

$$\dim U \cap V = p, \quad \dim U = p+k, \quad \dim V = p+m$$

Staci nám dokázat, že  $\dim U+V = p+k+m$ . To dokážeme tak, že najdeme nějakou bázi  $U+V$  o  $p+k+m$  pravech.

Dokážeme si, že

$$\overbrace{w_1, \dots, w_p, u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m}^{\text{báze } U+V}$$

(1) První ukážeme, že generují  $U+V$

Typický vektor  $U+V$  je tvaru  $u+v$ ,  $u \in U$ ,  $v \in V$ .

$$u = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_p w_p + b_1 u_1 + \dots + b_k u_k$$

$$v = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_p w_p + d_1 v_1 + \dots + d_m v_m$$

$$u+v = (a_1+c_1)w_1 + \dots + (a_p+c_p)w_p + b_1 u_1 + \dots + b_k u_k + d_1 v_1 + \dots + d_m v_m$$

## LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Definice: Necht  $U$  a  $V$  jsou dva vektorové prostory nad polem  $K$

Zobrazení  $\varphi: U \rightarrow V$   $u \in U$   $\varphi(u) \in V$

se nazývá lineární, pokud

$$(1) \quad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \quad \text{pro každé } u_1, u_2 \in U$$

$$(2) \quad \varphi(a \cdot u) = a \cdot \varphi(u) \quad \text{pro každé } a \in K, u \in U$$

2. Liché vlastnosti lze odvodit dle vlastností.

## Příklady

(1) 1. a nejdůležitější

A matice tvaru  $k \times n$  s prvky v poli  $\mathbb{K}$

$$\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$$

$$\varphi(x) = A \cdot x$$

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x+y) = A(x+y) = A \cdot x + A \cdot y = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(ax) = A(ax) = a(Ax) = a\varphi(x)$$

⑤ Jak vypadají všechny lineární zobrazení  $\alpha: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^2$

Necht'  $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  je lineární.

Necht'  $\varphi(1) = a$

$$\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = x \varphi(1) = x a = a x.$$

Všichni lineární zobrazení  $\alpha: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^2$  jsou tvaru  $\varphi(x) = ax$ ,  $a \in \mathbb{K}$  pevně.

⑥ Obdobně nalezneme všechny lineární zobrazení  $\alpha: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$

$\varphi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$  lineární

Necht'  $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1$ ,  $\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_2$

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \varphi \left( x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = x_1 \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 = (a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

de. 10

$$\textcircled{10} \quad U = C[a, b] \quad V = \mathbb{R}$$

$$\varphi: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{if } \text{linea} \text{imi} \text{ voharemi}$$

$$\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b (cf)(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\textcircled{11} \quad U = \mathbb{R}_u[\lambda] \quad V = \mathbb{R}$$

$$\varphi(p) = p(0) + p'(2011)$$

na 12  
 Aplikace.  $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ki} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A X \end{aligned}$$

Lemma Necht  $\varphi: U \rightarrow V$  a  $\psi: V \rightarrow W$  jsou l. m. zobrazení. Pak  $\psi \circ \varphi: U \rightarrow W$  je l. m. zobrazení

$$(\psi \circ \varphi)(u) = \psi(\varphi(u)) \quad \text{Důkaz * podle definice aplikací}$$

uk. 44

Důkaz: Dokážeme, že  $\varphi(U_1)$  je podprostor

Nechť  $v_1, v_2 \in \varphi(U_1)$ , pak existují  $u_1$  a  $u_2 \in U_1$  tak, že  
 $v_1 = \varphi(u_1)$ ,  $v_2 = \varphi(u_2)$

Pak  $v_1 + v_2 = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \varphi(u_1 + u_2)$   $u_1 + u_2 \in U_1$  neboť  $U_1$  je podprostor

Proto  $v_1 + v_2 \in \varphi(U_1)$

Analogicky pro násobek

( $\varphi(U_1)$  je neprázdná, neboť  $\vec{0} = \varphi(\vec{0}) \in \varphi(U_1)$ )

kl: Lineární zobrazení  $\varphi: U \rightarrow V$  je lineární, má-li být  
 $\ker \varphi = \{ \vec{0} \}$ .

Dk:  $\Rightarrow$  předpokládejme  $\varphi(u) = \vec{0} = \varphi(\vec{0}) \Rightarrow u = \vec{0}$

Přesně  $\ker \varphi = \{ \vec{0} \}$

$\Leftarrow$  Nechtě  $\ker \varphi = \{ \vec{0} \}$  a nechtě  $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$

$$\varphi(u_1) - \varphi(u_2) = \vec{0}$$

$$\varphi(u_1 - u_2) = \vec{0}$$

$$u_1 - u_2 \in \ker \varphi = \{ \vec{0} \}$$

Tedy  $u_1 - u_2 = \vec{0}$ , proto  $u_1 = u_2$   $\varphi$  je injektivní.



(1)  $\varphi(w_1), \dots, \varphi(w_k)$  generují  $\text{im } \varphi$

Typický vektor v  $\text{im } \varphi$  je tvaru  $\varphi(u)$  pro  $u \in U$

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 w_1 + \dots + b_l w_l$$

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi(a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 w_1 + \dots + b_l w_l) \\ &= a_1 \varphi(u_1) + \dots + a_k \varphi(u_k) + b_1 \varphi(w_1) + \dots + b_l \varphi(w_l) \\ &= a_1 \vec{0} + \dots + a_k \vec{0} + b_1 \varphi(w_1) + \dots + b_l \varphi(w_l) \\ &= b_1 \varphi(w_1) + \dots + b_l \varphi(w_l) \end{aligned}$$

(2-)  $\varphi(w_1), \dots, \varphi(w_l)$  jsou lin. nezávislé

Uvažujme součet s nezápornými  $a_1, a_2, \dots, a_l$

$$a_1 \varphi(w_1) + a_2 \varphi(w_2) + \dots + a_l \varphi(w_l) = \vec{0} \quad \xrightarrow{a_i \geq 0} a_l$$

