Determinanty

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$. Pak **determinant matice** A je prvek z R označovaný symbolem $|A|$ a definovaný předpisem

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}.$$

Připomeňme, že S_n značí množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sčítá se tedy přes všechny permutace σ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Přitom $\wp(\sigma)$ je parita permutace $\sigma \in S_n$, tedy hodnota 1 nebo -1, kterou můžeme chápat jako prvek z R. Jednotlivý součin $\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ pro vybranou permutaci $\sigma \in S_n$ se nazývá **člen determinantu** $|A|$. Poněvadž σ je bijekce množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ na ni samotnou, lze ji chápat jako bijekci množiny všech řádkových indexů na množinu všech sloupcových indexů. Takže součin $a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ je pak vytvořen z n prvků matice A vybraných tak, že z každého řádku a z každého sloupce matice je vybrán právě jeden prvek. Navíc je tento součin je opatřen znaménkem ve shodě s paritou $\wp(\sigma)$ permutace σ, která je vlastně permutací utvořenou z řádkových a sloupcových indexů vybraných n prvků.

Pro počáteční hodnoty $n = 1, 2, 3$ dává předchozí definice následující vztahy pro výpočet příslušných determinantů:

Pro $n = 1$ máme $A = (a_{11})$ a $|A| = a_{11}$.

Pro $n = 2$ máme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Pro $n = 3$ máme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ a

$$\begin{aligned} |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}. \end{aligned}$$

Poslední vztah pro $n = 3$ bývá uváděn jako Sarrusovo pravidlo. Podobná pravidla plynoucí přímo z definice determinantu by bylo možno psát i pro hodnoty $n > 3$. Počty členů v těchto pravidlech však velmi rychle rostou — pro dané n je těchto členů celkem $n!$.

Tvrzení. Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$ platí

$$|A^\top| = |A|\,,$$

tedy transponováním matice A se hodnota determinantu této matice nemění.

Důkaz. Ukážeme, že ve vyjádření obou determinantů podle definice se objevují tytéž členy. Buď $\sigma \in S_n$ libovolná permutace. Jí odpovídá člen $\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ determinantu $|A|$. Vezměme nyní inverzní permutaci σ^{-1} a uvažme k ní součin $\wp(\sigma^{-1}) \cdot a_{\sigma^{-1}(1)\,1} \cdot a_{\sigma^{-1}(2)\,2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma^{-1}(n)\,n}$. Podle definice transponované matice $A^\top$ je ovšem tento součin členem determinantu $|A^\top|$. Z kapitoly o permutacích ale víme, že $\wp(\sigma^{-1}) = \wp(\sigma)$. Vzhledem ke komutativitě násobení v okruhu $(R, +, \cdot)$ odtud plyne, že oba uvedené součiny jsou stejné. Jsou tedy oba zmíněné determinanty součty stejných členů, takže jsou si rovny.

Tvrzení. Pozůstává-li některý řádek dané čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n z nulových prvků okruhu $(R, +, \cdot)$, pak $|A| = 0$.

Důkaz. Potom totiž každý člen $\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ determinantu $|A|$ obsahuje nulový činitel, totiž prvek $a_{i\,\sigma(i)}$, kde i je index dotyčného nulového řádku matice A.

Poznámka. Analogické tvrzení platí rovněž pro sloupce matice A. Předpokládáme-li, že A je čtvercová matice nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$, pak to plyne bezprostředně z předchozího tvrzení o determinantech transponovaných matic. Tento předpoklad a z něj plynoucí podobné konsekvence budeme mít na zřeteli i v dalších tvrzeních tohoto typu, aniž je budeme výslovně zmiňovat.

Tvrzení. Jsou-li některé dva řádky dané čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n stejné, pak $|A| = 0$.

