

uk 2 Všechny sloupce sepsujeme takto.

$$(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k) = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} = (u_1 \ \dots \ u_m) A$$

A je matice tvaru $m \times k$ a A

Pro homogenní soustavu $A \cdot x = 0$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in K^k$
 má vždy nějaké netriviální řešení.

$$A \sim \begin{pmatrix} \circ & & & \\ & \circ & & \\ & & \dots & \\ & & & \circ \end{pmatrix}$$

neznámech je více než řádků,
 některé lze volit libovolně ($y \neq 0$)

Věti (x_1, x_2, \dots, x_k) je netriviální řešení soustavy $Ax = 0$. Spočítáme.

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = (u_1, u_2, \dots, u_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \dots, u_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \dots, u_m) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Tedy $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{Z}$.

Definicija ① $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$, $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$

Podle věty o vybraní vektorů lze $v_1, v_2, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots, u_n$ vybrat vektory

$v_1, v_2, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n$ tak, že jsou $\in V$

$$a \left[\begin{array}{c} v_1, v_2, \dots, v_m, \\ u_1, \dots, u_n \end{array} \right] = [v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n] = U$$

Vybrané vektory tvoří bázi, jejich počet musí být n , tj. vybrané vektory jsou pouze v_1, v_2, \dots, v_m

Definicija ② Máme $v_1, v_2, \dots, v_m \in U$ a n nich lze vybrat lineárně nezávislé

vybrané vektory tedy tvoří bázi U a navíc jejich počet je n , tedy vybrané vektory jsou v_1, v_2, \dots, v_m .

ml 5 Dr ③ V má konečnou dimenzi. Necht $\dim V = n$.

Předpokládejme, že $U \subseteq V$ nemá konečnou dimenzi. Pak lze induktivně nalézt $n-1$ lineárně nezávislých vektorů $u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \in U$

Vytěe. $u_1 \neq \vec{0}$, $u_2 \notin [u_1]$, $u_3 \notin [u_1, u_2]$, atd. $u_{n-1} \notin [u_1, u_2, \dots, u_{n-2}]$

Vektory u_1, u_2, \dots, u_{n-1} jsou $\perp N$ nejen v U , ale i ve V . To je ovšem ve sporu se Steinitzovou větou, neboť

$u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \in [v_1, v_2, \dots, v_n]$ kde v_1, \dots, v_n je báze V

Tedy U má maximální konečnou dimenzi. Rozměme si jít na její bázi

u_1, u_2, \dots, u_k

Tyto vektory jsou $\perp N$ ve V , tedy lze je doplnit na bázi celého V .

$u_1, u_2, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ $\dim U = k \leq n = \dim V$.

zm. 6 Dk (4)

Wzłci u_1, u_2, \dots, u_n j. baze U , $\dim U = n = \dim V$

Paż $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ j. paż $\perp N$ a pażle ① bazi bazi pażam V . Pażo

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_n] = \cancel{V} V$$

Swiadczanie rekłam o dane bazi

$\forall \in \{a$: Rekłam $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ bazi bazi, paż ni rekłaji pażbi

$$(*) \forall u \in U \exists! (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

Dk Dob baze

$$(1) u_1, u_2, \dots, u_n \text{ j. paż } \perp N$$

$$(2) \forall u \in U \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

uk 8 2 h.u. usm. l. l. u_1, \dots, u_n plyne $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = \dots = a_n \cdot b_n = 0$

Tedy $a_i = b_i$, a vyjádření je jednoznačné

Vyřinice souřadnic

Souřadnice vektoru $u \in U$ n. báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je
 n. l. l. skalárů vyřadání n. l. l. vektorů

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{vyřadání} \\ \text{n. l. l. (dárce)} \\ \text{skalárů} \end{array} \right\}$$

l. l. l. l. l.

$$u = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = (b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

nr 10

Príklad. Standardnu bázu v \mathbb{R}^n je $\varepsilon = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Soviatnice vektoru $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ v báze ε je $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Uvažujme vekt. priestor U s bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ nad \mathbb{K}

Zohľadni. $(\)_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n \quad u \longmapsto (u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

je ① bijekcie $\left(\text{lineárne } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \right)$

$$\text{② } (u+v)_\alpha = (u)_\alpha + (v)_\alpha$$

$$\text{③ } (cu)_\alpha = c(u)_\alpha$$

$n \in \mathbb{Z}$
 S Množina vektorů U a V v W je lineárně nezávislá, pokud existují podprostor, která nám dá
 naše podprostor

SOUČET podprostorů U a V je množina

$$U + V = \{ w \in W, \exists u \in U, \exists v \in V, w = u + v \}$$

$$= \{ u + v, u \in U, v \in V \}$$

Věta: $U + V$ je podprostor, když U a V je podprostor

Důkaz: Necht $w_1, w_2 \in U + V$. Chceme dokázat, že také $w_1 + w_2 \in U + V$

Díme: $w_1 = u_1 + v_1, u_1 \in U, v_1 \in V$

$w_2 = u_2 + v_2, u_2 \in U, v_2 \in V$

$w_1 + w_2 = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)$, kde $u_1 + u_2 \in U$ a $v_1 + v_2 \in V$.

Analogicky pro $v_1 + v_2$

SP 14 Sancer a podpriho prikladu neni direktni

$$U \cap V = \{ (0, y_2, 0, y_4) \in V, y_2 + y_4 = 0 \} = \{ (0, y, 0, -y) \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$= [(0, 1, 0, -1)] \neq \{ \vec{0} \}$$

Kdybychem místo V měli $V' = \{ (0, 0, 0, y) \in \mathbb{R}^4 \}$ pak

$$\text{sancer } U + V' = \mathbb{R}^4$$

$$U \cap V' = \{ (0, 0, 0, y) \in \mathbb{R}^4, y = 0 \} = \{ \vec{0} \}$$

$$U \oplus V' = \mathbb{R}^4$$

Pr. 16

Udělejte analogii sady, který znáte a konečných množin

M, N konečné množiny $|M|, |N|$ jejich průniku pak



$$|M \cup N| + |M \cap N| = |M| + |N|$$

Počítání souborů a prvků

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_k] \quad V = [v_1, v_2, \dots, v_\ell]$$

$$U + V = \{u + v, u \in U, v \in V\} = \{a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_\ell v_\ell\} = [u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, \dots, v_\ell]$$

$$\begin{aligned} \text{rk. 18} \\ U \cap V &= \{ w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3, \text{ where } b_1, b_2, b_3 \text{ from linear combination} \} \\ &= \{ (3p+2s)v_1 + pv_2 + sv_3, \quad p, s \in \mathbb{K} \} \\ &= \{ p(3v_1 + v_2) + s(2v_1 + v_3) \} = [3v_1 + v_2, 2v_1 + v_3] \end{aligned}$$

