

\mathbb{Z} • $V =$ rohasemi a muojemy M do K , K^M , $\text{Map}(M, K)$
 $f, g : M \rightarrow K$ $f+g : M \rightarrow K$, $cf \in M \rightarrow K$
 $(f+g)(m) = f(m) + g(m)$ $c \in K$
 \downarrow \downarrow
 definovani pailaimi $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
 jila mi rohasemi

$$(cf)(m) = c f(m)$$

Jdo qit a nekt pader nad K .

Pro $M = \{1, 2, 3\}$ $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto (f(1), f(2), f(3)) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{Map}(\{1, 2, 3\}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3$$

$$\cong \mathbb{R}^{\{1, 2, 3\}}$$

$$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$$

④

$$\vec{v} \quad 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Odvoďme to z aksiomů:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \vec{v} &= (0+0) \cdot \vec{v} = \underbrace{0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v}}_{\vec{0}} \quad | - 0 \cdot \vec{v} \text{ opacný vektor k } 0 \cdot \vec{v} \\ \underbrace{0 \cdot \vec{v} + (-0 \cdot \vec{v})}_{\vec{0}} &= 0 \cdot \vec{v} + \underbrace{0 \cdot \vec{v} + (-0 \cdot \vec{v})}_{\vec{0}} \\ \vec{0} &= 0 \cdot \vec{v} + \vec{0} \\ \vec{0} &= 0 \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

⑥

$$\frac{1}{a} (a \cdot \vec{v}) = \frac{1}{a} \cdot \vec{0}$$

$$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot \vec{v} = \vec{0} \text{ podle (b)}$$

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

Důkaz (d)

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v} = (1 + (-1)) \vec{v} = 1 \cdot \vec{v} + (-1) \vec{v}$$

$$\vec{0} = \vec{v} + (-1) \vec{v} \quad | + (-\vec{v}) \text{ strana}$$

$$\underbrace{-\vec{v} + \vec{0}} = \underbrace{-\vec{v} + \vec{v}} + (-1) \vec{v}$$

$$-\vec{v} = \vec{0} + (-1) \vec{v}$$

$$-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$$

Príklad Jak vypadají vektorové podprostory v \mathbb{R}^2 ($U = \mathbb{R}^2$ vekt. prostor na \mathbb{R})

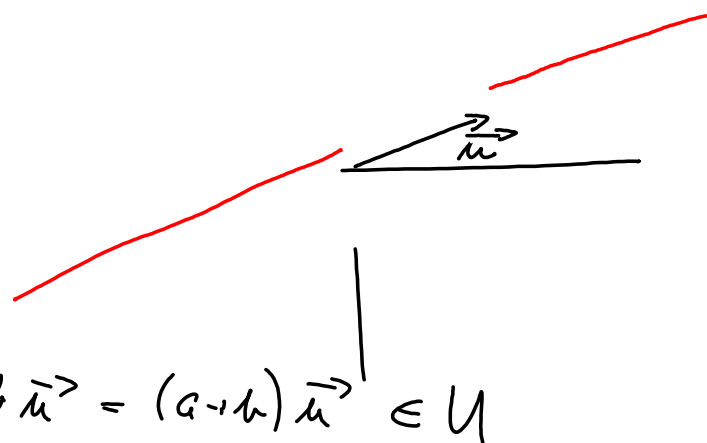
$U = \{\vec{0}\}$ splňuje (1) a (2), je to vekt. podprostor

$\vec{u} \in U, \vec{u} \neq \vec{0}$

$a\vec{u} \in U$ pro každé a

Geometricky to znamená: je přímka
mířící vektoru leží v U

Předp. je $U = \{a\vec{u}, a \in \mathbb{R}\}$ $a\vec{u} + b\vec{u} = (a+b)\vec{u} \in U$
splňuje (1) i (2), je to vekt. podprostor



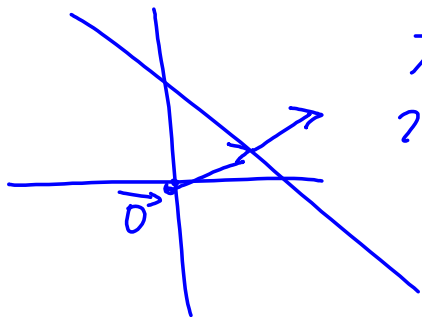
(10)

Příklad Které podprostory v \mathbb{R}^3

$\{\vec{0}\}$, přímky procházející počátkem, roviny procházející počátkem
 \mathbb{R}^3