Důkaz. Nechť řádky matice A s indexy k, ℓ, kde $k \neq \ell$, jsou stejné, takže $a_{kj} = a_{\ell j}$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n$. Uvažme libovolnou permutaci $\sigma \in S_n$ a k ní permutaci $\tau = \sigma \circ \begin{pmatrix} k & \ell \end{pmatrix}$. Pak $\tau(k) = \sigma(\ell)$ a $\tau(\ell) = \sigma(k)$, takže $a_{k\,\tau(k)} = a_{\ell\,\sigma(\ell)}$ a $a_{\ell\,\tau(\ell)} = a_{k\,\sigma(k)}$. Kromě toho pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{k, \ell\}$ je $\tau(i) = \sigma(i)$, a tedy $a_{i\,\tau(i)} = a_{i\,\sigma(i)}$. Navíc $\wp(\tau) = -\wp(\sigma)$. To znamená, že členy $\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ a $\wp(\tau) \cdot a_{1\,\tau(1)} \cdot a_{2\,\tau(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\tau(n)}$ determinantu $|A|$ se liší pouze znaménkem, čili jsou to navzájem opačné prvky okruhu $(R, +, \cdot)$. Podotkneme-li k tomu ještě, že zase naopak $\sigma = \tau \circ \begin{pmatrix} k & \ell \end{pmatrix}$, vidíme, že členy determinantu $|A|$ se rozpadnou do dvojic, které se navzájem odečtou, takže $|A| = 0$.

Tvrzení. Vznikne-li matice $B = (b_{ij})$ přehozením dvou řádků dané čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n, pak $|B| = -|A|$.

Důkaz. Nechť matice B vznikla přehozením k-tého a ℓ-tého řádku matice A, kde $k \neq \ell$, takže $b_{kj} = a_{\ell j}$ a $b_{\ell j} = a_{kj}$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom pro libovolnou permutaci $\sigma \in S_n$ a pro jí odpovídající člen determinantu $|B|$ vychází

$$\begin{aligned} \wp(\sigma) \cdot b_{1\,\sigma(1)} \cdot b_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot b_{n\,\sigma(n)} &= \wp(\sigma) \cdot a_{1\,\tau(1)} \cdot a_{2\,\tau(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\tau(n)} \\ &= -\wp(\tau) \cdot a_{1\,\tau(1)} \cdot a_{2\,\tau(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\tau(n)}, \end{aligned}$$

kde $\tau = \sigma \circ \begin{pmatrix} k & \ell \end{pmatrix}$, a tedy $\wp(\sigma) = -\wp(\tau)$. Poněvadž zobrazení přiřazující každé permutaci $\sigma \in S_n$ permutaci $\sigma \circ \begin{pmatrix} k & \ell \end{pmatrix}$ je bijekcí množiny S_n na ni samotnou, z definice determinantu pak plyne, že $|B| = -|A|$.

Tvrzení. Vznikne-li matice $B = (b_{ij})$ vynásobením všech prvků některého řádku dané čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n zvoleným prvkem c okruhu $(R, +, \cdot)$, pak $|B| = c \cdot |A|$.

Důkaz. Pak totiž pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ máme

$$\wp(\sigma) \cdot b_{1\,\sigma(1)} \cdot b_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot b_{n\,\sigma(n)} \;=\; c \cdot \wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)},$$

takže přímo z definice determinantu dostáváme, že $|B| = c \cdot |A|$.

Tvrzení. Nechť $B = (b_{ij})$ a $C = (c_{ij})$ jsou dvě čtvercové matice řádu n, které se od sebe liší pouze prvky jednoho jediného řádku, řekněme řádku s indexem k, a nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n, která se od matic B, C liší pouze v tom, že prvky jejího k-tého řádku mají tvar $a_{k1} = b_{k1} + c_{k1}$, $a_{k2} = b_{k2} + c_{k2}$, $\ldots$, $a_{kn} = b_{kn} + c_{kn}$. Pak $|A| = |B| + |C|$. Podrobněji vyjádřeno, platí rovnost

