(1) **Inverzní matice**

Nechť A je čtvercová matice $n \times n$ s prvky v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Inverzní matice k matici A je matice B tvaru $n \times n$ taková, že

$$A \cdot B = E = B \cdot A \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Věta: Ke každé matici existuje nejvýše jedna inverzní.

Důkaz: Nechť B a C jsou inverzní matice k matici A.

$$B = B \cdot E = B(A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = E \cdot C = C$$

③

ERO = element. řádk. operace

- výměna dvou řádků
- daný řádek vynásobíme číslem $c \neq 0$
- k danému řádku přičteme c-násobek jiného

e ... elementární řádk. operace

A matice $k \times n$ || $e(A)$ bude matice A po provedení
E_k jedn. matice $k \times k$ || elem. řádkové operace e

<u>Věta</u> Nechť e je elem. řádk. operace a A matice $k \times n$. Potom platí

$$e(A) = e(E_k) \cdot A$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{e(E_k)} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ & & & \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_3(A) \\ r_2(A) \\ r_1(A) \\ r_4(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix} = e(A)$$

• c- násobek $\quad c \neq 0 \quad$ 2. řádku

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{e(E_k)} \cdot A = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ c\,r_2(A) \\ r_3(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix} = e(A)$$

7 **Věta** Ke každé element. matici $e(E_k)$ existuje inverzní.

Důkaz

- výměna 1. a 3 řádku

$$e(E_k)\cdot e(E_k) = E_k$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ & & & & \ddots & \\ & & 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & & & & & \end{pmatrix} = E_k$$

9. K 3 řádku přičteme c násobek 1. řádku e

Od 3 řádku odečteme c. násobek 1. řádku e'

$$e(E_k)\cdot e'(E_k) = e(e'(E_k)) = E_k$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ c & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \cdot\ \cdot \\ -c & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - c\cdot & 0 & 1 & 0 & \dots \end{pmatrix} = E_k$$

<u>Důsledek</u> Součin libovolného počtu element. matic má inverzní matici.

11 Příklad $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

zde není nulový řádek

A má inverzní

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

A^{-1}

(13) Nyní Důkaz algoritmu

$$(A|E) \xrightarrow{ERO} (\underbrace{E_p \cdots E_2 E_1 A}_{\tilde{A} \text{ ve schod. tvaru}} \,|\, E_p \cdots E_2 E_1 E$$

Má-li A inversi, pak má inversní matici i rovnice

$$E_p \cdots E_2 E_1 A = \tilde{A}$$

Jestliže $\tilde{A}$ má nulový řádek, pak nemá inversi $(\tilde{A} \cdot B = (0 0 \ldots 0))$ tedy ani A nemá inversní matici.

$$E_q \cdots E$$

$$(A|E) \rightsquigarrow (\tilde{A} | \tilde{B}) \xrightarrow{E\tilde{R}O} (\overbrace{E_q E_{q-1} \cdots E_p \cdots E_1 A}^{E_n} \,|\, E_q \overset{\|}{\cdots} E_1^{-1} E)$$

15 Nyní už je lehké dokázat, že $A \cdot B = E$

$$A \cdot B = \left(E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_q^{-1}\right)\left(E_q E_{q-1} \dots E_2 E_1\right) =$$

$$= E_1^{-1} E_2^{-1} \dots \underbrace{\left(E_q^{-1} E_q\right)}_{E} \dots \dots E_2 E_1 = \dots\dots = E$$

Tedy skutečně $B = A^{-1}$.

(17)

Definice vekt prostoru

Neprázdná množina V společně s operacemi

sčítání $+ : V \times V \longrightarrow V$, $\quad (\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v}$

a násobením skalárem $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$, $\quad (a, \vec{u}) \mapsto a \cdot \vec{u}$, $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$,

které mají následující vlastnosti:

(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ komutativita

(2) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{z} \in V \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{z} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{z})$ asociativita

(3) $\exists \vec{0} \in V \quad \forall \vec{u} \in V \quad \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ nulový vektor

(4) $\forall \vec{u} \in V \ \exists -\vec{u} \in V \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ opačný vektor

$\vec{o} = $ „ „ ;)

$-(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$

Tyto dvě operace splňují všechny axiomy vekt. prostoru

$\mathbb{R}^n \quad \vec{u} = (x_1, x_2, \dots x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}$

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$c\,(x_1, \dots, x_n) = (c x_1, c x_2, \dots, c x_n)$

Vektorový prostor nad $\mathbb{R}$

K definici: je-li násobení $\mathbb{R} \times V \to V$
mluvíme o vekt. prostoru nad $\mathbb{R}$
je-li násobení $\mathbb{C} \times V \to V$
jde o vekt. prostor nad $\mathbb{C}$

Vekt. prostor V
nad $\mathbb{K}$.

$\mathbb{R}[x]$ polynomy v proměnné x

sčítání polynomů
násobení skalárem

má požadované vlastnosti
je to vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

zobrazení z $[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f : [0,1] \to \mathbb{C} \quad , \quad g . [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(f+g)(x) \underset{def}{:=} f(x) + g(x)$$

násobení číslem $z \in \mathbb{C}$ $\quad (z \cdot f)(x) = z \cdot f(x)$

Množina těchto funkcí s definovanými operacemi je
vekt. prostor nad $\mathbb{C}$.