Vektorové podprostory, lineární nezávislost, báze, dimenze a souřadnice

Vektorové podprostory

$\mathbb{K}$ množina reálných nebo komplexních čísel,

U vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.

Lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ je vektor tvaru

$$a_1 \boldsymbol{u}_1 + a_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots a_k \boldsymbol{u}_k,$$

kde $a_1, a_2, \ldots a_k \in \mathbb{K}$.

Definice

Neprázdnou podmnožinu $V \subseteq U$ nazveme vektorovým podprostorem prostoru U, jestliže

(1) pro všechna $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$,

(2) pro všechna $a \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{u} \in V$ je $a\boldsymbol{u} \in V$.

Vlastnosti a příklady vektorových podprostorů

Vlastnosti:

(i) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in V$, pak $\sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{u}_i \in V$.

(ii) $\boldsymbol{o} \in V$.

(iii) Každý podprostor je vektorový prostor.

Příklady:

(1) $\{\boldsymbol{o}\}$ a U jsou triviální podprostory prostoru U.

(2) $V = \{(s+t, s, t) \in \mathbb{R}^3;\ t, s \in \mathbb{R}\}$ je podprostor v $\mathbb{R}^3$.

(3) A je matice $k \times n$, $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$ je podprostor v $\mathbb{R}^n$.

(4) Podprostory v $\mathbb{R}^2$: $\{\boldsymbol{o}\}$, přímky procházející počátkem, $\mathbb{R}^2$.

(5) Podprostory v $\mathbb{R}^3$: $\{\boldsymbol{o}\}$, přímky procházející počátkem, roviny procházející počátkem, $\mathbb{R}^3$.

(6) Průnik podprostorů je podprostor.

Lineární obal vektorů

Definice

Lineární obal množiny vektorů $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\} \subset U$ je množina

$$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k] = \{a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{u}_k \in U;\ a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}\}.$$

Pro prázdnou množinu $[\varnothing] = \{\boldsymbol{o}\}$.

Lemma

Lineární obal konečné množiny vektorů z U je vektorový podprostor.

Důkaz: $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k]$ znamená, že $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} a_i\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{k} b_i\boldsymbol{u}_i$. Potom

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{k}(a_i + b_i)\boldsymbol{u}_i \in [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k],$$

$$a\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} aa_i\boldsymbol{u}_i \in [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k].$$

Lineární obal – úloha

Lze definovat lineární obal nekonečné množiny. Je to opět vektorový podprostor. Prakticky budeme počítat jen s lineárními obaly konečných množin.

Kdy je daný vektor $\boldsymbol{v}$ prvkem $[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k]$? Právě když rovnice

$$x_1 \boldsymbol{u}_1 + x_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{v}$$

o neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_k$ má nějaké řešení.

Příklad

U prostor reálných matic 2×2. Je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] ?$$

Rovnice $x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ vede na soustavu $x_1 = 1,\ 2x_1 + 2x_2 = 2,\ x_2 = 3,\ x_1 + x_2 = 4$, která nemá řešení.

Lineární nezávislost vektorů

Vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ jsou lineárně závislé, existuje-li k-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ z $\mathbb{K}^k$ taková, že

$$(\clubsuit) \qquad x_1 \boldsymbol{u}_1 + x_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{o}.$$

Jinými slovy: Rovnice ($\clubsuit$) o neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_k$ má netriviální (= nenulové) řešení.

Příklad

$\boldsymbol{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (3, 0, 3) \in \mathbb{R}^3$ jsou lineárně závislé, neboť $1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{u}_2 + (-1) \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{o}$.

Definice

Vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ jsou lineárně nezávislé, jestliže rovnice ($\clubsuit$) má pouze triviální řešení $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$.
Jinak:

$$x_1 \boldsymbol{u}_1 + x_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{o} \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0.$$

Jak si představit lineární závislost

Lemma

Vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k \in U$ *jsou lineárně závislé, právě když lze jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních*

$$\boldsymbol{u}_j = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{j-1}\boldsymbol{u}_{j-1} + a_{j+1}\boldsymbol{u}_{j+1} + \dots a_k\boldsymbol{u}_k.$$

Důkaz: $\Leftarrow$ Nechť $\boldsymbol{u}_1 = a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{u}_k$. Potom

$$(-1)\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{o}$$

a koeficient u $\boldsymbol{u}_1$ je nenulový.
$\Rightarrow$ Nechť $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$ jsou lineárně závislé. Pak

