MASARYKOVA UNIVERZITA • PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Josef Kalas a Jaromír Kuben

Integrální počet funkcí více proměnných

První vydání

Brno 2009

Recenzent: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

ISBN 978-80-210-4975-8

Předmluva

Integrální počet funkcí více proměnných je důležitou částí matematické analýzy a má významné aplikace ve fyzice a v technických disciplínách. K výkladu problematiky lze přistoupit různým způsobem: buď budovat teorii vícerozměrných integrálů moderním způsobem (Lebesgueův integrál, Henstockův-Kurzweilův integrál), nebo výklad pojmout klasicky, tj. studovat Riemannův, popř. Darbouxův vícerozměrný integrál. Protože předkládaný učební text je určen pro použití v základním kurzu matematické analýzy, je zvolen klasický přístup, který navazuje přirozeným způsobem na Riemannův integrál funkce jedné proměnné.

Text je rozdělen do pěti kapitol. Ve snaze o maximální srozumitelnost budujeme nejprve v kapitole 1 teorii dvojného Riemannova integrálu a poté v následující kapitole se zabýváme integrálem trojným, n-rozměrným a jednoduchým. Nezastupitelnou úlohu při výpočtu vícerozměrných integrálů má záměna proměnných nazývaná rovněž transformace integrálu. Transformacím vícerozměrných integrálů je věnována kapitola 3. Vícerozměrné integrály nacházejí využití v různých disciplínách, významné jsou zejména geometrické a fyzikální aplikace, které jsou probírány v kapitole 4. V závěrečné páté kapitole je uvedena definice a základní vlastnosti nevlastního vícerozměrného integrálu, který je důležitý jak z teoretického, tak z aplikačního hlediska.

Učební text je určen pro posluchače bakalářského studia učitelské a odborné matematiky, fyziky a aplikované matematiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity. Svým rozsahem pokrývá látku přednášenou v základním kurzu matematické analýzy. Pro studium textu se předpokládá znalost diferenciálního počtu funkcí více proměnných a znalost Riemannova integrálu v $\mathbb{R}$. Věříme, že vydání tohoto textu zaplní mezeru v pokrytí problematiky vícerozměrného integrálu učebními texty na Přírodovědecké fakultě MU. Vždyť od vydání posledního titulu s touto problematikou (skripta Miloše Rába [24]) uplynulo již 21 let. Autoři vycházeli z přednášek prvního autora, které konal na Přírodovědecké fakultě

Masarykovy univerzity pro posluchače učitelského studia, a z učebního textu [14] vydaného druhým autorem a jeho spolupracovníky na Fakultě vojenských technologií Univerzity obrany. Zvolený přístup k výkladu látky byl částečně ovlivněn přednáškami prof. RNDr. Vítězslava Nováka, DrSc. konanými na Pedagogické fakultě MU a učebnicemi [17] a [19].

Pro lepší názornost a srozumitelnost je text doplněn řadou ilustračních obrázků a poměrně velkým počtem řešených příkladů. Za každou kapitolou jsou zařazena cvičení k samostatnému řešení. Učební text tak může sloužit rovněž jako sbírka úloh, nicméně k procvičování látky doporučujeme využít také specializovaných sbírek úloh uvedených v seznamu literatury, např. [1], [3], [9], [18]. Cvičení obsažená v textu mají rozdílnou obtížnost, pro lepší orientaci čtenářů jsou obtížnější cvičení označena symbolem $\star$. Z důvodu úplnosti jsou do textu zařazeny i obtížnější partie, popř. partie překračující rozsah látky přednášené v základním kurzu matematické analýzy. Tyto partie jsou vysázeny menším typem písma. Text byl připraven sázecím systémem TeX ve formátu pdfLaTeX 2_{ε}, většina obrázků byla vytvořena programem METAPOST s použitím balíku TeXovských maker `mfpic`, část obrázků byla připravena programem Maple.

Je naší milou povinností poděkovat všem, kdo přispěli v jakékoliv formě při práci na rukopisu tohoto učebního textu. Obzvláště děkujeme doc. RNDr. Jaromíru Šimšovi, CSc. za velice pečlivé přečtení celého rukopisu a za řadu cenných rad, námětů a připomínek, které přispěly ke zlepšení textu. Zavázáni jsme i prof. RNDr. Ondřeji Došlému, DrSc., který rovněž pozorně prostudoval rukopis tohoto textu a přispěl k jeho konečné podobě mnoha užitečnými postřehy a vylepšeními. Část textu přečetl Bc. Jaromír Kuben, kterému si touto cestou rovněž dovolujeme poděkovat. V neposlední řadě děkujeme PhDr. Pavlíně Račkové, Ph.D. za překontrolování zadání i výsledků všech cvičení zařazených do učebního textu.

Brno, září 2009 Autoři

Obsah

Kapitola 1

Dvojný integrál

Většina čtenářů tohoto textu je již nepochybně seznámena s teorií Riemannova[1] určitého integrálu funkce jedné proměnné, který se přednáší v rámci přednášky z matematické analýzy. Tento jednorozměrný integrál se značí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a je definován pro funkci f jedné proměnné integrace schopnou, a tedy zejména ohraničenou, na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Tento integrál přiřazuje funkci f s výše uvedenými vlastnostmi jisté reálné číslo. V základním kurzu matematické analýzy se při úvodním studiu Riemannova integrálu obvykle nedefinuje integrál funkce jedné proměnné na obecnější množině (např. $M = \langle a, b\rangle \cup \langle c, d\rangle$, kde $\langle a, b\rangle \cap \langle c, d\rangle = \emptyset$), ani integrál funkce více proměnných.

Naším cílem bude vybudovat teorii Riemannova integrálu funkce n proměnných na dosti obecných množinách $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Tento integrál bude zobecněním Riemannova určitého integrálu funkce jedné proměnné. Pro jednoduchost a názornost soustředíme pozornost zejména na případy $n = 1, 2, 3$. V případě $n = 1$ mluvíme o *jednoduchém*, v případě $n = 2$ o *dvojném* a v případě $n = 3$ o *trojném* integrálu. Nejprve se budeme zabývat integrálem dvojným.

Teorie dvojného Riemannova integrálu se obvykle buduje tím způsobem, že se nejdříve definuje tzv. Jordanova[2] míra množiny a vydělí se třída množin, které jsou jordanovsky měřitelné. Dvojný integrál funkce f dvou proměnných ohraničené na jordanovsky měřitelné množině M se pak zavádí tak, že se definuje

[1] **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826–1866) (čti ríman) — německý matematik. Zabýval se teorií funkcí, geometrií, matematickou a teoretickou fyzikou a diferenciálními rovnicemi. Jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob.

[2] **Marie Edmond Camille Jordan** (1832–1922) (čti žordan) — francouzský matematik. Zabýval se matematickou analýzou, algebrou, teorií funkcí, topologií, krystalografií, kinematikou, stabilitou, geometrickou pravděpodobností, teorií čísel a diferenciálními rovnicemi. Jeden z tvůrců moderní matematiky.

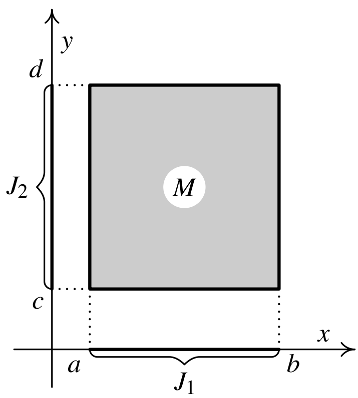
vhodným způsobem dělení D množiny M na jisté speciální měřitelné podmnožiny (tzv. dílky dělení), sestaví se horní a dolní součet $S(D, f)$, $s(D, f)$ a dále se postupuje podobně jako v definici jednoduchého Riemannova integrálu.

V tomto textu však volíme jiný přístup: Dvojný integrál definujeme nejprve na dvojrozměrném intervalu, poté pomocí charakteristické funkce množiny definujeme měřitelnou množinu a následně zavádíme pojem dvojného integrálu na měřitelné množině M, a to převedením na dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu, který množinu M obsahuje.

1.1. Dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu

Zaveďme nejprve pojem intervalu v rovině.

Definice 1.1. *Intervalem v rovině* neboli *dvojrozměrným intervalem* budeme rozumět množinu J, která je kartézským součinem dvou intervalů J_1, $J_2 \subseteq \mathbb{R}$. Tedy $J = J_1 \times J_2$.



Obr. 1.1: Interval v rovině

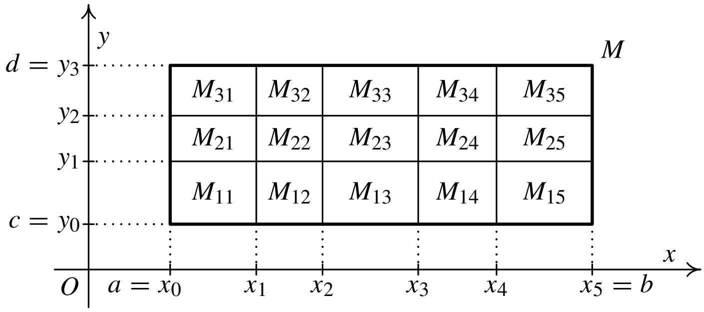
Intervaly J_1 a J_2 mohou být libovolného typu — omezené, neomezené, uzavřené, otevřené nebo polootevřené. Bude-li některý z nich degenerovaný, tj. bude-li to bod, bude i dvojrozměrný interval J tzv. *degenerovaný*. Může to být bod, úsečka, polopřímka nebo přímka.

Pro nás ale bude nejdůležitější případ, kdy oba dva intervaly J_1 a J_2 budou omezené a uzavřené. Odpovídající dvojrozměrný interval $M = J_1 \times J_2$ pak bude omezený a uzavřený obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami — viz obr. 1.1, kde $J_1 = \langle a, b\rangle$ a $J_2 = \langle c, d\rangle$. Lze ho zapsat také takto:

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}.$$

V dalším, nebude-li řečeno jinak, budeme *obdélníkem* rozumět vždy nedegenerovaný dvojrozměrný uzavřený a omezený interval. Podobně dvojrozměrným intervalem budeme rozumět nedegenerovaný interval, pokud nebude uvedeno jinak.

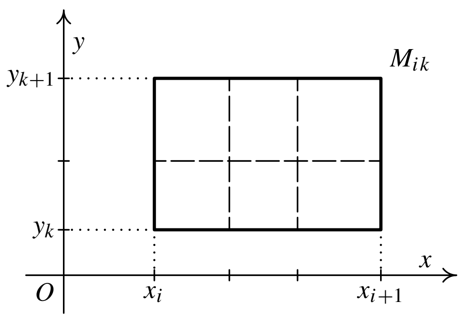
Buď $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ obdélník v $\mathbb{R}^2$. Nechť $D_x\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $D_y\colon c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ je dělení intervalu $\langle c, d\rangle$. Označme $M_{ik} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{k-1}, y_k\rangle$, kde



Obr. 1.2: Dělení dvojrozměrného intervalu

$i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Systém obdélníků $\{M_{ik} : i = 1, 2, \dots, m;$ $k = 1, 2, \dots, n\}$ nazýváme *dělením* obdélníku M a značíme $D = D_x \times D_y$. Obdélníky M_{ik} nazýváme *dílky* dělení D (viz obr. 1.2). *Normou* dělení $D = D_x \times$ $\times D_y$ budeme rozumět číslo $\nu(D) = \max\left\{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} : i = \right.$ $\left.= 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n\right\}$, tj. délku nejdelší z úhlopříček všech dílků dělení. V našich úvahách budeme pracovat také s posloupnostmi dělení. Posloupnost dělení $\{D_n\}$ nazveme *nulovou posloupností* dělení, platí-li $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Symbolem $\mathscr{D}(M)$ nebo $\mathscr{D}$ označíme množinu všech dělení obdélníku M. Dělení $D_1 = D_x^1 \times D_y^1$ se nazývá *zjemnění* dělení $D = D_x \times D_y$, je-li D_x^1 zjemněním dělení D_x a D_y^1 zjemněním dělení D_y. Je-li D_1 zjemnění dělení D, pak zřejmě každý dílek M_{ik} dělení D je v D_1 rozdělen na konečný počet dílků dělení D_1 (viz obr. 1.3). Snadno se ověří, že ke každým dvěma dělením $D_1 = D_x^1 \times D_y^1$, $D_2 = D_x^2 \times D_y^2 \in \mathscr{D}(M)$ existuje jejich společné zjemnění. (Tím je např. dělení $\widetilde{D} = \widetilde{D}_x \times \widetilde{D}_y$, kde $\widetilde{D}_x$ je tvořeno všemi dělicími body dělení D_x^1 a dělení D_x^2 a $\widetilde{D}_y$ je tvořeno všemi dělicími body dělení D_y^1 a dělení D_y^2. Toto dělení budeme nazývat *největším společným zjemněním* dělení D_1, D_2.)



Obr. 1.3: Zjemnění dělení

Buď f ohraničená funkce dvou proměnných definovaná na obdélníku $M =$ $= \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a nechť $D = D_x \times D_y$ je dělení obdélníku M o dílcích M_{ik},

$i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$. Označme

$$v_{ik} = \inf\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\},$$
$$V_{ik} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\}$$

a položme

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} v_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}),$$
$$S(D, f) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} V_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}).$$

Číslo $s(D, f)$ nazýváme *dolním součtem*, číslo $S(D, f)$ *horním součtem* funkce f při dělení D (viz obr. 1.4 a 1.5).

Nazveme-li číslo $\mathrm{m}(R) = (\beta - \alpha)(\delta - \gamma)$ *mírou* (*obsahem*) obdélníku $R = \langle \alpha, \beta \rangle \times \langle \gamma, \delta \rangle$, můžeme při označení $I = \{(i, k) : i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n\}$ psát stručněji

$$s(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} v_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}),$$
$$S(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} V_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}).$$

Podobně jako v případě jednorozměrného integrálu pro každou ohraničenou funkci f platí:

Lemma 1.2.

a) *$s(D, f) \leqq S(D, f)$ pro každé $D \in \mathscr{D}$.*

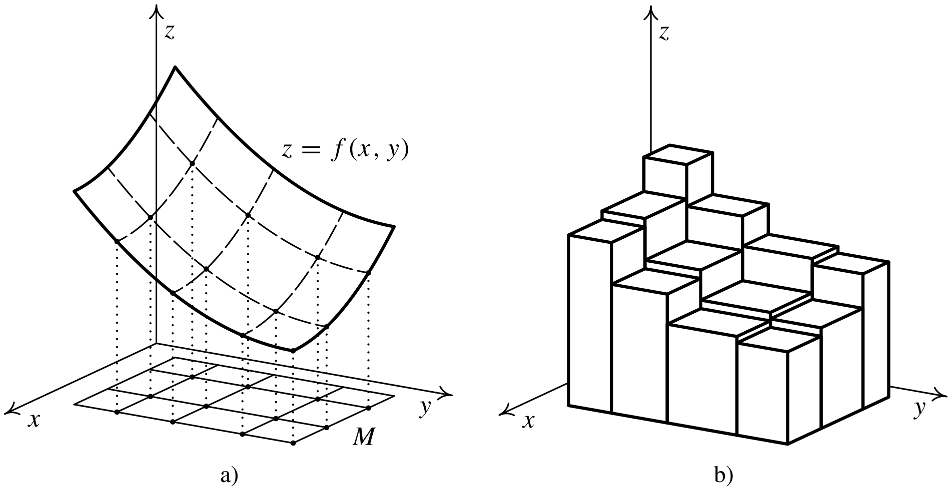
b) *Jsou-li $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ a D_2 je zjemnění D_1, pak je $s(D_1, f) \leqq s(D_2, f)$, $S(D_1, f) \geqq S(D_2, f)$.*

c) *Jsou-li $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ libovolná, pak $s(D_1, f) \leqq S(D_2, f)$.*

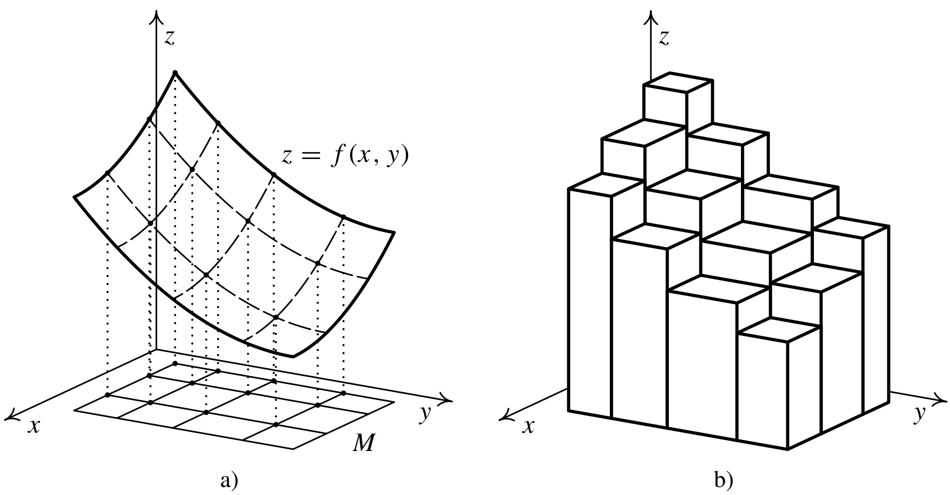
Důkaz.

a) Pro každé $(i, k) \in I$ platí $v_{ik} \leqq V_{ik}$. Odtud plyne

$$s(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} v_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}) \leqq \sum_{(i,k)\in I} V_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}) = S(D, f).$$



Obr. 1.4: Geometrický význam dolního součtu



Obr. 1.5: Geometrický význam horního součtu

b) Libovolný dílek M_{ik} dělení D_1 přispívá do dolního součtu $s(D_1, f)$ hodnotou $v_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik})$. V dělení D_2 je pevně zvolený dílek M_{ik} rozdělen na dílky $\widetilde{M}_{pq}$, $(p, q) \in J$, kde J je vhodná množina uspořádaných dvojic indexů, přičemž $\sum\limits_{(p,q)\in J} \mathrm{m}(\widetilde{M}_{pq}) = \mathrm{m}(M_{ik})$. Příspěvek dílku M_{ik} do součtu $s(D_2, f)$ je tedy $\sum\limits_{(p,q)\in J} \tilde{v}_{pq}\,\mathrm{m}(\widetilde{M}_{pq})$, kde $\tilde{v}_{pq} = \inf\{f(x, y) : [x, y] \in \widetilde{M}_{pq}\}$. Protože zřejmě platí $v_{ik} \leqq \tilde{v}_{pq}$ pro libovolné $(p, q) \in J$, máme

$$v_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}) = v_{ik} \sum_{(p,q)\in J} \mathrm{m}(\widetilde{M}_{pq}) = \sum_{(p,q)\in J} v_{ik}\,\mathrm{m}(\widetilde{M}_{pq}) \leqq \sum_{(p,q)\in J} \tilde{v}_{pq}\,\mathrm{m}(\widetilde{M}_{pq}),$$

tj. příspěvek dílku M_{ik} do součtu $s(D_2, f)$ je větší nebo roven příspěvku tohoto dílku do $s(D_1, f)$. Sečtením pro všechna $(i, k) \in I$ vyjde tvrzení pro dolní součty. Pro horní součty se důkaz provede analogicky.

c) Buď D_3 společné zjemnění dělení D_1 a D_2. Užitím a) a b) dostáváme

$$s(D_1, f) \leqq s(D_3, f) \leqq S(D_3, f) \leqq S(D_2, f). \qquad \square$$

Buď $D_0 \in \mathscr{D}$ libovolné pevně zvolené dělení dvojrozměrného intervalu $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Podle lemmatu 1.2 platí $s(D, f) \leqq S(D_0, f)$ pro každé $D \in \mathscr{D}$. Množina $\{s(D, f) : D \in \mathscr{D}\}$ je tedy neprázdná a shora omezená. Existuje proto $\sup\{s(D, f) : D \in \mathscr{D}\}$, které značíme

$$\underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Zřejmě platí

$$\underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D_0, f).$$

Dělení D_0 však bylo voleno libovolně, takže $S(D, f) \geqq \underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pro každé $D \in \mathscr{D}$ a množina všech horních součtů funkce f je zdola omezená a neprázdná. Existuje tudíž $\inf\{S(D, f) : D \in \mathscr{D}\}$, které značíme

$$\overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Přitom platí

$$\underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Definice 1.3. Čísla $\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ resp. $\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nazveme *dolním* resp. *horním integrálem* ohraničené funkce f *na množině* (*přes množinu*) M. Platí-li rovnost

$$\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

říkáme, že f je *integrovatelná* (*integrace schopna*) na množině M a definujeme *dvojný integrál* $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *funkce* f *na množině* (*přes množinu*) M vztahem

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Funkce f se nazývá *integrand*, množina M *integrační obor*.

Poznámka 1.4. Je-li integrand f konstantní funkce rovná jedné, používáme místo zápisu $\iint\limits_M 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ stručnější podobu $\iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Obdobně pro dolní a horní integrály.

Příklad 1.5. Vypočtěte $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $f(x, y) = c \in \mathbb{R}$ pro každý bod $[x, y]$ daného obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.

Řešení. Buď $D = \{M_{ik} : (i, k) \in I\}$ libovolné dělení obdélníku M. Zřejmě platí $v_{ik} = c$, $V_{ik} = c$. Tedy

$$s(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} c\,\mathrm{m}(M_{ik}) = c \sum_{(i,k)\in I} \mathrm{m}(M_{ik}) = c\,\mathrm{m}(M),$$
$$S(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} c\,\mathrm{m}(M_{ik}) = c \sum_{(i,k)\in I} \mathrm{m}(M_{ik}) = c\,\mathrm{m}(M).$$

Odtud

$$\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\,\mathrm{m}(M) = \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

a tedy

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M c\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\,\mathrm{m}(M) = c(b-a)(d-c).$$

▲

Příklad 1.6. Buď f funkce definovaná na obdélníku $M = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ takto:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \in \mathbb{Q} \text{ a } y \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Rozhodněte, zda funkce f je integrovatelná na obdélníku M.

