Domácí úkoly k předmětu M1130

1 Dělitelnost, rozklad na prvočinitele

Příklad 1.1: Pro libovolná celá čísla dokažte

$$c \neq 0 \implies (a \mid b \iff ac \mid bc) \ ,$$

$$a \mid b \wedge b > 0 \implies a \leq b \ .$$

Příklad 1.2: Nalezněte všechna celá čísla $a \neq 3$, pro která $a - 3 \mid a^3 - 3$.

Příklad 1.3: Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

Příklad 1.4: Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

Příklad 1.5*: Pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ existuje mezi čísly n a $n!$ prvočíslo.

Příklad 1.6*: Existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $3k + 2$.

Příklad 1.7: Pro libovolná přirozená čísla a, b, c, d dokažte

(i) $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad, bc, bd)$,

(ii) $(ac, bc) = (a, b) \cdot c$,

(iii) $(a, b) = 1 = (a, c) = 1 \implies (a, bc) = 1$.

2 Kongruence

Příklad 2.1: Pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ jsou následujícíc podmínky ekvivalentní:

(i) $a \equiv b \pmod{m}$,

(ii) $(\exists t \in \mathbb{Z})(a = b + mt)$

(iii) $m \mid a - b$.

Příklad 2.2: Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $m, d \in \mathbb{N}$ platí:

(i) $(a \equiv b \pmod{m} \wedge d \mid a \wedge d \mid b \wedge (d, m) = 1) \implies \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$,

(ii) $(a \equiv b \pmod{m} \wedge d \mid a \wedge d \mid b \wedge d \mid m) \implies \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$,

(iii) $a \equiv b \pmod{m} \implies ac \equiv bc \pmod{mc}$.

Příklad 2.3: Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je číslo $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ dělitelné 7.

Příklad 2.4: Dokažte, že číslo

(i) $(835^5 + 6)^{18} - 1$ je dělitelné 12,

(ii) $2^{60} + 7^{30}$ je dělitelné 13.

3 Polynomy

Příklad 3.1: Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu

(i) $2x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 15x - 9$,

(ii) $x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$,

(iii) $4x^7 - 16x^6 + x^5 + 55x^4 - 35x^3 - 38x^2 + 12x + 8$,

(iv) $8x^6 + 28x^5 + 18x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 4x$,

(v) $18x^4 - 27x^3 - 26x^2 + 12x + 8$,

(vi) $x^3 - 6x^2 - x + 30$.

Příklad 3.2: Označme c_1, c_2 kořeny polynomu $3x^2 + 8x + 4$. Aniž danou rovnici řešíte, určete číslo m, kde

(i) $m = c_1 + c_2$,

(ii) $m = c_1^2 + c_2^2$,

(iii) $m = c_1^3 + c_2^3$,

(iv) $m = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$,

(v) $m = c_1 - c_2$,

(vi) $m = c_1^2 - c_2^2$.

Příklad 3.3: Označme c_1, c_2, c_3 kořeny polynomu $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. Aniž danou rovnici řešíte, určete číslo m, kde

(i) $m = c_1 + c_2 + c_3$,

(ii) $m = c_1c_2c_3$,

(iii) $m = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1$,

(iv) $m = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$,

(v) $m = c_1^3 + c_2^3 + c_3^3$,

(vi) $m = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}$.

Příklad 3.4*: Nechť c_1, c_2, c_3 jsou kořeny polynomu $f = x^3 - 2x^2 + x - 11$. Určete polynom g, který má kořeny

(i) $c_1^2,\ c_2^2,\ c_3^2$,

(ii) $c_1 + c_2,\ c_2 + c_3,\ c_3 + c_1$.

Příklad 3.5*: Dokažte, že

$$\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{21} + 8} - \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{21} - 8} = 1\ .$$

Příklad 3.6: Nalezněte kvadratický polynom s racionálními koeficienty, jejímž jedním kořenem je

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}\ .$$

Příklad 3.7: Nechť a, b jsou racionální čísla, přičemž $b > 0$. Ukažte, že existuje kvadratický polynom s racionálními koeficienty, jejímž jedním kořenem je číslo $a + \sqrt{b}$.

Příklad 3.8*: Ukažte, že neexistuje kvadratický polynom s racionálními koeficienty, jejímž jedním kořenem je číslo $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Další příklady na procvičení kvadratické rovnice – viz soubor "seminar A.pdf" v ISu. Konkrétně: str. 2. př. 6,7,8; str. 3. př. 12,13.