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \ldots & a_{k-1\,n} \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \ldots & b_{kn}+c_{kn} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \ldots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \ldots & a_{k-1\,n} \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kn} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \ldots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \ldots & a_{k-1\,n} \\ c_{k1} & c_{k2} & \ldots & c_{kn} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \ldots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Důkaz. V dané situaci ovšem pro každou permutaci $\sigma \in S_n$

a jí příslušný člen determinantu $|A|$ vychází

$$\wp(\sigma)\cdot a_{1\,\sigma(1)}\cdot a_{2\,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\,\sigma(n)} = \\ \wp(\sigma)\cdot b_{1\,\sigma(1)}\cdot b_{2\,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot b_{n\,\sigma(n)} + \wp(\sigma)\cdot c_{1\,\sigma(1)}\cdot c_{2\,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot c_{n\,\sigma(n)},$$

poněvadž $a_{k\,\sigma(k)} = b_{k\,\sigma(k)} + c_{k\,\sigma(k)}$ a $a_{i\,\sigma(i)} = b_{i\,\sigma(i)} = c_{i\,\sigma(i)}$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq k$. Tvrzení tedy opět plyne přímo z definice determinantu.

Tvrzení. Buď dána čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n. Vznikne-li matice $B = (b_{ij})$ tím způsobem, že pro zvolený prvek c okruhu $(R, +, \cdot)$ se k některému řádku matice A přičte jiný řádek matice A, jehož všechny prvky jsou předtím vynásobeny prvkem c, pak platí $|A| = |B|$.

Důkaz. Nechť matice B vznikla z matice A tak, že se ke k-tému řádku matice A přičetl ℓ-tý řádek matice A vynásobený prvkem c. Předpokládejme například, že $k < \ell$. Potom, podrobněji rozvedeno, máme ukázat, že platí

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \ldots & a_{\ell n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} + c\cdot a_{\ell 1} & a_{k2} + c\cdot a_{\ell 2} & \ldots & a_{kn} + c\cdot a_{\ell n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \ldots & a_{\ell n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Označme jako D matici, která vznikne z matice A tak, že místo k-tého řádku matice A se zde zopakuje její ℓ-tý řádek. Pak matice D má dva stejné řádky, a tudíž $|D| = 0$. Vzhledem k tomu, jakým způsobem matice B vznikla, podle předchozích dvou tvrzení máme $|B| = |A| + c \cdot |D|$, takže odtud vychází $|B| = |A|$.

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$. Řekneme, že A je **horní trojúhelníková**

matice, jestliže $a_{ij} = 0$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ splňující $i > j$, tedy jestliže všechny prvky matice A ležící pod hlavní diagonálou jsou rovny nulovému prvku okruhu $(R, +, \cdot)$. Podobně řekneme, že A je **dolní trojúhelníková matice**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ splňující $i < j$. Tehdy jsou nulové všechny prvky matice A ležící nad hlavní diagonálou.

Tvrzení. Buď dána čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n. Je-li A horní trojúhelníková matice anebo dolní trojúhelníková matice, pak $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Důkaz. Uvedený součin je jedním z členů determinantu $|A|$, a sice je to člen odpovídající permutaci $id_{\{1,2,\ldots,n\}}$. Pro každou jinou permutaci $\sigma \in S_n$ ovšem platí, že existuje $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro něž $k > \sigma(k)$, a existuje $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro něž $\ell < \sigma(\ell)$. To plyne z faktu, že $1 + 2 + \cdots + n = \sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n)$, a z toho, že $\sigma \neq id_{\{1,2,\ldots,n\}}$. Je-li ovšem matice A v jednom z uvedených dvou trojúhelníkových tvarů, znamená to, že člen $\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ determinantu $|A|$ odpovídající kterékoliv neidentické permutaci $\sigma \in S_n$ je roven nule. Takže platí uvedené tvrzení.