Řešení. Buď $D = \{M_{ik} : (i, k) \in I\}$ libovolné dělení obdélníku M. Pak $v_{ik} = 0$, $V_{ik} = 1$, protože mezi každými dvěma různými reálnými čísly leží jak nekonečně mnoho racionálních tak nekonečně mnoho iracionálních čísel ([7, str. 7]), a

$$s(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} v_{ik}\, \mathrm{m}(M_{ik}) = \sum_{(i,k)\in I} 0 \cdot \mathrm{m}(M_{ik}) = 0,$$
$$S(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} V_{ik}\, \mathrm{m}(M_{ik}) = \sum_{(i,k)\in I} 1 \cdot \mathrm{m}(M_{ik}) = 1.$$

Odtud

$$\underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \neq 1 = \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Daná funkce není integrovatelná na obdélníku M. ▲

Lemma 1.7. *Buď f ohraničená funkce v obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení D obdélníku M, pro jehož normu platí $\nu(D) < \delta$, je*

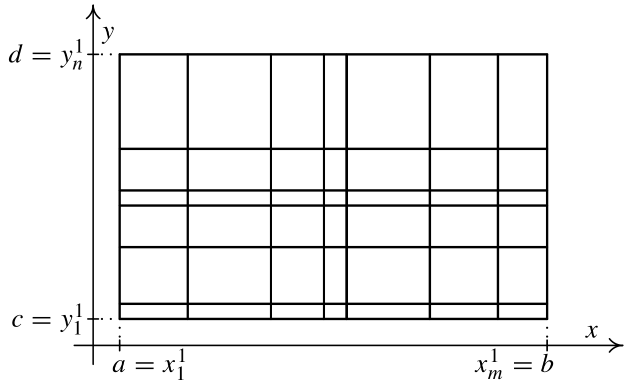
$$\overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D, f) < \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \varepsilon. \tag{1.1}$$

Důkaz. Nechť $K > 0$ je konstanta taková, že $|f(x, y)| \leqq K$ pro $[x, y] \in M$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle definice horního integrálu (jako infima horních součtů) existuje dělení $D^1 = D^1_x \times D^1_y$, $D^1_x : a = x^1_0 < x^1_1 < \cdots < x^1_m = b$, $D^1_y : c = y^1_0 < y^1_1 < \cdots < y^1_n = d$, obdélníku M s vlastností

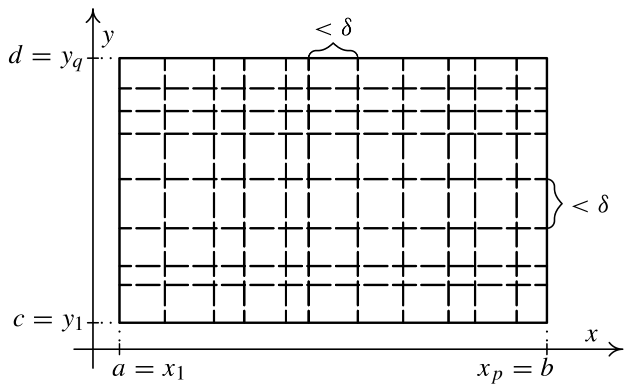
$$S(D^1, f) < \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{1.2}$$

Nechť M^1_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ jsou dílky tohoto dělení. Označme $I = \{(i, j) : i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$. Položme

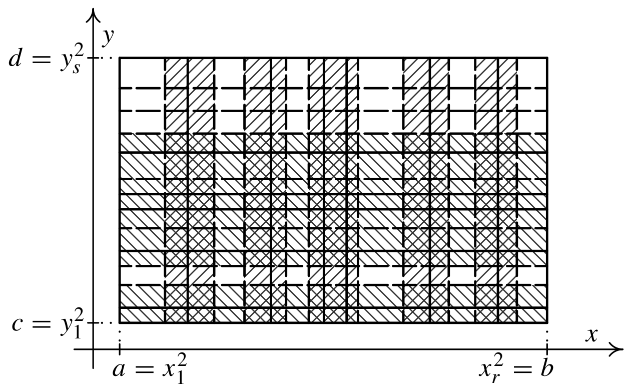
$$\delta = \frac{\varepsilon}{4[(d - c)m + (b - a)n]K}\,.$$



a) Dělení D^1 s dílky M_{ij}^1 $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$



b) Dělení D $(\nu(D) < \delta)$ s dílky M_{ij} $(i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q)$



c) Dělení D^2 s dílky M_{ij}^2 $(i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s)$

Obr. 1.6: Dělení D^1 a D a jejich největší společné zjemnění D^2

Buď nyní D libovolné dělení obdélníku M o normě menší než δ s dílky M_{ij} $(i = 1, 2, \dots, p;\ j = 1, 2, \dots, q)$. Označme $J = \{(i, j) : i = 1, 2, \dots, p;\ j = 1, 2, \dots, q\}$. Uvažujme dále dělení D^2 obdélníku M, které je největším společným zjemněním dělení D, D^1 (viz obr. 1.6). Nechť dílky dělení D^2 jsou M^2_{ij} $(i = 1, 2, \dots, r;\ j = 1, 2, \dots, s)$. Označme $L = \{(i, j) : i = 1, 2, \dots, r;\ j = 1, 2, \dots, s\}$. Položme $J' = \{(i, j) \in J :$ existuje $(k, l) \in I$ s vlastností $M_{ij} \subseteq M^1_{kl}\}$, $J'' = J \setminus J'$. Zřejmě pro $(i, j) \in J'$ je M_{ij} dílkem dělení D^2. Pro $(i, j) \in J''$ existují $(k, l) \in I$, $(\bar{k}, \bar{l}) \in I$, $(k, l) \neq (\bar{k}, \bar{l})$ tak, že $M_{ij} \cap (M^1_{kl} \setminus M^1_{\bar{k}\bar{l}}) \neq \emptyset$, $M_{ij} \cap (M^1_{\bar{k}\bar{l}} \setminus M^1_{kl}) \neq \emptyset$. Protože $\nu(D) < \delta$, platí pro součet měr $\mathrm{m}(M_{ij})$ všech obdélníků M_{ij}, kde $(i, j) \in J''$, nerovnosti

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in J''} \mathrm{m}(M_{ij}) \leqq \nu(D)[(d-c)m + (b-a)n] <&\\ < \delta[(d-c)m + (b-a)n] = \frac{\varepsilon}{4K}\,.&\end{aligned} \tag{1.3}$$

Položme $L' = \{(k, l) \in L :$ existuje $(i, j) \in J$ s vlastností $M^2_{kl} = M_{ij}\}$, $L'' = L \setminus L'$. Nechť pro $(i, j) \in J$, $(k, l) \in L$ je $V_{ij} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\}$, $V^2_{kl} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M^2_{kl}\}$. Pak podle (1.3)

$$\bigcup_{(i,j)\in J'} M_{ij} = \bigcup_{(k,l)\in L'} M^2_{kl}, \qquad \bigcup_{(i,j)\in J''} M_{ij} = \bigcup_{(k,l)\in L''} M^2_{kl},$$
$$\Big|\sum_{(i,j)\in J''} V_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij})\Big| \leqq K \sum_{(i,j)\in J''} \mathrm{m}(M_{ij}) < K\frac{\varepsilon}{4K} = \frac{\varepsilon}{4}\,,$$
$$\sum_{(i,j)\in J'} V_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij}) = \sum_{(k,l)\in L'} V^2_{kl}\,\mathrm{m}(M^2_{kl}).$$

Podobně užitím (1.3) dostáváme

$$\Big|\sum_{(k,l)\in L''} V^2_{kl}\,\mathrm{m}(M^2_{kl})\Big| \leqq K \sum_{(k,l)\in L''} \mathrm{m}(M^2_{kl}) = K \sum_{(i,j)\in J''} \mathrm{m}(M_{ij}) < K\frac{\varepsilon}{4K} = \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Protože

$$\begin{aligned}\big|S(D, f) - S(D^2, f)\big| = \Big|&\sum_{(i,j)\in J'} V_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij}) + \sum_{(i,j)\in J''} V_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij}) -\\ &- \sum_{(k,l)\in L'} V^2_{kl}\,\mathrm{m}(M^2_{kl}) - \sum_{(k,l)\in L''} V^2_{kl}\,\mathrm{m}(M^2_{kl})\Big|,\end{aligned}$$

máme

$$\begin{aligned}\left|S(D,f)-S(D^2,f)\right| &\leqq \Big|\sum_{(i,j)\in J''} V_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij})\Big| + \Big|\sum_{(k,l)\in L''} V^2_{kl}\,\mathrm{m}(M^2_{kl})\Big| < \\ &< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Užitím (1.4) a (1.2) dostáváme odhad

$$\begin{aligned}\overline{\iint_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D,f) < S(D^2,f)+\frac{\varepsilon}{2} \leqq \\ \leqq S(D^1,f)+\frac{\varepsilon}{2} < \overline{\iint_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\varepsilon,\end{aligned}$$

čímž je vztah (1.1) dokázán. □

Poznámka 1.8. Analogické tvrzení platí i o dolním součtu a dolním integrálu.

Lemma 1.9. *Buď f funkce ohraničená na obdélníku $M = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Pak je f integrovatelná na M právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové dělení $D \in \mathscr{D}(M)$, že platí $S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon$.*

Důkaz. Nechť f je integrovatelná na M. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje takové $D_1 \in \mathscr{D}(M)$, že

$$S(D_1,f) < \overline{\iint_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\varepsilon}{2} = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

a takové $D_2 \in \mathscr{D}(M)$, že

$$s(D_2,f) > \underline{\iint_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\varepsilon}{2} = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Buď D společné zjemnění dělení D_1 a D_2. Pak $S(D,f) \leqq S(D_1,f)$, $s(D,f) \geqq$ $\geqq s(D_2,f)$, a tudíž

$$S(D,f) < \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad s(D,f) > \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Odtud

$$S(D, f) - s(D, f) < \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Nechť naopak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $D \in \mathscr{D}(M)$ tak, že $S(D, f) - - s(D, f) < \varepsilon$. Protože

$$\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D, f), \qquad \underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq s(D, f),$$

platí

$$0 \leqq \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon.$$

Jelikož poslední vztah platí při libovolném $\varepsilon > 0$, je

$$\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

takže

$$\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

a f je integrovatelná na M. □

Věta 1.10. *Buď f ohraničená funkce na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.*

a) *Je-li $\{D_n\}$ libovolná nulová posloupnost dělení obdélníku M, pak pro $n \to \infty$ platí*

$$s(D_n, f) \to \underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad S(D_n, f) \to \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) *Je-li funkce f integrovatelná na obdélníku M, pak pro $n \to \infty$ platí*

$$s(D_n, f) \to \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad S(D_n, f) \to \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

pro libovolnou nulovou posloupnost dělení $\{D_n\}$ obdélníku M.

c) *Jestliže pro aspoň jednu nulovou posloupnost $\{D_n\}$ dělení obdélníku M platí $\lim\limits_{n\to\infty} s(D_n, f) = \lim\limits_{n\to\infty} S(D_n, f)$, pak funkce f je integrovatelná na obdélníku M.*

Důkaz.

a) Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle lemmatu 1.7 existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolné dělení D o normě $\nu(D) < \delta$ platí

$$0 \leqq S(D, f) - \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon.$$

Protože pro libovolnou nulovou posloupnost $\{D_n\}$ dělení obdélníku M platí $\nu(D_n) \to 0$, existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že $\nu(D_n) < \delta$ pro všechna $n \geqq N$. Tedy

$$0 \leqq S(D_n, f) - \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon$$

pro každé $n \geqq N$. Podle definice limity číselné posloupnosti to znamená, že

$$S(D_n, f) \to \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Podobně se dokáže, že

$$s(D_n, f) \to \underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) Druhé tvrzení věty plyne z tvrzení a) a z toho, že funkce f je integrovatelná na M právě tehdy, když

$$\underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

c) Podle předpokladu existuje číslo $L \in \mathbb{R}$ takové, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} s(D_n, f) = \lim\limits_{n\to\infty} S(D_n, f) = L$. Podle tvrzení a) je

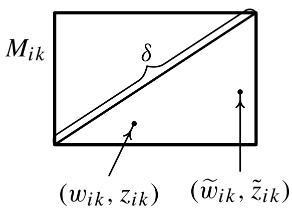
$$\underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = L = \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

takže f je na M integrovatelná. □

V důkazu následující věty použijeme tvrzení o *stejnoměrné spojitosti* funkce spojité na kompaktní množině: *Je-li funkce f spojitá na kompaktní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro libovolná $X_1 \in M$, $X_2 \in M$, $\varrho(X_1, X_2) < \delta$, platí $|f(X_1) - f(X_2)| < \varepsilon$. Přitom ϱ značí eukleidovskou metriku v prostoru $\mathbb{R}^n$.*

Věta 1.11. *Buď f spojitá funkce na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak je f integrovatelná na M.*

Důkaz. Množina M je kompaktní, takže podle Weierstrassovy věty ([5, str. 20]) je funkce f na množině M ohraničená, tudíž má na M horní a dolní integrál. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Z tvrzení zmíněného před touto větou plyne existence čísla $\delta > 0$ takového, že pro $[x_1, y_1] \in M$, $[x_2, y_2] \in M$, $\varrho\bigl([x_1, y_1], [x_2, y_2]\bigr) < \delta$, platí $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon / \operatorname{m}(M)$.



Buď nyní $D = \{M_{ik} : (i, k) \in I\}$ dělení obdélníku M o normě menší než δ, tj. takové dělení, že úhlopříčka každého jeho dílku M_{ik} je kratší než δ. Protože množiny M_{ik} jsou kompaktní a f je spojitá, nabývá funkce f na každém M_{ik} své největší a nejmenší hodnoty, to jest existují body $[w_{ik}, z_{ik}] \in M_{ik}$, $[\widetilde{w}_{ik}, \tilde{z}_{ik}] \in M_{ik}$ takové, že pro funkční hodnoty $f(w_{ik}, z_{ik})$, $f(\widetilde{w}_{ik}, \tilde{z}_{ik})$ platí

$$\begin{aligned} f(w_{ik}, z_{ik}) &= \min\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\} = v_{ik}, \\ f(\widetilde{w}_{ik}, \tilde{z}_{ik}) &= \max\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\} = V_{ik}. \end{aligned}$$

Zároveň máme

$$0 \leqq f(\widetilde{w}_{ik}, \tilde{z}_{ik}) - f(w_{ik}, z_{ik}) < \frac{\varepsilon}{\operatorname{m}(M)},$$

neboť $\varrho\bigl((w_{ik}, z_{ik}), (\widetilde{w}_{ik}, \tilde{z}_{ik})\bigr) < \delta$. Odtud

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{(i,k)\in I} V_{ik} \operatorname{m}(M_{ik}) - \sum_{(i,k)\in I} v_{ik} \operatorname{m}(M_{ik}) = \\ &= \sum_{(i,k)\in I} (V_{ik} - v_{ik}) \operatorname{m}(M_{ik}), \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{(i,k)\in I} \bigl(f(\widetilde{w}_{ik}, \tilde{z}_{ik}) - f(w_{ik}, z_{ik})\bigr) \operatorname{m}(M_{ik}) < \\ &< \sum_{(i,k)\in I} \frac{\varepsilon}{\operatorname{m}(M)} \operatorname{m}(M_{ik}) = \frac{\varepsilon}{\operatorname{m}(M)} \sum_{(i,k)\in I} \operatorname{m}(M_{ik}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle lemmatu 1.9 je funkce f na M integrovatelná. $\square$

Lemma 1.12. *Nechť funkce f je ohraničená na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a platí $f(x, y) = 0$ pro každý vnitřní bod $[x, y]$ obdélníku M. Pak je funkce f na obdélníku M integrovatelná a $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.*

Důkaz. Podle předpokladu existuje konstanta $K > 0$ tak, že $|f(x, y)| \leqq K$ pro každé $[x, y] \in M$. Nechť $D_x\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $D_y\colon c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ je dělení intervalu $\langle c, d\rangle$. Pak $D = D_x \times D_y$ je dělení obdélníku M s dílky $M_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle$, $(i, j) \in I$, kde $I = \{(i, j) : i = 1, \dots m;\ j = 1, \dots, n\}$. Dále označme $V_{ij} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\}$, $(i, j) \in I$. Nechť $J = \{(i, j) \in I : 1 < i < m,\ 1 < j < n\}$. Pro $(i, j) \in J$ je podle předpokladu $V_{ij} = 0$, pro $(i, j) \in I \smallsetminus J$ platí $|V_{ij}| \leqq K$. Tedy

$$
\begin{aligned}
0 \leqq |S(D, f)| &= \Bigl|\sum_{(i,j)\in I} V_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij})\Bigr| \leqq \sum_{(i,j)\in I} |V_{ij}|\,\mathrm{m}(M_{ij}) = \\
&= \sum_{(i,j)\in I\smallsetminus J} |V_{ij}|\,\mathrm{m}(M_{ij}) \leqq K \sum_{(i,j)\in I\smallsetminus J} \mathrm{m}(M_{ij}) \leqq \\
&\leqq 2K(b-a)\nu(D) + 2K(d-c)\nu(D) = 2K(b-a+d-c)\nu(D).
\end{aligned}
$$

Buď $\{D_n\}$ nulová posloupnost dělení obdélníku M. Protože podle předchozího platí $0 \leqq |S(D_n, f)| \leqq 2K(b-a+d-c)\nu(D_n)$, limitním přechodem pro $n \to +\infty$ dostaneme podle věty 1.10, že

$$
0 \leqq \Bigl|\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Bigr| \leqq 0,
$$

tudíž $\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

Analogicky se ověří, že také $\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. Odtud již plyne integrovatelnost funkce f a zároveň i rovnost $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. $\square$

Poznámka 1.13. Buď f funkce dvou proměnných x, y definovaná na množině M. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujme $M_x = \{y \in \mathbb{R} : [x, y] \in M\}$. Tudíž M_x je kolmým průmětem na osu y množiny, která je průnikem M a rovnoběžky s osou y, procházející bodem $[x, 0]$. Pak pro $x \in \mathbb{R}$, pro něž je $M_x \neq \emptyset$, budeme symbolem $f(x, \cdot)$ značit funkci jedné proměnné y, která je definovaná na množině M_x

a číslu y přiřazuje hodnotu $f(x, y)$. Tedy $f(x, \cdot)(y) = f(x, y)$ pro $y \in M_x$. Vlastně x je „zafixovaná“ hodnota a tečka zastupuje proměnnou y. Obdobně se zavede symbol $f(\cdot, y)$ pro funkci jedné proměnné x. Analogické značení budeme používat pro funkce tří a více proměnných, např. $f(x, y, \cdot)$, $f(x, \cdot, \cdot)$ apod.

V důkazu následující věty využijeme dvě vlastnosti jednoduchého horního integrálu, které se snadno ověří, ale obvykle se v základním kurzu neuvádí.

1) Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $a < c < b$. Pak platí $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.
2) Nechť funkce f, g jsou ohraničené na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f(x) \leqq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Obdobná tvrzení platí pro jednoduchý dolní integrál.

Věta 1.14 (Fubiniova[1] věta). *Buď f funkce integrovatelná na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak platí*

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\overline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\overline{\int_a^b} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y =$$
$$= \int_a^b \left[\underline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\underline{\int_a^b} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Důkaz provedeme podrobně pro první rovnost. Označme pro libovolné $x \in \langle a, b\rangle$

$$F(x) = \overline{\int_a^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Protože $f(x, \cdot)$ je ohraničená funkce na intervalu $\langle c, d\rangle$, má na tomto intervalu horní integrál. Nechť $D = D_x \times D_y$ je dělení M, kde $D_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $D_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. Nechť $M_{ik} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{k-1}, y_k\rangle$ jsou dílky tohoto dělení. Položme $V_{ik} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\}$. K pevně zvolenému $x \in \langle a, b\rangle$ najděme takové $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, že $x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ (je-li $x = x_i$ pro některé i, $0 < i < m$, platí následující úvaha jak pro interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ tak pro interval $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$). Pak s využitím tvrzení 1) a 2) zmíněných před touto větou dostáváme

$$F(x) = \overline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n} \overline{\int_{y_{k-1}}^{y_k}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \leqq$$

[1]**Guido Fubini** (1879–1943) (čti fubiny) — italský matematik. Zabýval se projektivní diferenciální geometrií, diferenciálními rovnicemi, variačním počtem a mnoha dalšími matematickými disciplínami.

$$\leqq \sum_{k=1}^{n} \overline{\int_{y_{k-1}}^{y_k}} V_{ik}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n} V_{ik}(y_k - y_{k-1}).$$

Protože odvozená nerovnost platí pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, z tvrzení 1) a 2) dále plyne

$$\overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m} \overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} F(x)\,\mathrm{d}x \leqq \sum_{i=1}^{m} \overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} \left[\sum_{k=1}^{n} V_{ik}(y_k - y_{k-1})\right] \mathrm{d}x \leqq$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} V_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}) = S(D, f).$$

Pro každé $D \in \mathscr{D}(M)$ je tedy $\overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \leqq S(D, f)$, a odtud

$$\overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Analogicky se dokáže nerovnost mezi dolními integrály

$$\underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \geqq \underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Celkem tedy platí

$$\underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad (1.5)$$

Protože funkce f je podle předpokladu na M integrovatelná, platí v (1.5) všude rovnosti, takže funkce F je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\overline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

S ohledem na symetrii proměnných platí zároveň

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\overline{\int_a^b} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$$

Podobně se dokáže rovněž varianta s dolními vnitřními integrály. □

Z praktického hlediska je nejdůležitější následující speciální verze předchozí věty, s níž se nejčastěji setkáváme při výpočtech dvojných integrálů na obdélníku.

Důsledek 1.15 (Fubiniova věta pro spojitou funkci). *Buď f spojitá funkce na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak platí*

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Funkce f je podle věty 1.11 integrovatelná na obdélníku M. Protože funkce $f(x, \cdot)$ proměnné y je spojitá na intervalu $\langle c, d\rangle$, platí $\underline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \overline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ pro libovolné $x \in \langle a, b\rangle$. První rovnost pak plyne z Fubiniovy věty. Obdobně se dokáže druhá rovnost. □

Poznámka 1.16.

1. Dvojný integrál $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ se někdy označuje jako *integrál dvojrozměrný*, zatímco integrály $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$, $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ a jejich varianty s horními a dolními vnitřními integrály jako *integrály dvojnásobné*.
2. V literatuře je možno se setkat také s následujícím označením dvojnásobných integrálů: $\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$, resp. $\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$.

Příklad 1.17. Nechť $M = \langle -1, 3\rangle \times \langle 0, 2\rangle$. Vypočtěte $\iint\limits_M (x + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Řešení. Funkce $f(x, y) = x + y^2$ je spojitá na obdélníku M. Podle Fubiniovy věty platí:

$$\iint\limits_M (x + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^3 \left[\int_0^2 (x + y^2)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^3 \left[xy + \frac{y^3}{3}\right]_0^2 \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-1}^3 \left[2x + \frac{8}{3} - (0 + 0)\right]\mathrm{d}x = \left[2\frac{x^2}{2} + \frac{8}{3}x\right]_{-1}^3 =$$
$$= 9 + 8 - 1 + \frac{8}{3} = \frac{56}{3}.$$

▲

I když ve Fubiniově větě je možné volit libovolné pořadí integrace, někdy je v konkrétním případě jedna varianta výrazně jednodušší, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 1.18. Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x^y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \langle 0, 1\rangle \times \langle 1, 2\rangle$ (pro $y > 0$ klademe $0^y = 0$).

Řešení. Integrand je funkce spojitá na M. Pro $x > 0$ je to zřejmé. Pro $0 < x < 1$ a $1 \leqq y \leqq 2$ platí nerovnosti $2 \ln x \leqq y \ln x \leqq \ln x$, a tedy $x^2 \leqq x^y \leqq x$. Odtud plyne spojitost integrandu v bodech $[0, y]$, $1 \leqq y \leqq 2$. Použijeme Fubiniovu větu a začneme integrovat nejprve podle proměnné y:

$$\iint\limits_M x^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_1^2 x^y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Vnitřní integrál bude

$$\int_1^2 x^y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_1^2 = \frac{x^2 - x}{\ln x} \quad \text{pro } x \neq 0 \text{ a } x \neq 1,$$
$$\int_1^2 0^y \,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{pro } x = 0 \quad \text{a} \quad \int_1^2 1^y \,\mathrm{d}y = 1 \quad \text{pro } x = 1.$$

Protože existence a hodnota jednoduchého určitého integrálu nezávisí na hodnotě integrandu ve dvou konkrétních bodech, můžeme hodnoty v nule a jedničce ignorovat. Navíc je snadné se přesvědčit pomocí l'Hospitalova pravidla, že $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - x)/\ln x = 0$ a $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - x)/\ln x = 1$. Vnitřní integrál proto představuje spojitou funkci na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Avšak vnější integrál

$$\int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x} \,\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

se nám elementárními metodami nepodaří spočítat. Nenajdeme totiž primitivní funkci.

Zkusíme tedy integrovat nejprve podle proměnné x:

$$\iint\limits_M x^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Vnitřní integrál bude

$$\int_0^1 x^y \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 = \frac{1}{y+1}.$$

Celkově dostaneme

$$\iint\limits_M x^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \big[\ln |y+1| \big]_1^2 = \big[\ln(y+1) \big]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}.$$

Je dobré si uvědomit, že toto číslo je současně hodnotou integrálu (1.6), který jsme nedokázali spočítat. To je důsledkem toho, že oba dvojnásobné integrály musí mít podle Fubiniovy věty stejnou hodnotu. ▲

Poznámka 1.19. Ve Fubiniově větě 1.14 nelze ve vnitřních integrálech obecně nahradit horní resp. dolní jednoduchý integrál jednoduchým integrálem. Uvažujme např. funkci f definovanou na obdélníku $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ vztahem

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } a \leqq x < b,\ c \leqq y \leqq d, \\ \chi(y) & \text{pro } x = b,\ c \leqq y \leqq d, \end{cases}$$

kde χ je tzv. Dirichletova[1] funkce ($\chi(y) = 1$ pro racionální y a $\chi(y) = 0$ pro iracionální y). Funkce f je na obdélníku integrovatelná. To lze dokázat přímo (viz cvičení 1 k této kapitole) nebo to plyne z lemmatu 1.12. Ale $\int_c^d f(b, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \chi(y)\,\mathrm{d}y$ neexistuje, protože $\underline{\int_c^d} \chi(y)\,\mathrm{d}y = 0 < d - c = \overline{\int_c^d} \chi(y)\,\mathrm{d}y$.

