Podprostory vektorových prostorů

Vrátíme-li se na okamžik k motivačním úvahám ze začátku minulé kapitoly, pak za podprostory trojrozměrného vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ považujeme jednoprvkovou množinu obsahující nulový vektor $(0, 0, 0)$, dále všechny přímky v tomto prostoru procházející počátkem $[0, 0, 0]$, potom všechny roviny v tomto prostoru procházející počátkem $[0, 0, 0]$, a konečně také celý zmíněný trojrozměrný vektorový prostor sám. Přesněji řečeno, místo přímek by zde bylo třeba mluvit o množinách všech vektorů, jejichž koncové body při umístění v počátku $[0, 0, 0]$ leží na dotyčné přímce, a obdobné upřesnění by se týkalo také rovin. Bude patrno, že toto je jeden konkrétní případ následující obecné definice podprostorů daného vektorového prostoru.

Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ je podmnožina splňující následující podmínky:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{o} \in \mathbf{W}, \\
&(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W})(\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{W}), \\
&(\forall s \in T)(\forall \mathbf{u} \in \mathbf{W})(s \cdot \mathbf{u} \in \mathbf{W}).
\end{aligned}$$

Pak říkáme, že $\mathbf{W}$ je **podprostor** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Tato terminologie je ospravedlněna skutečností, že potom množina $\mathbf{W}$ je uzavřená vzhledem k operaci $+$ sčítání vektorů a také vzhledem ke skalárnímu násobení $\cdot$ vektorů libovolnými prvky tělesa $(T, +, \cdot)$; navíc množina $\mathbf{W}$ obsahuje nulový vektor $\mathbf{o}$ a dále ke každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ obsahuje také opačný vektor $-\mathbf{u}$, poněvadž $-\mathbf{u} = -(1 \cdot \mathbf{u}) = (-1) \cdot \mathbf{u} \in \mathbf{W}$. Takže pak $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ je podgrupa grupy $(\mathbf{V}, +)$ a celkem tak vzniká struktura $(\mathbf{W}, +, \cdot)$, která je zase vektorovým prostorem nad tělesem $(T, +, \cdot)$, neboť také ostatní shora uvedené definiční podmínky vektorového prostoru zůstávají splněny.

V každém vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ jsou podmnožiny $\{\mathbf{o}\}$ a $\mathbf{V}$ množiny $\mathbf{V}$ podprostory vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Znamená to mimo jiné, že $(\{\mathbf{o}\}, +, \cdot)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$, kterému říkáme **nulový vektorový prostor**. Kromě toho ovšem může mít daný vektorový prostor množství dalších podprostorů.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak pro libovolnou podmnožinu $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ platí, že $\mathbf{W}$ je podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ právě tehdy, když $\mathbf{o} \in \mathbf{W}$ a je splněna podmínka

$$(\forall s, t \in T)(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W})(s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v} \in \mathbf{W}).$$

Důkaz. Uvedená podmínka bezprostředně plyne z definičních podmínek podprostoru vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Naopak původní definiční podmínky podprostoru vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ plynou z předpokladu $\mathbf{o} \in \mathbf{W}$ a z výše uvedené podmínky volbami $s = t = 1$ a $s \in T$, $t = 0$, přihlédne-li se k základním vlastnostem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Příklady. Nechť $(T, +, \cdot)$ je těleso a nechť m, n jsou přirozená čísla splňující $m < n$. Viděli jsme, že pak kartézská mocnina $T^n = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \mid s_1, s_2, \ldots, s_n \in T\}$ spolu s operacemi sčítání $+$ a skalárního násobení $\cdot$ definovanými po složkách tvoří vektorový prostor $(T^n, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak množina $T^m \times \{0\}^{n-m} = \{(s_1, s_2, \ldots, s_m, 0, 0, \ldots, 0) \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in T\}$, jež je podmnožinou kartézské mocniny T^n, je podprostorem vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$.

