# Lineární zobrazení

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou dva vektorové prostory nad týmž tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je zobrazení splňující následující podmínky:

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V})(f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})),$$
$$(\forall s \in T)(\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V})(f(s \cdot \mathbf{u}) = s \cdot f(\mathbf{u})).$$

Pak $f$ se nazývá **lineární zobrazení** nebo též **homomorfismus** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$. Je přitom zřejmé, že uvedené dvě podmínky lze nahradit jedinou podmínkou:

$$(\forall s, t \in T)(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V})(f(s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}) = s \cdot f(\mathbf{u}) + t \cdot f(\mathbf{v})).$$

V prvním z následujících tvrzení navíc uvidíme, že odtud plynou a jsou tedy pak rovněž splněny podmínky:

$$f(\mathbf{o}) = \mathbf{o} \quad \text{a} \quad (\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V})(f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})).$$

Je-li takové lineární zobrazení $f$ vektorových prostorů $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ současně bijekcí množiny $\mathbf{V}$ na množinu $\mathbf{W}$, pak říkáme, že $f$ je **izomorfismus** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ na vektorový prostor $(\mathbf{W}, +, \cdot)$.

Ačkoliv u obou vektorových prostorů $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ i $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ užíváme týchž symbolů $+$ a $\cdot$ pro označení operací sčítání vektorů a vnějšího skalárního násobení, je to jenom kvůli jednoduchosti označení a nevyplývá z toho žádný jiný vztah mezi těmito operacemi v různých prostorech nežli ten, který je dán výše uvedenými definičními podmínkami lineárního zobrazení, resp. izomorfismu vektorových prostorů. Stejná poznámka se týká rovněž nulových vektorů $\mathbf{o}$ v obou vektorových prostorech.

**Příklad.** Nechť $(T, +, \cdot)$ je těleso a nechť $m, n$ jsou přirozená čísla splňující $m \leq n$. Potom kupříkladu zobrazení $h : T^n \to T^m$ dané pro každá $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$ předpisem

$$h\big((s_1, s_2, \ldots, s_n)\big) = \\ \big(s_m + s_{m+1} + \cdots + s_n,\ s_{m-1} + s_m + s_{m+1} + \cdots + s_n, \\ s_{m-2} + s_{m-1} + s_m + s_{m+1} + \cdots + s_n,\ \ldots,\ s_1 + s_2 + \cdots + s_n\big)$$

je očividně lineárním zobrazením vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(T^m, +, \cdot)$.

**Tvrzení.** Jsou-li $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ vektorové prostory nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineární zobrazení vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$, pak rovněž platí, že $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ a že pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ je $f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})$.

**Důkaz.** Máme $f(\mathbf{o}) + f(\mathbf{o}) = f(\mathbf{o} + \mathbf{o}) = f(\mathbf{o})$, odkud plyne $\mathbf{o} = f(\mathbf{o}) - f(\mathbf{o}) = f(\mathbf{o}) + f(\mathbf{o}) - f(\mathbf{o}) = f(\mathbf{o}) + \mathbf{o} = f(\mathbf{o})$. Dále pro každé $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ máme $f(\mathbf{u}) + f(-\mathbf{u}) = f(\mathbf{u} - \mathbf{u}) = f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, takže $f(-\mathbf{u})$ je opačným vektorem k $f(\mathbf{u})$, a tedy je $f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})$.

**Tvrzení.** Nechť $(\mathbf{U}, +, \cdot)$, $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ a $g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ jsou lineární zobrazení vektorových prostorů. Potom složené zobrazení $g \circ f : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ je rovněž lineární zobrazení příslušných vektorových prostorů.

**Důkaz.** Nechť $s, t \in T$ jsou libovolné prvky a nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}$ jsou libovolné vektory. Pak vychází

$$\begin{aligned}(g \circ f)(s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}) &= g(f(s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v})) = g(s \cdot f(\mathbf{u}) + t \cdot f(\mathbf{v})) \\ &= s \cdot g(f(\mathbf{u})) + t \cdot g(f(\mathbf{v})) = s \cdot (g \circ f)(\mathbf{u}) + t \cdot (g \circ f)(\mathbf{v}),\end{aligned}$$

což bylo třeba ověřit.