Věta 1.20. *Buďte f, g funkce integrovatelné na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a nechť C je konstanta. Pak*

a) *funkce Cf je integrovatelná na M a*

$$\iint_M Cf(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y; \tag{1.7}$$

b) *funkce $|f|$ je integrovatelná na M a*

$$\left| \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \leqq \iint_M |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y; \tag{1.8}$$

c) *funkce $f + g$ je integrovatelná na M a*

$$\iint_M \big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.9}$$

[1] **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805–1859) (čti diriklé) — německý matematik. Zabýval se teorií čísel, matematickou analýzou a rovnicemi matematické fyziky.

Důkaz.

a) Z příkladu 1.5 víme, že $\iint\limits_M 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \cdot \mathrm{m}(M) = 0$. Tvrzení a) tedy platí pro $C = 0$.

Předpokládejme nyní, že $C > 0$. Pro libovolné dělení $D = \{M_{ik} : (i,k) \in I\}$ obdélníku M zřejmě platí

$$\inf\{Cf(x,y) : [x,y] \in M_{ik}\} = C\inf\{f(x,y) : [x,y] \in M_{ik}\} = Cv_{ik},$$

kde $v_{ik} = \inf\{f(x,y) : [x,y] \in M_{ik}\}$. Analogicky

$$\sup\{Cf(x,y) : [x,y] \in M_{ik}\} = CV_{ik},$$

kde $V_{ik} = \sup\{f(x,y) : [x,y] \in M_{ik}\}$. Odtud dostáváme

$$s(D,Cf) = Cs(D,f), \qquad S(D,Cf) = CS(D,f)$$

pro libovolné dělení D obdélníku M. Tedy

$$\underline{\iint\limits_M} Cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sup\{s(D,Cf) : D \in \mathscr{D}\} = \sup\{Cs(D,f) : D \in \mathscr{D}\} = \\ = C\sup\{s(D,f) : D \in \mathscr{D}\} = C\underline{\iint\limits_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\overline{\iint\limits_M} Cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \inf\{S(D,Cf) : D \in \mathscr{D}\} = \inf\{CS(D,f) : D \in \mathscr{D}\} = \\ = C\inf\{S(D,f) : D \in \mathscr{D}\} = C\overline{\iint\limits_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Protože jsme zjistili, že

$$\underline{\iint\limits_M} Cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_M} Cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

je funkce Cf na M integrovatelná a platí

$$\iint\limits_M Cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

V případě $C < 0$ platí $s(D,Cf) = CS(D,f)$, $S(D,Cf) = Cs(D,f)$ a zbytek důkazu se provede analogicky jako v případě $C > 0$.

b) Buď D libovolné dělení obdélníku M s dílky M_{ij}, $(i, j) \in I$. Položme

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \inf\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\}, & U_{ij} &= \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\}, \\ v_{ij} &= \inf\{|f(x, y)| : [x, y] \in M_{ij}\}, & V_{ij} &= \sup\{|f(x, y)| : [x, y] \in M_{ij}\} \end{aligned}$$

pro $(i, j) \in I$. Pro každé dva body $[x, y], [\tilde{x}, \tilde{y}] \in M_{ij}$ platí

$$-(U_{ij} - u_{ij}) = u_{ij} - U_{ij} \leqq f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqq U_{ij} - u_{ij},$$

takže $|f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| \leqq U_{ij} - u_{ij}$. Odtud plyne

$$\begin{aligned} |f(x, y)| = |f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y}) + f(\tilde{x}, \tilde{y})| \leqq |f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| + \\ + |f(\tilde{x}, \tilde{y})| \leqq U_{ij} - u_{ij} + |f(\tilde{x}, \tilde{y})|. \end{aligned}$$

pro každé $[x, y], [\tilde{x}, \tilde{y}] \in M_{ij}$. Necháme-li v posledním vztahu proběh-nout proběhnout bod $[x, y]$ celý dílek M_{ij}, zjistíme, že pro libovolný bod $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in M_{ij}$ platí

$$V_{ij} \leqq U_{ij} - u_{ij} + |f(\tilde{x}, \tilde{y})|.$$

Odtud vyplývá nerovnost

$$V_{ij} \leqq U_{ij} - u_{ij} + v_{ij},$$

takže

$$0 \leqq V_{ij} - v_{ij} \leqq U_{ij} - u_{ij},$$

a tudíž po vynásobení čísly $\mathrm{m}(M_{ij})$ a sečtení přes všechna $(i, j) \in I$ obdržíme

$$0 \leqq S(D, |f|) - s(D, |f|) \leqq S(D, f) - s(D, f).$$

Položíme-li v předchozích nerovnostech $D = D_n$, kde $\{D_n\}$ je libovolná nulová posloupnost dělení obdélníku M, dostáváme podle věty 1.10 limitním přechodem $n \to \infty$

$$\begin{aligned} 0 \leqq \overline{\iint_M} |f(x, y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint_M} |f(x, y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \\ \leqq \iint_M f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_M f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \end{aligned}$$

Je tedy $|f|$ na M integrovatelná. Nerovnost mezi integrály plyne z nerovnosti

$$-S(D, |f|) \leqq S(D, f) \leqq S(D, |f|),$$

která snadno vyplývá ze zřejmých nerovností $-V_{ij} \leqq U_{ij} \leqq V_{ij}$.

c) Buď D libovolné dělení obdélníku M s dílky M_{ij}, $(i, j) \in I$. Označme

$$u_{ij} = \inf\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\}, \qquad v_{ij} = \inf\{g(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\},$$
$$w_{ij} = \inf\{f(x, y) + g(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\}.$$

Pak $f(x, y)+g(x, y) \geqq u_{ij}+v_{ij}$ pro každé $[x, y] \in M_{ij}$, a tedy $u_{ij}+v_{ij} \leqq w_{ij}$. Odtud

$$\begin{aligned} s(D, f+g) &= \sum_{i\in I} w_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij}) \geqq \sum_{i\in I}(u_{ij}+v_{ij})\,\mathrm{m}(M_{ij}) = \\ &= \sum_{i\in I} u_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij}) + \sum_{i\in I} v_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij}) = s(D, f) + s(D, g). \end{aligned}$$

Podobně se dokáže

$$S(D, f+g) \leqq S(D, f) + S(D, g).$$

Pro libovolné dělení D obdélníku M tedy platí

$$s(D, f) + s(D, g) \leqq s(D, f+g) \leqq S(D, f+g) \leqq S(D, f) + S(D, g).$$

Pro libovolnou nulovou posloupnost $\{D_n\}$ dělení obdélníku M tudíž máme

$$s(D_n, f)+s(D_n, g) \leqq s(D_n, f+g) \leqq S(D_n, f+g) \leqq S(D_n, f)+S(D_n, g).$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme

$$\begin{aligned} &\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \underline{\iint_M}\big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \\ &\leqq \overline{\iint_M}\big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Odtud vzhledem k rovnosti krajních výrazů plyne, že

$$\begin{aligned} \underline{\iint_M}\big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \overline{\iint_M}\big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Je tedy funkce $f + g$ integrovatelná na M a platí

$$\iint_M \big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

□

Věta 1.21. *Nechť funkce f je ohraničená na obdélníku M. Buď D dělení obdélníku M s dílky dělení M_{ij}, $(i, j) \in J$, kde $J = \{(i, j) : i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, s\}$.*

Pak funkce f je integrovatelná na obdélníku M právě tehdy, když je integrovatelná na všech obdélnících M_{ij}, $(i, j) \in J$. V tom případě platí

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{(i,j)\in J} \iint\limits_{M_{ij}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.10}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že dělení D má jen dva dílky, označme je M_1, M_2 (obdélníky M_1, M_2 leží buď vedle sebe, nebo nad sebou).

Buď $\{D'_n\}$ libovolná nulová posloupnost dělení obdélníku M_1, $\{D''_n\}$ libovolná nulová posloupnost dělení obdélníku M_2. Pak dílky dělení D'_n, D''_n určují dělení D_n obdélníku M takové, že dílky tohoto dělení ležící v obdélníku M_1 jsou zjemněním $\widehat{D}'_n$ dělení D'_n a dílky ležící v obdélníku M_2 jsou zjemněním $\widehat{D}''_n$ dělení D''_n. Zřejmě jsou posloupnosti $\{D_n\}$, $\{\widehat{D}'_n\}$ a $\{\widehat{D}''_n\}$ nulové a pro každé n platí

$$s(D_n, f) = s(\widehat{D}'_n, f) + s(\widehat{D}''_n, f).$$

Odtud limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme, že

$$\underline{\iint}_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint}_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \underline{\iint}_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.11}$$

Podobně se ukáže, že

$$\overline{\iint}_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint}_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \overline{\iint}_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.12}$$

Odečtením rovností (1.11) a (1.12) obdržíme

$$\begin{aligned}
&\overline{\iint}_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint}_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \overline{\iint}_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - {}\\
&\quad - \underline{\iint}_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint}_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint}_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Předpokládejme nejprve, že funkce f je integrovatelná na obdélníku M, tedy

$$\underline{\iint}_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint}_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

takže pravá strana rovnosti (1.13) je rovna nule. Protože

$$\overline{\iint\limits_{M_2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint\limits_{M_2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq 0,$$
$$\overline{\iint\limits_{M_1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint\limits_{M_1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq 0,$$

dostáváme z nulové levé strany rovnosti (1.13)

$$\overline{\iint\limits_{M_1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint\limits_{M_1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\overline{\iint\limits_{M_2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint\limits_{M_2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Proto je funkce f integrovatelná na M_1 i M_2. Ze vztahů (1.11) a (1.12) nyní plyne

$$\iint\limits_{M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.14}$$

Analogicky se z rovnosti (1.13) dokáže, že z integrovatelnosti funkce f na M_1, M_2 plyne její integrovatelnost na M i rovnost (1.14).

Nyní se tvrzení snadno rozšíří indukcí na případ $r = 1$ a s je libovolné (dílky leží nad sebou) nebo $s = 1$ a r je libovolné (dílky leží vedle sebe). Obecný případ libovolných r, s pak dostaneme spojením těchto dvou speciálních případů. □

Důsledek 1.22. *Nechť $R_1 \subseteq R_2$ jsou obdélníky, funkce f je ohraničená na R_1 a $f(x,y) = 0$ pro každé $[x,y] \in R_2 \smallsetminus R_1$. Pak je funkce f integrovatelná na R_1 právě tehdy, když je integrovatelná na R_2; přitom, nastane-li tento případ, platí*

$$\iint\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.15}$$

Důkaz. Buď D dělení obdélníku R_2 takové, že jeden z jeho dílků je obdélník R_1. Tvrzení plyne z věty 1.21 a lemmatu 1.12. □

Věta 1.23. *Buďte f, g integrovatelné funkce na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak platí:*

a) *Je-li $f(x, y) \geqq g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$, pak*

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.16}$$

b) *Funkce* $\max\{f, g\}$ *a* $\min\{f, g\}$ *jsou integrovatelné na M.*

Důkaz.

a) Je-li $f(x, y) \geqq g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$, je

$$\inf\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\} \geqq \inf\{g(x, y) : [x, y[\in M_{ik}\},$$
$$\sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\} \geqq \sup\{g(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\}.$$

Odtud $s(D, f) \geqq s(D, g)$, $S(D, f) \geqq S(D, g)$ pro libovolné $D \in \mathscr{D}(M)$. Poslední nerovnosti implikují

$$\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \underline{\iint\limits_M} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \overline{\iint\limits_M} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

takže z integrovatelnosti funkcí f, g na M plyne

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) Protože

$$\max\{f(x, y), g(x, y)\} = \frac{1}{2}\big[f(x, y) + g(x, y) + |f(x, y) - g(x, y)|\big],$$
$$\min\{f(x, y), g(x, y)\} = \frac{1}{2}\big[f(x, y) + g(x, y) - |f(x, y) - g(x, y)|\big]$$

a funkce f, g jsou integrovatelné na M, jsou podle věty 1.20 na M integrovatelné i funkce $f + g$, $f - g$ a $|f - g|$, a tudíž i $f + g + |f - g|$, $f + g - |f - g|$. □

1.2. Ekvivalentní definice dvojného integrálu

Myšlenka zavést integrál pomocí horních a dolních součtů pochází od Darbouxe[1]. Původní Riemannův přístup byl jiný. Uvedeme si jeho definici a dokážeme, že je ekvivalentní s definicí integrálu z předchozího oddílu. Pro účely tohoto oddílu označíme integrál ve smyslu definice 1.3 symbolem $(\mathscr{D})\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a nazveme $(\mathscr{D})$-integrál. Funkci mající $(\mathscr{D})$-integrál nazveme $(\mathscr{D})$-integrovatelnou.

Nechť $M = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ je dvojrozměrný interval a D jeho dělení s dílky M_{ik}, kde $(i,k) \in J$, $J = \{(i,k) : i = 1,\dots,m;\ k = 1,\dots,n\}$. Vyberme v každém dílku M_{ik} bod $[\xi_i, \eta_k]$. Množinu bodů $\Xi = \{[\xi_i,\eta_k] : (i,k) \in J\}$ nazýváme *výběrem reprezentantů* dílků dělení D.

Buď f funkce dvou proměnných definovaná na obdélníku M. Položme

$$\sigma(D,\Xi,f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i,\eta_k)\,\mathrm{m}(M_{ik}).$$

Číslo $\sigma(D,\Xi,f)$ nazýváme *integrálním součtem* funkce f při dělení D a výběru reprezentantů Ξ (viz obr. 1.7, kde za reprezentanty dílků jsou zvoleny jejich středy).

Definice 1.24. Řekneme, že funkce f je *$(\mathscr{R})$-integrovatelná* (má *$(\mathscr{R})$-integrál*) na obdélníku M, jestliže existuje konstanta $I \in \mathbb{R}$ s následující vlastností:

K libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D \in \mathscr{D}(M)$ s normou $\nu(D) < \delta$ a pro libovolný výběr Ξ reprezentantů dílků tohoto dělení platí $|I - \sigma(D,\Xi,f)| < \varepsilon$.

Číslo I nazýváme *dvojným $(\mathscr{R})$-integrálem* funkce f na množině M a píšeme

$$(\mathscr{R})\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I.$$

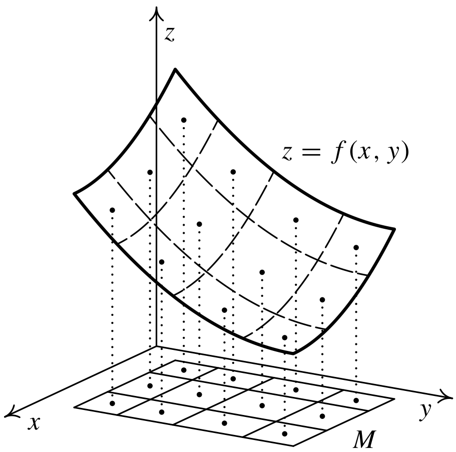
Snadno se ověří, že číslo I z předchozí definice je určeno jednoznačně.

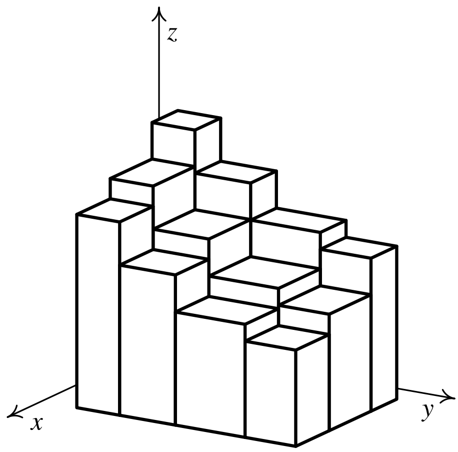
Zatímco pro konstrukci z definice 1.3 bylo podstatné, aby funkce f byla ohraničená na obdélníku M, v definici 1.24 tento předpoklad nepotřebujeme.

Věta 1.25. *Nechť funkce f je $(\mathscr{D})$-integrovatelná na obdélníku M. Pak je funkce f na M také $(\mathscr{R})$-integrovatelná a platí*

$$(\mathscr{D})\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\mathscr{R})\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

[1] **Jean Gaston Darboux** (1842–1917) (čti darbu) — francouzský matematik. Zabýval se diferenciální geometrií a matematickou analýzou.





Obr. 1.7: Geometrický význam integrálního součtu

Důkaz. Pro libovolné dělení D obdélníku M s dílky M_{ik}, $(i, k) \in J$, a libovolný výběr $\Xi = \{[\xi_i, \eta_k] : (i, k) \in J\}$ reprezentantů dílků tohoto dělení platí $v_{ik} \leqq f(\xi_i, \eta_k) \leqq V_{ik}$, kde $v_{ik} = \inf\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\}$, $V_{ik} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\}$. Z definice dolního, horního a integrálního součtu odtud dostáváme

$$\begin{aligned} s(D, f) = \sum_{(i,k)\in J} v_{ik}\, \mathrm{m}(M_{ik}) \leqq \sum_{(i,k)\in J} f(\xi_i, \eta_k)\, \mathrm{m}(M_{ik}) = \sigma(D, \Xi, f) \leqq \\ \leqq \sum_{(i,k)\in J} V_{ik}\, \mathrm{m}(M_{ik}) = S(D, f). \end{aligned}$$

Kromě toho z definice $(\mathscr{D})$-integrálu plyne nerovnost

$$s(D, f) \leqq (\mathscr{D}) \iint_M f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D, f).$$

Pro každé dělení D a libovolný výběr Ξ reprezentantů jeho dílků tedy platí

$$\left| (\mathscr{D}) \iint_M f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sigma(D, \Xi, f) \right| \leqq S(D, f) - s(D, f).$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. Podle lemmatu 1.7 a poznámky 1.8 k číslu $\varepsilon/2 > 0$

existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení D s normou $\nu(D) < \delta$ platí

$$0 \leqq (\mathscr{D}) \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - s(D, f) < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$0 \leqq S(D, f) - (\mathscr{D}) \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{2},$$

takže

$$0 \leqq S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

Pro každé dělení D, které má normu $\nu(D) < \delta$, a libovolný výběr Ξ reprezentantů jeho dílků tudíž platí

$$\left|(\mathscr{D}) \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sigma(D, \Xi, f)\right| < \varepsilon,$$

což podle definice 1.24 znamená, že funkce f je na obdélníku M $(\mathscr{R})$-integrovatelná a hodnota $(\mathscr{R})$-integrálu je rovna hodnotě $(\mathscr{D})$-integrálu. $\square$

Lemma 1.26. *Je-li funkce f $(\mathscr{R})$-integrovatelná na obdélníku M, je na M ohraničená.*

Důkaz. K číslu $\varepsilon = 1$ existuje podle definice 1.24 číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D \in \mathscr{D}(M)$ s normou $\nu(D) < \delta$ a libovolný výběr Ξ reprezentantů dílků tohoto dělení je

$$|I - \sigma(D, \Xi, f)| < 1,$$

kde $I = (\mathscr{R}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Pak

$$|\sigma(D, \Xi, f)| = |\sigma(D, \Xi, f) - I + I| \leqq |\sigma(D, \Xi, f) - I| + |I| < 1 + |I| = K.$$

Absolutní hodnoty integrálních součtů příslušných všem dělením $D \in \mathscr{D}(M)$ s normou $\nu(D) < \delta$ jsou tudíž bez ohledu na výběr reprezentantů dílků dělení ohraničené konstantou K.

Zvolme pevně jedno takové dělení D obdélníku M s dílky M_{ik}, $(i, k) \in J$. Připusťme, že funkce f není ohraničená na M. Pak existuje $(i_0, k_0) \in J$ tak, že na obdélníku $M_{i_0k_0}$ není f ohraničená. Položme $J_0 = J \setminus \{(i_0, k_0)\}$.

Pro každé $(i, k) \in J_0$ zvolme libovolný bod $[\xi_i, \eta_k] \in M_{ik}$. Označme

$$L = \sum_{(i,k)\in J_0} f(\xi_i, \eta_k)\,\mathrm{m}(M_{ik}).$$

Protože funkce f není na dílku $M_{i_0k_0}$ ohraničená, lze najít bod $[\xi_{i_0}, \eta_{k_0}] \in M_{i_0k_0}$ tak, že

$$\left|f(\xi_{i_0}, \eta_{k_0})\right| \geqq \frac{K + |L| + 1}{\mathrm{m}(M_{i_0k_0})}.$$

Položme $\Xi = \{[\xi_i, \eta_k] : (i, k) \in J\}$. Pak

$$|\sigma(D, \Xi, f)| = \Big| f(\xi_{i_0}, \eta_{k_0})\, \mathrm{m}(M_{i_0 k_0}) + \sum_{(i,k)\in J_0} f(\xi_i, \eta_k)\, \mathrm{m}(M_{ik}) \Big| \geqq$$
$$\geqq \big| f(\xi_{i_0}, \eta_{k_0}) \big|\, \mathrm{m}(M_{i_0 k_0}) - \Big| \sum_{(i,k)\in J_0} f(\xi_i, \eta_k)\, \mathrm{m}(M_{ik}) \Big| \geqq$$
$$\geqq K + |L| + 1 - |L| = K + 1,$$

což je spor. Funkce f je tedy na obdélníku M ohraničená. □

Lemma 1.27. *Nechť funkce f je ohraničená na obdélníku M a D je dělení M. Pak k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existují výběry Ξ^1, Ξ^2 reprezentantů dílků dělení D takové, že $S(D, f) < \sigma(D, \Xi^1, f) + \varepsilon$, $s(D, f) > \sigma(D, \Xi^2, f) - \varepsilon$.*

Důkaz. Nechť D je dělení obdélníku M s dílky M_{ik}, $(i, k) \in J$. Označme r celkový počet dílků M_{ik}.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo a $(i, k) \in J$. Z definice suprema V_{ik} funkce f na M_{ik} vyplývá, že existuje bod $[\xi_i, \eta_k] \in M_{ik}$, pro nějž

$$0 \leqq V_{ik} - f(\xi_i, \eta_k) < \frac{\varepsilon}{r\, \mathrm{m}(M_{ik})}\,.$$

Položme $\Xi^1 = \{[\xi_i, \eta_k] : (i, k) \in J\}$. Potom

$$S(D, f) - \sigma(D, \Xi^1, f) = \sum_{(i,k)\in J} \big[V_{ik} - f(\xi_i, \eta_k)\big]\, \mathrm{m}(M_{ik}) <$$
$$< \sum_{(i,k)\in J} \frac{\varepsilon}{r\, \mathrm{m}(M_{ik})}\, \mathrm{m}(M_{ik}) = \sum_{(i,k)\in J} \frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon,$$

což je první nerovnost. Obdobně se dokáže existence Ξ^2 z nerovnosti pro dolní součet. □

Věta 1.28. *Nechť funkce f je $(\mathscr{R})$-integrovatelná na obdélníku M. Pak je funkce f na M také $(\mathscr{D})$-integrovatelná a platí*

$$(\mathscr{R}) \iint_M f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\mathscr{D}) \iint_M f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Podle lemmatu 1.26 je $(\mathscr{R})$-integrovatelná funkce f na obdélníku M ohraničená, můžeme tedy konstruovat její dolní a horní součty.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. Podle definice 1.24 k číslu $\varepsilon/4 > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D \in \mathscr{D}(M)$ s normou $\nu(D) < \delta$ a pro libovolný výběr Ξ reprezentantů dílků tohoto dělení platí

$$\Big| (\mathscr{R}) \iint_M f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sigma(D, \Xi, f) \Big| < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Zvolme pevně jedno takové dělení D. Podle lemmatu 1.27 lze k číslu $\varepsilon/4 > 0$ nalézt takové výběry Ξ^1, Ξ^2 reprezentantů dílků dělení D, že $S(D, f) < \sigma(D, \Xi^1, f) + \varepsilon/4$ a $s(D, f) > \sigma(D, \Xi^2, f) - \varepsilon/4$. Z předchozích nerovností dostaneme

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) < \sigma(D, \Xi^1, f) - \sigma(D, \Xi^2, f) + \frac{\varepsilon}{2} &= \\ = \sigma(D, \Xi^1, f) - (\mathscr{R}) \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &+ \\ + (\mathscr{R}) \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sigma(D, \Xi^2, f) + \frac{\varepsilon}{2} &< \\ < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle lemmatu 1.9 je tudíž funkce f na obdélníku M $(\mathscr{D})$-integrovatelná. Rovnost

$$(\mathscr{R}) \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\mathscr{D}) \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

plyne z věty 1.25. □

1.3. Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^2$

V tomto oddílu přiřadíme některým omezeným množinám v rovině nezáporné číslo, které bude zobecněním pojmu *obsah množiny*, známého z elementární geometrie. Při konstrukci použijeme dvojný integrál funkce definované na obdélníku.