Toto poslední tvrzení spolu s předchozími poznatky dává metodu, jak v některých případech usnadnit výpočet determinantů vyšších řádů. Týká se to zejména situací, kdy je dána čtvercová matice A řádu n nad nějakým tělesem $(R, +, \cdot)$. Tehdy je možno takovou matici vždy převést například na horní trojúhelníkovou matici opakovanou aplikací řádkových úprav popsaných v předposledním ze shora uvedených tvrzení (tyto úpravy nemění hodnotu determinantu) v kombinaci s přehazováním řádků a sloupců matice (tím se může měnit znaménko determinantu).

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$ nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$. Pro zvolené indexy $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

označme A_{ij} čtvercovou matici řádu $n-1$, která vznikne z matice A vynecháním jejího i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak prvek okruhu $(R,+,\cdot)$

$$\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

se nazývá **algebraický doplněk** prvku a_{ij} v matici A.

Vztah uvedený v následující větě se nazývá **Laplaceův rozvoj** determinantu $|A|$ podle i-tého řádku matice A.

Věta. Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$. Pak pro libovolný řádkový index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$|A| = a_{i1} \cdot \widehat{A}_{i1} + a_{i2} \cdot \widehat{A}_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot \widehat{A}_{in}.$$

Poznámka. Analogický vztah platí také pro sloupcové indexy. To znamená, že je možno provést stejným způsobem Laplaceův rozvoj determinantu také podle některého sloupce. To opět plyne z tvrzení o determinantech transponovaných matic.

Důkaz. Pro libovolné indexy $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme $A_j^{(i)}$ matici řádu n, která vznikne z matice A tak, že v i-tém řádku matice A ponecháme pouze prvek a_{ij} a ostaní prvky tohoto řádku nahradíme nulami. Pak opakovanou aplikací jednoho z dřívějších tvrzení o determinantu matice, jejíž některý řádek lze zapsat jako součet nějakých dvou řádků, dostáváme

$$|A| = |A_1^{(i)}| + |A_2^{(i)}| + \cdots + |A_n^{(i)}|.$$

Zvolme nyní index $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a zkoumejme determinant $|A_j^{(i)}|$. Přehoďme v matici $A_j^{(i)}$ i-tý řádek s $(i-1)$-ním řádkem, potom $(i-1)$-ní řádek s $(i-2)$-hým řádkem, atd., až nakonec druhý řádek s prvním řádkem. Tím se původně i-tý řádek matice $A_j^{(i)}$ ocitne na pozici prvního řádku a řádky, které mu původně předcházely, se objeví v nezměněném pořadí až za ním.

Proveďme dále podobnou operaci se sloupci takto vzniklé matice. Tedy přehoďme j-tý sloupec s $(j-1)$-ním sloupcem, potom $(j-1)$-ní sloupec s $(j-2)$-hým sloupcem, atd., až nakonec druhý sloupec s prvním sloupcem. Matici, která takto nakonec vznikne, označme symbolem $\bar{A}_j^{(i)}$. Při transformaci matice $A_j^{(i)}$ na matici $\bar{A}_j^{(i)}$ bylo provedeno celkem $i+j-2$ změn spočívajících v přehození dvou řádků nebo dvou sloupců, takže podle příslušného dříve uvedeného tvrzení pro determinanty těchto matic platí