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{o}$$

a některý koeficient je různý od 0, např. x_1. Proto

$$x_1\boldsymbol{u}_1 = \sum_{i=2}^{k}(-x_i)\boldsymbol{u}_i \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u}_1 = \sum_{i=2}^{k}(-\frac{x_i}{x_1})\boldsymbol{u}_i.$$

Geometrická představa

- Jediný vektor $\boldsymbol{u}_1$ je lineárně nezávislý, právě když $\boldsymbol{u}_1 \neq \boldsymbol{o}$.
- Dva vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ jsou lineárně nezavislé, právě když jeden není násobkem druhého.
- Geometrická představa v $\mathbb{R}^3$: Dva lin. nezávislé vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ určují rovinu. Každý vektor $\boldsymbol{u}_3$ ležící v této rovině je s nimi lineárně závislý. Každý vektor neležící v této rovině je s nimi lin. nezávislý.

Příklad

Zjistěte, zda vektory $\boldsymbol{u}_1 = (1,2,1,0)^T$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,1,-1,2)^T$, $\boldsymbol{u}_3 = (1,0,1,1)^T \in \mathbb{R}^4$ jsou lineárně závislé.
Rovnice $x_1(1,2,1,0)^T + x_2(1,1,-1,2)^T + x_3(1,0,1,1)^T = (0,0,0,0)$ dává homogenní soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Báze konečnědimenzionálního prostoru

Vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ generují prostor U, jestliže

$$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n] = U.$$

Jinými slovy: každý vektor $\boldsymbol{u} \in U$ lze psát jako lineární kombinaci

$$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n.$$

Vektorový prostor se nazývá konečnědimenzionální, jestliže je generován nějakou konečnou množinou vektorů.

Definice

Báze konečnědimenzionálního prostoru U je posloupnost vektorů $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ taková, že

(1) vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ generují U,

(2) vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Příklady

$\mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)^T$ je báze $\mathbb{R}^3$. Říkáme jí standardní.
$\boldsymbol{u}_1 = (1,0,1)^T$, $\boldsymbol{u}_2 = (0,1,1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0,0,1)$ je jiná báze $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}_3[x]$ prostor reálných polynomů v proměnné x stupně ≤ 3. Má bázi $(1, x, x^2, x^3)$.

$C[0,1]$ prostor spojitých reálných funkcí na intervalu $[0,1]$ není konečnědimenzionální prostor.

Naší snahou bude dokázat, že každý konečnědimenzionální prostor má bázi a že každé dvě báze takového prostoru mají stejný počet prvků.

Výběr lineárně nezávislých generátorů

Věta

Nechť vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in U$ jsou lineárně nezávislé a nechť vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l \in U$ jsou libovolné. Potom lze z druhého seznamu vektorů vybrat vektory $\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i_r}$ tak, že

(1) vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i_r}$ jsou lineárně nezávislé,

(2) $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i_r}] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l]$.

Důsledek

V konečnědimenzionálním prostoru U lze každý seznam lineárně nezávislých vektorů doplnit na bázi. Speciálně, v U existuje báze.

Důkazy

Důkaz důsledku: $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ lineárně nezávislé.
U má konečnou dimenzi, tedy existují $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l$

$$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l] = U.$$

Podle předchozí věty lze vybrat indexy $i_1, i_2, \ldots, i_r$ tak, že vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i_r}$ jsou lineárně nezávislé a

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i_r}] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l]\\ \supseteq [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l]] = U.\end{aligned}$$

Tedy $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i_r}$ tvoří bázi prostoru U.
Speciálně seznam vektorů $\boldsymbol{v}$ může být prázdný a bázi lze vybrat ze seznamu generátorů.

Důkaz věty se provádí indukcí podle čísla n, tj. počtu vektorů $\boldsymbol{u}$.

Algoritmus pro předchozí větu v $\mathbb{K}^n$

Mějme vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l \in \mathbb{K}^n$. Chceme z nich vybrat seznam lineárně nezávislých vektorů se stejným lineárním obalem:

$$[\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i_r}] = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l].$$

Algoritmus: Zapíšeme vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l$ jako sloupce matice. Provedeme řádkové úpravy této matice na schodovitý tvar. V něm určíme sloupce $i_1, i_2, \ldots, i_r$, v nichž leží vedoucí koeficient některého řádku. Vektory $\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i_r}$ mají výše požadovanou vlastnost.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hledané vektory jsou $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4$.