Definice 1.29. Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$ množina. Funkce $\chi_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$\chi_M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x, y] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y] \notin M \end{cases}$$

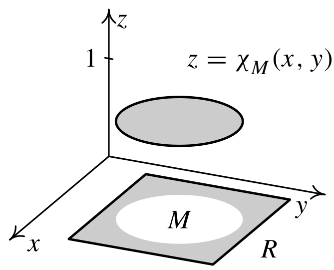
se nazývá *charakteristická funkce množiny M*.

Poznámka 1.30. Je-li množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ omezená, existuje zřejmě vhodný obdélník $R = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ tak, že $M \subseteq R$. Funkce χ_M je definovaná v celé rovině $\mathbb{R}^2$, tedy i na obdélníku R — viz obr. 1.8, kde M je kruh.

Definice 1.31. Řekneme, že omezená množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je (*jordanovsky*) *měřitelná*, jestliže pro nějaký obdélník $R \supseteq M$ je charakteristická funkce χ_M množiny M integrovatelná na obdélníku R. Přitom klademe

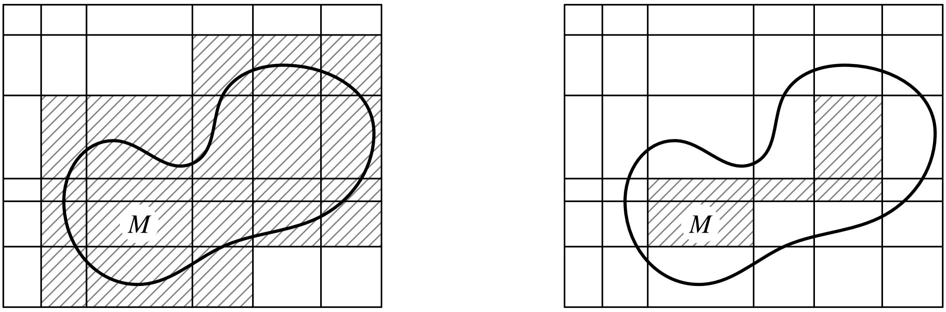
$$\mathrm{m}(M) = \iint_R \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

a číslo $\mathrm{m}(M)$ nazýváme (*Jordanovou*) *mírou* množiny M.



Obr. 1.8: Charakteristická funkce kruhu

Poznámka 1.32.
1. Místo $\mathrm{m}(M)$ budeme také psát $\mathrm{m}_2(M)$, abychom zdůraznili, že jde o míru ve dvojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^2$.
2. Definice míry je korektní. Nechť R_1, R_2 jsou dva obdélníky takové, že platí $M \subseteq R_1$, $M \subseteq R_2$, a nechť je funkce χ_M integrovatelná na R_1. Buď R takový obdélník, že $R_1 \cup R_2 \subseteq R$. Podle důsledku 1.22 je funkce χ_M integrovatelná na R, a tedy také na R_2. Přitom platí
$$\iint_{R_1} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{R_2} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
Existence ani hodnota integrálu z definice 1.31 tedy nezávisí na volbě obdélníku R, který zkoumanou množinu M obsahuje.
3. Je-li $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ obdélník, lze zvolit $R = M$. Pak
$$\mathrm{m}(M) = \iint_R \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b-a)(d-c).$$
Definice 1.31 tedy pro obsah obdélníku dává stejnou hodnotu, jako se zavádí v elementární geometrii (a ve shodě s tím, jak byl symbol $\mathrm{m}(M)$ zaveden na str. 4).



a) $S(D, \chi_M)$ b) $s(D, \chi_M)$

Obr. 1.9: Geometrické znázornění horního a dolního součtu funkce χ_M

Poznámka 1.33. Všimněme si geometrického významu horního a dolního součtu integrálu $\iint\limits_R \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ vystupujícího v definici 1.31. Horní součet $S(D, \chi_M)$ je součet obsahů všech dílků, které obsahují aspoň jeden bod množiny M, dolní součet $s(D, \chi_M)$ je součet obsahů všech dílků, které jsou podmnožinou množiny M (viz obr. 1.9). Součet $S(D, \chi_M)$ tedy aproximuje „obsah“ množiny M shora, zatímco součet $s(D, \chi_M)$ aproximuje „obsah“ množiny M zdola.

Jak již bylo zmíněno v úvodu kapitoly, někdy se Jordanova míra zavádí „přímo“ bez použití integrálu. V různých pramenech — viz např. [21, 23] — se konstrukce v detailech liší, nicméně vedou na tentýž systém měřitelných množin, jako jsme dostali my. Naznačíme si princip, jak lze Jordanovu míru alternativně zavést.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je omezená množina a $R = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, $a < b$, $c < d$, je obdélník obsahující M, přičemž a, b, c, d jsou *celá* čísla. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ označme D_n^1 ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s normou $\nu(D_n^1) = 1/2^n$, D_n^2 ekvidistantní dělení intervalu $\langle c, d\rangle$ s normou $\nu(D_n^2) = 1/2^n$ a $D_n = D_n^1 \times D_n^2$ dělení obdélníku R. Dílky dělení D_n jsou čtverce o stranách $1/2^n$.

Buď $J_n(M)$ sjednocení všech dílků dělení D_n, které jsou podmnožinou M, a $O_n(M)$ sjednocení všech dílků dělení D_n, které mají neprázdný průnik s M. Definujme míry těchto množin $\mathrm{m}(J_n(M))$ resp. $\mathrm{m}(O_n(M))$ jako součty obsahů dílků dělení D_n, které tvoří tyto množiny. Zřejmě platí $\mathrm{m}(J_n(M)) = s(D_n, \chi_M)$ a $\mathrm{m}(O_n(M)) = S(D_n, \chi_M)$ — srovnejte obr. 1.9.

Snadno se ověří že pro každé $m \leqq n$ platí $J_m(M) \subseteq J_n(M)$, $O_m(M) \supseteq O_n(M)$, $\mathrm{m}(J_m(M)) \leqq \mathrm{m}(J_n(M))$, $\mathrm{m}(O_m(M)) \geqq \mathrm{m}(O_n(M))$ a pro libovolné m, n platí $J_m(M) \subseteq \subseteq O_n(M)$, $\mathrm{m}(J_m(M)) \leqq \mathrm{m}(O_n(M))$. Z těchto nerovností vyplývá existence konečných limit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}(J_n(M)) = \mathrm{m}_*(M)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}(O_n(M)) = \mathrm{m}^*(M)$. Platí $\mathrm{m}_*(M) \leqq \mathrm{m}^*(M)$. Tato čísla nazýváme *vnitřní míra* a *vnější míra* množiny M. Definujeme, že množina M

je měřitelná, když $\mathrm{m}_*(M) = \mathrm{m}^*(M)$. Z věty 1.10 plyne, že $\underline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}_*(M)$ a $\overline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}^*(M)$. Tudíž takto zavedený pojem měřitelnosti splývá s pojmem zavedeným v definici 1.31.

Lemma 1.34. *Je-li $h(M)$ hranice omezené množiny $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a je-li $R \supseteq M$ libovolný obdélník, pak*

$$\overline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \overline{\iint_R} \chi_{h(M)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Buď D libovolné dělení obdélníku R s dílky R_{ik}, $(i, k) \in I$. Označme

$$v_{ik} = \inf\{\chi_M(x, y) : [x, y] \in R_{ik}\}, \qquad V_{ik} = \sup\{\chi_M(x, y) : [x, y] \in R_{ik}\},$$
$$U_{ik} = \sup\{\chi_{h(M)}(x, y) : [x, y] \in R_{ik}\}.$$

Zřejmě $0 \leqq v_{ik} \leqq V_{ik} \leqq 1$ a $0 \leqq U_{ik} \leqq 1$; přitom platí:

i) je-li $h(M) \cap R_{ik} \neq \emptyset$, pak $U_{ik} = 1$;
ii) je-li $h(M) \cap R_{ik} = \emptyset$, pak $U_{ik} = 0$ a $v_{ik} = V_{ik}$.
Poslední rovnost zdůvodníme takto ($\mathring{M}$ značí vnitřek množiny M):
Je $M = \mathring{M} \cup (h(M) \cap M)$, takže $M \cap R_{ik} = (\mathring{M} \cap R_{ik}) \cup (h(M) \cap M \cap R_{ik}) = \mathring{M} \cap R_{ik}$, protože $h(M) \cap R_{ik} = \emptyset$. Je-li $\mathring{M} \cap R_{ik} = \emptyset$, je $v_{ik} = V_{ik} = 0$, je-li naopak $\mathring{M} \cap R_{ik} \neq \emptyset$, je nutně $R_{ik} \subset \mathring{M}$. Připusťme, že tomu tak není. Označme $\operatorname{ext} M = \mathbb{R}^2 \setminus (M \cup h(M))$ vnějšek množiny M. Protože $\mathbb{R}^2 = \mathring{M} \cup h(M) \cup \operatorname{ext} M$, platí $R_{ik} = (\mathring{M} \cap R_{ik}) \cup (h(M) \cap R_{ik}) \cup (\operatorname{ext} M \cap R_{ik}) = (\mathring{M} \cap R_{ik}) \cup (\operatorname{ext} M \cap R_{ik})$. Tedy otevřené a disjunktní množiny $\mathring{M}$ a $\operatorname{ext} M$ pokrývají dílek R_{ik}, přičemž $\mathring{M} \cap R_{ik} \neq \emptyset$, $\operatorname{ext} M \cap R_{ik} \neq \emptyset$. To ale není možné, protože dílek R_{ik} je souvislá množina. Tedy $R_{ik} \subset \mathring{M}$ a $v_{ik} = V_{ik} = 1$.

Z vlastností i) a ii) plynou nerovnosti $V_{ik} - v_{ik} \leqq U_{ik}$. Odtud

$$S(D, \chi_M) - s(D, \chi_M) = \sum_{(i,k)\in I} V_{ik}\,\mathrm{m}(R_{ik}) - \sum_{(i,k)\in I} v_{ik}\,\mathrm{m}(R_{ik}) =$$
$$= \sum_{(i,k)\in I} (V_{ik} - v_{ik})\,\mathrm{m}(R_{ik}) \leqq \sum_{(i,k)\in I} U_{ik}\,\mathrm{m}(R_{ik}) = S(D, \chi_{h(M)}).$$

Tudíž

$$\overline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D, \chi_{h(M)})$$

pro libovolné $D \in \mathscr{D}(M)$, a tedy

$$\overline{\iint\limits_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint\limits_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \overline{\iint\limits_R} \chi_{h(M)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

□

Věta 1.35. *Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^2$ omezená množina a $\mathrm{m}(h(M)) = 0$, pak je M měřitelná.*

Důkaz. Je-li $R \supseteq M$ libovolný obdélník, pak využitím lemmatu 1.34 dostáváme

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{m}(h(M)) = \iint\limits_R \chi_{h(M)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_R} \chi_{h(M)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \\ \geqq \overline{\iint\limits_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint\limits_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq 0. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je tedy rovností, tudíž funkce χ_M je integrovatelná na R, takže množina M je měřitelná. □

Poznámka 1.36. Obrácené tvrzení k větě 1.35 dokážeme později jako větu 1.40.

Věta 1.37. *Je-li $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ a je-li M_2 měřitelná a $\mathrm{m}(M_2) = 0$, pak rovněž M_1 je měřitelná a $\mathrm{m}(M_1) = 0$.*

Důkaz. Buď $R \supseteq M_2$ libovolný obdélník. Pak z $M_1 \subseteq M_2$ plyne $0 \leqq \chi_{M_1}(x, y) \leqq \leqq \chi_{M_2}(x, y)$ pro každý bod $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Odtud vyplývá $0 \leqq s(D, \chi_{M_1})$, $S(D, \chi_{M_1}) \leqq S(D, \chi_{M_2})$ pro libovolné dělení D obdélníku R, a tudíž

$$\begin{aligned} 0 \leqq \underline{\iint\limits_R} \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \iint\limits_R \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \\ \leqq \overline{\iint\limits_R} \chi_{M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R \chi_{M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \end{aligned}$$

což implikuje

$$\begin{aligned} \underline{\iint\limits_R} \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_R} \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ = \iint\limits_R \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}(M_1) = 0. \end{aligned}$$

□

Věta 1.38. *Pro Jordanovu míru platí následující tvrzení:*

a) $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$.

b) *Jsou-li* M_1, M_2 *měřitelné množiny,* $M_1 \subseteq M_2$, *pak* $\mathrm{m}(M_1) \leqq \mathrm{m}(M_2)$.

c) $\mathrm{m}(M) \geqq 0$ *pro libovolnou měřitelnou množinu* M.

d) *Jsou-li množiny* M_1, M_2 *měřitelné, pak také množiny* $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$, $M_1 \setminus M_2$ *jsou měřitelné.*

e) *Je-li* $y = g(x)$, $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$, *spojitá funkce, pak graf funkce* g, *tj. množina* $G = \{[x, g(x)] : x \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$, *je měřitelná množina a má míru rovnu nule.*

f) *Je-li* $x = h(y)$, $y \in \langle \gamma, \delta \rangle$, *spojitá funkce, pak graf funkce* h, *tj. množina* $H = \{[h(y), y] : y \in \langle \gamma, \delta \rangle\}$, *je měřitelná množina a má míru rovnu nule.*

Důkaz.

a) Tvrzení plyne z toho, že prázdná množina je obsažena v jakémkoliv obdélníku a její charakteristická funkce je nulová.

b) Nechť $R \supseteq M_2$ je obdélník. Díky inkluzi $M_1 \subseteq M_2$ platí $\chi_{M_1}(x, y) \leqq \chi_{M_2}(x, y)$ pro každý bod $[x, y]$. Odtud podle věty 1.23 plyne

$$\mathrm{m}(M_1) = \iint\limits_R \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \iint\limits_R \chi_{M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}(M_2).$$

c) Položíme-li v b) $M_1 = \emptyset$, $M_2 = M$, dostáváme

$$0 = \mathrm{m}(M_1) \leqq \mathrm{m}(M_2) = \mathrm{m}(M).$$

d) Zřejmě pro každý bod $[x, y]$ platí

$$\begin{aligned} \chi_{M_1 \cup M_2}(x, y) &= \max\{\chi_{M_1}(x, y), \chi_{M_2}(x, y)\}, \\ \chi_{M_1 \cap M_2}(x, y) &= \min\{\chi_{M_1}(x, y), \chi_{M_2}(x, y)\}. \end{aligned}$$

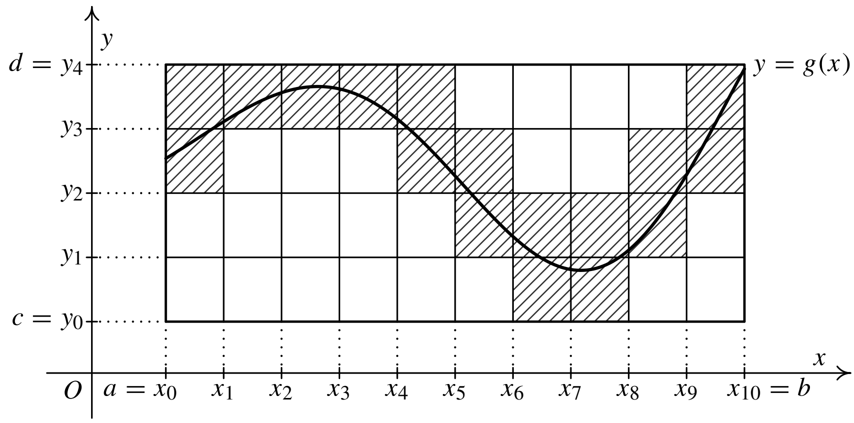
Podle věty 1.23 jsou funkce $\chi_{M_1 \cup M_2}$, $\chi_{M_1 \cap M_2}$ integrovatelné na libovolném obdélníku $R \supseteq M_1 \cup M_2$, takže množiny $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$ jsou měřitelné. Měřitelnost množiny $M_1 \setminus M_2$ plyne ze vztahu

$$\chi_{M_1 \setminus M_2}(x, y) = \chi_{M_1}(x, y) - \chi_{M_2 \cap M_1}(x, y)$$

a z věty 1.20, neboť podle dokázané části d) je $M_1 \cap M_2$ měřitelná.

e) Funkce g je spojitá na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, existuje tedy na $\langle \alpha, \beta \rangle$ její maximum a minimum. Položme $a = \alpha$, $b = \beta$ a zvolme $c, d \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $c < \min\{g(x) : x \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$, $d > \max\{g(x) : x \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$. Pak graf G funkce g

leží v obdélníku $R = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Protože g je spojitá na $\langle \alpha, \beta\rangle$, existuje podle tvrzení před větou 1.11 k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ takové, že $x, x' \in \langle \alpha, \beta\rangle$, $|x - x'| < \delta$ implikuje $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$. Zejména tedy k libovolnému číslu $n \in \mathbb{N}$ existuje číslo $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro $x, x' \in \langle \alpha, \beta\rangle$, $|x - x'| \leqq (b - a)/m$ platí $|g(x) - g(x')| < (d - c)/n$.



Obr. 1.10

Zvolme dělení $D = D_x \times D_y$ obdélníku R s dílky R_{ik}, $(i, k) \in I$, takové, že $D_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $D_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, kde $x_i = a + (b - a)i/m$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, $y_k = c + (d - c)k/n$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Položme $V_{ik} = \sup\{\chi_G(x, y) : [x, y] \in R_{ik}\}$. Pro $x, x' \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je $|g(x) - - g(x')| < (d - c)/n$. Graf G může tedy mít neprázdný průnik maximálně se dvěma sousedícími dílky dělení D ležícími nad (pod) sebou (viz obr. 1.10). Celkový počet dílků majících neprázdný průnik s grafem G je tedy roven maximálně $2m$. Pro tyto dílky platí $V_{ik} = 1$, pro ostatní $V_{ik} = 0$, tudíž

$$S(D, \chi_G) = \sum_{(i,k)\in I} V_{ik}\, \mathrm{m}(R_{ik}) \leqq 2m\, \frac{b - a}{m} \cdot \frac{d - c}{n} = \frac{2(b - a)(d - c)}{n}\,.$$

Jelikož

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(b - a)(d - c)}{n} = 0,$$

platí $\inf\{S(D, \chi_G) : D \in \mathscr{D}(R)\} = 0$. Odtud $\overline{\iint\limits_R} \chi_G(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. Protože

χ_G je nezáporná funkce, dostáváme

$$0 \leqq \underline{\iint_R} \chi_G(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \overline{\iint_R} \chi_G(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Tedy

$$\mathrm{m}(G) = \iint_R \chi_G(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

f) Důkaz se provede podobně jako v e) záměnou rolí x a y. □

Věta 1.39. *Jsou-li M_1, M_2 měřitelné množiny, pak platí:*

a) $\mathrm{m}(M_1 \cup M_2) = \mathrm{m}(M_1) + \mathrm{m}(M_2) - \mathrm{m}(M_1 \cap M_2)$.

b) $\mathrm{m}(M_1 \cup M_2) \leqq \mathrm{m}(M_1) + \mathrm{m}(M_2)$.

c) $\mathrm{m}(M_1 \smallsetminus M_2) = \mathrm{m}(M_1) - \mathrm{m}(M_1 \cap M_2)$.

d) *Je-li navíc $M_1 \supseteq M_2$, pak* $\mathrm{m}(M_1 \smallsetminus M_2) = \mathrm{m}(M_1) - \mathrm{m}(M_2)$.

e) *Platí-li navíc* $\mathrm{m}(M_1 \cap M_2) = 0$, *pak* $\mathrm{m}(M_1 \cup M_2) = \mathrm{m}(M_1) + \mathrm{m}(M_2)$.

Důkaz. Vzhledem k větě 1.38 plyne z měřitelnosti množin M_1, M_2 měřitelnost množin $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$ a $M_1 \smallsetminus M_2$. Buď $R \supseteq M_1 \cup M_2$ obdélník.

a) Protože $\chi_{M_1 \cup M_2}(x, y) = \chi_{M_1}(x, y) + \chi_{M_2}(x, y) - \chi_{M_1 \cap M_2}(x, y)$, máme

$$\mathrm{m}(M_1 \cup M_2) = \iint_R \chi_{M_1 \cup M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_R \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_R \chi_{M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_R \chi_{M_1 \cap M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \mathrm{m}(M_1) + \mathrm{m}(M_2) - \mathrm{m}(M_1 \cap M_2).$$

b) Plyne z a), neboť $\mathrm{m}(M_1 \cap M_2) \geqq 0$.

c) Protože $\chi_{M_1 \smallsetminus M_2}(x, y) = \chi_{M_1}(x, y) - \chi_{M_1 \cap M_2}(x, y)$, platí

$$\mathrm{m}(M_1 \smallsetminus M_2) = \iint_R \chi_{M_1 \smallsetminus M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_R \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_R \chi_{M_1 \cap M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}(M_1) - \mathrm{m}(M_1 \cap M_2).$$

d) Plyne z c).

e) Plyne z a). □

Dá se ukázat, že platí i obrácené tvrzení k větě 1.35:

Věta 1.40. *Je-li množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ měřitelná, pak je i její hranice $h(M)$ měřitelná a platí* $\mathrm{m}(h(M)) = 0$.

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Nechť $R \supseteq M$ je libovolný obdélník. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že R je tak velký, že existuje obdélník R_1 s vlastností $M \subseteq R_1 \subset \mathring{R}$, kde $\mathring{R}$ je vnitřek obdélníku R. Protože množina M je měřitelná, je funkce χ_M integrovatelná na R a podle lemmatu 1.9 existuje dělení $D \in \mathscr{D}(R)$ s dílky R_{ij}, $(i, j) \in I$, takové, že $S(D, \chi_M) - s(D, \chi_M) < \varepsilon$. Nechť I', I'' a I''' jsou podmnožiny I takové, že

$$\begin{aligned}
&(i, j) \in I', \text{ právě když } R_{ij} \subseteq M,\\
&(i, j) \in I'', \text{ právě když } R_{ij} \cap M \neq \emptyset,\\
&(i, j) \in I''', \text{ právě když } R_{ij} \cap M = \emptyset.
\end{aligned}$$

Pak $I''' = I \setminus I''$, $I' \subseteq I''$, $I = I' \cup (I'' \setminus I') \cup I'''$, $I' \cap (I'' \setminus I') = \emptyset$, $I' \cap I''' = \emptyset$ a $I'' \cap I''' = \emptyset$. Množina I je tak rozdělena na tři disjunktní (ne nutně neprázdné) třídy I', $I'' \setminus I'$ a I'''. Přitom platí $\bigcup\limits_{(i,j)\in I'} R_{ij} \subseteq M \subseteq \bigcup\limits_{(i,j)\in I''} R_{ij} \subseteq R$. Položme $V_{ij} = \sup\{\chi_M(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\}$, $v_{ij} = \inf\{\chi_M(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\}$ pro každé $(i, j) \in I$.

Je-li $(i, j) \in I'$, pak vzhledem k tomu, že $R_{ij} \subseteq M$, platí $V_{ij} = v_{ij} = 1$. Je-li $(i, j) \in I'' \setminus I'$, pak $R_{ij} \nsubseteq M$, $R_{ij} \cap M \neq \emptyset$ a $V_{ij} = 1$, $v_{ij} = 0$. Je-li $(i, j) \in I'''$, pak vzhledem k tomu, že $R_{ij} \cap M = \emptyset$, máme $V_{ij} = v_{ij} = 0$.