$$|A_j^{(i)}| = (-1)^{i+j} \cdot |\bar{A}_j^{(i)}|.$$

Přitom v matici $\bar{A}_j^{(i)}$ se prvek a_{ij} objeví zcela vlevo nahoře a v prvním řádku napravo od něj budou samé nuly. Kromě toho po vynechání prvního řádku a prvního sloupce matice $\bar{A}_j^{(i)}$ zůstane právě matice A_{ij}. Aplikujme nyní definici determinantu na determinant $|\bar{A}_j^{(i)}|$. V této definici se ovšem uplatní pouze ty permutace $\sigma \in S_n$, pro něž $\sigma(1) = 1$, neboť jinak příslušný člen determinantu $|\bar{A}_j^{(i)}|$ obsahuje nulový činitel z prvního řádku matice $\bar{A}_j^{(i)}$ a je tudíž roven nule. Permutace $\sigma \in S_n$ s vlastností $\sigma(1) = 1$ lze ovšem chápat jako permutace množiny $\{2, \ldots, n\}$. Chápeme-li tato čísla jednou jako řádkové indexy a podruhé jako sloupcové indexy, jedná se o ty řádky a sloupce matice $\bar{A}_j^{(i)}$, v nichž je právě uložena matice A_{ij}. Navíc pro paritu $\wp(\sigma)$ takové permutace σ není podstatné, chápeme-li ji jako permutaci množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ nebo $\{2, \ldots, n\}$. To ale ukazuje, že členy determinantu $|\bar{A}_j^{(i)}|$ odpovídající permutacím $\sigma \in S_n$ s vlastností $\sigma(1) = 1$ jsou právě součiny prvku a_{ij} s libovolnými členy determinantu $|A_{ij}|$. Takže dostáváme

$$|\bar{A}_j^{(i)}| = a_{ij} \cdot |A_{ij}|.$$

Dosazením z této rovnosti do předchozího vztahu a jeho následným použitím v úvodním vyjádření determinantu $|A|$ na počátku tohoto důkazu obdržíme dokazovanou rovnost.

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$. Řekneme, že tato matice A je v **polorozpadlém tvaru**, existuje-li index $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ takový, že buďto $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = k+1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, k$, anebo $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$ a $j = k+1, \ldots, n$. Zavedeme-li čtvercové matice $B = (a_{ij})_{i=1,\ldots,k,\, j=1,\ldots,k}$ a $C = (a_{ij})_{i=k+1,\ldots,n,\, j=k+1,\ldots,n}$ a dále matice $F = (a_{ij})_{i=1,\ldots,k,\, j=k+1,\ldots,n}$ a $G = (a_{ij})_{i=k+1,\ldots,n,\, j=1,\ldots,k}$, pak takovou matici A lze schematicky psát v jednom ze tvarů

$$A = \begin{pmatrix} B & F \\ O & C \end{pmatrix} \qquad \text{nebo} \qquad A = \begin{pmatrix} B & O \\ G & C \end{pmatrix},$$

kde O představuje nulovou matici, pokaždé odpovídajícího typu.

Tvrzení. Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n v jednom z polorozpadlých tvarů tak, jak byly popsány výše, pak pro její determinant platí $|A| = |B| \cdot |C|$.

Důkaz. Předpokládejme například, že $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = k+1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, k$. Uvažme libovolnou permutaci $\sigma \in S_n$ a jí odpovídající člen $\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ determinantu $|A|$. Je-li zde pro některé $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ splněno $\sigma(i) \in \{1, \ldots, k\}$, pak $a_{i\,\sigma(i)} = 0$, takže dotyčný člen determinantu $|A|$ je roven nule. Stačí tedy uvažovat pouze ty permutace $\sigma \in S_n$, které pro každé $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ splňují $\sigma(i) \in \{k+1, \ldots, n\}$. Tyto permutace pak ale také pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ splňují $\sigma(i) \in \{1, \ldots, k\}$. To jsou pak ovšem právě permutace tvaru $\sigma = \varrho \circ \eta$, kde ϱ je libovolná permutace množiny $\{1, \ldots, k\}$ a η je libovolná permutace množiny $\{k+1, \ldots, n\}$. Příslušný člen determinantu $|A|$ lze pak zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} &\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)} \\ &\qquad = \wp(\varrho) \cdot a_{1\,\varrho(1)} \cdot \ldots \cdot a_{k\,\varrho(k)} \cdot \wp(\eta) \cdot a_{k+1\,\eta(k+1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\eta(n)}, \end{aligned}$$

neboť z kapitoly o permutacích víme, že $\wp(\varrho \circ \eta) = \wp(\varrho) \cdot \wp(\eta)$. Vidíme tedy, že členy determinantu $|A|$, které je třeba uvažovat, jsou právě součiny libovolného členu determinantu $|B|$ s libovolným členem determinantu $|C|$. To ukazuje, že $|A| = |B| \cdot |C|$.