Buď opět $(T, +, \cdot)$ těleso. V minulé kapitole jsme uvedli, co jsou polynomy nad tímto tělesem, a viděli jsme, že množina $T[x]$ všech těchto polynomů spolu s přirozeně definovanými operacemi sčítání a násobení tvoří komutativní okruh $(T[x], +, \cdot)$. Současně jsme viděli, že tak rovněž vzniká vektorový prostor $(T[x], +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Definujme nyní pro libovolný polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ nad $(T, +, \cdot)$ a pro libovolný prvek $t \in T$ **hodnotu** $f(t)$ **polynomu** f **v prvku** t jako prvek tělesa $(T, +, \cdot)$ vypočtený podle předpisu

$$f(t) = a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \dots + a_1 \cdot t + a_0.$$

Pak například množina

$$\{ f \in T[x] \mid (\forall t \in T)(f(t) = f(-t)) \}$$

tvoří podprostor ve vektorovém prostoru $(T[x], +, \cdot)$.

Viděli jsme rovněž, že množina $\mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ všech zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ do množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel spolu s přirozeně definovanou operací sčítání těchto zobrazení a s taktéž přirozeně definovanou vnější operací skalárního násobení těchto zobrazení libovolnými čísly z $\mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor $\big(\mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}, +, \cdot\big)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ všech reálných čísel. Označme nyní $\mathcal{F}\big(\mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}\big)$ množinu všech těch zobrazení $f : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R}$, pro něž množina čísel $\{ r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1,\ f(r) \ne 0 \}$ je konečná. Pak poněvadž pro libovolná dvě čísla $s, t \in \mathbb{R}$ a pro libovolná dvě zobrazení $f, g : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} &\{ r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1,\ s \cdot f(r) + t \cdot g(r) \ne 0 \} \subseteq \\ &\quad \{ r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1,\ f(r) \ne 0 \} \cup \{ r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1,\ g(r) \ne 0 \}, \end{aligned}$$

vzhledem k předchozímu tvrzení je evidentní, že $\mathcal{F}\big(\mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}\big)$ je podprostor vektorového prostoru $\big(\mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}, +, \cdot\big)$.

Generování podprostorů vektorových prostorů

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak pro libovolnou indexovou množinu $I \ne \emptyset$ a pro libovolný soubor podprostorů $\mathbf{W}_i$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, kde $i \in I$, platí, že průnik tohoto souboru podprostorů

$$\bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i \;=\; \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid (\forall i \in I)(\mathbf{v} \in \mathbf{W}_i) \}$$

je také podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Důkaz. Ověření faktu, že množina $\bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i$ splňuje všechny výše uvedené definiční podmínky vektorového podprostoru, pokud jednotlivé množiny $\mathbf{W}_i$ pro $i \in I$ tyto podmínky splňují, je rutinní záležitostí.

Buď dále $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Buď $M \subseteq \mathbf{V}$ libovolná podmnožina. Pak existuje alespoň jeden podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ obsahující množinu M – například celá množina $\mathbf{V}$ je takovým podprostorem. To znamená, že soubor všech těch podprostorů vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, které obsahují množimu M, je neprázdný. Můžeme tedy utvořit průnik tohoto souboru podprostorů. Podle předchozího tvrzení je tento průnik sám podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Tento poslední podprostor pak značíme symbolem $\langle M \rangle$.

Je jasné, že pak $\langle M \rangle$ je nejmenší podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ v systému všech podprostorů tohoto vektorového prostoru částečně uspořádaném inkluzí, který obsahuje množinu M. O tomto podprostoru $\langle M \rangle$ říkáme, že je to podprostor **generovaný** množinou M, a o samotné množině M říkáme, že je to množina **generátorů** podprostoru $\langle M \rangle$. Tato terminologie je odůvodněna následující skutečností. Poznamenejme ještě předtím, že pro $M = \emptyset$ zřejmě máme $\langle M \rangle = \{\mathbf{o}\}$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $M \subseteq \mathbf{V}$, $M \neq \emptyset$ je libovolná podmnožina. Pak platí následující rovnost:

$$\langle M \rangle = \{s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + s_n \cdot \mathbf{u}_n \mid n \in \mathbb{N},\ s_1, s_2, \dots, s_n \in T, \\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in M\}.$$

