cv. 2

Příklad $\quad U = \mathbb{R}^2$

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \qquad \beta = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$(id)_{\beta,\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_\beta \ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_\beta \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tv. 4 (3) $\quad (id)_{\alpha,\beta} = (id)^{-1}_{\beta,\alpha}$

Dk plyne z věty o vlastnostech matic zobrazení z minulé přednášky

(1) $\quad (id)_{\alpha,\alpha} = \left((u_1)_\alpha, (u_2)_\alpha \; \dots \right) \qquad u_1 = 1\, u_1 + 0\cdot u_2 + 0\cdot u_3 \dots$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{tikzcd} \overset{\alpha}{U} \arrow[r, "id"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & \overset{\beta}{U} \arrow[r, "id"] & U^{\gamma} \end{tikzcd}$$

$$(id)_{\alpha,\gamma} = (id)_{\gamma\beta} \cdot (id)_{\beta\alpha}$$

složené zobr.

<u>m. 6</u>

$$(\mathrm{id})_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \right) = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\-1&-3&2\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{id})_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\-1&-3&2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}3&-1&0\\1&-1&1\\-3&2&1\end{pmatrix}$$

$(\mathrm{id})_{\mathcal{B},\alpha}$ $\qquad \alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n) \qquad \mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots v_n)$

$$u_1 = (v_1\ v_2 \dots v_n) \begin{pmatrix}u_1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$u_2 = (v_1, v_2, \dots v_n) \begin{pmatrix}u_2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$u_n =$$

$$\underline{\text{př. 6}} \quad (B \mid A) \xrightarrow[\text{B změníli na } E]{\text{ERO, tak. algoritmu}} \left(E = B^{-1}B \mid B^{-1}A\right)$$

$$(id)_{\beta\alpha}$$

GRUPY, PERMUTACE A DETERMINANTY

Příklady grup:

$(\mathbb{Z}, +)$

	$(a+b)+c = a+(b+c)$	asociativita
$\exists 0 \in \mathbb{Z}$	$a+0 = 0+a = a$	neutrální prvek
$\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists -a \in \mathbb{Z}$	$a+(-a) = (-a)+a = 0$	inverzní prvek

navíc

$a+b = b+a$

3 příklad — Matice $n \times n$ v $\mathbb{R}$, které mají inverzní matici

$GL(n,\mathbb{R}) = \{ A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \exists A^{-1} \}$

Vezmeme operaci násobení matic

$B, A \in GL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Tedy $A \cdot B \in GL(n,\mathbb{R})$

Platí: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$\exists\ E \in GL(n,\mathbb{R})$ $\quad A E = E \cdot A = A$

$\forall A\ \exists A^{-1}$ $\quad A A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

neplatí

$A \cdot B = B A$

Př. 12

$e_H \cdot$

$G = \mathbb{R}^+$ operace násobení

$H = \mathbb{R}$ operace při sčítání

$f : G \longrightarrow H$ $\quad f = \log_a$ $\quad a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

operace v G $\quad$ operace v H

$f(1) = \log_a 1 = 0$

$f(x^{-1}) = \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

$f(x \circ y) = f(x) + f(y)$

f zachovává operaci v grupě

$\sim$

Definice: Nechť G a H jsou dvě grupy. Potom zobrazení $f : G \longrightarrow H$ s vlastností $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$

$$e_H \cdot e_H = f(e_G) \cdot e_H$$

$$e_H = f(e_G)$$

Příklad

$$g : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

$$g(x) = a^x \qquad a \in (0,1) \cup (1, \infty)$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

Skládání permutací $\quad S_n$ .. množina všech bijekcí $\{1,2,\dots n\}$ do sebe

$\pi, \rho \in S_n$

$\pi \circ \rho \in S_n$

$$(\pi \circ \rho)(i) = \pi(\rho(i))$$

neutrální permutace

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad e = id$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad e \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \rho$$

$$\pi \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho^{-1} \circ \rho = e \qquad \rho \circ \rho^{-1} = e$$

Definice Nechť $\pi \in S_n$, pak

$$\operatorname{sign} \pi = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \pm 1$$

$i, j \in \{1 .. n\}$ různá

$\sigma(i), \sigma(j) \in \{1 .. n\}$ různá

$n = 3$

$$\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2 - 1} \cdot \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{3 - 1} \cdot \frac{\sigma(3) - \sigma(2)}{3 - 2}$$

3 8

$\sigma(j) - \sigma(i)$

Nahoře ~~ve jmenovateli~~ čitateli je vždy součin čísel

$$\pm(3-1) \mid \pm(2-1) \mid \pm(3-2)$$