Zdůvodnění algoritmu na příkladu

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4$ jsou lin. nezávislé, neboť soustava $x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_4\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{o}$ má pouze triviální řešení.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u}_3$ je lineární kombinací předchozích vybraných vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$. Soustava $x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3$ má totiž řešení

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Steinitzova věta

Následující věta nám umožní dokázat, že každé dvě báze prostoru U mají stejný počet vektorů.

Věta (Steinitzova)

Nechť $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k \in [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n] \subseteq U$. Jestliže jsou vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ lineárně nezávislé, pak $k \leq n$.

Provedeme nepřímý důkaz. Místo implikace $p \Rightarrow q$, budeme dokazovat implikaci non $q \Rightarrow$ non p.
Výrok p: "Vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ jsou lineárně nezávislé."
Výrok q: "$k \leq n$"

Důkaz Steinitzovy věty – 1. část

Nechť $k > n$. Každý z vektorů $\boldsymbol{v}_i$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$,

$$\boldsymbol{v}_i = a_{1i}\boldsymbol{u}_1 + a_{2i}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Pro všechny vektory to můžeme zapsat takto:

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

Matice $A = (a_{ij})$ má n řádků a k sloupců. Uvažujme homogenní soustavu rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ s neznámou $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^k$.

Důkaz Steinitzovy věty – 2. část

Matice A má více sloupců (k) než řádků (n), takže po úpravě na schodovitý tvar existuje sloupec (j-tý), v němž neleží vedoucí koeficient žádného řádku. Tedy při řešení můžeme neznámou x_j zvolit libovolně, například různou od 0. Tedy soustava má netriviální řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{K}^k$. Potom

$$
\begin{aligned}
x_1 \boldsymbol{v}_1 + x_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k \boldsymbol{v}_k = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_k \end{pmatrix} \\
= [(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \cdot A]\, \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \cdot [A \cdot \boldsymbol{x}] \\
= (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}.
\end{aligned}
$$

Tedy vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ jsou lineárně závislé.

Důsledek Steinitzovy věty a definice dimenze

Důsledek

Jsou-li $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ a $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ dvě báze vektorového prostoru U, pak $n = k$.

Důkaz:
Vektory $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ jsou lineárně nezávislé a leží v $U = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n]$. Podle SV je $k \leq n$.
Vektory $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ jsou lineárně nezávislé a leží v $U = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k]$. Podle SV je $n \leq k$.
Tedy $k = n$.

Definice

Nechť U je konečnědimenzionální vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Počet prvků nějaké báze se nazývá dimenze prostoru U nad $\mathbb{K}$, označení

$$\dim_{\mathbb{K}} U.$$

Dimenze konkrétních prostorů

$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ Tento prostor má bázi $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, přitom $\boldsymbol{e}_i$ je vektor, který má na i-tém místě 1, všude jinde nuly.

$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[x] = n + 1$ Báze tohoto prostoru je $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ Báze vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ je například tvořena dvěma komplexními čísly 1 a i.

$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K}) = n \cdot k$ Najděte nějakou bázi!

Čtyři užitečné věty o dimenzi – první dvě o bázi

První věta

Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$. Jsou-li vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ lineárně nezávislé, pak tvoří bázi prostoru U.

Důkaz: Již víme, že každý seznam lineárně nezávislých vektorů lze doplnit na bázi. Ta bude mít n prvků. K $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ není tedy potřeba přidávat žádný další vektor.

Druhá věta

Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$. Jestliže vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ generují U, pak tvoří bázi prostoru U.

Důkaz: Z daných vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ lze vybrat lineárně nezávislé se stejným lineárním obalem. Ten je roven U. Proto vybrané vektory tvoří bázi. Ta musí mít n prvků. Je tedy tvořena všemi vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$.

Další dvě o podprostorech

Třetí věta

Nechť V je podprostor v konečnědimenzionálním vektorovém prostoru U nad $\mathbb{K}$. Potom má V konečnou dimenzi a platí

$$\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} U.$$

Důkaz: Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$. Kdyby V nebyl generován konečným počtem vektorů, dostaneme postupně posloupnost $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n+1}$ $\in V$ lin. nezávislých vektorů ve V, tudíž i v U. To je však ve sporu se Steinitzovou větou. Tedy V je konečné dimenze a má proto bázi $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Tento seznam lineárně nezávislých vektorů lze doplnit na bázi prostoru U. Tedy $\dim_{\mathbb{K}} V = k \leq n = \dim_{\mathbb{K}} U$.

