

Linearni otal - opadecani

Lin otal vektoru  $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$  je navedena

$$[u_1, u_2, \dots, u_k] = \left\{ a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k \in U, a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K} \right\}$$

$u \in [u_1, u_2, \dots, u_k]$  ma'ni hoditi existuje  $k$ -tice  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{K}^k$   
tak, ze  $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$

Definice Povedeme, ze vektoru  $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$  generuju  
vektorij prostor  $U$ , jizliže pro kaide  $u \in U$  existuje  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$   
tak, ze

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k.$$

$\approx$  jizak lze kade naprad takto:  $U = [u_1, u_2, \dots, u_k]$

③ Definice báze vektorového prostoru Necht  $U$  je vektorový prostor nad tělesem  $K$ .  
 Řekneme, že podprostor  $U$  je generován vektory  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in U$  právě tehdy, když platí:

$$(1) \forall \vec{u} \in U \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in K \quad \vec{u} = a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_n \vec{u}_n$$

(vektory  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  generují prostor  $U$ )

( $\Leftarrow$ ) Vektory  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  jsou lineárně nezávislé:

$$\text{Pokud } x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

to znamená, že  $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$  má pouze triviální řešení

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

Příklady  $u_1 = (1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 0)$ ,  $u_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$  je báze prostoru  $\mathbb{R}^3$

Protože je ideál generovaný  $x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$   
 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$  Vektory jsou L.N.

$$\textcircled{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & | & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & | & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & b_3 \\ 0 & -1 & 1 & | & b_2 - b_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 & | & b_1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & | & b_3 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & | & b_2 - b_1 + b_3 \end{pmatrix}$$

Matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Vektorji  $u_1, u_2, u_3$  kani kani  $\mathbb{R}^3$ .

Nanin citem lude dokanad

① kadi'ru farku  $U$  kowace' dimense existuji kane

② kadi' dui kane maji' shugun' acik muti

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

⑦

Kryje edek kaidij sanam  $\langle N \rangle$  vekhou' lae deplm. l na brai.

Dh di'slodhu Nochi  $U$  pi poka koneine' dimense. Pak exstuji

veklauy  $u_1, u_2, \dots, u_e$  labore, ie  $[u_1, \dots, u_e] = U$ .

Nochi  $v_1, v_2, \dots, v_k$  pi dany' sanam  $\langle N \rangle$  vekhou'

Podle piedclan' vity, lae  $\alpha$  vekhou'  $u_1, u_2, \dots, u_e$  vybral

veklauy  $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$  lab, ie

(1)  $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$  jrau  $\langle N \rangle$

(2)  $[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_e] \cong [u_1, u_2, \dots, u_e] = U$

Tady  $[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}] = U$ ,  $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$  generuji  $U$

9) Když  $b_1 = 0$ , lze by  $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = \vec{0}$  pro  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$

To by byl ovšem spíše triviální vektor  $v_1, v_2, \dots, v_k$  pro  $L_N$ .

Tedy  $b_1 \neq 0$  a my musíme spočítat  $n_1$  jako lineární kombinaci

$$\text{vektorů } v_1, v_2, \dots, v_k \quad n_1 = -\frac{a_1}{b_1} v_1 - \frac{a_2}{b_1} v_2 - \dots - \frac{a_k}{b_1} v_k = \sum_{i=1}^k c_i v_i$$

Důkaz: Některé řádky vektorů. Platí

- $v_1, v_2, \dots, v_k$  jsou  $L_N$

- $[v_1, v_2, \dots, v_k, n_1] = [v_1, v_2, \dots, v_k, \sum_{i=1}^k c_i v_i] = [v_1, v_2, \dots, v_k]$

(11) •  $N_1, \dots, N_k, M_{i_1}, \dots, M_{i_l}, M_e$  jsou  $\mathbb{L}N$

řekněme  $i$  place,  $i$  druhá podmínka:

$$\begin{aligned} [N_1, N_2, \dots, N_k, M_{i_1}, \dots, M_{i_l}, M_e] &= [N_1, N_2, \dots, N_k, M_{11}, \dots, M_{l1}, M_e] \\ &= [N_1, N_2, \dots, N_k, M_{11}, \dots, M_{l1}] \end{aligned}$$

(b)  $N_1, N_2, \dots, N_k, M_{i_1}, \dots, M_{i_l}, M_e$  jsou  $\mathbb{L}\mathbb{Z}$

↑ k tomu při radě  $M_e$  nepřeseme

Manic, stejně jako  $M_e$   $l=1$  lze dohánět, se

$$M_e = \sum_{i=1}^k c_i N_i + \sum_{j=1}^l \text{dig}_j M_{i_j}$$

⑭ Vektory  $w_i \in \mathbb{K}^n$  budeme považovat za sloupce. Zapišme je jako sloupce matice

$$(w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m)$$

a tuto matici upravíme pomocí elementárních úprav na schodovitý tvar. Ve schodovitém tvaru označíme sloupce, v nichž leží nějaký vedoucí koeficient řádku, jako

$i_1, i_2, \dots, i_r$ . Potom vektory  $w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_r}$  mají předem určené

hodnoty

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ERO}} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & \textcircled{2} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$i_1=1$     $i_2=2$     $i_3=4$

①⑥

Steinitzova větaMocná  $v_1, v_2, \dots, v_k \in [u_1, u_2, \dots, u_n] \subseteq U$ .ještě  $v_1, v_2, \dots, v_k$  jsou lin. nezávislé, pak  $k \leq n$ .Důsledek Každé dvě báze  $v$  prostoru  $U$  mají stejný počet prvkůDůkaz: Mocná  $v_1, \dots, v_k$  a  $u_1, \dots, u_n$  jsou tyto dvě báze.

$$v_1, v_2, \dots, v_k \in U = [u_1, \dots, u_n]$$

↓  
 $v_1, v_2, \dots, v_k$  jsou lin. nezávislé, podle S.V. je  $k \leq n$ .

$$u_1, u_2, \dots, u_n \in U = [v_1, v_2, \dots, v_k]$$

$u_1, u_2, \dots, u_n$  jsou  $\perp N_1$  podle S.V. je  $n \leq k$ .

$$k = n$$