**Tvrzení.** Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je izomorfismus těchto vektorových prostorů. Potom inverzní zobrazení $f^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ je rovněž izomorfismem těchto vektorových prostorů.

**Důkaz.** Skutečně, poněvadž $f \circ f^{-1} = id_{\mathbf{W}}$ a poněvadž $f$ je lineární zobrazení, pro libovolné prvky $s, t \in T$ a pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}$ máme

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(s\cdot\mathbf{x} + t\cdot\mathbf{y})) = s\cdot\mathbf{x} + t\cdot\mathbf{y} &= s \cdot f(f^{-1}(\mathbf{x})) + t \cdot f(f^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= f(s \cdot f^{-1}(\mathbf{x}) + t \cdot f^{-1}(\mathbf{y})). \end{aligned}$$

Nyní, poněvadž $f^{-1} \circ f = id_{\mathbf{V}}$, aplikací inverzního zobrazení $f^{-1}$ na první a poslední vektor v této posloupnosti rovností odtud obdržíme rovnost $f^{-1}(s\cdot\mathbf{x} + t\cdot\mathbf{y}) = s \cdot f^{-1}(\mathbf{x}) + t \cdot f^{-1}(\mathbf{y})$, což potvrzuje, že $f^{-1}$ je rovněž lineární zobrazení.

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad týmž tělesem a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak pro libovolnou podmnožinu $M \subseteq \mathbf{V}$ klademe $f(M) = \{f(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in M\}$. Podotkněme, že jsme tak mimo jiné též definovali, co je $f(\mathbf{U})$ pro libovolný podprostor $\mathbf{U}$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

**Tvrzení.** Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení těchto vektorových prostorů. Pak pro každý podprostor $\mathbf{U}$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je $f(\mathbf{U})$ podprostor ve vektorovém prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$. Je-li $M \subseteq \mathbf{V}$ podmnožina taková, že $\mathbf{U} = \langle M \rangle$, pak platí, že $f(\mathbf{U}) = \langle f(M) \rangle$.

**Důkaz.** Předně pro nulové vektory máme $\mathbf{o} = f(\mathbf{o})$, takže $\mathbf{o} \in f(\mathbf{U})$. Dále pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f(\mathbf{U})$ existují vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}$ takové, že $\mathbf{x} = f(\mathbf{u})$ a $\mathbf{y} = f(\mathbf{v})$. Odtud pak plyne, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, takže $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in f(\mathbf{U})$. Je-li navíc $s \in T$ libovolný prvek, pak $s\cdot\mathbf{x} = s \cdot f(\mathbf{u}) = f(s\cdot\mathbf{u})$, takže rovněž $s\cdot\mathbf{x} \in f(\mathbf{U})$. Je tedy $f(\mathbf{U})$ podprostor ve $(\mathbf{W}, +, \cdot)$.

Nechť $M \subseteq \mathbf{V}$ je podmnožina taková, že $\mathbf{U} = \langle M \rangle$. Stejně jako výše pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in f(\mathbf{U})$ existuje vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ takový, že $\mathbf{x} = f(\mathbf{u})$. Podle poznatků o generování podprostorů z kapitoly o podprostorech vektorových prostorů pak ale existují přirozené číslo $n$, prvky $s_1, s_2, \dots, s_n \in T$ a vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in M$ takové, že $\mathbf{u} = s_1 \cdot \mathbf{v}_1 + s_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{v}_n$. Poněvadž $f$ je lineární zobrazení, plyne odtud, že $\mathbf{x} = f(\mathbf{u}) = f(s_1 \cdot \mathbf{v}_1 + s_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{v}_n) = s_1 \cdot f(\mathbf{v}_1) + s_2 \cdot f(\mathbf{v}_2) + \cdots + s_n \cdot f(\mathbf{v}_n)$. To ovšem znamená, že $\mathbf{x} \in \langle f(M) \rangle$. Takže platí, že $f(\mathbf{U}) = \langle f(M) \rangle$.

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad týmž tělesem a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak množina vektorů $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V} \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\}$ se nazývá **jádro** lineárního zobrazení $f$.