Následuje **Cauchyova věta**.

Věta. Pro každé dvě čtvercové matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ stejného řádu n nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$ platí $|A{\cdot}B| = |A| \cdot |B|$.

Důkaz. Sestavme čtvercovou matici H řádu $2n$ tvaru

$$H = \begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix},$$

kde O je nulová čtvercová natice řádu n a $-E$ je opačná matice k jednotkové matici E řádu n. Pak podle předchozího tvrzení víme, že $|H| = |A| \cdot |B|$. Upravujme nyní matici H tak, aby na místě, kde v ní původně byla matice A, vznikla nulová matice O. Toho lze dosáhnout přičítáním vhodných násobků posledních n řádků matice H, tedy řádků matice $\begin{pmatrix} -E & B \end{pmatrix}$, k jejím prvním n řádkům, tedy k řádkům matice $\begin{pmatrix} A & O \end{pmatrix}$. Podle jednoho z dřívějších tvrzení víme, že se těmito úpravami nemění hodnota determinantu $|H|$. Všimněme si podrobně, jaké úpravy s maticí H je třeba udělat. Matici H lze detailně vypsat ve tvaru

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nyní, aby se pro zvolený index $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ objevily v i-tém řádku matice H na prvních n pozicích nuly, je třeba k němu přičíst $(n+1)$-ní řádek matice H vynásobený prvkem a_{i1}, dále $(n+2)$-hý řádek matice H vynásobený prvkem a_{i2}, atd., až nakonec $2n$-tý řádek matice H vynásobený prvkem a_{in}. Tímto způsobem se ovšem současně na místě původně nulové matice O v matici H objeví nová čtvercová matice C řádu n. Takže po provedení všech popsaných úprav obdržíme čtvercovou matici K řádu $2n$ tvaru

$$K = \begin{pmatrix} O & C \\ -E & B \end{pmatrix}.$$

Přitom pro determinant této matice platí $|K| = |H|$. Zvolme kromě indexu $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dále index $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a zjistěme, jaký prvek c_{ij} se objeví v matici C v jejím i-tém řádku a j-tém sloupci. Tedy určeme, jaký prvek se po výše specifikovaných úpravách objeví v i-tém řádku a v $(n+j)$-tém sloupci matice K. Půjde zřejmě o prvek $c_{ij} = a_{i1}{\cdot}b_{1j} + a_{i2}{\cdot}b_{2j} + \cdots + a_{in}{\cdot}b_{nj}$. To ale znamená, že $C = A \cdot B$. Podotkněme, že pak tedy máme $|C| = |A{\cdot}B|$. Přehodíme-li nakonec v matici K první řádek s $(n+1)$-ním řádkem, druhý řádek s $(n+2)$-hým řádkem, atd., až n-tý řádek s $2n$-tým řádkem, obdržíme čtvercovou matici L řádu $2n$ v polorozpadlém tvaru

$$L = \begin{pmatrix} -E & B \\ O & C \end{pmatrix}.$$

Poněvadž jsme provedli celkem n popsaných výměn řádků, pro determinanty matic K a L platí $|K| = (-1)^n{\cdot}\, |L|$. Dále podobně jako na začátku podle tvrzení předcházejícího této větě víme, že $|L| = |-E| \cdot |C| = (-1)^n{\cdot}\, |C|$, takže $|L| = (-1)^n{\cdot}\, |A{\cdot}B|$. Odtud a z předchozí rovnosti pak plyne, že $|K| = |A{\cdot}B|$. Protože $|K| = |H|$ a viděli jsme, že $|H| = |A| \cdot |B|$, dostáváme tak nakonec, že $|A{\cdot}B| = |A| \cdot |B|$.