Jméno	e-mail	1.příklad	2.příklad	celkem
....	....			
	Opravil:			

2. zápočtová písemka z lineární algebry – 25.4.2006
Skupina A

Bodování: 1. př. za odpovědi na každou část 1 body (tj. 1+1+1+1) - tj. maximum jsou 4 body. 2. př. každá část za 3 body, tj. maximum je 6 bodů.

1. Dokažte, že zobrazení $A : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], A(f)(x) = (x+1)f'(x)$ je lineární. Určete jádro, obraz a jejich dimenze. (1+1+1+1)

2. Nechť $P = \langle (0,3,1,3), (2,1,-1,-1) \rangle, Q = \langle (1,2,0,4), (4,-1,-3,-2), (2,1,-1,2) \rangle$ jsou podprostory v $\mathbb{R}^4$. Najděte nějaké báze podprostorů $P + Q, P \cap Q$.
(3+3)

2. zápočtová písemka z lineární algebry – 25.4.2006
Skupina A - Vzorové řešení

1. Dokažte, že zobrazení $A : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], A(f)(x) = (x+1)f'(x)$ je lineární. Určete jádro, obraz a jejich dimenze. (1+1+1+1)

2. Nechť $P = \langle(0,3,1,3),(2,1,-1,-1)\rangle, Q = \langle(1,2,0,4),(4,-1,-3,-2),(2,1,-1,2)\rangle$ jsou podprostory v $\mathbb{R}^4$. Najděte nějaké báze podprostorů $P+Q$, $P\cap Q$. (3+3)

Řešení:

1. Linearita A plyne z $A(f+g)(x) = (x+1)(f+g)'(x) = (x+1)(f'+g')(x) = (x+1)[f'(x)+g'(x)] = (x+1)f'(x)+(x+1)g'(x) = A(f)(x)+A(g)(x)$ a $A(af)(x) = (x+1)(af)'(x) = (x+1)af'(x) = a(x+1)f'(x) = aA(f)(x)$, kde jsme využili linearity derivace. Pro obecný polynom $f(x) = ax^2+bx+c$ dostáváme $A(f)(x) = 2ax^2+(2a+b)x+b$. Odtud $Im\ A = \{2ax^2+(2a+b)x+b \mid a,b\in\mathbb{R}\}$, dimenze je 2 a $f \in Ker\ A$ právě tehdy, když $a=b=0$, tedy $Ker\ A = \{c \mid c \in \mathbb{R}\}$, dimenze je 1.

2. Pro výpočet průniku uspořádáme sloupcově vektory generující P a vektory generující Q s opačným znaménkem. Vzniklé schéma upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{rr|rrr} 2 & 0 & -1 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{rr|rrr} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vidíme, že hodnost matice je 3, což je dimenze $P+Q$ a za bázi můžeme zvolit např. $((0,3,1,3),(2,1,-1,-1),(1,2,0,4))$. Dimenze P je 2. Další úpravou pravé strany nahlédneme, že dimenze Q je také 2, takže dimenze $P\cap Q$ musí být 1. Stačí tedy najít jeden nenulový vektor, jehož koeficienty řeší příslušnou homogenní soustavu, např. řešení $(3/2,-3/2,1,-1,0)$ určuje vektor $(3,-3,-3,-6)$, tedy bazí $P\cap Q$ je např. $((1,-1,-1,-2))$.

Jméno	e-mail	1.příklad	2.příklad	celkem
....	....			
	Opravil:			

2. zápočtová písemka z lineární algebry – 25.4.2006
Skupina B

Bodování: 1. př. za odpovědi na každou část 1 body (tj. 1+1+1+1) - tj. maximum jsou 4 body. 2. př. každá část za 3 body, tj. maximum je 6 bodů.

1. Dokažte, že zobrazení $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), f(X) = XA$ pro $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ je lineární. Určete jádro, obraz a jejich dimenze.

2. Nechť $P = \langle(3,0,-2,0),(-4,1,3,2)\rangle, Q = \langle(1,2,0,1),(1,5,1,4),(-3,0,2,3)\rangle$ jsou podprostory v $\mathbb{R}^4$. Najděte nějaké báze podprostorů $P+Q, P\cap Q$.

2. zápočtová písemka z lineární algebry – 25.4.2006
Skupina B - Vzorové řešení

1. Dokažte, že zobrazení $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), f(X) = XA$ pro $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ je lineární. Určete jádro, obraz a jejich dimenze.

2. Nechť $P = \langle(3,0,-2,0),(-4,1,3,2)\rangle, Q = \langle(1,2,0,1),(1,5,1,4),(-3,0,2,3)\rangle$ jsou podprostory v $\mathbb{R}^4$. Najděte nějaké báze podprostorů $P+Q, P\cap Q$.

Řešení:

1. Linearita plyne z vlastností maticového a skalárního součinu: $f(X+Y) = (X+Y)A = XA+YA = f(X)+f(Y)$ a $f(aX) = (aX)A = a(XA) = af(X)$. Pro $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ máme $f(X) = \left(\begin{smallmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{smallmatrix}\right)$, tedy $Im\ f = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{smallmatrix}\right) \mid a,c \in \mathbb{R}\}$, $Ker\ f = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mid b,d \in \mathbb{R}\}$. Obojí má dimenzi 2.

2. Pro výpočet průniku uspořádáme sloupcově vektory generující P a vektory generující Q s opačným znaménkem. Vzniklé schéma upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{rr|rrr} 3 & -4 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{rr|rrr} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vidíme, že hodnost matice je 3, což je dimenze $P+Q$ a za bázi můžeme zvolit např. $((3,0,-2,0),(-4,1,3,2),(1,2,0,1))$. Dimenze P je 2. Další úpravou pravé strany nahlédneme, že dimenze Q je také 2, takže dimenze $P\cap Q$ musí být 1. Stačí tedy najít jeden nenulový vektor, jehož koeficienty řeší příslušnou homogenní soustavu, např. řešení $(2,2,1,0,1)$ určuje vektor $(-2,2,2,4)$, tedy bazí $P\cap Q$ je např. $((1,-1,-1,-2))$.