**Tvrzení.** Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení těchto vektorových prostorů. Pak jádro $\operatorname{Ker} f$ tohoto lineárního zobrazení $f$ je podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Navíc platí, že zobrazení $f$ je prosté právě tehdy, když $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$.

**Důkaz.** Pro nulové vektory máme $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{o} \in \operatorname{Ker} f$. Dále pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$ platí, že $f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$ a $f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, odkud plyne, že $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$. Je-li dále $s \in T$ libovolný prvek, pak rovněž $f(s \cdot \mathbf{u}) = s \cdot f(\mathbf{u}) = s \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$, takže také $s \cdot \mathbf{u} \in \operatorname{Ker} f$. Je tedy $\operatorname{Ker} f$ podprostor ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Je-li zobrazení $f$ prosté, pak ovšem $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$. Nechť naopak $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$. Pak pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ takové, že $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$, platí, že $f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$, čili $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{o}$, a tedy $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Je tedy zobrazení $f$ prosté.

Budeme se dále věnovat lineárním zobrazením vektorových prostorů konečné dimenze. Nechť tedy $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory konečných dimenzí nad týmž tělesem a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak obraz $f(\mathbf{V})$ prostoru $\mathbf{V}$ při tomto zobrazení je podle předposledního tvrzení podprostorem ve vektorovém prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ a je to podprostor konečné dimenze. Dimenze tohoto podprostoru $f(\mathbf{V})$ se nazývá **hodnost** lineárního zobrazení $f$. Podobně jádro $\operatorname{Ker} f$ tohoto lineárního zobrazení je podle posledního tvrzerní podprostorem ve vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a je to ovšem podprostor konečné dimenze. Dimenze podprostoru $\operatorname{Ker} f$ se nazývá **defekt** lineárního zobrazení $f$.

**Příklad.** Nechť $(T, +, \cdot)$ je těleso a nechť $m, n$ jsou přirozená čísla splňující $m \leq n$. Uvažme znovu lineární zobrazení $h$ vektorového prostoru $(T^n +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(T^m +, \cdot)$ popsané v předchozím příkladu. Pak zobrazení $h$ je očividně surjektivní, čili $h(T^n) = T^m$, takže hodnost zobrazení $h$ je rovna $m$. Je-li $m = n$, pak jádro tohoto lineárního zobrazení $h$ je zřejmě $\operatorname{Ker} h = \{\mathbf{o}\}$, takže defekt zobrazení $h$ je roven 0. Je-li ovšem $m < n$, pak jádrem tohoto zobrazení $h$ je podprostor

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} h = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, s_m, s_{m+1}, \dots, s_n) \mid {} & s_m, s_{m+1}, \dots, s_n \in T, \\ & s_m + s_{m+1} + \dots + s_n = 0\}\end{aligned}$$

v $(T^n +, \cdot)$, který podle poznatků o řešení homogenních lineárních rovnic je generován například vektory

$$\mathbf{g}_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, -1, \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m-i})$$

pro $i = 1, 2, \dots, n - m$. Tyto vektory jsou lineárně nezávislé, takže tvoří bázi podprostoru $\operatorname{Ker} h$. Je tedy defekt zobrazení $h$ roven $n - m$.

**Věta.** Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(T, +, \cdot)$ konečných dimenzí a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak pro dimenzi $n$ prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a pro hodnost $k$ a defekt $\ell$ lineárního zobrazení $f$ platí, že $k + \ell = n$.

**Důkaz.** Zvolme bázi $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ podprostoru $f(\mathbf{V})$. Dále zvolme vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$ tak, aby platilo $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $\ldots$, $f(\mathbf{v}_k) = \mathbf{w}_k$. Zvolme také bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ podprostoru $\operatorname{Ker} f$. Ukážeme, že potom vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ tvoří dohromady bázi prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Nechť tedy $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ je libovolný vektor. Pak $f(\mathbf{x}) \in f(\mathbf{V})$, takže existují prvky $t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$ takové, že $f(\mathbf{x}) = t_1 \cdot \mathbf{w}_1 + t_2 \cdot \mathbf{w}_2 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{w}_k$. Položme $\mathbf{y} = t_1 \cdot \mathbf{v}_1 + t_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{v}_k$. Pak ovšem $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$. Položme dále $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Pak ale $f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker} f$. Existují tedy prvky $s_1, s_2, \ldots, s_\ell \in T$ takové, že $\mathbf{z} = s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell$. Odtud plyne, že $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} = t_1 \cdot \mathbf{v}_1 + t_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{v}_k + s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell$. To znamená, že vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ generují celý prostor $\mathbf{V}$.

