

② Proba budeme, inverznu maticu k A označovat jako A^{-1} !

Věta Jestliže matice A a B mají inverznu, pak i $A \cdot B$ má inverzní matici a platí

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Úč. úloha. Prvníme, že $B^{-1} \cdot A^{-1}$ je inverzní k $A \cdot B$.

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (A (B \cdot B^{-1})) A^{-1} = (A \cdot E) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$$

Analogicky

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = \dots \dots \dots = E$$

④ $e(E_k)$ nazýváme element matice

Na formulace věty μ : elementární operace lze realizovat na roveniv element matricemi sleda.

Důkaz:

(\forall Vjímima 1. o 3 řádku)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & & & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

- \otimes 3 iādhu piēteme c-nāroter 1 iādhu
 $e(E_k)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ c a_{11} + a_{31} & c a_{12} + a_{32} & \dots \\ r_4(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix}$$

$$= e(\Delta).$$

8

Dz pomoci predchozi vety . Plati $e(E_k) \cdot A = e(A)$

$$e(E_k) \cdot e(E_k) = e(e(E_k)) = E_k$$

- vynasobeni cislem $c \neq 0$, narobime 2. videl e_c

$$e_c(E_k) \cdot e_{c^{-1}}(E_k) = e_c(e_{c^{-1}}(E_k)) = E_k$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

⑩ Algoritmus na výpočet inverzní matice (pomocí tzv. zpětné Gaussovy eliminace) A matice $n \times n$

$$(A | E_n) \xrightarrow{\text{děláme ERO tak, abychem z A dostali schod tvar}}$$

$$(\tilde{A} | \tilde{B})$$

↑
ve schod. tvaru

↑ tento okamžik zpětně, sde \tilde{A} má nulový iádek. Pokud ano, pak A nemá inverzní matici

Pokud ne, pokračujeme takto.

$$(\tilde{A} | \tilde{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \tilde{B} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{ERO}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \tilde{B} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Provedíme ERO tak, abychem na prvních řádkách dostali 0}} (E_n | B)$$

B je hledaná inverzní matice.

$$\textcircled{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-3 \mp \frac{21}{5} - \frac{6}{5}$

$$\textcircled{46} \quad B = E_q E_{q-1} \dots E_1 \text{ invertibilni} \quad B \cdot A = E_n$$

$$E_q E_{q-1} \dots E_1 A = E \quad | \cdot E_q^{-1} \text{ oboje}$$

$$\underbrace{E_q^{-1} E_q}_{E} E_{q-1} \dots E_1 A = E_q^{-1} E$$

$$E_{q-1} \dots E_1 A = E_q^{-1} \quad | \cdot E_{q-1}^{-1}$$

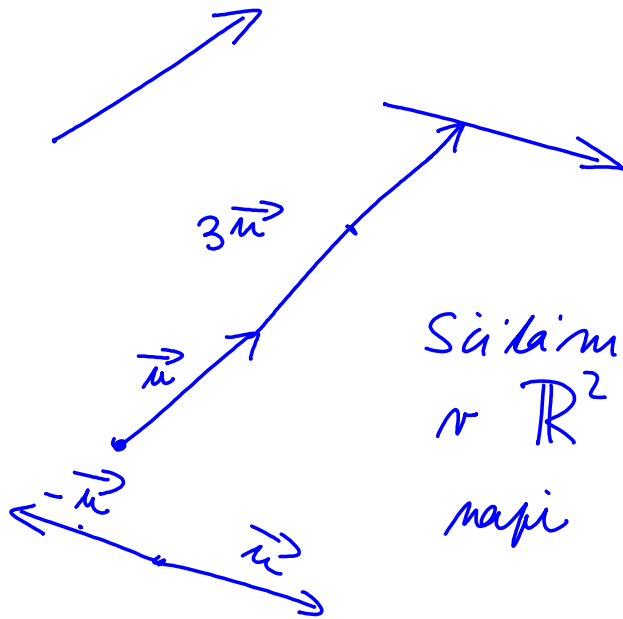
$$\underbrace{E_{q-1}^{-1} E_{q-1}}_E E_{q-2} \dots E_1 A = E_{q-1}^{-1} E_q^{-1}$$

$$E_{q-2} \dots E_1 A = E_{q-1}^{-1} E_q^{-1}$$

Operacijama dostanemo

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{q-1}^{-1} E_q^{-1}$$

① VEKTOROVÉ PROSTORY



Sčítání vektorů a násobení vektorů ~~ve~~ city
v \mathbb{R}^2 nebo \mathbb{R}^3 má jiné vlastnosti

např

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad \text{a} \quad (c\vec{u}) = (dc)\vec{u}$$

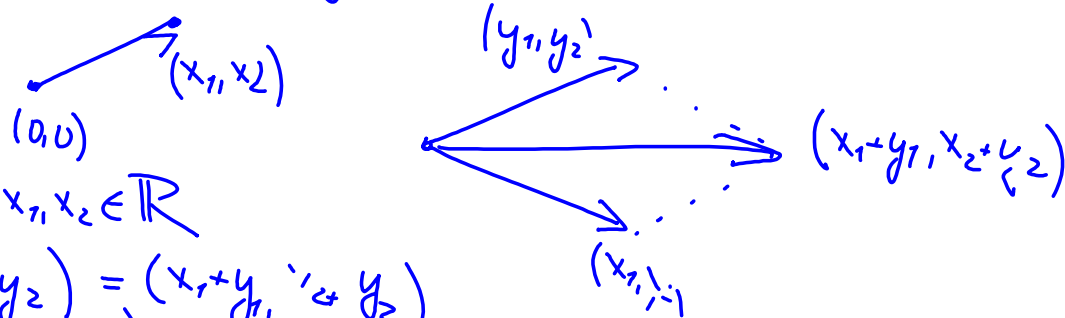
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{z} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{z}) \quad \text{a} \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

a další

- (5) $\forall a, b \in K \quad \forall \vec{u} \in V \quad a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u}$
 (6) $\forall a, b \in K \quad \forall \vec{u} \in V \quad (a+b) \cdot \vec{u} = (a \cdot \vec{u}) + (b \cdot \vec{u}) = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$
 (7) $\forall a \in K \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$
 (8) $\forall \vec{u} \in V \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Příklady vektorových prostorů

① \mathbb{R}^2



$$\vec{u} = (x_1, x_2) \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$c(x_1, x_2) = (cx_1, cx_2)$$

\mathbb{C}^n n. k. o. kompleks čísel

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (z_1 + y_1, \dots, z_n + y_n)$$

$$a(z_1, \dots, z_n) = (az_1, az_2, \dots, az_n)$$

$\in \mathbb{C}$ \mathbb{C}^n o k. m. i. t. o. p. e. r. a. c. e. m. i. j. i. v. e. l. h. . p. e. r. a. d. a. d. \mathbb{C}

Mat _{$k \times n$} (\mathbb{K}) ... množina matic $k \times n$ o k. o. l. e. f. v. \mathbb{K}

sčítání matic a násobení matic číslem z \mathbb{K}
definuje strukturu vekt., kterou nad \mathbb{K}