Ukážeme ve třech krocích, že $h(M) \subseteq K$, kde $K = \bigcup\limits_{(i,j)\in I''\setminus I'} R_{ij}$.

i) Protože $M \subseteq R_1$ a obdélník R_1 je uzavřený, je $h(M) \subseteq R_1 \subset \mathring{R} \subset \bigcup\limits_{(i,j)\in I} R_{ij}$.

ii) Nechť $A \in h(M)$ a $A \in R_{ij}$, kde $(i, j) \in I'''$. Pak $A \notin \mathring{R}_{ij}$ (jinak by A byl vnější bod množiny M) a $A \notin M$. Tedy A je hromadný bod M, který leží na některé straně obdélníku R_{ij} a přitom $M \cap R_{ij} = \emptyset$. Musí tedy existovat další dílky dělení D, na jejichž některé straně leží bod A, a alespoň jeden z těchto dílků, nechť je to R_{kl}, je takový, že $(k, l) \in I''$. Přitom z $A \notin M$ plyne, že $(k, l) \notin I'$. To znamená, že $A \in K$. A byl libovolný bod s danou vlastností, tedy $h(M) \cap \Big(\bigcup\limits_{(i,j)\in I'''} R_{ij}\Big) \subseteq K$.

iii) Nechť $A \in h(M)$ a $A \in R_{ij}$, kde $(i, j) \in I'$. Pak $A \notin \mathring{R}_{ij}$ (jinak by A byl vnitřní bod M) a $A \in M$. Dílek R_{ij} není „krajním“ dílkem dělení D (tj. žádná jeho strana není částí některé strany obdélníku R — „krajní“ dílek nemůže být podmnožinou M, protože $M \subseteq R_1$ a $R_1 \subset \mathring{R}$). Existují tedy další dílky R_{rs}, $(r,s) \in I''$, na jejichž některé straně leží bod A, a alespoň jeden z těchto dílků, nechť je to R_{kl}, je takový, že $(k,l) \in I'' \setminus I'$ (jinak by A byl vnitřní bod M). To znamená, že $A \in K$. Bod A byl libovolný, tedy $h(M) \cap \Big(\bigcup\limits_{(i,j)\in I'} R_{ij}\Big) \subseteq K$.

Užitím věty 1.39 e) dostáváme

$$\varepsilon > S(D, \chi_M) - s(D, \chi_M) = \sum_{(i,j)\in I} V_{ij}\, \mathrm{m}(R_{ij}) - \sum_{(i,j)\in I} v_{ij}\, \mathrm{m}(R_{ij}) =$$
$$= \sum_{(i,j)\in I''} \mathrm{m}(R_{ij}) - \sum_{(i,j)\in I'} \mathrm{m}(R_{ij}) = \sum_{(i,j)\in I''\setminus I'} \mathrm{m}(R_{ij}) = \mathrm{m}(K).$$

Z dokázané inkluze $K \supseteq h(M)$ plyne nerovnost $\chi_K(x,y) \geqq \chi_{h(M)}(x,y) \geqq 0$ pro každé $[x,y] \in R$, takže platí

$$\varepsilon > \mathrm{m}(K) = \iint\limits_R \chi_K(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_R} \chi_K(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq$$
$$\geqq \overline{\iint\limits_R} \chi_{h(M)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \underline{\iint\limits_R} \chi_{h(M)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq 0.$$

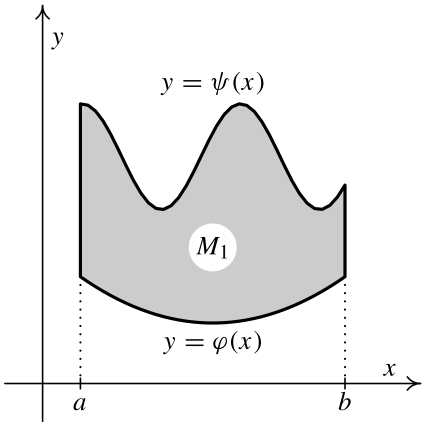
Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je

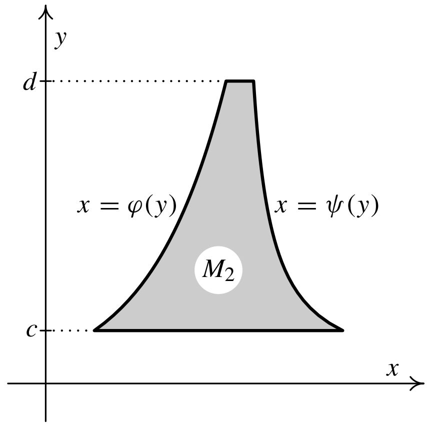
$$\overline{\iint\limits_R} \chi_{h(M)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint\limits_R} \chi_{h(M)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R \chi_{h(M)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

tj. množina $h(M)$ je měřitelná a $\mathrm{m}(h(M)) = 0$. □

Důsledek 1.41. *Omezená množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je jordanovsky měřitelná právě tehdy, když* $\mathrm{m}_2(h(M)) = 0$.

Definice 1.42. Nechť φ, ψ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ takové, že $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ pro $x \in \langle a,b\rangle$. Označme $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a,b\rangle, \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}$. Říkáme, že A je *elementární množina* vzhledem k ose x.
Podobně, jsou-li φ, ψ spojité funkce na intervalu $\langle c,d\rangle$ takové, že $\varphi(y) \leqq \psi(y)$ pro $y \in \langle c,d\rangle$, a je-li $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle c,d\rangle, \varphi(y) \leqq x \leqq \psi(y)\}$, řekneme, že A je *elementární množina* vzhledem k ose y.
Říkáme, že množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je *elementární*, je-li elementární vzhledem k ose x nebo vzhledem k ose y.





Obr. 1.11: Příklady elementárních množin v rovině

Věta 1.43. *Každá elementární množina je měřitelná.*

Důkaz. Nechť A je pro určitost elementární množina vzhledem k ose x. Pak $h(A) = U_1 \cup U_2 \cup G_1 \cup G_2$, kde U_1, U_2 jsou úsečky (rovnoběžné s osou y), které lze chápat jako grafy (konstantních) funkcí proměnné y spojitých na kompaktním intervalu, a G_1, G_2 jsou grafy spojitých funkcí proměnné x na kompaktním intervalu. Podle věty1.38 je $\mathrm{m}(U_1) = \mathrm{m}(U_2) = \mathrm{m}(G_1) = \mathrm{m}(G_2) = 0$. Abychom dokázali, že A je měřitelná, stačí podle věty 1.35 ukázat, že $\mathrm{m}(h(A)) = 0$. To však plyne z věty 1.39, neboť

$$\begin{aligned} 0 \leqq \mathrm{m}(h(A)) = \mathrm{m}(U_1 \cup U_2 \cup G_1 \cup G_2) \leqq \\ \leqq \mathrm{m}(U_1) + \mathrm{m}(U_2) + \mathrm{m}(G_1) + \mathrm{m}(G_2) = 0. \end{aligned}$$ □

Poznámka 1.44.

a) Obrazce studované v elementární geometrii (např. trojúhelník, čtverec, obdélník, mnohoúhelník, kruh) jsou elementární množiny nebo sjednocení konečného počtu elementárních množin. Jsou tedy měřitelné.

b) Z předchozích výsledků vyplývá, že systém jordanovsky měřitelných množin v rovině má následující vlastnosti:

   1) S každými dvěma množinami M_1, M_2 obsahuje i jejich rozdíl $M_1 \setminus M_2$.

   2) S libovolnou konečnou posloupností množin $M_1, \ldots, M_k$ obsahuje i jejich sjednocení $\bigcup_{i=1}^{k} M_i$ a průnik $\bigcap_{i=1}^{k} M_i$.

Takový systém množin se nazývá *množinový okruh*. Říkáme také, že systém jordanovsky měřitelných množin je uzavřený vzhledem k rozdílu a konečným sjednocením a průnikům.

V řadě aplikací, zejména u limitních přechodů, je důležité, aby systém měřitelných množin byl uzavřený i vzhledem ke *spočetným* sjednocením (tzv. množinový σ-okruh) a *spočetným* průnikům (tzv. množinový δ-okruh), tj. aby z měřitelnosti množin $M_1, M_2, \dots$ plynula i měřitelnost množin $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ a $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i$. Tyto vlastnosti však systém jordanovsky měřitelných množin nemá — viz cvičení 27 k této kapitole. To je důvodem, proč se zavádějí obecnější míry než Jordanova. Nejrozšířenější z nich je bezesporu Lebesgueova[1] míra.

1.4. Dvojný integrál na měřitelné množině

Definice 1.45. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina a nechť f je ohraničená funkce na M. Funkci f nazveme *integrovatelnou* (*integrace schopnou*) na množině M, jestliže funkce $\chi_M f$ určená předpisem

$$(\chi_M f)(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pro } [x, y] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y] \notin M \end{cases}$$

je integrovatelná na nějakém obdélníku $R \supseteq M$. *Dvojný integrál* funkce f *na množině M* (*přes množinu M*) pak definujeme vztahem

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Poznámka 1.46.

a) Podobně jako u definice míry (definice 1.31) lze ukázat, že definice 1.45 je korektní, tj. že integrál $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nezávisí na volbě obdélníku $R \supseteq M$.

b) Je-li M obdélník, lze zvolit $R = M$. Pak

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

[1] **Henri Léon Lebesgue** (1875–1941) (čti lebeg) — francouzský matematik. Zabýval se teorií funkcí a integrálu. Jím zavedená míra a integrál významně ovlivnily matematiku 20. století.

pokud aspoň jeden z uvedených integrálů existuje. Integrál funkce f přes obdélník tedy nezávisí na tom, použijeme-li definici 1.3, nebo definici 1.45.

Následující věta je zobecněním dříve uvedené věty pro obdélník.

Věta 1.47. *Funkce f spojitá a ohraničená na měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je na množině M integrovatelná.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Nechť $R \supseteq M$ je libovolný obdélník. Vzhledem k ohraničenosti funkce f na množině M existuje konstanta $K > 0$ taková, že $|(\chi_M f)(x, y)| \leqq K$ pro každé $[x, y] \in R$. Protože množina M je měřitelná, je podle věty 1.40 $\mathrm{m}(h(M)) = 0$ a podle lemmatu 1.7 existuje číslo $\delta_1 > 0$ s vlastností, že pro libovolné dělení $D \in \mathscr{D}(R)$ s normou $\nu(D) < \delta_1$ platí

$$0 = \mathrm{m}(h(M)) = \overline{\iint_R} \chi_{h(M)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D, \chi_{h(M)}) < \frac{\varepsilon}{4(K+1)}\,.$$

Nechť R_{ij}, $(i, j) \in I$, značí dílky dělení D. Buď I' podmnožina množiny I taková, že R_{ij}, $(i, j) \in I'$, jsou všechny dílky dělení D mající neprázdný průnik s hranicí $h(M)$ množiny M. Podobně nechť I'' je podmnožina množiny I taková, že R_{ij}, $(i, j) \in I''$, jsou všechny dílky dělení D, pro něž $R_{ij} \subseteq M$, $R_{ij} \cap h(M) = \emptyset$. Je $I' \cap I'' = \emptyset$. Položme $M_1 = \bigcup_{(i,j)\in I'} R_{ij}$. Zřejmě je $h(M) \subseteq M_1 \subseteq R$ a s ohledem na větu 1.39 platí

$$\mathrm{m}(M_1) = \mathrm{m}\Big(\bigcup_{(i,j)\in I'} R_{ij}\Big) = \sum_{(i,j)\in I'} \mathrm{m}(R_{ij}) = S(D, \chi_{h(M)}) < \frac{\varepsilon}{4(K+1)}\,.$$

Položme nyní $M_2 = \bigcup_{(i,j)\in I''} R_{ij}$. Množina M_2 je zřejmě kompaktní a platí $M_2 \subseteq M \subseteq M_1 \cup M_2$.

Poslední inkluzi dokážeme takto: Nechť $A \in M \setminus M_2$. Jestliže $A \in h(M)$, pak $A \in M_1$. Nechť $A \notin h(M)$, tj. $A \in \mathring{M}$, a nechť $A \in R_{ij}$, kde R_{ij} je dílek dělení D, $(i, j) \notin I''$, tj. $R_{ij} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathring{M}) \neq \emptyset$. Připusťme, že $h(M) \cap R_{ij} = \emptyset$. Pak $R_{ij} \subseteq \mathring{M} \cup \operatorname{ext} M$, kde $\operatorname{ext} M = \mathbb{R}^2 \setminus (M \cup h(M))$ je vnějšek množiny M. Přitom $\mathring{M}$, $\operatorname{ext} M$ jsou otevřené, disjunktní a $R_{ij} \cap \mathring{M} \neq \emptyset$, $R_{ij} \cap \operatorname{ext} M \neq \emptyset$. To je spor s tím, že obdélník R_{ij} je souvislá množina. Tedy $(i, j) \in I'$ a $A \in M_1$.

Protože množina M_2 je kompaktní, existuje podle tvrzení před větou 1.11 číslo $\delta_2 > 0$ takové, že pro $[x_1, y_1] \in M_2$, $[x_2, y_2] \in M_2$, $\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta_2$ platí $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon/(2\,\mathrm{m}(R))$. Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Nechť D_1 je dělení obdélníku R s dílky R^1_{kl}, $(k, l) \in J$, které je takovým zjemněním dělení D, že $\nu(D_1) < \delta$. Buď $J' \subseteq J$ je takové, že $R^1_{kl} \subseteq M_1$ právě pro $(k, l) \in J'$.

Nechť $J'' \subseteq J$ je takové, že $R^1_{kl} \subseteq M_2$ právě pro $(k, l) \in J''$. Snadno se ověří, že $\bigcup\limits_{(i,j)\in I'} R_{ij} = \bigcup\limits_{(k,l)\in J'} R^1_{kl} = M_1$ a $\bigcup\limits_{(i,j)\in I''} R_{ij} = \bigcup\limits_{(k,l)\in J''} R^1_{kl} = M_2$. Položme

$$V_{ij} = \sup\{(\chi_M f)(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\},\ \ v_{ij} = \inf\{(\chi_M f)(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\}$$

pro $(i, j) \in I$,

$$V^1_{kl} = \sup\{(\chi_M f)(x, y) : [x, y] \in R^1_{kl}\},\ \ v^1_{kl} = \inf\{(\chi_M f)(x, y) : [x, y] \in R^1_{kl}\}$$

pro $(k, l) \in J$. Zřejmě platí $V^1_{kl} = \max\{f(x, y) : [x, y] \in R^1_{kl}\}$ pro $(k, l) \in J''$ a $v^1_{kl} = \min\{f(x, y) : [x, y] \in R^1_{kl}\}$ pro $(k, l) \in J''$, $|V^1_{kl}| \leqq K$, $|v^1_{kl}| \leqq K$ pro $(k, l) \in J'$ a $V^1_{kl} = v^1_{kl} = 0$ pro $(k, l) \in J \smallsetminus (J' \cup J'')$. Nyní

$$\begin{aligned}
0 &\leqq S(D_1, \chi_M f) - s(D_1, \chi_M f) = \sum_{(k,l)\in J} V^1_{kl}\, \mathrm{m}(R^1_{kl}) - \sum_{(k,l)\in J} v^1_{kl}\, \mathrm{m}(R^1_{kl}) = \\
&= \sum_{(k,l)\in J''} (V^1_{kl} - v^1_{kl})\, \mathrm{m}(R^1_{kl}) + \sum_{(k,l)\in J'} V^1_{kl}\, \mathrm{m}(R^1_{kl}) - \sum_{(k,l)\in J'} v^1_{kl}\, \mathrm{m}(R^1_{kl}) \leqq \\
&\leqq \frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{m}(R)} \sum_{(k,l)\in J''} \mathrm{m}(R^1_{kl}) + 2K \sum_{(k,l)\in J'} \mathrm{m}(R^1_{kl}) \leqq \\
&\leqq \frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{m}(R)}\, \mathrm{m}(R) + 2K \sum_{(i,j)\in I'} \mathrm{m}(R_{ij}) = \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + 2K\, S(D, \chi_{h(M)}) < \frac{\varepsilon}{2} + 2K \frac{\varepsilon}{4(K+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Podle lemmatu 1.9 je funkce $\chi_M f$ integrovatelná na R, a tudíž funkce f je integrovatelná na M. □

Důsledek 1.48. *Buď f spojitá funkce na kompaktní měřitelné množině M. Pak funkce f je integrovatelná na M.*

Podobně jako u dvojných integrálů přes daný obdélník mají integrály přes měřitelnou množinu následující vlastnosti.

Věta 1.49. *Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na měřitelné množině $M \subseteq R^2$. Pak platí:*

a) *Funkce $f + g$ je integrovatelná na M a platí*

$$\iint\limits_M [f(x, y) + g(x, y)]\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_M g(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) *Je-li $c \in \mathbb{R}$ konstanta, pak funkce cf je integrovatelná na M a platí*

$$\iint_M cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

c) *Funkce $|f|$ je integrovatelná na M a platí*

$$\left|\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqq \iint_M |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

d) *Je-li $f(x,y) \leqq g(x,y)$ pro každé $[x,y] \in M$, pak*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Vlastnost z tvrzení b) se nazývá *homogenita* integrálu vzhledem k integrandu, vlastnost z tvrzení a) se nazývá *aditivita* integrálu vzhledem k integrandu.

Důkaz. Protože každý dvojný integrál přes množinu M je definován vztahem

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $R \supseteq M$ je obdélník, plynou uvedená tvrzení z věty 1.20 a věty 1.23 pro integrály přes obdélník, neboť pro každý bod $[x,y]$ platí

$$\begin{aligned}
(\chi_M(f+g))(x,y) &= (\chi_M f)(x,y) + (\chi_M g)(x,y),\\
(\chi_M(cf))(x,y) &= c(\chi_M f)(x,y),\\
-|(\chi_M f)(x,y)| &= -(\chi_M|f|)(x,y) \leqq\\
&\leqq (\chi_M f)(x,y) \leqq (\chi_M|f|)(x,y) = |(\chi_M f)(x,y)|,\\
(\chi_M f)(x,y) &\leqq (\chi_M g)(x,y), \quad \text{je-li } f(x,y) \leqq g(x,y).
\end{aligned}$$

□

Věta 1.50.

a) *Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^2$ měřitelná a je-li $k \in \mathbb{R}$ konstanta, pak*

$$\iint_M k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\,\mathrm{m}(M).$$

b) *Nechť f je funkce ohraničená na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ míry nula. Pak je f na M integrovatelná a platí*
$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

c) *Je-li funkce f integrovatelná na měřitelné množině $M_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ i na měřitelné množině $M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ a je-li* $\mathrm{m}(M_1 \cap M_2) = 0$, *pak f je integrovatelná na $M_1 \cup M_2$ a platí*
$$\iint\limits_{M_1 \cup M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Vlastnost z tvrzení c) se v případě, kdy $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, nazývá *aditivita* integrálu vzhledem k integračnímu oboru.

Důkaz.

a) Konstantní funkce f daná předpisem $f(x,y) = k$ pro každé $[x,y] \in M$ je ohraničená a spojitá na M, takže podle věty 1.47 je integrovatelná na M. Je-li $R \supseteq M$ obdélník, platí
$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= k \iint\limits_R \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\,\mathrm{m}(M).$$

b) Protože funkce f je ohraničená na množině M, existuje konstanta $K > 0$ taková, že $-K \leqq f(x,y) \leqq K$, je-li $[x,y] \in M$. Odtud $-K\chi_M(x,y) \leqq$ $\leqq (\chi_M f)(x,y) \leqq K\chi_M(x,y)$ pro každé $[x,y] \in R$, kde $R \supseteq M$ je obdélník. Tedy
$$s(D, -K\chi_M) \leqq s(D, \chi_M f) \leqq s(D, K\chi_M),$$
$$S(D, -K\chi_M) \leqq S(D, \chi_M f) \leqq S(D, K\chi_M)$$
pro libovolné $D \in \mathscr{D}(R)$. Díky předpokladu $\mathrm{m}(M) = 0$ tudíž
$$0 = -K\,\mathrm{m}(M) = \iint\limits_R (-K)\chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \underline{\iint\limits_R} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq$$
$$\leqq \overline{\iint\limits_R} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \iint\limits_R K\chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K\,\mathrm{m}(M) = 0.$$

Odtud plyne integrovatelnost funkce f na M s výsledkem

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint_R} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \overline{\iint_R} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

c) Buď $R \supseteq M_1 \cup M_2$ libovolný obdélník. Zřejmě pro každý bod $[x, y]$ platí

$$(\chi_{M_1\cup M_2} f)(x,y) = (\chi_{M_1} f)(x,y) + (\chi_{M_2} f)(x,y) - (\chi_{M_1\cap M_2} f)(x,y).$$

Protože $m(M_1 \cap M_2) = 0$, je podle b) $\iint_{M_1\cap M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. Celkově s přihlédnutím k větě 1.49 dostáváme

$$\iint_{M_1\cup M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R (\chi_{M_1\cup M_2} f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \iint_R (\chi_{M_1} f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_R (\chi_{M_2} f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y -$$
$$- \iint_R (\chi_{M_1\cap M_2} f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \iint_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{M_1\cap M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \iint_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

□

Věta 1.51. *Nechť funkce f a g jsou integrovatelné na měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak i jejich součin fg je integrovatelný na M.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že funkce f a g jsou na M nezáporné. Nechť $R \supseteq M$ je obdélník. Z integrovatelnosti f a g plyne, že jsou ohraničené, takže existuje konstanta K taková, že $0 \leqq (\chi_M f)(x,y) \leqq K$, $0 \leqq (\chi_M g)(x,y) \leqq K$, kdykoliv $[x,y] \in R$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle lemmatu 1.9 k číslu $\varepsilon/2K > 0$ existují dělení D_1, D_2 obdélníku R tak, že $S(D_1, \chi_M f) - s(D_1, \chi_M f) < \varepsilon/(2K)$, $S(D_2, \chi_M g) - s(D_2, \chi_M g) < \varepsilon/(2K)$. Je-li D společné zjemnění D_1 a D_2, pak

$$s(D_1, \chi_M f) \leqq s(D, \chi_M f) \leqq S(D, \chi_M f) \leqq S(D_1, \chi_M f),$$
$$s(D_2, \chi_M g) \leqq s(D, \chi_M g) \leqq S(D, \chi_M g) \leqq S(D_2, \chi_M g),$$

a tedy

$$\begin{aligned} S(D, \chi_M f) - s(D, \chi_M f) &\leqq S(D_1, \chi_M f) - s(D_1, \chi_M f) < \varepsilon/(2K)\,, \\ S(D, \chi_M g) - s(D, \chi_M g) &\leqq S(D_2, \chi_M g) - s(D_2, \chi_M g) \ < \varepsilon/(2K)\,. \end{aligned}$$

Nechť R_{ij}, kde $(i, j) \in I = \{(k, l) : k = 1, \dots, m; l = 1, \dots, n\}$, jsou dílky dělení D. Pro každé $(i, j) \in I$ označme

$$\begin{gathered} u_{ij} = \inf\{(\chi_M f)(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\}, \quad U_{ij} = \sup\{(\chi_M f)(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\}, \\ v_{ij} = \inf\{(\chi_M g)(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\}, \quad V_{ij} = \sup\{(\chi_M g)(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\}, \\ w_{ij} = \inf\{(\chi_M (fg))(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\}, \\ W_{ij} = \sup\{(\chi_M (fg))(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\}. \end{gathered}$$

Protože $u_{ij}v_{ij} \leqq (\chi_M f)(x, y) \cdot (\chi_M g)(x, y) \leqq U_{ij}V_{ij}$ pro každé $[x, y] \in R_{ij}$, platí $u_{ij}v_{ij} \leqq w_{ij} \leqq W_{ij} \leqq U_{ij}V_{ij}$. Odtud dostaneme

$$\begin{aligned} W_{ij} - w_{ij} &\leqq U_{ij}V_{ij} - u_{ij}v_{ij} = U_{ij}V_{ij} - U_{ij}v_{ij} + U_{ij}v_{ij} - u_{ij}v_{ij} = \\ &= U_{ij}(V_{ij} - v_{ij}) + v_{ij}(U_{ij} - u_{ij}) \leqq K(V_{ij} - v_{ij} + U_{ij} - u_{ij}). \end{aligned}$$

Nyní vynásobíme tuto nerovnost číslem $\mathrm{m}(R_{ij})$ a sečteme přes všechna $(i, j) \in I$. Vyjde:

$$\begin{aligned} &S(D, \chi_M (fg)) - s(D, \chi_M (fg)) \leqq \\ &\qquad \leqq K\left[S(D, \chi_M f) - s(D, \chi_M f) + S(D, \chi_M g) - s(D, \chi_M g)\right] < \\ &\qquad < K\left(\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}\right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle lemmatu 1.9 je funkce $\chi_M(fg)$ integrovatelná na R, což vzhledem k definici 1.45 znamená, že funkce fg je integrovatelná na M.