Poznámka. O vektoru $s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + s_n \cdot \mathbf{u}_n$ říkáme, že je to **lineární kombinace** vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ s koeficienty $s_1, s_2, \dots, s_n$. Podle uvedeného tvrzení je tedy podprostor $\langle M \rangle$

tvořen všemi lineárními kombinacemi konečných posloupností vektorů z M s koeficienty z T.

Důkaz. Označme množinu uvedenou napravo v dokazované rovnosti jako $\mathbf{U}$. Máme ukázat, že pak $\langle M\rangle = \mathbf{U}$. Podle definice je $\langle M\rangle$ nejmenší podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vzhledem k inkluzi obsahující množinu M. Stačí, když ukážeme, že tytéž podmínky platí také pro množinu $\mathbf{U}$. Pak budeme vědět, že vskutku $\langle M\rangle = \mathbf{U}$.

Nejprve ověříme, že $\mathbf{U}$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Ovšem $M \neq \emptyset$, takže můžeme zvolit vektor $\mathbf{u} \in M$ a máme $\mathbf{o} = \mathbf{u} - \mathbf{u} = 1{\cdot}\mathbf{u} + (-1){\cdot}\mathbf{u}$, což ukazuje, že $\mathbf{o} \in \mathbf{U}$. Dále pro libovolné dva vektory $s_1{\cdot}\mathbf{u}_1 + s_2{\cdot}\mathbf{u}_2 + \cdots + s_n{\cdot}\mathbf{u}_n$ a $t_1{\cdot}\mathbf{v}_1 + t_2{\cdot}\mathbf{v}_2 + \cdots + t_k{\cdot}\mathbf{v}_k$ z $\mathbf{U}$, kde $n, k \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$, $t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in M$ platí, že také vektor $s_1{\cdot}\mathbf{u}_1 + s_2{\cdot}\mathbf{u}_2 + \cdots + s_n{\cdot}\mathbf{u}_n + t_1{\cdot}\mathbf{v}_1 + t_2{\cdot}\mathbf{v}_2 + \cdots + t_k{\cdot}\mathbf{v}_k$ náleží do $\mathbf{U}$. Rovněž pro libovolné $t \in T$ také vektor $t{\cdot}(s_1{\cdot}\mathbf{u}_1 + s_2{\cdot}\mathbf{u}_2 + \cdots + s_n{\cdot}\mathbf{u}_n) = (t{\cdot}s_1){\cdot}\mathbf{u}_1 + (t{\cdot}s_2){\cdot}\mathbf{u}_2 + \cdots + (t{\cdot}s_n){\cdot}\mathbf{u}_n$ náleží do $\mathbf{U}$. Je tedy $\mathbf{U}$ podprostor ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Dále pro každý vektor $\mathbf{u} \in M$ máme $\mathbf{u} = 1{\cdot}\mathbf{u}$, takže $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Je tedy vidět, že $M \subseteq \mathbf{U}$.

Nakonec ukážeme, že $\mathbf{U}$ je nejmenší podmnožina ve $\mathbf{V}$ s předchozími dvěma vlastnostmi vzhledem k inkluzi, tedy že $\mathbf{U}$ je nejmenší podprostor ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ splňující $M \subseteq \mathbf{U}$:

Buď tedy $\mathbf{W}$ libovolný podprostor ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ takový že $M \subseteq \mathbf{W}$. Pak je třeba ukázat, že $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$. Tedy pro libovolný vektor $s_1{\cdot}\mathbf{u}_1 + s_2{\cdot}\mathbf{u}_2 + \cdots + s_n{\cdot}\mathbf{u}_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in M$, máme ukázat, že $s_1{\cdot}\mathbf{u}_1 + s_2{\cdot}\mathbf{u}_2 + \cdots + s_n{\cdot}\mathbf{u}_n$ náleží do $\mathbf{W}$. Ovšem z definičních vlastností podprostoru ihned plyne, že podprostor $\mathbf{W}$ je uzavřen vzhledem k tvorbě libovolných lineárních kombinací vektorů s koeficienty z T. Skutečně tedy platí, že $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V}$ jsou podprostory vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Pak množina

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X},\ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$$

se nazývá **součet podprostorů** $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$.

Tvrzení. Součet $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ podprostorů $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ je sám podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Navíc platí

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \langle \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \rangle,$$

čili $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ je podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ generovaný sjednocením podprostorů $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$.

Důkaz. Ověříme, že $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ je podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Poněvadž $\mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{o}$ a $\mathbf{o} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{o} \in \mathbf{Y}$, máme $\mathbf{o} \in \mathbf{X} + \mathbf{Y}$. Jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbf{X}$ a $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbf{Y}$ libovolné vektory, takže pak $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x}' + \mathbf{y}' \in \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ jsou libovolné vektory, potom $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{x}' + \mathbf{y}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}' + \mathbf{y} + \mathbf{y}'$, přičemž $\mathbf{x} + \mathbf{x}' \in \mathbf{X}$, $\mathbf{y} + \mathbf{y}' \in \mathbf{Y}$, což znamená, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{x}' + \mathbf{y}' \in \mathbf{X} + \mathbf{Y}$. Je-li dále ještě $s \in T$ libovolný prvek, pak $s \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = s{\cdot}\mathbf{x} + s{\cdot}\mathbf{y}$, přičemž $s{\cdot}\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $s{\cdot}\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, což znamená, že $s \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in \mathbf{X} + \mathbf{Y}$.

Ukážeme dále, že platí rovnost $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \langle \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \rangle$. Poněvadž $\mathbf{o} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{o} \in \mathbf{Y}$ a pro kterékoliv vektory $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ máme $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{o}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{o} + \mathbf{y}$, je jasné, že $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X} + \mathbf{Y}$. Poněvadž již víme, že $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ je podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, zbývá ukázat, že pro kterýkoliv podprostor $\mathbf{W}$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ splňující $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{W}$ platí $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{W}$. To ale okamžitě plyne z toho, že podprostor $\mathbf{W}$ uzavřen vzhledem ke sčítání vektorů. Je tedy $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ skutečně nejmenší podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vzhledem k množinové inkluzi obsahující jako podmnožiny oba podprostory $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$.

Řekneme, že součet $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ podprostorů $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$ nad tělesem $(T,+,\cdot)$ je **přímý součet**, jestliže $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{o}\}$. V takovém případě uvedený součet podprostorů značíme symbolem $\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V},+,\cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T,+,\cdot)$. Součet $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ podprostorů $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$ je přímým součtem právě tehdy, když pro každý vektor $\mathbf{z} \in \mathbf{X}+\mathbf{Y}$ jsou vektory $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ a $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, pro něž $\mathbf{z} = \mathbf{x}+\mathbf{y}$, určeny jednoznačně.

Důkaz. Nechť máme přímý součet $\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$. Nechť $\mathbf{z} \in \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ je libovolný vektor a nechť $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbf{X}$ a $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbf{Y}$ jsou takové vektory, že $\mathbf{z} = \mathbf{x}+\mathbf{y}$ a $\mathbf{z} = \mathbf{x}'+\mathbf{y}'$. Pak $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{x}'+\mathbf{y}'$, takže $\mathbf{x}-\mathbf{x}' = \mathbf{y}'-\mathbf{y}$, přičemž $\mathbf{x}-\mathbf{x}' \in \mathbf{X}$ a $\mathbf{y}'-\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ a současně $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{o}\}$. To znamená, že $\mathbf{x}-\mathbf{x}' = \mathbf{o}$ a $\mathbf{y}'-\mathbf{y} = \mathbf{o}$, čili $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ a $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$. To potvrzuje výše zmíněnou jednoznačnost.

