Jméno	e-mail	P	Z	U	celkem P+Z+U	hodnocení
....	....					
celkový počet bodů ze zápočtových písemek doplní zkoušený student						
		Opravil:				

1.př.	2.př.	3.př.	4.př.	5.př.	6.př.	7.př.	Celkem

Písemka ke zkoušce z lineární algebry – 19.1.2006

Bodování: První čtyři příklady jsou ohodnoceny 5 body, poslední tři 10 body. Doba - 110 minut, z toho po prvních 50 minutách trvání písemné zkoušky bude vybrána teoretická část k opravě. Celkem je možno včetně zápočtových písemek a ústní zkoušky získat 100 bodů.

Hodnocení: P (Z) – počet bodů na zkouškovou písemku (zápočtovou písemku)

1.	$P+Z+U \leq 49$	nevyhovující - F
2.	$50 \leq P+Z+U \leq 59$	dobře - E
3.	$60 \leq P+Z+U \leq 69$	velmi dobře minus - D
4.	$70 \leq P+Z+U \leq 79$	velmi dobře - C
5.	$80 \leq P+Z+U \leq 89$	výborně minus - B
6.	$90 \leq P+Z+U \leq 100$	výborně - A

Teoretická část

1. Napište Frobeniovu větu o řešitelnosti.
2. Napište definici determinantu.
3. Dokažte, že zobrazení $f : \mathbf{Q}_2[x] \to \mathbf{Q}_3[x]$ je lineární, kde f je definované předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a-b-c)x^2 + (a-c+b)x + b - c - a$. Dejte si pozor na prostory, mezi kterými je zobrazení definováno.
4. V předchozím příkladě najděte báze jádra a obrazu zobrazení f.

Praktická část

Jméno	e-mail	P	Z	U	celkem $P+Z+U$	hodnocení
....	....					
celkový počet bodů ze zápočtových písemek doplní zkoušený student						
		Opravil:				

1.př.	2.př.	3.př.	4.př.	5.př.	6.př.	7.př.	Celkem

5. Určete všechny hodnoty parametru $c \in \mathbf{R}$, pro které je vektor $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1 = (-2, 5, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 4, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (6, 5, c) \in \mathbf{R}^3$.

6. Určete bázi a dimenzi prostorů W_1, W_2, $W_1 + W_2$ a $W_1 \cap W_2$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$, je-li $W_1 = [(-2, 4, -2, 4), (5, 1, 5, 1), (4, 1, 3, 2)]$ a $W_2 = [(5, 3, 5, 3), (3, 5, 3, 5), (-1, -2, 0, -3)]$.

7. Určete matici přechodu A od báze $\mathbf{u} = ((1, 3, -3), (1, 0, 1), (2, 1, 0))$ k bázi $\mathbf{v} = ((2, 0, 1), (-3, 2, -4), (1, -1, 2))$ a matici přechodu B od báze $\mathbf{v}$ k bázi $\mathbf{u}$.

Vzorové řešení

5. Matici odpovídajícího systému lineárních rovnic upravujeme pomocí řádkových operací

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & c & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1,5 \\ 0 & 4 & 20 & 8,5 \\ 0 & 3 & c+3 & 6,5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1,5 \\ 0 & 1 & 5 & \frac{17}{8} \\ 0 & 0 & c-12 & \frac{1}{8} \end{array}\right).$$

Z poslední matice vyplývá, že systém nemá řešení právě tehdy, když $c = 12$, tj. pro $c \neq 12$ je vektor $\mathbf{v}$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$.

6. Vektory z W_1 a W_2 přepíšeme sloupcově do schématu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 5 & 4 & 5 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & -3 \end{array}\right).$$

Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme systém do schodovitého tvaru, který může vypadat třeba takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 5 & 4 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 11 & 9 & 13 & 11 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vidíme, že levá část i celá matice mají hodnost 3, tedy $W_1 = W_1 + W_2$ a zejnéna pak $\dim W_1 = \dim (W_1 + W_2) = 3$. Další úpravou pravé části zjistíme, že i $\dim W_2 = 3$ a tedy $W_1 = W_2 = W_1 + W_2 = W_1 \cap W_2$. Za bázi lze zvolit např. trojici vektorů generující W_1.

7. Sloupce matice přechodu A odpovídají koeficientům ve vyjádření vektorů z báze $\mathbf{u}$ jako kombinací vektorů z báze $\mathbf{v}$. Platí tedy $VA = U$, kde U je matice vytvořená z $\mathbf{u}$ uspořádáním vektorů do sloupců, podobně V vzniká z $\mathbf{v}$. Maticovou rovnici můžeme buďto chápat jako systém tří soustav o třech neznámých se společnou levou stranou nebo ji zleva násobíme V^{-1} a obdržíme $A = V^{-1}U$. V obou případech se dopracujeme ke schématu $(V|U)$, který pomocí elementárních řádkových úprav převedeme na tvar $(I|V^{-1}U)$. Matici B vypočítáme jako matici inverzní k A.

Správný výsledek:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$