Nechť nyní f a g jsou libovolné funkce integrovatelné na M. Z integrovatelnosti plyne, že jsou na M zdola ohraničené. Tedy existuje konstanta L taková, že $f(x, y) \geqq L$, $g(x, y) \geqq L$ pro každé $[x, y] \in M$. Funkce $f - L$ a $g - L$ jsou nezáporné a podle vět 1.50, část a) a 1.49, část a) integrovatelné. Podle první části důkazu je proto integrovatelná funkce $(f - L)(g - L)$. Vzhledem k rovnosti $fg = (f - L)(g - L) + Lf + Lg - L^2$ je podle věty 1.49, části a) a b) funkce fg integrovatelná na M. □

Věta 1.52. *Nechť funkce f je integrovatelná na měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a $N \subseteq M$ je její měřitelná podmnožina. Pak je funkce f integrovatelná i na N.*

Důkaz. Nechť $R \supseteq M$ je obdélník. Podle předpokladů existují integrály

$$\iint\limits_R (\chi_M f)(x, y)\,dx dy \qquad \text{a} \qquad \iint\limits_R \chi_N(x, y)\,dx dy.$$

Podle věty 1.51 existuje integrál

$$\iint\limits_R (\chi_M f)(x, y)\chi_N(x, y)\,dx dy = \iint\limits_R (\chi_N f)(x, y)\,dx dy,$$

neboť z $N \subseteq M$ plyne $\chi_M f \cdot \chi_N = \chi_N f$. To znamená, že funkce f je integrovatelná na N. □

Věta 1.53. *Nechť funkce f a g jsou definované na měřitelné množině M, přičemž f je integrovatelná, g je ohraničená a platí* $\mathrm{m}(M_1) = 0$, *kde* $M_1 = \{[x, y] \in M : f(x, y) \neq g(x, y)\}$. *Pak funkce g je na množině M integrovatelná a platí*

$$\iint\limits_M f(x, y)\,dx dy = \iint\limits_M g(x, y)\,dx dy.$$

Důkaz. Položme $M_2 = M \setminus M_1$. Podle věty 1.38, část d) je M_2 měřitelná, a protože $\chi_{M_1}(g - f)$ je ohraničená funkce, která je na M_2 nulová, platí podle věty 1.38 s přihlédnutím k $\mathrm{m}(M_1) = 0$ a k větě 1.50 rovnosti

$$\iint\limits_{M_2} \chi_{M_1}(g - f)(x, y)\,dx dy = 0, \qquad \iint\limits_{M_1} \chi_{M_1}(g - f)(x, y)\,dx dy = 0.$$

Podle věty 1.50, část c) je funkce $\chi_{M_1}(g - f)$ integrovatelná na M a platí

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_M \chi_{M_1}(g - f)(x, y)\,dx dy = \\
&\qquad = \iint\limits_{M_1} \chi_{M_1}(g - f)(x, y)\,dx dy + \iint\limits_{M_2} \chi_{M_1}(g - f)(x, y)\,dx dy = 0.
\end{aligned}$$

Zřejmě $f + \chi_{M_1}(g - f) = g$ na M, takže podle věty 1.49 je funkce g na M

integrovatelná a

$$\begin{aligned}\iint\limits_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_M \left[f(x,y)+\chi_{M_1}(g-f)(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_M \chi_{M_1}(g-f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

Poznámka 1.54. Předchozí věta říká, že změna integrovatelné funkce na množině míry nula nemění *integrovatelnost* funkce ani *hodnotu integrálu*.

Jinak řečeno, funkce, která je definovaná a ohraničená na měřitelné množině, avšak není integrovatelná, se po změně na množině míry nula nemůže stát integrovatelnou (jinak by podle předchozí věty musela být původní funkce integrovatelná, protože by se lišila od integrovatelné funkce pouze na množině nulové míry).

Pro vyjádření dvojného integrálu přes elementární množinu pomocí dvojnásobného integrálu platí

Věta 1.55 (Fubiniova věta). *Buď M elementární množina v $\mathbb{R}^2$ vzhledem k ose x, tj.*

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a,b\rangle, \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\},$$

kde φ, ψ jsou spojité funkce na $\langle a,b\rangle$ takové, že $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$. Je-li funkce f spojitá na M, pak platí

$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Elementární množina je kompaktní a měřitelná, tedy podle důsledku 1.48 je spojitá funkce f na množině M integrovatelná. Buď $c < \min\{\varphi(x) : x \in \langle a,b\rangle\}$, $d > \max\{\psi(x) : x \in \langle a,b\rangle\}$, $R = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Pro každý bod $[x,y] \in \mathbb{R}$ platí

$$(\chi_M f)(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{je-li } \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x), \\ 0 & \text{je-li } y < \varphi(x), \text{ nebo } y > \psi(x). \end{cases}$$

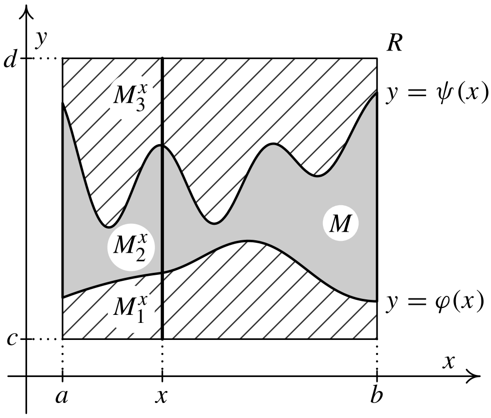
Podle definice a podle Fubiniovy věty (věta 1.14) je

$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\,\overline{\int_c^d} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x. \tag{1.17}$$

Označme pro $x \in \langle a, b\rangle$

$$\begin{aligned} M_1^x &= \langle c, \varphi(x)\rangle,\\ M_2^x &= \langle \varphi(x), \psi(x)\rangle,\\ M_3^x &= \langle \psi(x), d\rangle, \end{aligned}$$

viz obr. 1.12. Funkce $(\chi_M f)(x,\cdot)$ je spojitá na intervalu M_2^x, přičemž $(\chi_M f)(x,y) = f(x,y)$ pro každé $y \in M_2^x$, a je rovna nule (s případnou výjimkou hodnoty v jednom krajním bodě) na intervalech M_1^x, M_3^x. Tedy je integrovatelná na M_1^x, M_2^x, M_3^x, a tudíž i na intervalu $\langle c, d\rangle$. Proto



Obr. 1.12

$$\begin{aligned} \overline{\int_c^d} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_c^d (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \int_c^{\varphi(x)} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \\ &\quad + \int_{\psi(x)}^{d} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Dosazením do (1.17) dostáváme tvrzení. □

Poznámka 1.56.

a) Je-li M elementární množina vzhledem k ose y, tj.

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle c, d\rangle, \varphi(y) \leqq x \leqq \psi(y)\},$$

kde φ, ψ jsou spojité funkce na $\langle c, d\rangle$ takové, že $\varphi(y) \leqq \psi(y)$ pro každé $y \in \langle c, d\rangle$, a je-li funkce f spojitá na M, pak platí

$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

b) Zatímco integrál $\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ se nazývá *dvojný integrál*, integrály

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x, \qquad \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

se nazývají *dvojnásobné integrály*.

c) Předchozí věta zůstane v platnosti, i když bude funkce f pouze integrovatelná (tj. ne nutně spojitá) na množině M. Ve vnitřních integrálech je však třeba použít horní resp. dolní jednoduchý integrál (srov. s větou 1.14).

d) K označení dvojnásobných integrálů se používá rovněž zápisu

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{resp.} \quad \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 1.57. Vypočtěte:

a) $\iint\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je omezena křivkami $y = x^2$, $y = x$.

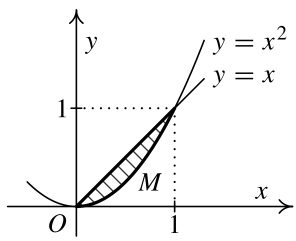
b) $\iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je trojúhelník o vrcholech $[0,0]$, $[1,1]$, $[2,0]$.

Řešení.

a) Množina M je elementární vzhledem k ose x i vzhledem k ose y.

1. Zapíšeme-li množinu M jako elementární množinu vzhledem k ose x, máme

$$M: \quad \begin{aligned} 0 \leqq x &\leqq 1, \\ x^2 \leqq y &\leqq x. \end{aligned}$$



Odtud

$$\iint\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left\{x^2 + \frac{x^2}{2} - \left(x^3 + \frac{x^4}{2}\right)\right\}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{10-5-2}{20} = \frac{3}{20}\,.$$

2. Ke stejnému výsledku dojdeme i v případě, uvažujeme-li množinu M jako elementární množinu vzhledem k ose y:

$$M\colon\quad \begin{aligned} &0 \leqq y \leqq 1,\\ &y \leqq x \leqq \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Pak

$$\iint\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} (x+y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y =$$

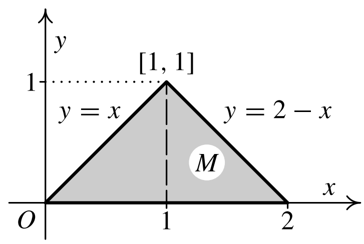
$$= \int_0^1 \left\{\frac{y}{2} + y^{3/2} - \left(\frac{y^2}{2} + y^2\right)\right\}\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} + y^{3/2} - \frac{3}{2}\,y^2\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \left[\frac{y^2}{4} + \frac{2}{5}\,y^{5/2} - \frac{y^3}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{5+8-10}{20} = \frac{3}{20}\,.$$

b) Množina M je elementární vzhledem k ose y. Lze ji však rovněž vyjádřit jako sjednocení dvou množin elementárních vzhledem k ose x. Příklad proto vyřešíme opět dvěma způsoby.

1. Množinu M vyjádříme jako elementární množinu vzhledem k ose y:

$$M\colon\quad \begin{aligned} &0 \leqq y \leqq 1,\\ &y \leqq x \leqq 2-y. \end{aligned}$$



Pak

$$\iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} xy\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\,y\right]_y^{2-y} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2}\,y - \frac{y^3}{2}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left(2y - 2y^2 + \frac{y^3}{2} - \frac{y^3}{2}\right)\mathrm{d}y =$$

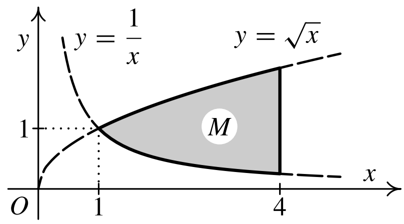
$$= \left[y^2 - \frac{2}{3}\,y^3\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

2. Nyní množinu M vyjádříme jako sjednocení dvou množin M_1, M_2 elementárních vzhledem k ose x:
$$M = M_1 \cup M_2, \qquad M_1\colon \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1, \\ 0 \leqq y \leqq x, \end{array} \qquad M_2\colon \begin{array}{l} 1 \leqq x \leqq 2, \\ 0 \leqq y \leqq 2 - x. \end{array}$$
Poněvadž $\mathrm{m}(M_1 \cap M_2) = 0$, platí podle části c) věty 1.50
$$\iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{M_2} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
Tudíž
$$\begin{aligned}
\iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^x xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left[x\,\frac{y^2}{2}\right]_0^x \mathrm{d}x + \int_1^2 \left[x\,\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{x(2-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 + \int_1^2 \left(2x - 2x^2 + \frac{x^3}{2}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{8} + \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{8}\right]_1^2 = \\
&= \frac{1}{8} + 4 - \frac{16}{3} + 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{8} = 5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$
▲

1.5. Další řešené příklady

Příklad 1.58. Vypočtěte $I = \iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je množina bodů $[x, y]$ určená nerovnostmi $1 \leqq x \leqq 4$, $1/x \leqq y \leqq \sqrt{x}$.

Řešení. Integrační obor M je znázorněn na obr. 1.13. Integrand $f(x, y) = xy$ je spojitá funkce. Při označení $a = 1$, $b = 4$, $\varphi(x) = 1/x$ a $\psi(x) = \sqrt{x}$ dostaneme z Fubiniovy věty 1.55
$$I = \iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^4 \left(\int_{1/x}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$



Obr. 1.13

Vnitřní integrál vyjde

$$\int_{1/x}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y = x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{1/x}^{\sqrt{x}} = \frac{x}{2}\left(x - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right).$$

Celkový výsledek bude

$$I = \int_1^4 \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \ln|x|\right]_1^4 =$$

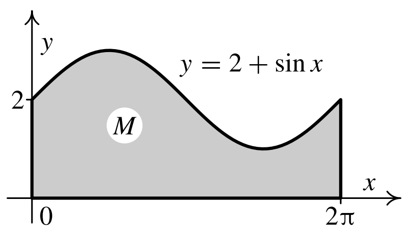
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3} - \ln 4\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \ln 1\right) = \frac{21}{2} - \ln 2.$$

▲

Příklad 1.59. Vypočtěte $I = \iint\limits_M \frac{y}{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je ohraničená přímkami $x = 0$, $x = 2\pi$, $y = 0$ a grafem funkce $y = 2 + \sin x$.

Řešení. Integrační obor M je znázorněn na obr. 1.14. Jde o elementární množinu vzhledem k ose x. Integrand $f(x, y) = y/3$ je spojitá funkce. Použijeme-li tedy Fubiniovu větu 1.55, obdržíme:

$$I = \iint\limits_M \frac{y}{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2+\sin x} \frac{y}{3}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$



Obr. 1.14

Vnitřní integrál vyjde

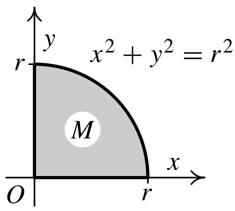
$$\int_0^{2+\sin x} \frac{y}{3}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{6}\right]_0^{2+\sin x} = \frac{1}{6}(2 + \sin x)^2 = \frac{1}{6}(4 + 4\sin x + \sin^2 x).$$

Při výpočtu vnějšího integrálu použijeme vzorec $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$. Dostaneme:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} \left(4 + 4\sin x + \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \sin x - \frac{1}{12} \cos 2x \right) \mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{3}{4} x - \frac{2}{3} \cos x - \frac{1}{24} \sin 2x \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 1.60. Vypočtěte $I = \iint\limits_M x^3 y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je čtvrtkruh o daném poloměru $r > 0$ se středem v počátku O ležící v prvním kvadrantu.



Obr. 1.15

Řešení. Integrační obor je znázorněn na obr. 1.15. Je to elementární množina jak vzhledem k ose x, tak vzhledem k ose y. Vzhledem k jednoduchosti spojitého integrandu $f(x, y) = x^3 y$ je pořadí integrace z hlediska její pracnosti zcela lhostejné. Rozhodneme-li se pro popis čtvrtkruhu M nerovnostmi $0 \leqq x \leqq r$, $0 \leqq y \leqq \sqrt{r^2 - x^2}$, z Fubiniovy věty 1.55 dostaneme

$$
I = \iint\limits_M x^3 y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} x^3 y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.
$$

Pro vnitřní integrál dostáváme

$$
\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} x^3 y \, \mathrm{d}y = x^3 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{1}{2} x^3 (r^2 - x^2).
$$

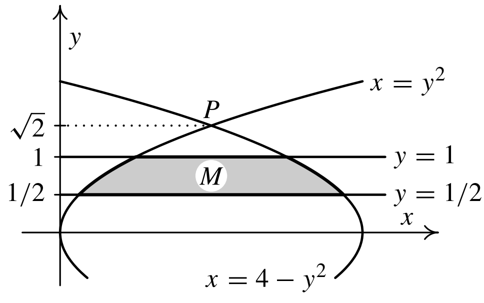
Celkově tedy vyjde

$$
I = \int_0^r \frac{1}{2} (x^3 r^2 - x^5) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4 r^2}{4} - \frac{x^6}{6} \right]_0^r = \frac{r^6}{24}.
$$

▲

Příklad 1.61. Vypočtěte $I = \iint\limits_M \frac{y}{x + y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je ohraničena křivkami $y = 1$, $y = 1/2$, $x = 4 - y^2$ a $x = y^2$.

Řešení. První dvě křivky jsou přímky, druhé dvě paraboly. Integrační obor M je znázorněn na obr. 1.16. Určíme ještě y-ovou souřadnici horního průsečíku P obou parabol, abychom se přesvědčili, že máme přímky $y = 1$ a $y = 1/2$ správně umístěny. Z rovnic parabol dostaneme $4 - y^2 = y^2$, tj. $y^2 = 2$, a tedy $y = \sqrt{2}$. Množina M je elementární vzhledem k y. Vidíme, že $c = 1/2$, $d = 1$, $\varphi(y) = y^2$ a $\psi(y) = 4 - y^2$. Integrand $f(x, y) = y/(x + y^2)$ je spojitá funkce na M. Podle Fubiniovy věty bude



Obr. 1.16

$$I = \iint\limits_M \frac{y}{x + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{1/2}^{1}\left(\int_{y^2}^{4-y^2} \frac{y}{x + y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Vnitřní integrál vyjde

$$\int_{y^2}^{4-y^2} \frac{y}{x + y^2}\,\mathrm{d}x = y\big[\ln|x + y^2|\big]_{y^2}^{4-y^2} = y(\ln 4 - \ln 2y^2) =$$
$$= y(2\ln 2 - \ln 2 - 2\ln y) = y\ln 2 - 2y\ln y,$$

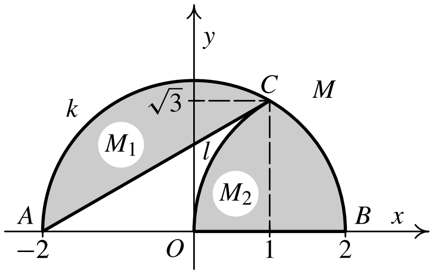
vzhledem k tomu, že $y > 0$.

Při výpočtu vnějšího integrálu použijeme metodu per partes. Dostaneme:

$$I = \int_{1/2}^{1} (y\ln 2 - 2y\ln y)\,\mathrm{d}y = \ln 2\int_{1/2}^{1} y\,\mathrm{d}y - 2\int_{1/2}^{1} y\ln y\,\mathrm{d}y =$$
$$= \begin{vmatrix} u = \ln y & u' = \frac{1}{y} \\ v' = y & v = \frac{y^2}{2} \end{vmatrix} = \ln 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{1/2}^{1} - 2\left[\frac{y^2}{2}\ln y\right]_{1/2}^{1} + 2\int_{1/2}^{1}\frac{y}{2}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \ln 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\ln 2 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{8}\ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(\ln 2 + 3).$$

▲

Příklad 1.62. Označme M vystínovanou množinu na obr. 1.17, kde k je horní půlkružnice se středem v počátku O a s poloměrem $r = 2$, l je kružnice se středem v bodě $B = [2, 0]$ s poloměrem $r = 2$ a C je jejich průsečík. Buď $A = [-2, 0]$. Vypočtěte integrál $I = \iint\limits_M 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



Obr. 1.17

Řešení. Nalezneme souřadnice bodu C. Platí $k\colon x^2+y^2=4$, $l\colon (x-2)^2+y^2=4$. Odečtením rovnic dostaneme $4x-4=0$, tj. $x=1$ a odtud vypočteme $y=\sqrt{3}$. Vyjde tudíž $C=[1,\sqrt{3}]$.

Integrační obor M není zřejmě elementární množinou ani vzhledem k ose x ani vzhledem k ose y. Rozdělíme ho proto na dvě části — část M_1, omezenou obloukem AC půlkružnice k a její tětivou AC, a část M_2, omezenou obloukem BC půlkružnice k, obloukem OC kružnice l a osou x. Z Thaletovy věty plyne, že $\sphericalangle BCA$ je pravý. To znamená, že tětiva AC leží na tečně ke kružnici l v bodě C, takže má s obloukem OC kružnice l společný jen bod C, jak je znázorněno na obrázku. Podle věty 1.50, část c) je

$$I=\iint\limits_{M} 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{M_1} 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{M_2} 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Obě části M_1 i M_2 jsou elementárními množinami jak vzhledem k ose x, tak vzhledem k ose y. Množinu M_1 popíšeme jako elementární množinu vzhledem k ose x, zatímco M_2 jako elementární množinu vzhledem k ose y. Bude to tak vhodnější pro praktickou integraci.

Najdeme rovnici přímky procházející body A a C. Z pravoúhlého trojúhelníku $\triangle ADC$, kde $D=[1,0]$, vypočítáme, že směrnice je $\sqrt{3}/3$, tedy $y=(\sqrt{3}/3)(x+2)$. Z rovnice půlkružnice k určíme $y=\pm\sqrt{4-x^2}$ resp. $x=\pm\sqrt{4-y^2}$ a z rovnice kružnice l určíme $x-2=\pm\sqrt{4-y^2}$. S pomocí obr. 1.17 zvolíme správná znaménka u odmocnin. Celkem dostaneme

$$M_1\colon\ \begin{array}{c} -2\leqq x\leqq 1,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)\leqq y\leqq\sqrt{4-x^2}, \end{array}\qquad M_2\colon\ \begin{array}{c} 0\leqq y\leqq\sqrt{3},\\ 2-\sqrt{4-y^2}\leqq x\leqq\sqrt{4-y^2}. \end{array}$$

Integrand $f(x,y)=6xy$ je spojitá funkce. Použijeme Fubiniovu větu a dostaneme:

$$I_1=\iint\limits_{M_1} 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{1}\left(\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)}^{\sqrt{4-x^2}} 6xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Vnitřní integrál bude

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)}^{\sqrt{4-x^2}} 6xy\,\mathrm{d}y = 3x\big[y^2\big]_{\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)}^{\sqrt{4-x^2}} = 3x\left(4 - x^2 - \frac{3}{9}(x+2)^2\right) = \\ = 8x - 4x^2 - 4x^3$$

a vnější integrál vyjde

$$I_1 = \int_{-2}^{1} (8x - 4x^2 - 4x^3)\,\mathrm{d}x = \left[4x^2 - \frac{4}{3}x^3 - x^4\right]_{-2}^{1} = \\ = \left(4 - \frac{4}{3} - 1\right) - \left(16 + \frac{32}{3} - 16\right) = -9.$$

Podobně dostaneme:

$$I_2 = \iint\limits_{M_2} 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 6xy\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Vnitřní integrál bude

$$\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 6xy\,\mathrm{d}x = 3y\big[x^2\big]_{2-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} = 3y\Big(4 - y^2 - \big(2 - \sqrt{4-y^2}\big)^2\Big) = \\ = 3y\big(4\sqrt{4-y^2} - 4\big).$$

Při výpočtu vnějšího integrálu rozdělíme integrand na dvě části a na první integrál použijeme substituční metodu. Vyjde nám:

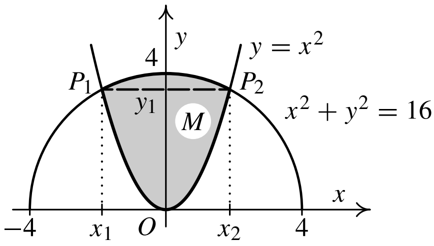
$$I_2 = \int_0^{\sqrt{3}} 3y\big(4\sqrt{4-y^2} - 4\big)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{3}} 12y\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y - \int_0^{\sqrt{3}} 12y\,\mathrm{d}y = \\ = \left|\begin{array}{r} 4 - y^2 = u^2 \\ -2y\,\mathrm{d}y = 2u\,\mathrm{d}u \\ y\,\mathrm{d}y = -u\,\mathrm{d}u \\ 0 \rightsquigarrow 2,\ \sqrt{3} \rightsquigarrow 1 \end{array}\right| = -12\int_2^1 u^2\,\mathrm{d}u - 6\big[y^2\big]_0^{\sqrt{3}} = 4\big[u^3\big]_1^2 - 18 = 10.$$

Celkový výsledek je tedy

$$I = I_1 + I_2 = -9 + 10 = 1.$$

▲

Příklad 1.63. Vypočtěte $I = \iint\limits_{M} \frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je množina omezená křivkami $y = x^2$ a $x^2 + y^2 = 16$ (část nad parabolou).