4 Kongruence - pokračování

Příklad 4.1: Nalezněte všechna celá čísla x s vlastností:

(i) $29x \equiv 1 \pmod{17}$,

(ii) $21x + 5 \equiv 0 \pmod{29}$,

(iii) $7x \equiv 3 \pmod{13}$,

(iv) $21x + 5 \equiv 0 \pmod{14}$,

(v) $21x + 35 \equiv 0 \pmod{14}$.

Příklad 4.2: V závislosti na parametru $m \in \mathbb{N}$ popište všechna celá čísla x s vlastností:

(i) $2x \equiv 1 \pmod{m}$,

(ii) $3x \equiv 1 \pmod{m}$.

Příklad 4.3: Řešte v $\mathbb{Z}$ rovnici:

(i) $18x + 20y + 15z = 1$,

(ii) $14x + 8y + 6z = 3$,

(iii) $7x + 14y + 10z = 3$,

(iv) $14x + 8y + 6z = 4$,

(v) $20x + 12y + 45z = 1$,

(vi) $10x + 11y + 12z + 13u = 14$.

Příklad 4.4*: Dokažte, že pro libovolné prvočíslo $p > 2$ platí $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$.

Příklady na procvičení iracionálních rovnic a nerovnic najdete v souboru 'seminar A.pdf' v ISu. Příklady na procvičení exponenciálních, logaritmických a goniometrických funkcí najdete v souboru 'seminar B.pdf'.

5 Jednoduché důkazy v matematické analýze

Příklad 5.1: Uvažujme funkci $\sin\frac{1}{x} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$.

(a) Podle definice limity napište pomocí kvantifikátorů, co znamená výrok

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \text{ není rovna } 0$$

a dokažte jej.

(b) Obdobně z definice limity pomocí kvantifikátorů zapište výrok

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \text{neexistuje}$$

a dokažte jej.

Příklad 5.2: Přímo z definice limity dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Příklad 5.3: Pavel napsal definici spojitosti funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ takto:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

(a) Ukažte, že podle Pavlovy definice je v bodě a spojitá každá funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Napište negaci výroku z definice.

Příklad 5.4: Petr napsal definici spojitosti funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ takto:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

(a) Ukažte, že podle Petrovy definice je v bodě a spojitá každá konstantní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Napište negaci výroku z definice.

(c) Ukažte, že funkce $f(x) = x$, není spojitá v a podle Petrovy definice.

(d*) Jak lze charakterizovat funkce spojité v a podle Petrovy definice?

6 Jednoduché důkazy v lineární algebře

Příklad 6.1: Nechť $0 < k < n$ a $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru U. Dokažte, že vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou rovněž lineárně nezávislé.

(a) Proveďte nepřímý důkaz.

(b) Proveďte přímý důkaz.

Příklad 6.2: Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární zobrazení. Dokažte z definice nebo vyvraťte pomocí protipříkladu následující výroky:

(a) Jsou-li vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ lineárně nezávislé, pak $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_k)$ jsou rovněž lineárně nezávislé.

(b) Jsou-li vektory $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_k)$ lineárně nezávislé, pak $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ jsou rovněž lineárně nezávislé.

Případné důkazy proveďte jak formou přímého, tak nepřímého důkazu.

Příklad 6.3: Nechť W je vektorový prostor a U a V jeho dva podprostory. Dokažte, že podmínka

$$U \cap V = \{0\}$$

je ekvivaletní s podmínkou

$$\forall w \in U + V \quad \exists! u \in U \quad \exists! v \in V \quad (w = u + v).$$

Napište negaci druhého výroku a dokazujte obě implikace nepřímo.

Příklad 6.4: Dokažte z definice lineárního obalu, že pro každé tři vektory u, v, w ve vektorovém prostoru U platí

$$[u, v, w] = [u + v, v - u, v + w].$$

Příklad 6.5: Jsou-li vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ lineárně závislé, pak lze vybrat jeden z nich, označme jej u_i, tak, že platí

$$[u_1, u_2, \dots, u_k] = [u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n].$$

Dokažte.

Příklad 6.6*: Nechť W je vektorový prostor konečné dimenze a U a V jeho dva podprostory. Nechť $f : U \to W$ a $g : V \to W$ jsou dvě lineární zobrazení taková, že $f(w) = g(w)$ pro všechna $w \in U \cap V$. Pomocí vhodné báze ve W definujte zobrazení $F : U + V \to W$ takové, že $F(u) = f(u)$ pro všechna $u \in U$ a $F(v) = g(v)$ pro všechna $v \in U$.