory XII

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:
$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

$\mathbf{e}_2 = p \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $p = -\frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = -\frac{2}{3}$. Tedy
$\mathbf{e}_2 = (-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$\mathbf{e}_3 = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + p_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3$, kde $p_1 = -\frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = -\frac{1}{3}$,
$p_2 = -\frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{e}_2 \rangle}{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle} = 1$. Tedy $\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{3} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3 = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{o}$.

Ortogonální podprostory XII

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:
$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

$\mathbf{e}_2 = p \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $p = -\frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = -\frac{2}{3}$. Tedy
$\mathbf{e}_2 = (-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$\mathbf{e}_3 = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + p_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3$, kde $p_1 = -\frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = -\frac{1}{3}$,
$p_2 = -\frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{e}_2 \rangle}{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle} = 1$. Tedy $\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{3} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3 = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{o}$.

Výsledek: ortogonální bázi podprostoru W tvoří např. vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Ortogonální podprostory XIII

Definice

Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny euklidovského prostoru **V**. *Je-li:*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \quad \textit{pro každé } \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B,$$

pak říkáme, že A, B jsou ***ortogonální množiny*** *a píšeme* $A \perp B$ *nebo* $B \perp A$.

Ortogonální podprostory XIII

Definice

Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny euklidovského prostoru $\mathbf{V}$. Je-li:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \quad \textit{pro každé } \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B,$$

pak říkáme, že A, B jsou ***ortogonální množiny*** *a píšeme $A \perp B$ nebo $B \perp A$.*

Jinak řečeno, A, B jsou ortogonální množiny, právě když $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou ortogonální vektory pro každé $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$.

Ortogonální podprostory XIII

Definice

Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny euklidovského prostoru $\mathbf{V}$. *Je-li:*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \quad \textit{pro každé } \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B,$$

pak říkáme, že A, B jsou ***ortogonální množiny*** *a píšeme* $A \perp B$ *nebo* $B \perp A$.

Jinak řečeno, A, B jsou ortogonální množiny, právě když $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou ortogonální vektory pro každé $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$.

Ve speciálních případech: prázdná množina, resp. množina $\{\mathbf{o}\}$ jsou zřejmě ortogonální ke každé podmnožině ve $\mathbf{V}$. Dále z definice plyne, že:

$$A \perp B \Longrightarrow A \cap B = \emptyset \text{ nebo } A \cap B = \{\mathbf{o}\}.$$

Ortogonální podprostory XIV

Věta

Nechť A, B jsou podmnožiny euklidovského prostoru $\mathbf{V}$. Pak platí:

$$A \perp B \Leftrightarrow [A] \perp [B],$$

tzn. dvě množiny jsou ortogonální, právě když jsou ortogonální podprostory generované těmito množinami.

Ortogonální podprostory XV

Definice

Nechť W je podmnožina (podprostor) euklidovského prostoru $\mathbf{V}$*. Pak množina:*

$$W^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0 \textit{ pro každé } \mathbf{w} \in W\}$$

se nazývá ***ortogonální doplněk podmnožiny (podprostoru)*** *W (ve* $\mathbf{V}$*).*

Ortogonální podprostory XV

Definice

Nechť W je podmnožina (podprostor) euklidovského prostoru $\mathbf{V}$*. Pak množina:*

$$W^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0 \textit{ pro každé } \mathbf{w} \in W\}$$

se nazývá ***ortogonální doplněk podmnožiny (podprostoru)*** *W (ve* $\mathbf{V}$*).*

Zřejmě platí $W \perp W^{\perp}$ a ve speciálních případech přímo z definice dostáváme, že $V^{\perp} = \{\mathbf{o}\}$, resp. $\{\mathbf{o}\}^{\perp} = V$.