Příklad něčeho, co není podprostor

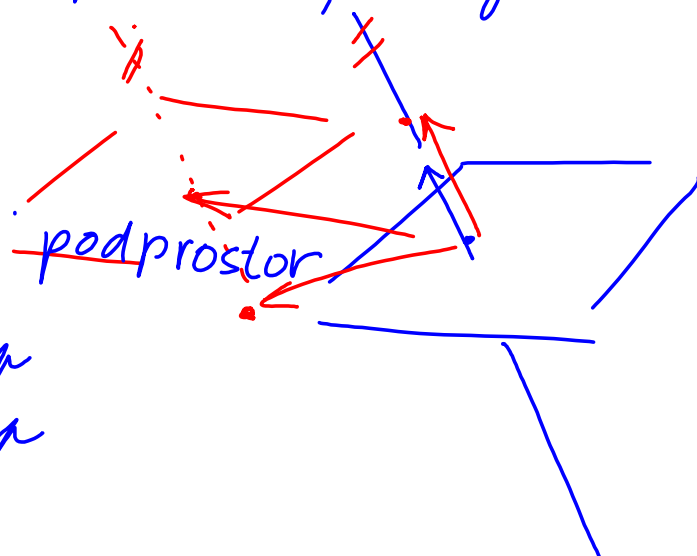
\mathbb{R}^2



$\vec{u} \in n$
 $2\vec{u} \notin n$

n

⋮



⑫ Další příklady

• Uveďte vektor, jehož $\{\vec{0}\}$ a U jsou jeho podmnožiny

• $V = \{(s+t, s-t, t) \in \mathbb{R}^3\}$ je vektor. podmnožina v \mathbb{R}^3

$$\underbrace{(s+t, s-t, t)}_V + \underbrace{(\bar{s}+\bar{t}, \bar{s}-\bar{t}, \bar{t})}_V = \underbrace{((s+\bar{s})+(t+\bar{t}), (s+\bar{s})-(t+\bar{t}), t+\bar{t})}_V$$

• Řešení homogenních soustav lín rovnic s n-rovňami
v \mathbb{K} jsou podmnožiny \mathbb{K}^n

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{matrix} Ax = 0 \\ \downarrow \\ k \times n \end{matrix} \right\}$$

• v. vekt. podmnožina v \mathbb{K}^n

$$Ax=0, Ay=0 \quad A(cx) = cAx=0$$

$$A(x+y)=0$$

$$\textcircled{14} [u, v] = \{ au + bv, a, b \in \mathbb{R} \} = \{ a(3v) + bv = (3a+b)v \} = \{ kv, k \in \mathbb{R} \}$$

$$u = 3v$$

\vec{u} nemis máibbhem \vec{v} , $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \{ a\vec{u} + b\vec{v}, a, b \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$$

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \mathbb{R}^2$$

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2 \neq \vec{0}$$

\vec{u}_1 nemis máibbhem \vec{u}_2

$$\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$$

$$\begin{aligned} A\vec{u}_1 + B\vec{u}_2 + C\vec{u}_3 &= A\vec{u}_1 + B\vec{u}_2 + C(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) \\ &= (A+Ca)\vec{u}_1 + (B+Cb)\vec{u}_2 \end{aligned}$$

16) Průkha Kdy \vec{u} vektor $\vec{u} \in [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k]^2$

Přave tedy $\exists a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ tak, že

$$\vec{u} = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_k \vec{u}_k \quad (*)$$

„Násme spíše sada vektorů $\{*\}$ neznačím, a_1, a_2, \dots, a_k má řešení:

$$\underline{U = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \stackrel{?}{\subseteq} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

15

Příklad $\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 - 8\vec{u}_2 \quad | \quad (-1)\vec{u}_3$

Typu vektorů jsou lineárně závislé.

$$\vec{0} = 2\vec{u}_1 - 8\vec{u}_2 - \vec{u}_3$$

$(2, -8, -1) \neq (0, 0, 0)$ a platí $2\vec{u}_1 - 8\vec{u}_2 - \vec{u}_3 = \vec{0}$

Lemma: Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ ($k \geq 2$) jsou lineárně

nezávislé právě tehdy když jeden vyjádří jako lineární kombinaci ostatních

Důkaz \Leftarrow viz předchozí příklad

\Rightarrow Nechtě $a_1\vec{u}_1 + \dots + a_k\vec{u}_k = \vec{0}$ a nechtě jedno z $a_i \neq 0$. Předpokládejme

že $i=2$. $a_1\vec{u}_1 + a_3\vec{u}_3 + \dots + a_k\vec{u}_k = -a_2\vec{u}_2 \quad | \quad \frac{1}{(-a_2)}$

② Definice (nepřidělanější a dnoš mi pře dnošty)

Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ jsou **lineárně nezávislé**,
jedině rovnice

$$x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_k \vec{u}_k = \vec{0}$$

v neznámých $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{K}$ má pouze nulové

rošení $(x_1, x_2, \dots, x_k) = (0, 0, \dots, 0)$.

Tradiční definice: $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ jsou lin. nezávislé, jedině

$\forall (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{K}^k$ platí: $a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_k \vec{u}_k = \vec{0} \implies a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