Jestliže naopak součet $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ není přímý, znamená to, že $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{o}\}$, takže existuje nenulový vektor $\mathbf{z} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. Pak lze psát $\mathbf{z} = \mathbf{z}+\mathbf{o} = \mathbf{o}+\mathbf{z}$, takže k tomuto vektoru $\mathbf{z}$ vektory $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ a $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, pro něž $\mathbf{z} = \mathbf{x}+\mathbf{y}$, nejsou určeny jednoznačně.

Lineární variety ve vektorových prostorech

Lineární variety ve vektorových prostorech zobecňují pojem podprostorů vektorových prostorů. Vrátíme-li se ještě jednou k trojrozměrnému vektorovému prostoru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R},+,\cdot)$ použitému jako vstupní příklad na začátku této kapitoly, pak za lineární variety v tomto vektorovém prostoru považujeme všechny jeho jednoprvkové podmnožiny a dále, opět mírně zjednodušeně řečeno, všechny přímky ležící v tomto prostoru, všechny roviny ležící v tomto prostoru a konečně taktéž zase i celý zmíněný trojrozměrný vektorový prostor sám. Byl tedy opuštěn požadavek, aby tyto množiny obsahovaly nulový vektor $(0,0,0)$, nebo též, volněji řečeno, nežádá se nyní, aby tyto množiny procházely počátkem $[0, 0, 0]$. Zmíněné podmnožiny trojrozměrného vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ jsou charakterizovány podmínkou, že s každými svými dvěma různými prvky obsahují i celou přímku jimi proloženou. Přenesením této podmínky do situace, kdy je dán libovolný vektorový prostor nad obecným tělesem, dostaneme následující definici lineárních variet ve vektorových prostorech.

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Řekneme, že neprázdná podmnožina $\mathcal{Q} \subseteq \mathbf{V}$ je **lineární varieta** ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, splňuje-li podmínku

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{Q})(\forall s, t \in T)(s + t = 1 \implies s{\cdot}\mathbf{u} + t{\cdot}\mathbf{v} \in \mathcal{Q}).$$

Ve zbytku této kapitoly uvedeme ještě jiný popis lineárních variet ve vektorovém prostoru charakterizující je, volně řečeno, jako podprostory daného vektorového prostoru posunuté obecně mimo počátek. Toho se dosáhne přičtením pevného vektoru ke všem vektorům zmíněného podprostoru.

Tvrzení. Je-li $\mathcal{Q}$ lineární varieta ve vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$, pak pro kterékoliv dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{Q}$ platí

$$\{\mathbf{x} - \mathbf{u} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{Q}\} = \{\mathbf{y} - \mathbf{v} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{Q}\}$$

a tato množina vektorů je podprostorem ve vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}$ je libovolný vektor. Pak $\mathbf{x} - \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{v}$, přičemž $\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{v} \in \mathcal{Q}$, neboť $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, a poněvadž $\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{v} = 2{\cdot}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\right) - \mathbf{u}$ a $2 - 1 = 1$, rovněž $\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{Q}$. To znamená, že $\mathbf{x} - \mathbf{u} \in \{\mathbf{y} - \mathbf{v} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{Q}\}$, což dokazuje inkluzi $\{\mathbf{x} - \mathbf{u} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{Q}\} \subseteq \{\mathbf{y} - \mathbf{v} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{Q}\}$. Opačná inkluze se dokáže analogicky.