Ortogonální podprostory XVI

Věta

Nechť W je podmnožina euklidovského prostoru $\mathbf{V}$. Pak platí:

1. $W^{\perp}$ *je podprostor ve* $\mathbf{V}$*,*

Ortogonální podprostory XVI

Věta

Nechť W je podmnožina euklidovského prostoru $\mathbf{V}$. Pak platí:

1. *$W^{\perp}$ je podprostor ve $\mathbf{V}$,*
2. *je-li $\mathbf{W}$ podprostor $\mathbf{V}$, máme $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp}$, tzn. prostor $\mathbf{V}$ je přímým součtem podprostorů $\mathbf{W}$ a $\mathbf{W}^{\perp}$.*

Ortogonální podprostory XVII

Je-li $\mathbf{W}$ libovolný podprostor ve $\mathbf{V}$, pak (podle 2. části předchozí věty a podle definice přímého součtu podprostorů) se libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ dá napsat, a to jediným způsobem, ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{W}^{\perp}$.

Ortogonální podprostory XVII

Je-li $\mathbf{W}$ libovolný podprostor ve $\mathbf{V}$, pak (podle 2. části předchozí věty a podle definice přímého součtu podprostorů) se libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ dá napsat, a to jediným způsobem, ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{W}^{\perp}$.

Poznamenejme, že vektor $\mathbf{x}$ z tohoto vyjádření se nazývá ***ortogonální projekce vektoru* u *do podprostoru* W.**

Ortogonální podprostory XVII

Je-li $\mathbf{W}$ libovolný podprostor ve $\mathbf{V}$, pak (podle 2. části předchozí věty a podle definice přímého součtu podprostorů) se libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ dá napsat, a to jediným způsobem, ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{W}^{\perp}$.

Poznamenejme, že vektor $\mathbf{x}$ z tohoto vyjádření se nazývá ***ortogonální projekce vektoru* $\mathbf{u}$ *do podprostoru* $\mathbf{W}$.**

Píšeme $\mathbf{x} = \mathbf{u}_{\mathbf{W}}$.

Ortogonální podprostory XVIII

Věta

Nechť $\mathbf{W}$ *je podprostor euklidovského prostoru* $\mathbf{V}$, *nechť* $\mathbf{x}$ *(resp.* $\mathbf{x}'$*) je ortogonální projekce vektoru* $\mathbf{u}$ *(resp.* $\mathbf{u}'$*) do podprostoru* $\mathbf{W}$ *a nechť* $r \in \mathbb{R}$ *libovolné. Pak platí:*

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{x}')$ *je ortogonální projekce vektoru* $(\mathbf{u} + \mathbf{u}')$ *do* $\mathbf{W}$,

Ortogonální podprostory XVIII

Věta

Nechť $\mathbf{W}$ *je podprostor euklidovského prostoru* $\mathbf{V}$*, nechť* $\mathbf{x}$ *(resp.* $\mathbf{x}'$*) je ortogonální projekce vektoru* $\mathbf{u}$ *(resp.* $\mathbf{u}'$*) do podprostoru* $\mathbf{W}$ *a nechť* $r \in \mathbb{R}$ *libovolné. Pak platí:*

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{x}')$ *je ortogonální projekce vektoru* $(\mathbf{u} + \mathbf{u}')$ *do* $\mathbf{W}$*,*
2. $r \cdot \mathbf{x}$ *je ortogonální projekce vektoru* $r \cdot \mathbf{u}$ *do* W*.*

Ortogonální podprostory XIX

Věta

Nechť $\mathbf{W}$, $\mathbf{S}$ *jsou podprostory euklidovského prostoru* $\mathbf{V}$. *Pak platí:*

1. $(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{W}$,

Ortogonální podprostory XIX

Věta

Nechť $\mathbf{W}$, $\mathbf{S}$ *jsou podprostory euklidovského prostoru* $\mathbf{V}$. *Pak platí:*

1. $(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{W}$,
2. $(\mathbf{W} + \mathbf{S})^{\perp} = \mathbf{W}^{\perp} \cap \mathbf{S}^{\perp}$,

Ortogonální podprostory XIX

Věta

Nechť $\mathbf{W}$, $\mathbf{S}$ *jsou podprostory euklidovského prostoru* $\mathbf{V}$. *Pak platí:*

1. $(\mathbf{W}^\perp)^\perp = \mathbf{W}$,
2. $(\mathbf{W} + \mathbf{S})^\perp = \mathbf{W}^\perp \cap \mathbf{S}^\perp$,
3. $(\mathbf{W} \cap \mathbf{S})^\perp = \mathbf{W}^\perp + \mathbf{S}^\perp$.

