Operace s maticemi

Matice typu $k \times n$ $\quad (k/n)$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kn} \end{pmatrix}$$

$A_{ij} \in \mathbb{K}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

A_{ij}

i-tý řádek $\qquad$ j-tý sloupec

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\qquad$ matice $1 \times n$ řádkový vektor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

matice $k \times 1$ sloupcový vektor

(3)

Vlastnosti násobení číslem

$$c \cdot (A+B) = (c \cdot A) + (c \cdot B)$$

$$(c+d)\, A = cA + dA$$

$$c \cdot (d A) = (cd) \cdot A$$

$$1 \cdot A = A$$

Násobení matic

Motivací studia soustavy lin. rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

(5) $A = (a_{ij})$ tvaru $k \times n$ je tvořena k řádky.

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}$$

$$(k \times n) \cdot (n \times 1) = k \times 1$$

$$k/n \cdot n/1 = k/1$$

7

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&-2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&8\\3&2&0\\1&3&3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{matrix}18&20&27\\-2&-4&-21\end{matrix}}$$

$A = (a_{ij})$ typu $k \times n$

$$A \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\ \\a_{k1}&a_{k2}&\dots&a_{kn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \\a_{k1}\end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = s_1(A)$$ 1. sloupec matice A

(9) E_n je matice $n \times n$, která má na diagonále 1 a všude jinde 0

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

hlavní diagonála matice

$$\underset{k\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{E_n} = \underset{k\times n}{A} = \begin{pmatrix} s_1(A) & s_2(A) & s_3(A) & \ldots & s_n(A) \end{pmatrix}$$

Matice E_n se nazývá jednotková matice řádu n

$$\underset{k\times k}{E_k} \cdot \underset{k\times n}{A} = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix} = A$$

Ani pro A, B tvaru $n \times n$ obecně $\boxed{\text{neplatí}}$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Co platí: násobení je asociativní

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$ kdykoliv má násobení smysl

(14) Podobně místo $(A \cdot B) + (A \cdot C)$

píšeme $A \cdot B + A \cdot C$

Rovněž platí

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

- Jednotková matice E_n a E_k

A matice typu $k \times n$, pak $E_k \cdot A = A$

$$A \cdot E_n = A$$

16

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}+b_{21}&b_{12}+b_{22}\\2(b_{11}+b_{21})&2(b_{12}+b_{22})\end{pmatrix}\neq E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Matice transponovaná k matici A typu $\underline{k\times n}$ je matice A^T typu $\underline{n\times k}$ taková, že

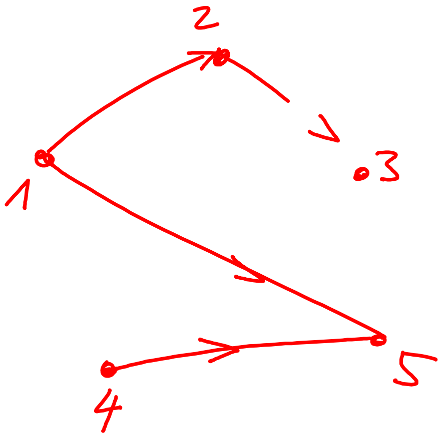
$$(A^T)_{ij}=A_{ji}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\8&9&10\end{pmatrix}\qquad A^T=\begin{pmatrix}1&8\\2&9\\3&10\end{pmatrix}\qquad A_{13}=3=A^T_{31}$$

18 Aplikace násobení matic

Orientovaný graf $G = (V, H)$ → orient. hrany

V – množina uzlů; H – uspořádané dvojice uzlů

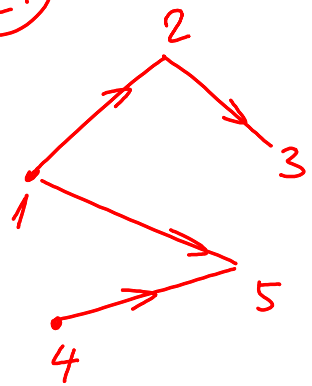


V má uzly $1, 2, 3, \dots n$

Grafu lze přiřadit matici A typu $n \times n$ takovou, že

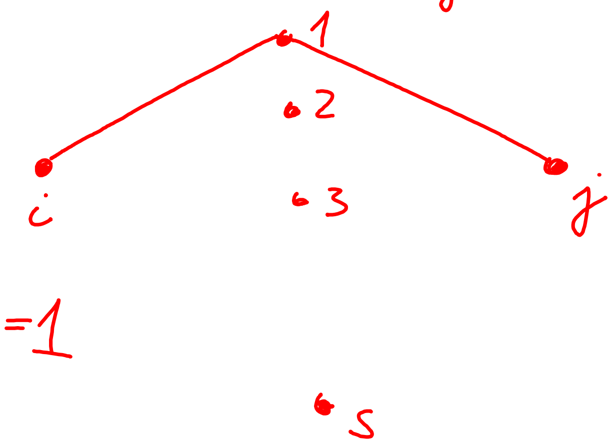
$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{existuje hrana z } i \text{ do } j \\ 0 & \text{neexistuje} \end{cases}$$

21



Cest délky 2 z i do j je

$$(A \cdot A)_{ij} = (A^2)_{ij}$$



$A_{i1} = 1$ $\qquad$ $A_{1j} = 1$

$$(A \cdot A)_{ij} = A_{i1} \cdot A_{1j} + \dots \dots$$

1 1

1 0

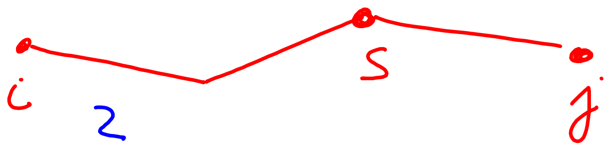
1 0

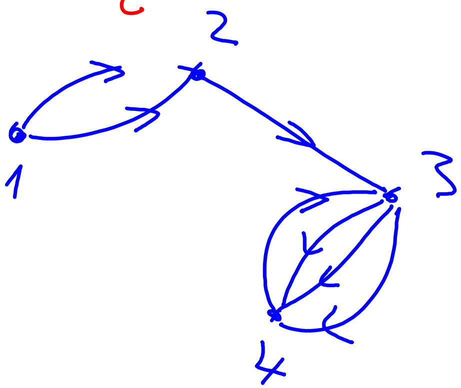
0 0

(23)

$$\ldots + \underbrace{A^2_{is}}_{\text{počet cest délky 3 přes s jako 3. zastávku}} \underbrace{A_{sj}} + \ldots$$

počet cest délky 3 přes s jako 3. zastávku





Obecně

$(A^k)_{ij}$ je počet cest délky k z i do j

A_{ij} je počet cest z i do j

$(A^2)_{ij}$ počet cest délky 2 z i do j