Obr. 1.18

Řešení. První křivka je parabola, druhá kružnice. Integrační obor M je znázorněn na obr. 1.18. Určíme souřadnice průsečíků $P_1 = [x_1, y_1]$ a $P_2 = [x_2, y_2]$. Vyloučením x dostaneme kvadratickou rovnici $y^2 + y - 16 = 0$, která má kořeny $\left(-1 \pm \sqrt{65}\right)/2$. Pro nás má význam jen kladný z nich, je tedy $y_1 = y_2 = \left(-1 + \sqrt{65}\right)/2$. Odtud vyjde:

$$x_2 = -x_1 = \sqrt{\left(-1 + \sqrt{65}\right)/2}.$$

Integrační obor M je elementární množinou jak vzhledem k x, tak vzhledem k y. Jednodušší je popis vzhledem k x:

$$M\colon \begin{array}{l} x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ x^2 \leqq y \leqq \sqrt{16 - x^2}. \end{array}$$

Integrand $f(x, y) = x/(1 + y^2)$ je spojitá funkce. Z Fubiniovy věty dostaneme

$$I = \iint\limits_M \frac{x}{1 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{16-x^2}} \frac{x}{1 + y^2}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Vnitřní integrál vyjde

$$\int_{x^2}^{\sqrt{16-x^2}} \frac{x}{1 + y^2}\, \mathrm{d}y = x \left[\operatorname{arctg} y\right]_{x^2}^{\sqrt{16-x^2}} =$$

$$= x \operatorname{arctg} \sqrt{16 - x^2} - x \operatorname{arctg} x^2 = f(x).$$

Integrace funkce $f(x)$ je však velmi nepříjemná, na každý sčítanec by se musela použít postupně substituce a metoda per partes. Snadno je však vidět, že $f(x)$ je lichá funkce, tj. $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in \langle -4, 4\rangle$. Protože integrační obor je interval souměrný vzhledem k počátku ($x_2 = -x_1$), musí platit

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \left(x \operatorname{arctg} \sqrt{16 - x^2} - x \operatorname{arctg} x^2\right) \mathrm{d}x = 0.$$

Zdlouhavé integrace jsme tedy byli ušetřeni.

Rovněž by šlo vyjádřit množinu M jako elementární množinu vzhledem k ose y, museli bychom ji však nejprve rozdělit úsečkou P_1P_2, aby horní a dolní meze vnitřního integrálu měly jednoduchý popis. Snadno se lze přesvědčit, že oba vnitřní integrály jsou pak rovny nule, takže vnější integrály jsou triviální. ▲

Poznámka 1.64. Je-li integrační obor dvojrozměrný interval $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a integrand má tvar součinu $f(x)g(y)$, kde f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a g je spojitá funkce na intervalu $\langle c, d\rangle$, je možné výpočet podle Fubiniovy věty zjednodušit a výrazně urychlit:

$$\iint\limits_J f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \tag{1.18}$$
$$= \int_a^b f(x)\left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Integrál $\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$ je totiž konstanta, kterou lze z vnějšího integrálu vytknout.

Příklad 1.65. Vypočtěte $\iint\limits_J x \sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $J = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, \pi/2\rangle$.

Řešení. Podle vztahu (1.18) bude

$$\iint\limits_J x \sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\pi/2} \sin y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[-\cos y\right]_0^{\pi/2} =$$
$$= (2-0)\cdot(0+1) = 2.$$ ▲

Cvičení

1. Dokažte bez použití lemmatu 1.12, že funkce f z poznámky 1.19 je integrovatelná a její integrál je roven nule.

2. Nechť M, M_1, M_2 jsou obdélníky, $M = M_1 \cup M_2$, $\mathring{M}_1 \cap \mathring{M}_2 = \emptyset$ a funkce f je ohraničená na M. Dokažte, že

$$\underline{\iint\limits_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint\limits_{M_1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \underline{\iint\limits_{M_2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\overline{\iint\limits_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_{M_1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \overline{\iint\limits_{M_2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. Nechť R_1, R_2 jsou obdélníky a M je taková množina (nemusí být měřitelná), že $M \subseteq R_1 \cap R_2$. Buď f funkce ohraničená na M. Dokažte, že pak
$$\underline{\iint_{R_1}} (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint_{R_2}} (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\overline{\iint_{R_1}} (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_{R_2}} (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4. Nechť M je obdélník a funkce f, g jsou ohraničené na M. Dokažte, že
$$\underline{\iint_{M}} \big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \underline{\iint_{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \underline{\iint_{M}} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\overline{\iint_{M}} \big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \overline{\iint_{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \overline{\iint_{M}} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5. Nechť funkce f je $(\mathscr{D})$-integrovatelná na obdélníku M, $\{D_n\}$ je nulová posloupnost dělení M a Ξ_n je libovolný výběr reprezentantů dílků dělení D_n, $n \in \mathbb{N}$. Ukažte bez použití věty 1.25, že $\sigma(D_n, \Xi_n, f) \to \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pro $n \to \infty$.

6. Nechť funkce f je ohraničená na obdélníku M a $\{D_n\}$ je libovolná nulová posloupnost dělení M. Ukažte, že existují výběry Ξ_n^1, Ξ_n^2 reprezentantů dílků dělení D_n, $n \in \mathbb{N}$, takové, že platí $\sigma(D_n, \Xi_n^1, f) \to \underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\sigma(D_n, \Xi_n^2, f) \to \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pro $n \to \infty$.

7. Nechť funkce f je definována na obdélníku M. Dokažte, že funkce f je integrovatelná na M právě tehdy, když $\{\sigma(D_n, \Xi_n, f)\}$ je konvergentní pro libovolnou nulovou posloupnost dělení $\{D_n\}$ obdélníku M a libovolný výběr Ξ_n reprezentantů dílků dělení D_n, $n \in \mathbb{N}$.

8. Nechť funkce f je definována na obdélníku M. Dokažte, že funkce f je integrovatelná na M právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existují funkce g, h integrovatelné na M takové, že $g(x, y) \leqq f(x, y) \leqq h(x, y)$ pro $[x, y] \in M$ a $\iint_M \big[h(x, y) - g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon$.

9. Nechť funkce φ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce ψ je integrovatelná na intervalu $\langle c, d\rangle$. Pak je funkce $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ integrovatelná na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a platí $\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y$. Dokažte.

10. Nechť funkce φ je definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, funkce ψ je definovaná na intervalu $\langle c, d\rangle$ a jsou obě nezáporné. Nechť funkce $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ je integrovatelná na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$. Pak je funkce φ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, funkce ψ je integrovatelná na intervalu $\langle c, d\rangle$ a platí $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y$. Dokažte.

11. Nechť funkce f je integrovatelná na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Buď F libovolná funkce jedné proměnné taková, že platí $\underline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y \leqq F(x) \leqq \leqq \overline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Dokažte, že pak je F integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

12. Nechť funkce f je integrovatelná na obdélníku M a $\operatorname{Im} f \subseteq \langle \alpha, \beta\rangle$. Nechť funkce φ jedné proměnné je definovaná na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ a má na tomto intervalu ohraničenou derivaci. Dokažte, že pak je funkce $\varphi \circ f$ integrovatelná na obdélníku M.

13. S využitím cvičení 12 uveďte jiný důkaz věty 1.51.

14. Množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existují měřitelné množiny M_1, M_2 tak, že $M_1 \subseteq M \subseteq M_2$ a $\mathrm{m}(M_2) - \mathrm{m}(M_1) < \varepsilon$. Dokažte.

15. Množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existují obdélníky $N_1, \dots, N_n$ takové, že kterékoli různé dva z nich nemají společné vnitřní body, a přirozené číslo k, $0 \leqq k \leqq n$, tak, že při označení $M_1 = N_1 \cup \cup \dots \cup N_k$, $M_2 = N_1 \cup \dots \cup N_n$ platí $M_1 \subseteq M \subseteq M_2$ a $\mathrm{m}(M_2) - \mathrm{m}(M_1) < \varepsilon$. (Pro $k = 0$ klademe $M_1 = \emptyset$.) Dokažte.

16. Nechť $M, A \subseteq \mathbb{R}^2$, M je měřitelná a $\mathring{M} \subseteq A \subseteq \overline{M}$, kde $\mathring{M}$ je vnitřek M a $\overline{M}$ je uzávěr M. Ukažte, že pak je množina A měřitelná.

17. Dokažte, že omezená množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ má Jordanovu míru nula právě tehdy, když k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existují obdélníky $R_1, \dots, R_k$ takové, že $M \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} R_i$ a $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{m}(R_i) < \varepsilon$.

18. Dokažte, že konečná množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ má Jordanovu míru nula.

19. Nechť $M = \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^2$ je konvergentní posloupnost bodů. Ukažte, že $\mathrm{m}_2(M) = 0$.

20. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina. Dokažte, že $\mathrm{m}(M) = 0$, právě když $\mathring{M} = \emptyset$. Je možné v implikaci „zprava doleva“ vynechat předpoklad měřitelnosti M?

21. Nechť kladná funkce f je integrovatelná na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ kladné míry. Dokažte, že pak $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$.

22. Nechť funkce f, g jsou integrovatelné na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ kladné míry a $f(x, y) > g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$. Pak platí $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y > {} > \iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Dokažte.

23. Nechť funkce f je integrovatelná na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a existuje konstanta $c > 0$ taková, že $f(x, y) \geqq c$ pro každé $[x, y] \in M$. Dokažte, že funkce $1/f$ je integrovatelná na M.

24. Nechť funkce f, g jsou integrovatelné na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a existuje konstanta $c > 0$ taková, že $g(x, y) \geqq c$ pro $[x, y] \in M$. Dokažte, že funkce f/g je integrovatelná na M.

25. Nechť křivka γ o parametrických rovnicích $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ (φ, ψ jsou spojité funkce), má konečnou délku. Potom její graf, tj. množina $G = \{[\varphi(t), \psi(t)] : t \in \langle\alpha, \beta\rangle\}$, má míru nula. Dokažte.

26. Uveďte příklad funkce spojité na jednorozměrném kompaktním intervalu, jejíž graf má nekonečnou délku. (Podle věty 1.38 e) bude rovinná míra tohoto grafu nula. Tedy konečná délka křivky není nutnou podmínkou pro to, aby graf křivky měl rovinnou míru nula — srovnejte s cvičením 25.)

27. Najděte příklady posloupností jordanovsky měřitelných množin A_n, B_n, C_n a D_n, $n \in \mathbb{N}$, v $\mathbb{R}^2$ takových, že:

    a) Množina $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ je neomezená.

    b) Množina $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ je omezená, není však jordanovsky měřitelná.

c) Množina $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ není jordanovsky měřitelná.

d) Množina $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ je omezená, avšak ani tato množina ani množina $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ nejsou jordanovsky měřitelné.

28. Nechť funkce f a g jsou definované na množině M. Uvažujme funkce $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ dané vztahy $\max\{f, g\}(x, y) = \max\{f(x, y), g(x, y)\}$ a $\min\{f, g\}(x, y) = \min\{f(x, y), g(x, y)\}$, $(x, y) \in M$.

    Dokažte, že jsou-li f a g integrovatelné na měřitelné množině M, jsou také funkce $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ integrovatelné na M.

29. Pro funkci f definovanou na množině M položme $f^+ = \max\{f, 0\}$ a $f^- = \max\{-f, 0\}$ (funkce f^+ resp. f^- se nazývá kladná resp. záporná část funkce f).

    Nechť M je měřitelná množina. Dokažte, že funkce f je integrovatelná na M právě tehdy, když jsou na M integrovatelné funkce f^+ i f^-; v tom případě platí $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M f^+(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_M f^-(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

30. Pomocí integrálu $\iint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ vypočtěte míru množiny Ω omezené křivkami zadanými rovnicemi:

    a) $\Omega: x + y = 1,\ x + y = 2,\ y = x/2,\ y = 2x$,

    b) $\Omega: y = \mathrm{e}^x,\ y = \mathrm{e}^{-x},\ x = -4,\ x = 4$ (srovnejte s příkladem 30 c),

    c) $\Omega: y = \mathrm{e}^x,\ y = \mathrm{e}^{-x},\ x = -4,\ x = 4,\ y = 0$,

    d) $\Omega: y = \cos x,\ x = 0,\ y = 0$,

    e) $\Omega: y = x^2,\ y = 4 - x^2$,

    f) $\Omega: y = 1/x,\ y = 4x,\ y = 8$,

    g) $\Omega: y = x^2,\ y = \sqrt{x}$,

    h) $\Omega: y = \ln x,\ x = 3,\ y = 0$,

    i) $\Omega: y = x,\ x = 2,\ xy = 1$,

    j) $\Omega: y^2 = 2x,\ x^2 = 2y$,

    k) $\Omega: y = 0,\ x + 2y = 3,\ y = x^2$,

    l) $\Omega: x = 0,\ y = \mathrm{e}^x - 1,\ y = \mathrm{e}^x - x$.

31. Vypočtěte dvojný integrál dané funkce přes danou množinu Ω:

a) $\displaystyle\iint_{\Omega} x^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\qquad \Omega\colon x = 1,\ x = 4,\ y = -2,\ y = 3$,

b) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{x^2}{1+y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\qquad \Omega\colon x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$,

c) $\displaystyle\iint_{\Omega} \sqrt{xy} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\qquad \Omega\colon 0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 3$,

d) $\displaystyle\iint_{\Omega} \sin(2x+y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\qquad \Omega\colon 0 \leqq x \leqq \pi,\ \pi/4 \leqq y \leqq \pi$,

e) $\displaystyle\iint_{\Omega} x \cos y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\qquad \Omega\colon 1 \leqq x \leqq 2,\ -\pi/2 \leqq y \leqq \pi/2$,

f) $\displaystyle\iint_{\Omega} (\mathrm{e}^y + 2x) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\qquad \Omega\colon y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$.

32. Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_{A} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, je-li množina A:

a) obdélník omezený přímkami $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $a, b > 0$,
b) množina $\left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leqq 4\right\}$,
c) parabolická úseč omezená křivkami $y = 4 - x$, $y^2 = 2x$.

33. Vypočtěte následující dvojnásobné integrály:

a) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2 + 2y) \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$, $\qquad$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos y}^1 x^4 \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$,

c) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2 + y^3) \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$, $\qquad$ d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2\varphi \,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\varphi$,

e) $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$, $\qquad$ f) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{\ln y} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$, $\qquad$ h) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin y \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$,

i) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a \varrho^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi,$ j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)}\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi,$

k) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ l) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\int_{\sin y}^{3\sin y}(x+\cos y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$

m) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ n) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)}\varrho\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi.$

34. Vypočtěte dvojný integrál dané funkce přes množinu Ω omezenou zadanými křivkami:

a) $\displaystyle\iint_\Omega (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega\colon\ y=0,\ y=x,\ x+y=2,$

b) $\displaystyle\iint_\Omega (x^2+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega\colon\ y=x^2,\ y^2=x,$

c) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega\colon\ x=1,\ x=2,\ y=1,\ y=x,$

d) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x}{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega\colon\ x=2+\sin y,\ x=0,\ y=0,\ y=2\pi,$

e) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega\colon\ x=2,\ x=4,\ y=x,\ y=2x,$

f) $\displaystyle\iint_\Omega \mathrm{e}^{2x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega\colon\ x+y=2,\ y=0,\ y=1,\ x=0,$

g) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega\colon\ \pi/4\leqq x\leqq\pi/3,\ y=x,\ y=x\operatorname{tg}x,$

h) $\displaystyle\iint_\Omega \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega\colon\ x=0,\ y=\pi,\ y=x,$

i) $\displaystyle\iint_\Omega (3xy^2-2x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega\colon\ 0\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq x,$

j) $\displaystyle\iint_\Omega x^3y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega\colon\ x=0,\ x=1,\ y=x,\ y=x^3,$

k) $\displaystyle\iint_{\Omega} \ln x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega: \ y = 1/x, \ \ x + 2y = 3,$

l) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega: \ x = 2, \ \ xy = 1, \ \ y = x,$

m) $\displaystyle\iint_{\Omega} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega: \ b^2x^2 + a^2y^2 \leqq a^2b^2, \ \ x \geqq 0, \ \ y \geqq 0,$
$a, b > 0,$

n) $\displaystyle\iint_{\Omega} y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega: \ y = x^2, \ \ y = 4 - x^2.$

35. Vypočtěte dvojné integrály:

a) $\displaystyle\iint_{M} y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ kde $M = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \geqq 0, x^2 + y^2 \leqq 1, \ (x-1)^2 + y^2 \geqq 1\big\},$

b) $\displaystyle\iint_{M} \frac{x^2}{y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ kde M je kompaktní množina omezená křivkami $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$,

c) $\displaystyle\iint_{M} (|x| + |y|) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ kde $M = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqq 1\big\},$

d) $\displaystyle\iint_{M} |\cos(x + y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ kde $M = \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, \pi\rangle,$

e) $\displaystyle\iint_{M} \operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ kde $M = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 4\big\},$

⋆f) $\displaystyle\iint_{M} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ kde $M = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 4\big\}.$

36. Vypočtěte dvojnásobné integrály:

a) $\displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b xy \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \ a < b, \ c < d,$ $\qquad$ b) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_1^{3-y} \frac{\mathrm{d}x}{(x + y)^3} \right) \mathrm{d}y,$

c) $\displaystyle\int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2 - y^2}} xy \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \ r > 0,$ $\qquad$ d) $\displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \left(\int_{y^2}^{y^3} \frac{\ln x}{xy} \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$

e) $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_{x/2}^{\sqrt{x}} (2y - \sqrt{x}) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$ $\qquad$ f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_{\sin y}^{3 \sin y} (x + \cos y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$

37. V daných integrálech zaměňte pořadí integrace (načrtněte si integrační obor):

a) $\displaystyle\int_a^b \left(\int_a^x f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,\ a < b,$ b) $\displaystyle\int_{-2}^0 \left(\int_{y^2-4}^0 f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$

c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$ d) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\mathrm{e}^y}^{-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}y+\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}-1}} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$

e) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$ f) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$

g) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$ h) $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$

i) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$ j) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$

k) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$ l) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{y \ln \sqrt{3}}^{\ln(y+1)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$

⋆m) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int_1^4 \left(\int_{y-1}^{1+\sqrt{y}} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$

⋆n) $\displaystyle\int_0^3 \left(\int_{2-\sqrt{4-y}}^{y} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int_3^4 \left(\int_{2-\sqrt{4-y}}^{2+\sqrt{4-y}} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$

⋆o) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_1^y f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int_2^4 \left(\int_{y/2}^2 f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$

V úlohách m), n), o) spojte vzniklé dvojnásobné integrály do jednoho.

38. Vypočtěte dvojnásobné integrály přes množinu Ω určenou mezemi integrálů:

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{1+\sin y}^{3+\sin y} \mathrm{e}^x \cos y\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$ b) $\displaystyle\int_1^3 \left(\int_{\frac{1}{y}}^{y+\frac{1}{y}} \frac{1}{\sqrt{xy-1}}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$

c) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} x^2 y\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$ d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{x^3}^{3x} (x^2 + y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$

e) $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} \left(2y - \sqrt{x}\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$ f) $\displaystyle\int_1^4 \left(\int_{-x+4}^{-(x-2)^2+4} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left(\int_{\frac{6x}{5\pi}}^{2\sin x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$ h) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\int_4^8 y \mathrm{e}^{xy/4} \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$

39. Vypočtěte dvojné integrály přes množinu Ω vymezenou danými podmínkami:

a) $\displaystyle\iint_\Omega xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega: \; y^2 = 2x, \; x = \sqrt{3 - y^2},$

b) $\displaystyle\iint_\Omega (x + y + 10) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega: \; x^2 + y^2 = 4,$

c) $\displaystyle\iint_\Omega (x - y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega: \; y = 1 - x^2, \; 2y = x + 1,$

d) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x}{(1+y)^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega: \; x^2 \leqq y \leqq \sqrt{16 - x^2},$

e) $\displaystyle\iint_\Omega y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ Ω je horní polovina vnitřku elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \; a, b > 0,$

f) $\displaystyle\iint_\Omega x^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ Ω je trojúhelník s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [2a, 0], \; C = [a, a], a > 0,$

g) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{a^2 + x^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega: \; x = 0, \; x = a, \; y^2 - x^2 = a^2,$ $a > 0, \; y \geqq 0,$

h) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x + 4y + 3}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega: \; x = y^2 + 1, \; y = 0, \; y = 2,$ $y = -x/4,$

i) $\displaystyle\iint_\Omega \left(2x - \sqrt{y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega: \; y = 0, \; y = x^2, \; y = (x - 1)^2,$

j) $\displaystyle\iint_\Omega (y - x + 1) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega: \; y = 1, \; y = 2, \; y = x, \; y = x + 1,$

k) $\displaystyle\iint_\Omega 4y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\Omega: \; x = 1, \; y = x + 1, \; x^2 + y^2 = 1,$

l) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega:\ y=0,\ \ y=\ln x,\ \ y=\mathrm{e}-x+1.$

40. Vypočtěte dvojné integrály přes množinu Ω:

a) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega:\ x^2+y^2 \leqq a^2,\ \ x+y \geqq a,\ \ a>0,$

b) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega:\ x=0,\ \ y=2,\ \ y=\mathrm{e}^x,$

c) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega$ je trojúhelník s vrcholy $A=[0,0]$, $B=[0,2]$, $C=[2,0]$,

d) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega:\ \cos\frac{y}{2} \leqq x \leqq 2\sin y,\ \ \frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \pi,$

e) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega:\ 0 \leqq x \leqq 1,\ \ \mathrm{e}^x \leqq y \leqq (\mathrm{e}-1)x+1,$

f) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega:\ 0 \leqq x \leqq \ln y,\ \ 1 \leqq y \leqq a,\ \ a>1.$

41. Vypočtěte dvojné integrály (danou množinu vhodně rozdělte):

a) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (2xy+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega:\ x=0,\ \ x=2,\ \ y=0,\ \ y=2,\ \ y=1-x,\ \ y=3-x,$

b) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (x^2+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega:\ x \geqq 0,\ \ xy=2,\ \ y=x/2,\ \ y=2x,$

c) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega:\ x+y=2,\ \ x+y=4,\ \ y=3x,\ \ y=5x,$

d) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega:\ x^2=4y,\ \ x^2=8y,\ \ y^2=2x,\ \ y^2=4x,$

e) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (x^2+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega:\ x=0,\ \ x=2,\ \ y=0,\ \ y=1+x,\ \ y=3-x,$

f) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (x^3-2y+3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega:\ y=2x,\ \ y=x/2,\ \ y=3-x.$

42. Vypočtěte dvojné integrály (danou množinu vhodně rozdělte):

a) $\displaystyle\iint_{\Omega} 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad \Omega\colon x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,$

b) $\displaystyle\iint_{\Omega} (x-y+4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad \Omega\colon x=4,\ y=0,\ y=x^2,\ y=6-x,$

c) $\displaystyle\iint_{\Omega} (x^2-y+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad \Omega\colon y=1/x,\ y=4x,\ y=x/4,\ x \geqq 0,$

d) $\displaystyle\iint_{\Omega} 3x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad \Omega\colon y=3x+1,\ y=(x-1)/3,\ y=1-x,\ y=5-x,$

e) $\displaystyle\iint_{\Omega} (x+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad \Omega\colon y=3x,\ y=3(2-x),\ y=1-(x-1)^2,$

f) $\displaystyle\iint_{\Omega} 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad \Omega\colon y \geqq 2(x-2),\ y \leqq x/3+1,\ x^2/4+y^2 \geqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,$

g) $\displaystyle\iint_{\Omega} x\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad \Omega\colon x=\mathrm{e},\ y=0,\ y=x,\ y=\ln x.$

43. Vypočtěte následující dvojné integrály pomocí Fubiniovy věty — zkuste obě pořadí integrace a porovnejte výsledky.

a) $\displaystyle\iint_{M} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad M\colon 0 \leqq x \leqq \pi^2,\ \sqrt{x} \leqq y \leqq \pi,$

⋆b) $\displaystyle\iint_{M} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-y^2\sin^2 x},$ $\quad M=\langle 0,\pi/2\rangle \times \langle 0, 1/2\rangle,$

⋆c) $\displaystyle\iint_{M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad M=\langle 2,3\rangle \times \langle 0,\pi/2\rangle,$

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{1+x^2\,\mathrm{tg}^2\, y}, & [x,y]\in M,\ y \neq \pi/2\\ 0, & [x,y]\in M,\ y=\pi/2.\end{cases}$$

Výsledky

1. Pro libovolné dělení D obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ je $0 = s(D, f) \leqq S(D, f) \leqq$ $\leqq (d - c)\nu(D)$. Tedy $\underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 = \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. Postupujte obdobně jako při důkazu rovností (1.11) a (1.12) ve větě 1.21.

