Jméno	e-mail	1.příklad	2.příklad	3.příklad	4.příklad	celkem
....	....					
	Opravil:					

1. zápočtová písemka z lineární algebry – 5.11.2010
Skupina A - Cvičící KRBEK - 13 studentů

1. Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete, které ze součinů $A \cdot A$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot A$, $C \cdot A$ jsou definované a spočítejte je.

2. Uvažujme podmnožiny S a T vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ (nad tělesem $\mathbb{R}$), které jsou určeny takto:

$$S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 0, z \text{ libovolné } \},$$
$$T = \{(x, y, z); x^2 + z^2 = 1, y \text{ libovolné } \}.$$

Rozhodněte, zda S resp. T je lineárním podprostorem $\mathbb{R}^3$. Odpovědi zdůvodněte.

3. Řešte následující soustavu lineárních rovnic v $\mathbb{R}$, kde x_1, x_2, x_3 jsou neznámé a a je parametr. Tzn. určete, pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ má soustava řešení, a pro tato a popište množinu všech řešení dané soustavy.

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & +ax_3 & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 3 \end{array}$$

4. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ (nad tělesem $\mathbb{R}$) jsou dány vektory $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -1, 1)$, $u_3 = (0, 3, 1)$ a $u_4 = (3, 1, 2)$. Z množiny $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ vyberte maximální podmnožinu lineárně nezávislých vektorů a ostatní vektory napište jako lineární kombinaci vybraných vektorů.

5. Nalezněte nějakou symetrickou matici A a nějakou antisymetrickou matici B, tak aby

$$A + B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Připomínáme, že matice A je symetrická, když $A^T = A$, a matice B je antisymetrická, když $B^T = -B$.)

Jméno	e-mail	1.příklad	2.příklad	3.příklad	4.příklad	celkem
....	....					
	Opravil:					

1. zápočtová písemka z lineární algebry – 5.11.2010
Skupina B - Cvičící KLÍMA - 28 studentů

1. Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete, které ze součinů $A \cdot A$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot A$, $C \cdot A$ jsou definované a spočítejte je.

2. Uvažujme podmnožiny S a T vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ (nad tělesem $\mathbb{R}$), které jsou určeny takto:

$$S = \{(x, y, z); x^2 = y^2, z \text{ libovolné } \},$$
$$T = \{(x, y, z); x^3 = z^3, y \text{ libovolné } \}.$$

Rozhodněte, zda S resp. T je lineárním podprostorem $\mathbb{R}^3$. Odpovědi zdůvodněte.

3. Řešte následující soustavu lineárních rovnic v $\mathbb{R}$, kde x_1, x_2, x_3 jsou neznámé a a je parametr. Tzn. určete, pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ má soustava řešení, a pro tato a popište množinu všech řešení dané soustavy.

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & -ax_2 & +4x_3 & = & 2 \\ -x_1 & +2x_2 & -2x_3 & = & -1 \end{array}$$

4. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ (nad tělesem $\mathbb{R}$) jsou dány vektory $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 3)$, $v_3 = (2, 1, 0)$ a $v_4 = (1, 2, 3)$. Z množiny $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ vyberte maximální podmnožinu lineárně nezávislých vektorů a ostatní vektory napište jako lineární kombinaci vybraných vektorů.

5. Nalezněte nějakou symetrickou matici A a nějakou antisymetrickou matici B, tak aby

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

(Připomínáme, že matice A je symetrická, když $A^T = A$, a matice B je antisymetrická, když $B^T = -B$.)

SKUPINA (A)

1\. POUZE $A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

2\. S – ANO: $S = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(0,0,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$

T – NE $(0,0,0) \notin T$

3\. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & a+3 & 0 \end{array}\right)$

I) PRO $a=-3$ NEK. MN. ŘEŠENÍ: $\{(-1,2,0) + t(-5,3,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

II) PRO $a \neq -3$ JEDNO ŘEŠENÍ: $(-1,2,0)$

4\. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

MAX. LIN. NEZ: u_1, u_2, u_4

VYJÁDŘENÍ u_3: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ ŘEŠENÍ: $a_2 = -1, a_1 = 2$ TJ. $u_3 = 2u_1 - u_2$

5\. $A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

SKUPINA (B)

1\. POUZE $C \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2\. S – NE: $(1,1,0) \in S$, $(1,-1,0) \in S$, $(2,0,0) \notin S$

T – ANO: $T = \{(x,y,x) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,1) + y(0,1,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

3\. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -a & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-4 & 2a-8 \end{array}\right)$

I) PRO $a=4$ NEK. MN. ŘEŠ: $\{(5,2,0) + t(-4,-1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

II) PRO $a \neq 4$ JEDNO ŘEŠENÍ: $(-3,0,2)$

4\. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

MAX. LIN. NEZ: v_1, v_2, v_4

VYJÁDŘENÍ v_3: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ ŘEŠ: $a_2 = -1, a_1 = 3$ TJ. $v_3 = 3v_1 - v_2$

5\. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

SKUPINA (A)

1\. POUZE $A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

2\. S – ANO: $S = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(0,0,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$

T – NE $(0,0,0) \notin T$

3\. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & a+3 & 0 \end{array}\right)$

I) PRO $a=-3$ NEK. MN. ŘEŠENÍ: $\{(-1,2,0)+t(-5,3,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

II) PRO $a \neq -3$ JEDNO ŘEŠENÍ: $(-1,2,0)$

4\. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

MAX. LIN. NEZ: u_1, u_2, u_4

VYJÁDŘENÍ u_3: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ ŘEŠENÍ: $a_2 = -1, a_1 = 2$ TJ. $u_3 = 2u_1 - u_2$

5\. $A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

SKUPINA (B)

1\. POUZE $C \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2\. S – NE: $(1,1,0) \in S$, $(1,-1,0) \in S$, $(2,0,0) \notin S$

T – ANO: $T = \{(x,y,x) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,1) + y(0,1,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

3\. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -a & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-4 & 2a-8 \end{array}\right)$

I) PRO $a=4$ NEK. MN. ŘEŠ: $\{(5,2,0)+t(-4,-1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

II) PRO $a \neq 4$ JEDNO ŘEŠENÍ: $(-3,0,2)$

4\. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

MAX. LIN. NEZ: v_1, v_2, v_4

VYJÁDŘENÍ v_3: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ ŘEŠ: $a_2 = -1, a_1 = 3$ TJ. $v_3 = 3v_1 - v_2$

5\. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$