Čtvrtá věta

Nechť V je podprostor v konečnědimenzionálním vektorovém prostoru U nad $\mathbb{K}$. Jestliže $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} U$, pak $V = U$.

Důkaz: Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n = \dim_{\mathbb{K}} V$. Nechť $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ je báze podprostoru V. Tyto vektory jsou lineárně nezávislé v U, a proto podle První věty tvoří bázi prostoru U. Tedy $V = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = U$.

Souřadnice vektoru

Věta

Nechť U je vektorový prostor konečné dimenze. Posloupnost vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ je báze prostoru U, právě když každý vektor $\boldsymbol{u} \in U$ lze psát právě jedním způsobem ve tvaru

$$(\spadesuit) \qquad \boldsymbol{u} = a_1 \boldsymbol{u}_1 + a_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n \boldsymbol{u}_n.$$

Důkaz provedeme na tabuli.

Definice

Nechť $\alpha = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ je báze prostoru U. Každý vektor $\boldsymbol{u} \in U$ lze psát ve tvaru ($\spadesuit$). n-tici koeficientů $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nazýváme souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ v bázi α a zapisujeme ve tvaru sloupce

$$(\boldsymbol{u})_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \qquad \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Příklady

Příklad

$\alpha = (1, x-1, (x-1)^2$ je báze prostoru polynomů $\mathbb{R}_2[x]$. Polynom $x^2 + x - 1$ má v této bázi souřadnice

$$(x^2 + x - 1)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

neboť $x^2 + x - 1 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1)^2$.

Příklad

Bázi $\varepsilon = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$ nazýváme standardní bazí. Pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ platí

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n, \qquad (\boldsymbol{x})_\varepsilon = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Přiřazení souřadnic jako zobrazení

Každá báze α v prostoru U nad $\mathbb{K}$ dimenze n definuje zobrazení $(\ )_\alpha : U \to \mathbb{K}^n$, které vektoru přiřazuje jeho souřadnice v bázi α. Toto zobrazení je bijekce a navíc platí

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})_\alpha = (\boldsymbol{u})_\alpha + (\boldsymbol{v})_\alpha,$$
$$(a\boldsymbol{u})_\alpha = a(\boldsymbol{u})_\alpha.$$

Důkaz je jednoduchý důsledek definice souřadnic.

Průnik a součet podprostorů

Věta

Průnik libovolného počtu vektorových podprostorů prostoru U je opět podporostor v U.

Pozor! Sjednocení vektorových podprostorů není obecně vektorový podprostor. Najděte příklad!
Místo sjednocení pracujeme v lineární algebře se součtem podprostorů.

Definice

Nechť V, W a V_i jsou vektorové podprostory v U. Definujeme

$$V + W = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U;\ \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{w} \in W\},$$

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_k = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k \in U;\ \mathbf{v}_i \in V_i\}.$$

Věta

Součet vektorových podprostorů je opět podprostor.

Direktní součet

Příklad

$U = \mathbb{R}^4$, $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $W = \{(0, y_2, 0, y_4) \in \mathbb{R}^4\}$. Potom $V + W = \mathbb{R}^4$, neboť

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 - x_3) + (0, 0, 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \in V + W.$$

Definice

Součet podprostorů $V + W$ se nazývá direktní, jesliže $V \cap W = \{\boldsymbol{o}\}$. Direktní součet zapisujeme $V \oplus W$.

Součet v příkladu není direktní, neboť $(0, 1, 0, -1) \in V \cap W$.

Věta

Součet podprostorů $V + W$ je direktní, právě když každý vektor $\boldsymbol{u} \in V + W$ lze psát ve tvaru $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$, právě jedním způsobem.

Věta o dimenzi součtu a průniku

Předchozí tvrzení umožňuje definovat direktní součet více podprostorů takto:

Definice

Nechť $k \geq 2$. Součet podprostorů $V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ je direktní, jestliže každý vektor $\boldsymbol{u} \in V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ lze psát ve tvaru $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{v}_i \in V_i$, právě jedním způsobem.

Příklad

Nechť $V = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k]$, $W = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_l]$. Potom

$$V + W = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_l].$$

Každý vektor z $V + W$ je totiž součet $\sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{l} b_j w_j$.

Věta

Nechť V a W jsou podprostory ve vektorovém prostoru U konečné dimenze nad $\mathbb{K}$. Potom

$$\dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}}(V \cap U) + \dim_{\mathbb{K}}(V + W).$$