Ověříme nyní, že $\{\mathbf{x} - \mathbf{u} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{Q}\}$ je podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Volbou $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ dostáváme, že $\mathbf{o} = \mathbf{u} - \mathbf{u} \in \{\mathbf{x} - \mathbf{u} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{Q}\}$. Nechť dále $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathcal{Q}$ jsou libovolné vektory, takže $\mathbf{z} - \mathbf{u} \in \{\mathbf{x} - \mathbf{u} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{Q}\}$ a $\mathbf{z}' - \mathbf{u} \in \{\mathbf{x} - \mathbf{u} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{Q}\}$. Pak $\frac{1}{2}\mathbf{z} + \frac{1}{2}\mathbf{z}' \in \mathcal{Q}$, a poněvadž $\mathbf{z} - \mathbf{u} + \mathbf{z}' = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\mathbf{z} + \frac{1}{2}\mathbf{z}'\right) - \mathbf{u}$, rovněž $\mathbf{z}-\mathbf{u}+\mathbf{z}' \in \mathcal{Q}$, takže $\mathbf{z}-\mathbf{u}+\mathbf{z}'-\mathbf{u} \in \{\mathbf{x}-\mathbf{u} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{Q}\}$. Nechť navíc $s \in T$ je libovolný prvek. Pak $s \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{u}) = s\cdot\mathbf{z} + (1 - s)\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}$, přičemž $s\cdot\mathbf{z}+(1-s)\cdot\mathbf{u} \in \mathcal{Q}$, poněvadž $s+1-s = 1$, což ukazuje, že $s \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{u}) \in \{\mathbf{x} - \mathbf{u} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{Q}\}$. Je tedy uvedená množina podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Podprostor $\mathbf{W}$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ zkonstruovaný k dané lineární varietě $\mathcal{Q}$ ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ v předchozím tvrzení se nazývá **zaměření** lineární variety $\mathcal{Q}$. Pro samotnou lineární varietu $\mathcal{Q}$ pak z tohoto tvrzení plyne, že $\mathcal{Q} = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbf{W}\}$ pro kterýkoliv vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{Q}$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ je libovolný podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a nechť $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ je libovolný vektor. Pak množina $\mathcal{Q} = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbf{W}\}$ je lineární varieta ve vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, jejímž zaměřením je podprostor $\mathbf{W}$.

Poznámka. Užíváme pak označení $\mathbf{u} + \mathbf{W}$ pro množinu $\{\mathbf{u} + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbf{W}\}$, takže píšeme $\mathcal{Q} = \mathbf{u} + \mathbf{W}$.

Důkaz. Poněvadž $\mathbf{o} \in \mathbf{W}$, množina $\mathcal{Q}$ je neprázdná. Nechť $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbf{W}$ jsou libovolné vektory, takže pak $\mathbf{u}+\mathbf{w}$, $\mathbf{u}+\mathbf{w}' \in \mathcal{Q}$, a nechť $s, t \in T$ jsou libovolné prvky splňující $s + t = 1$. Pak $s\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{w})+t\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{w}') = s\cdot\mathbf{u}+t\cdot\mathbf{u}+s\cdot\mathbf{w}+t\cdot\mathbf{w}' = (s+t)\cdot\mathbf{u}+s\cdot\mathbf{w}+t\cdot\mathbf{w}' = \mathbf{u}+s\cdot\mathbf{w}+t\cdot\mathbf{w}'$, přičemž $s\cdot\mathbf{w}+t\cdot\mathbf{w}' \in \mathbf{W}$. To dokazuje, že $\mathcal{Q}$ je lineární varieta ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Přitom $\mathbf{W} = \{\mathbf{x} - \mathbf{u} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{Q}\}$, takže podprostor $\mathbf{W}$ je zaměřením lineární variety $\mathcal{Q}$.

Z uvedených tvrzení tedy plyne, že lineární variety ve vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ jsou právě množiny tvaru $\mathbf{u} + \mathbf{W}$, kde $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ je libovolný vektor a $\mathbf{W}$ je libovolný podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Přitom pro kterýkoliv vektor $\mathbf{v}$ z $\mathbf{u} + \mathbf{W}$ platí rovnost $\mathbf{u} + \mathbf{W} = \mathbf{v} + \mathbf{W}$.