Ukážeme dále, že jsou tyto vektory lineárně nezávislé. Nechť tedy $t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$ a $s_1, s_2, \ldots, s_\ell \in T$ jsou takové prvky, že $t_1 \cdot \mathbf{v}_1 + t_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{v}_k + s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell = \mathbf{o}$. Odtud plyne, že $t_1 \cdot \mathbf{v}_1 + t_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{v}_k = -s_1 \cdot \mathbf{u}_1 - s_2 \cdot \mathbf{u}_2 - \cdots - s_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell$. To ale znamená, že $t_1 \cdot \mathbf{v}_1 + t_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{v}_k \in \operatorname{Ker} f$, takže $f(t_1 \cdot \mathbf{v}_1 + t_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{v}_k) = \mathbf{o}$. Neboli to znamená, že $t_1 \cdot \mathbf{w}_1 + t_2 \cdot \mathbf{w}_2 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{w}_k = \mathbf{o}$. Poněvadž vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ jsou lineárně nezávislé, plyne odtud, že $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$. Takto dostáváme, že $s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell = \mathbf{o}$. Poněvadž také vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ jsou lineárně nezávislé, plyne odtud též, že $s_1 = s_2 = \cdots = s_\ell = 0$. Tvoří tedy vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ bázi vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. To ale znamená, že $k + \ell = n$.

Základní význam, pokud jde o lineární zobrazení vektorových prostorů konečné dimenze, má následující fakt ozřejmující možnou rozmanitost těchto lineárních zobrazení.

**Věta.** Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(T, +, \cdot)$ konečných dimenzí. Nechť dále vektory $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ tvoří bázi prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Pak pro každou volbu vektorů $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n \in \mathbf{W}$ existuje jediné lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ těchto vektorových prostorů takové, že $f(\mathbf{g}_1) = \mathbf{z}_1$, $f(\mathbf{g}_2) = \mathbf{z}_2$, $\ldots$, $f(\mathbf{g}_n) = \mathbf{z}_n$.

**Důkaz.** Víme, že pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ existují jednoznačně určené prvky $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$, nazývané souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$, takové, že platí $\mathbf{u} = s_1 \cdot \mathbf{g}_1 + s_2 \cdot \mathbf{g}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{g}_n$. Definujme zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tak, že v této situaci každému takovému vektoru $\mathbf{u}$ přiřadíme vektor $f(\mathbf{u}) = s_1 \cdot \mathbf{z}_1 + s_2 \cdot \mathbf{z}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{z}_n$ z $\mathbf{W}$. Pak se přímočarým způsobem ověří, že $f$ je lineární zobrazení, a je jasné, že $f$ splňuje předepsané podmínky.

Nechť naopak $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení takové, že $f(\mathbf{g}_1) = \mathbf{z}_1$, $f(\mathbf{g}_2) = \mathbf{z}_2$, $\ldots$, $f(\mathbf{g}_n) = \mathbf{z}_n$. Pak pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ vyjádřený stejně jako v předchozím odstavci ve tvaru $\mathbf{u} = s_1 \cdot \mathbf{g}_1 + s_2 \cdot \mathbf{g}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{g}_n$ platí, že $f(\mathbf{u}) = s_1 \cdot f(\mathbf{g}_1) + s_2 \cdot f(\mathbf{g}_2) + \cdots + s_n \cdot f(\mathbf{g}_n) = s_1 \cdot \mathbf{z}_1 + s_2 \cdot \mathbf{z}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{z}_n$. To ukazuje, že lineární zobrazení $f$ je takto určeno jednoznačně.

Je-li $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ do něj samotného, pak říkáme,že $f$ je **lineární transformace** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.