<u>Sloupcová hodnost matice A</u>

$$h_s(A) = \dim\,[s_1(A), s_2(A), \dots, s_n(A)],$$

kde $[s_1(A), \dots, s_n(A)] \subseteq K^k$

jinak $h_s(A)$ = max počet lin. nezávislých sloupců

<u>Věta:</u> $h_r(A) = h_s(A)$

Teď můžeme definovat <u>hodnost matice A</u> jako číslo

$$h(A) = h_r(A) = h_s(A)$$

Lemma Řádková hodnost se nemění při provádění řádkových úprav.

Totéž platí pro sloupcovou hodnost a sloupcové úpravy

Dk A

$$[s_1(A), \ldots, s_n(A)] = [a s_1(A), \ldots, s_n(A)] \quad \text{pro } a \neq 0$$

$$= [s_2(A), s_1(A), \ldots]$$

$$[s_1(A) + c s_2(A), s_2(A), \ldots]$$

Jasné je, že platí inkluze $\supseteq$

Důkaz $\subseteq$ v 3. případě

$$s_1(A) = \big(s_1(A) + c s_2(A)\big) - c s_2(A) \in [s_1(A) + c s_2(A), s_2(A), \ldots]$$

$$s_i(A) = 1 \cdot s_i(A) \quad \text{pro } i \geq 2.$$

Tj. počet nenulových řádků matice B = počet lin. nezávislých řádků matice B

$$= h_{SR}(B) \underset{\nearrow}{=} h_R(A)$$

podle předchozího lemmatu

Věta o vztahu hodnosti a determinantu

Čtvercová matice A typu $n \times n$ má $h(A) < n$ právě když $\det A = 0$.

Důkaz: $A \xrightarrow{\text{řádk. úpravy}} B \qquad \det A = 0 \iff \det B = 0.$

$h(A) = n \Rightarrow B = \begin{pmatrix} * & & * \\ & * & \\ 0 & & * \\ & & & * \end{pmatrix}$ matice ve schod. tvaru, na diagonále jsou čísla $\neq 0$ $\quad \det B \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0.$

Přímka v $\mathbb{R}^3$ jako průnik dvou rovin

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$h(A) = 2$ .... (a_1, a_2, a_3) a (b_1, b_2, b_3) jsou LN a ~~[illegible]~~ rovnice popisují přímku $n - h(A) = 3 - 2 = 1$

$h(A) = 1$ rovnice jsou „stejné" popisují rovinu

$n - h(A) = 3 - 1 = 2$

$h(A) = 0$ rovnice jsou $0 = 0$, $0 = 0$, popisují $\mathbb{R}^3$

$n - h(A) = 3 - 0 = 3$

② Frobeniova věta o řešitelnosti $Ax = b$.

Soustava $Ax = b$ je řešitelná právě tehdy

$$h(A) = h(A|b)$$

Důkaz. nechť $h(A) = h(A|b)$

$$\dim[s_1(A), \dots s_n(A)] = \dim[s_1(A), \dots s_n(A), b]$$

$$[s_1(A), \dots s_n(A)] \subseteq [s_1(A), \dots s_n(A), b]$$

podprostory stejné dimenze. Tudíž se musí rovnat

$$[s_1(A), \dots s_n(A)] = [s_1(A), \dots s_n(A), b]$$

b je lineární kombinace sloupců $s_1, s_2, \dots s_n$:

③ <u>O struktuře řešení soustavy $Ay = b$.</u> Nechť $Ax = b$ je řešitelná.

Platí
$$\{y \in K^n,\ Ay = b\} = y_0 + \{x \in K^n,\ Ax = 0\} = \{y_0 + x,\ Ax = 0\}$$

kde y_0 je jedno řešení soustavy $Ay = b$. Toto řešení se nazývá partikulární

<u>Důkaz:</u> $\supseteq$ Platí
$$\begin{array}{rl} & Ay_0 = b \\ + & Ax = 0 \\ \hline & A(y_0 + x) = b + 0 = b \end{array}$$
$\Rightarrow y_0 + x$ je řešení $Ay = 0$.

$\subseteq$ Nechť $Ay = b$ a $Ay_0 = b$.
Potom $A(y - y_0) = Ay - Ay_0 = b - b = 0$ $\quad y - y_0$ je řešení $Ax = 0$.

Lineární nezávislost $[\{u_1, \dots, u_m\}] \subseteq U$. Jestliže $u_1, \dots, u_k$ jsou LN

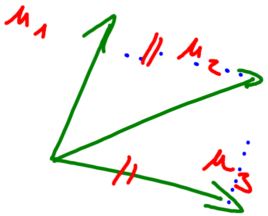
Nechť U je vekt. prostor, $u_1, \dots, u_k \in U$. Jestliže rovnice

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = \vec{o}$$

v neznámých $a_1, \dots, a_k$ má pouze triviální řešení.

$\forall a_1, \dots, a_k \quad a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = \vec{o} \Rightarrow \cancel{\forall} \quad a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$

$\Rightarrow$



$$u_2 = \cancel{a_1} u_1 + \cancel{a_2} u_3$$

$$1 u_1 + (-1) u_2 + 1 u_3 = \vec{o}$$

jsou LZ

$$v_1, \dots, v_k \in [\quad ; L \quad]$$

$$\Rightarrow k \le n$$

Dvě báze $y_1, \dots, y_r,$

$z_1, \dots, z_s$

$$z_1, \dots, z_s \in U = [y_1, \dots, y_r] \Rightarrow \wedge\ z_1, \dots, z_s\ LN \Rightarrow s \le r$$

U, V $\quad \varphi : U \to V$ je lineární

1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ $\quad \forall u, v \in U$

2) $\varphi(a \cdot u) = a\,\varphi(u)$ $\quad \varphi(au + b \cdot v) = a\varphi(u) + b\varphi(v)$

$\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$

$p \in$

$\varphi(p) = p^{(i)}, 1$ nemili n

$\varphi'(p) = p$

$\varphi : U \to V$, $\dim U < \infty$

$\dim U = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$

$\varphi(p) = p^{(i)}$

$\varphi(p) = \sum_{i=2}^{8} p^{(i)}$

$v_1, \ldots, v_k$ baza $\operatorname{Ker}\varphi$

razširimo na $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_l$ .. baza U

$\dim U = k + l \qquad \dim \operatorname{Ker}\varphi = k$

$\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

Ukažimo, da $\dim \operatorname{Im}\varphi = l$.

$\varphi(p) = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx$

Ukažimo, da $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_l)$ je baza $\operatorname{Im}\varphi$

$\varphi(u) = \varphi(a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k + b_1 u_1 + \ldots + b_l u_l)$

$= 0 + b_1 \varphi(u_1) + \ldots + b_l \varphi(u_l)$