Ortogonální podprostory XX

Věta

Nechť $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor se skalárním součinem,* $\mathbf{S}$ *je jeho konečněrozměrný vektorový podprostor s bazí* $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *a* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$*. Potom pro* $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ *platí* $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ *právě tehdy, když* $\mathbf{c}$ *je řešení soustavy lineárních rovnic*

$$\mathbf{G}(\alpha) \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^T,$$

kde $\langle \mathbf{x}, \alpha \rangle$ *označuje řádkový vektor* $\left(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k \rangle\right) \in \mathbb{R}^k$*.*

Ortogonální podprostory XXI

Důkaz. Pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ právě tehdy, když pro všechna $i \leq k$ máme

$$0 = \langle \mathbf{x} - c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k,\ \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - c_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle - \ldots - c_k\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle.$$

Ortogonální podprostory XXI

Důkaz. Pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ právě tehdy, když pro všechna $i \le k$ máme

$$0 = \langle \mathbf{x} - c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k,\, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - c_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle - \ldots - c_k\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle.$$

Tedy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle = (c_1, \ldots, c_k)\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha))$ tj.
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle^T = \mathbf{r}_i(\mathbf{G}(\alpha)^T) \cdot \mathbf{c}$.

Ortogonální podprostory XXI

Důkaz. Pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ právě tehdy, když pro všechna $i \leq k$ máme

$0 = \langle \mathbf{x} - c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k,\ \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - c_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle - \ldots - c_k\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle.$

Tedy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle = (c_1, \ldots, c_k)\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha))$ tj.
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle^T = \mathbf{r}_i(\mathbf{G}(\alpha)^T) \cdot \mathbf{c}$.

Jinak řečeno, $\mathbf{c}$ musí vyhovovat soustavě

$$\mathbf{G}(\alpha)^T \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^T.$$

Ortogonální podprostory XXI

Důkaz. Pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ právě tehdy, když pro všechna $i \leq k$ máme

$0 = \langle \mathbf{x} - c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k,\, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - c_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle - \ldots - c_k\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle.$

Tedy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle = (c_1, \ldots, c_k)\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha))$ tj.
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle^T = \mathbf{r}_i(\mathbf{G}(\alpha)^T) \cdot \mathbf{c}$.

Jinak řečeno, $\mathbf{c}$ musí vyhovovat soustavě

$$\mathbf{G}(\alpha)^T \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^T.$$

Ale $\mathbf{G}(\alpha)^T = \mathbf{G}(\alpha)$ vzhledem na symetrii Gramovy matice.

Ortogonální podprostory XXI

Důkaz. Pro $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ právě tehdy, když pro všechna $i \leq k$ máme

$$0 = \langle \mathbf{x} - c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k,\, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - c_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle - \ldots - c_k \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle.$$

Tedy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle = (c_1, \dots, c_k)\mathbf{s}_i(\mathbf{G}(\alpha))$ tj.
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i(\alpha) \rangle^T = \mathbf{r}_i(\mathbf{G}(\alpha)^T) \cdot \mathbf{c}$.

Jinak řečeno, $\mathbf{c}$ musí vyhovovat soustavě

$$\mathbf{G}(\alpha)^T \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^T.$$

Ale $\mathbf{G}(\alpha)^T = \mathbf{G}(\alpha)$ vzhledem na symetrii Gramovy matice. Protože matice $\mathbf{G}(\alpha)$ je regulární (α je báze S), má tato soustava jediné řešení. ■