3. S využitím cvičení 2 této kapitoly dokažte pro horní a dolní integrály analogie rovností (1.10) a (pro $R_1 \subseteq R_2$) (1.15). Pak postupujte jako v poznámce 1.32, část 2.

4. V důkazu věty 1.20 c) byla odvozena pro libovolné dělení D obdélníku M nerovnost $s(D, f) + s(D, g) \leqq s(D, f + g) \leqq S(D, f + g) \leqq S(D, f) + S(D, g)$. Tvrzení nyní plyne z věty 1.10 a).

5. Platí $s(D_n, f) \leqq \sigma(D_n, \Xi_n, f) \leqq S(D_n, f)$. S použitím věty 1.10 c) dostaneme limitním přechodem $n \to \infty$ tvrzení.

6. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje podle lemmatu 1.27 výběr reprezentantů Ξ_n^1 dílků dělení D_n tak, že $0 \leqq \sigma(D_n, \Xi_n^1, f) - s(D_n, f) < 1/n$. Tedy $\sigma(D_n, \Xi_n^1, f) -$ $- s(D_n, f) \to 0$ pro $n \to \infty$. Tvrzení pak plyne z věty 1.10 a). Analogicky pro horní integrál.

7. $\Rightarrow$: Plyne ze cvičení 5.
$\Leftarrow$: Předpokládejme, že $\sigma(D_n, \Xi_n, f)$ je konvergentní pro libovolnou nulovou posloupnost dělení $\{D_n\}$ obdélníku M a libovolný výběr reprezentantů Ξ_n dělení $\{D_n\}$. Připusťme, že $\sigma(D_n^1, \Xi_n^1, f) \to I_1$, $\sigma(D_n^2, \Xi_n^2, f) \to I_2$ a $I_1 \neq I_2$. Pak $\{D_n\} =$ $= \{D_1^1, D_1^2, D_2^1, D_2^2, \dots\}$ je nulová posloupnost. Označíme-li $\{\Xi_n\} = \{\Xi_1^1, \Xi_1^2, \Xi_2^1,$ $\Xi_2^2, \dots\}$, posloupnost $\{\sigma(D_n, \Xi_n, f)\}$ není konvergentní, protože má podposloupnosti s různými limitami. To je spor, a tedy všechny posloupnosti mají stejnou limitu $I \in \mathbb{R}$. Jestliže číslo I není integrálem z funkce f na M, podle definice 1.24 existuje číslo $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé číslo $1/n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, existuje dělení D_n s normou $\nu(D_n) < 1/n$ a výběr Ξ_n reprezentantů dělení D_n tak, že $|I - \sigma(D_n, \Xi_n, f)| \geqq \varepsilon$. To je spor s tím, že posloupnost $\{\sigma(D_n, \Xi_n, f)\}$ konverguje k I.

8. $\Rightarrow$: Nechť funkce f je integrovatelná na obdélníku M. Buď $\varepsilon > 0$. Položme $g =$ $= h = f$. Pak funkce g, h mají požadované vlastnosti.
$\Leftarrow$: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle předpokladu k číslu $\varepsilon/3$ existují funkce g, h integrovatelné na M takové, že $g \leqq f \leqq h$ na M a $\iint_M \big[h(x, y) - g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon/3$.
Buď D libovolné dělení obdélníku M. Vzhledem k nerovnostem $g \leqq f \leqq h$ platí $s(D, g) \leqq s(D, f) \leqq S(D, f) \leqq S(D, h)$, tedy $S(D, f) - s(D, f) \leqq S(D, h) -$

$- s(D, g)$. Z definice integrálu vyplývá existence dělení D_1, D_2 obdélníku M takových, že $S(D_1, h) - \iint\limits_M h(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon/3$, $\iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - s(D_2, g) < \varepsilon/3$; tyto nerovnosti budou platit i pro společné zjemnění D dělení D_1, D_2. Celkově tedy $S(D, f) - s(D, f) \leqq S(D, h) - s(D, g) = S(D, h) - \iint\limits_M h(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_M h(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - s(D, g) < \varepsilon$. Podle lemmatu 1.9 je funkce f integrovatelná na M.

9. Předpokládejme nejprve, že φ, ψ jsou nezáporné. Nechť $D_x: a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $D_y: c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ je dělení intervalu $\langle c, d\rangle$. Nechť $J = \{(i, j) : i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n\}$. Označme
$$\begin{aligned}
u_i &= \inf\{\varphi(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}, && i = 1, \dots, m,\\
U_i &= \sup\{\varphi(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}, && i = 1, \dots, m,\\
v_j &= \inf\{\psi(y) : y \in \langle y_{j-1}, y_j\rangle\}, && j = 1, \dots, n,\\
V_j &= \sup\{\psi(y) : y \in \langle y_{j-1}, y_j\rangle\}, && j = 1, \dots, n,\\
w_{ij} &= \inf\{f(x, y) : [x, y] \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle\}, && (i, j) \in J,\\
W_{ij} &= \sup\{f(x, y) : [x, y] \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle\}, && (i, j) \in J.
\end{aligned}$$
Platí $u_i v_j \leqq w_{ij} \leqq W_{ij} \leqq U_i V_j$ pro $(i, j) \in J$. Odtud při označení $D = D_x \times D_y$ dostaneme $s(D_x, \varphi) \cdot s(D_y, \psi) \leqq s(D, f) \leqq S(D, f) \leqq S(D_x, \varphi) \cdot S(D_y, \psi)$.
Je-li $\{D_n\}$ libovolná nulová posloupnost dělení obdélníku M, dostaneme pro $n \to \infty$ z předchozích nerovností podle věty 1.10, že
$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y \leqq \underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq$$
$$\leqq \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y.$$
Musí tedy platit $\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, takže funkce f je integrovatelná na obdélníku M a $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y = \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
Tvrzení rovněž platí, pokud φ, ψ nemění znaménka. Je-li např. φ nezáporná na $\langle a, b\rangle$ a ψ nekladná na $\langle c, d\rangle$, stačí použít předchozí výsledek na φ a $-\psi = |\psi|$ a výslednou rovnost vynásobit číslem -1.
V obecném případě zvolme konstantu C takovou, že $\varphi \geqq C$ na $\langle a, b\rangle$ a $\psi \geqq C$ na $\langle c, d\rangle$. Taková konstanta existuje, protože obě funkce jsou integrovatelné, a tudíž ohraničené. Pak
$$\begin{aligned}
\varphi(x)\psi(y) &= \big(\varphi(x) - C + C\big)\big(\psi(y) - C + C\big) =\\
&= \big(\varphi(x) - C\big)\big(\psi(y) - C\big) + C\big(\varphi(x) - C\big) + C\big(\psi(y) - C\big) + C^2.
\end{aligned}$$
Funkce $\varphi(x) - C$ a $\psi(y) - C$ jsou nezáporné, takže podle předchozí části a věty 1.20,

část c), je funkce f integrovatelná. Integrací předchozí rovnosti a úpravou vzniklých integrálů se pak snadno ověří vztah $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y = \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Poznámka: Všimněte si, že v důkazu nebyla použita Fubiniova věta. Jinou možností je nejprve dokázat, že $\varphi(x)$, $\psi(y)$ (chápané jako funkce dvou proměnných) jsou integrovatelné na M. Pak je integrovatelný jejich součin $\varphi(x)\psi(y)$. Důkaz se dokončí užitím Fubiniovy věty.

10. Funkce f je integrovatelná, a tedy ohraničená na M. Existuje $x_0 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $\varphi(x_0) > 0$ (jinak by měla funkce f nulový integrál přes M). Tedy $\psi(y) = f(x_0, y)/\varphi(x_0)$ pro $y \in \langle c, d\rangle$, takže funkce ψ je ohraničená na $\langle c, d\rangle$. Obdobně se ověří, že funkce φ je ohraničená na $\langle a, b\rangle$.
    Nechť funkce h je ohraničená na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ a $k \geqq 0$. Snadno se ověří, že $\overline{\int_\alpha^\beta} kh(t)\,\mathrm{d}t = k \overline{\int_\alpha^\beta} h(t)\,\mathrm{d}t$. Dále platí, že pro $k \neq 0$ je funkce h integrovatelná na $\langle \alpha, \beta\rangle$ právě tehdy, když je na tomto intervalu integrovatelná funkce kh.
    Podle Fubiniovy věty platí $0 < \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \big(\overline{\int_c^d} \varphi(x)\psi(y)\,\mathrm{d}y\big)\mathrm{d}x = \int_a^b \big(\varphi(x) \overline{\int_c^d} \psi(y)\,\mathrm{d}y\big)\mathrm{d}x = \overline{\int_c^d} \psi(y)\,\mathrm{d}y \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední krok je možný, protože musí být $\overline{\int_c^d} \psi(y)\,\mathrm{d}y > 0$. Z toho také vyplývá, že funkce φ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Obdobně se dokáže, že funkce ψ je integrovatelná na intervalu $\langle c, d\rangle$. Odtud už plyne i dokazovaná rovnost.

11. Označme $F_1(x) = \underline{\int_c^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ a $F_2(x) = \overline{\int_c^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ Podle Fubiniovy věty 1.14 jsou tyto funkce integrovatelné na $\langle a, b\rangle$ a platí $\int_a^b F_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F_2(x)\,\mathrm{d}x = \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Odtud vyjde $\int_a^b F_1(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} F_1(x)\,\mathrm{d}x \leqq \underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} F_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F_2(x)\,\mathrm{d}x$. Tudíž $\underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x$, takže funkce F je integrovatelná. Zbytek tvrzení je zřejmý.

12. Funkce φ je diferencovatelná, tedy i spojitá na kompaktním intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$. Podle Weierstrassovy věty je zde ohraničená, takže rovněž funkce $\varphi \circ f$ je ohraničená na M.
    Podle předpokladu existuje konstanta $K > 0$ tak, že $|\varphi'(x)| \leqq K$ na $\langle \alpha, \beta\rangle$. Pro libovolná $t_1, t_2 \in \langle \alpha, \beta\rangle$ existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě číslo $\xi \in (\alpha, \beta)$ takové, že $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \varphi'(\xi)(t_2 - t_1)$, tedy $|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqq K|t_2 - t_1|$. Pro libovolné body $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in M$ proto platí $\big|\varphi\big(f(x_2, y_2)\big) - \varphi\big(f(x_1, y_1)\big)\big| \leqq K|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|$. Pro libovolnou neprázdnou podmnožinu $N \subseteq M$ pak platí

$$\sup\Big\{\big|\varphi\big(f(x_2, y_2)\big) - \varphi\big(f(x_1, y_1)\big)\big|;\ ([x_1, y_1], [x_2, y_2]) \in N \times N\Big\} \leqq \\ \leqq K \sup\{|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|;\ ([x_1, y_1], [x_2, y_2]) \in N \times N\}.$$

Avšak

$$\sup\bigl\{\bigl|\varphi\bigl(f(x_2,y_2)\bigr)-\varphi\bigl(f(x_1,y_1)\bigr)\bigr|;\ ([x_1,y_1],[x_2,y_2])\in N\times N\bigr\}=$$
$$=\sup\bigl\{\varphi\bigl(f(x,y)\bigr);\ [x,y]\in N\bigr\}-\inf\bigl\{\varphi\bigl(f(x,y)\bigr);\ [x,y]\in N\bigr\}$$

a podobně

$$\sup\{|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|;\ ([x_1,y_1],[x_2,y_2])\in N\times N\bigr\}=$$
$$=\sup\{f(x,y);\ [x,y]\in N\}-\inf\{f(x,y);\ [x,y]\in N\},$$

takže platí

$$\sup\bigl\{\varphi\bigl(f(x,y)\bigr);\ [x,y]\in N\bigr\}-\inf\bigl\{\varphi\bigl(f(x,y)\bigr);\ [x,y]\in N\bigr\}\leqq$$
$$\leqq K\bigl(\sup\{f(x,y);\ [x,y]\in N\}-\inf\{f(x,y);\ [x,y]\in N\}\bigr).$$

Nechť D je libovolné dělení obdélníku M. Z předchozí nerovnosti vyplývá, že $S(D,\varphi\circ f)-s(D,\varphi\circ f)\leqq K\bigl(S(D,f)-s(D,f)\bigr)$. Buď $\varepsilon>0$ libovolné. Protože je funkce f integrovatelná na M, podle lemmatu 1.9 existuje k číslu $\varepsilon/K>0$ dělení $\widehat{D}\in\mathscr{D}(M)$ tak, že $S(\widehat{D},f)-s(\widehat{D},f)<\varepsilon/K$. Pak $S(\widehat{D},\varphi\circ f)-s(\widehat{D},\varphi\circ f)<\varepsilon$. Funkce $\varphi\circ f$ je tedy podle téhož lemmatu integrovatelná na M.

Poznámka: Z důkazu je zřejmé, že tvrzení bude platit pro libovolnou funkci φ, která je na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ lipschitzovská[1] (existuje konstanta $K>0$ taková, že $|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqq K|t_2-t_1|$ pro libovolné $t_1,t_2\in\langle\alpha,\beta\rangle$). Např. funkce $\varphi(t)=|t|$ je lipschitzovská, protože $\bigl||t_2|-|t_1|\bigr|\leqq|t_2-t_1|$. Máme tedy další důkaz, že z integrovatelnosti funkce f plyne integrovatelnost funkce $|f|$.

13. Je-li funkce h integrovatelná na obdélníku N, je také funkce h^2 integrovatelná na N. To plyne ze cvičení 12 volbou $\varphi(t)=t^2$, $t\in\langle -k,k\rangle$, kde $k>0$ je taková konstanta, že $|h(x,y)|\leqq k$ na N.

   Nechť $R\supseteq M$ je obdélník. Protože funkce f,g jsou integrovatelné na M, tj. funkce $\chi_M f$, $\chi_M g$ jsou integrovatelné na R, budou na R integrovatelné podle předchozího také funkce $(\chi_M f+\chi_M g)^2$ a $(\chi_M f-\chi_M g)^2$. Avšak platí $\chi_M(fg)=\chi_M f\cdot\chi_M g=\bigl((\chi_M f+\chi_M g)^2-(\chi_M f-\chi_M g)^2\bigr)/4$, což dokazuje tvrzení.

14. $\Rightarrow$: Nechť množina M je měřitelná a $\varepsilon>0$. Položme $M_1=M_2=M$. Pak množiny M_1, M_2 mají požadované vlastnosti.

   $\Leftarrow$: Nechť R je obdélník obsahující množinu M a $\varepsilon>0$. Najděme k tomuto ε množiny M_1, M_2 splňující předpoklady. Položme $\widehat{M}_2=M_2\cap R$. Potom $M_1\subseteq M\subseteq\widehat{M}_2\subseteq M_2$ a $\mathrm{m}(\widehat{M}_2)\leqq\mathrm{m}(M_2)$. Zřejmě $\chi_{M_1}\leqq\chi_M\leqq\chi_{\widehat{M}_2}$ na R. Dále

[1] **Rudolf Otto Sigismund Lipschitz** (1832–1903) (čti lipšic) — německý matematik. Zabýval se diferenciálními rovnicemi, teorií čísel, vícerozměrnou geometrií a dalšími oblastmi. Pracoval rovněž v hydrodynamice a analytické mechanice.

$\iint\limits_R \chi_{\widehat{M}_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_R \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}(\widehat{M}_2) - \mathrm{m}(M_1) < \varepsilon$. Podle cvičení 8 je funkce χ_M integrovatelná na obdélníku R, a tedy množina M je měřitelná.

15. Postačitelnost plyne ze cvičení 14. Dokážeme nutnost.
Nechť R je obdélník a $M \subseteq R$ je měřitelná. Pak je funkce χ_M integrovatelná na R. Buď $\varepsilon > 0$. Podle lemmatu 1.9 existuje dělení D obdélníku R takové, že $S(D, \chi_M) - s(D, \chi_M) < \varepsilon$. Označme $N_1, \dots, N_k$ ty dílky dělení D, které jsou podmnožinami M, a $N_{k+1}, \dots, N_n$ ty dílky dělení D, které nejsou podmnožinami M, ale mají s M neprázdný průnik. Zřejmě platí $M_1 = N_1 \cup \dots \cup N_k \subseteq M \subseteq$ $\subseteq N_1 \cup \dots \cup N_n = M_2$. Z definice dolních a horních součtů vyplývá (srovnejte poznámku 1.33 a obrázek 1.9), že $s(D, \chi_M) = \mathrm{m}(N_1) + \dots + \mathrm{m}(N_k) = \mathrm{m}(M_1)$ a $S(D, \chi_M) = \mathrm{m}(N_1) + \dots + \mathrm{m}(N_n) = \mathrm{m}(M_2)$. Tedy obdélníky $N_1, \dots, N_n$ a číslo k mají požadované vlastnosti.

16. Je $\mathring{M} \subseteq \mathring{A} \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{M}$, tedy $h(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} \subseteq \overline{M} \setminus \mathring{M} = h(M)$. Množina M je měřitelná, tedy podle věty 1.40 je $\mathrm{m}(h(M)) = 0$ a podle věty 1.37 je rovněž $\mathrm{m}(h(A)) = 0$. Tudíž podle věty 1.35 je množina A měřitelná.

17. $\Rightarrow$: Předpokládejme, že $\mathrm{m}(M) = 0$. Nechť $K \supset M$ je obdélník. Protože platí $\iint\limits_K \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_K} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D obdélníku K tak, že $S(D, \chi_M) < \varepsilon$. Jsou-li R_i dílky dělení D, pro něž $R_i \cap M \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, k$, pak $S(D, \chi_M) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{m}(R_i)$ — viz poznámka 1.33.
$\Leftarrow$: Předpokládejme, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existují obdélníky $R_1, \dots, R_k$ takové, že $M \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} R_i$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{m}(R_i) < \varepsilon$. Označme $R = \bigcup\limits_{i=1}^{k} R_i$ a nechť $K \supset R$ je obdélník. Pak $\chi_M \leqq \chi_R = \max\limits_{i=1,\dots,k}\{\chi_{R_i}\} \leqq \sum\limits_{i=1}^{k} \chi_{R_i}$. Podle cvičení 4 platí $\overline{\iint\limits_K} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq$ $\leqq \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{\iint\limits_K} \chi_{R_i}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{m}(R_i) < \varepsilon$. Tedy platí $0 \leqq \underline{\iint\limits_K} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq$ $\leqq \overline{\iint\limits_K} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$, takže $\iint\limits_K \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, tj. množina M je měřitelná a $\mathrm{m}(M) = 0$.

18. Množina M je omezená v $\mathbb{R}^2$. Je-li $M = \emptyset$, tvrzení platí. Buď $M = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Označme R_j, $j = 1, \dots, n$, čtverec se středem x_j o straně $\sqrt{\varepsilon/(2n)}$. Pak $M \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} R_j$ a $\sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{m}(R_j) = n\,\frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Podle cvičení 17 je $\mathrm{m}(M) = 0$.

19. Množina M je omezená v $\mathbb{R}^2$, protože její prvky jsou členy konvergentní po-

sloupnosti. Označme $A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\sqrt{\varepsilon/8} > 0$ existuje n_0 tak, že $\varrho(A_n, A) < \sqrt{\varepsilon/8}$ pro každé $n > n_0$ (ϱ je eukleidovská metrika na $\mathbb{R}^2$). Nechť R_0 je čtverec se středem A o straně $2\sqrt{\varepsilon/8} = \sqrt{\varepsilon/2}$ a $R_1, \dots, R_{n_0}$ jsou shodné čtverce se středy $A_1, \dots, A_{n_0}$ o straně $\sqrt{\varepsilon/(4n_0)}$. Pak $M \subset \bigcup\limits_{i=0}^{n_0} R_i$ a $\sum\limits_{i=0}^{n_0} \mathrm{m}(R_i) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4n_0} n_0 = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$. Podle cvičení 17 je $\mathrm{m}(M) = 0$.

20. $\Rightarrow$: Předpokládejme, že $\mathrm{m}(M) = 0$ a připusťme, že $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$. Pak existuje obdélník $R \subset \overset{\circ}{M}$, $\mathrm{m}(R) > 0$. Podle věty 1.38 je $\mathrm{m}(M) \geqq \mathrm{m}(R) > 0$, což je spor.
$\Leftarrow$: Předpokládejme, že $\overset{\circ}{M} = \emptyset$. Pak $M \subseteq \overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup h(M) = h(M)$. Protože M je podle předpokladu měřitelná, je podle důsledku 1.41 $\mathrm{m}(h(M)) = 0$, takže podle věty 1.37 je M měřitelná a $\mathrm{m}(M) = 0$.
Předpoklad měřitelnosti M v postačující podmínce nelze vynechat. Např. množina $M = R \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, kde $R = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ je obdélník, má prázdný vnitřek, ale není měřitelná, protože $\iint\limits_R \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ neexistuje — viz příklad 1.6.

21. Lze předpokládat, že M je uzavřená, tj. $M = \overline{M}$. Pokud je totiž $M \neq \overline{M}$, tj. $h(M) \smallsetminus M \neq \emptyset$, položíme $f(x, y) = 1$ na $h(M) \smallsetminus M$. Pak $h(M) \smallsetminus M \subseteq h(M)$ a $\mathrm{m}(h(M)) = 0$, tedy podle věty 1.37 je $\mathrm{m}(h(M) \smallsetminus M) = 0$. Podle věty 1.50, částí b) a c), je f integrovatelná na $\overline{M}$ a $\iint\limits_{\overline{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
Nechť $R \supseteq M$ je libovolný obdélník. Připusťme, že platí rovnost $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_R}(\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje dělení D obdélníku R s dílky R_{ij}, $(i, j) \in I = \{(i, j) : i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n\}$, takové, že $S(D, \chi_M f) < \varepsilon\,\mathrm{m}(M)$. Označme $V_{ij} = \sup\{(\chi_M f)(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\}$, $M_{ij} = M \cap R_{ij}$, $(i, j) \in I$, $J = \{(i, j) \in I : M_{ij} \neq \emptyset\}$, $K = \{(i, j) \in I : \mathrm{m}(M_{ij}) > 0\}$. Protože $0 < \mathrm{m}(M) = \sum\limits_{(i,j)\in J} \mathrm{m}(M_{ij}) = \sum\limits_{(i,j)\in K} \mathrm{m}(M_{ij})$, je $K \neq \emptyset$. Platí $V_{ij} = 0$ pro $(i, j) \in I \smallsetminus J$, $V_{ij} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\}$ pro $(i, j) \in J$, $\mathrm{m}(M_{ij}) \leqq \mathrm{m}(R_{ij})$ pro $(i, j) \in I$. Pak $\varepsilon\,\mathrm{m}(M) > S(D, \chi_M f) = \sum\limits_{(i,j)\in I} V_{ij}\,\mathrm{m}(R_{ij}) = \sum\limits_{(i,j)\in J} V_{ij}\,\mathrm{m}(R_{ij}) \geqq \sum\limits_{(i,j)\in J} V_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij}) = \sum\limits_{(i,j)\in K} V_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij})$. Existuje $(i_0, j_0) \in K$ tak, že $V_{i_0 j_0} < \varepsilon$, jinak bychom dostali $\sum\limits_{(i,j)\in K} V_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij}) \geqq \varepsilon \sum\limits_{(i,j)\in K} \mathrm{m}(M_{ij}) = \varepsilon \sum\limits_{(i,j)\in J} \mathrm{m}(M_{ij}) = \varepsilon\,\mathrm{m}(M)$, což je spor.
Tedy platí $0 < f(x, y) < \varepsilon$ pro každé $[x, y] \in M_{i_0 j_0}$, množina $M_{i_0 j_0}$ je uzavřená a $\mathrm{m}(M_{i_0 j_0}) > 0$. Přitom lze předpokládat (přechodem ke zjemnění D), že $\mathrm{d}(M_{i_0 j_0}) < \delta$, kde $\delta > 0$ je libovolné předem dané číslo ($\mathrm{d}(A) = \sup\{\varrho(X, Y) : X, Y \in A\}$ je průměr množiny $A \subseteq \mathbb{R}^2$; ϱ je eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^2$). Konečně

$\iint\limits_{M_{i_0 j_0}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ (jinak by $\iint\limits_{M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$).

Nechť $\varepsilon_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Podle předchozího najdeme množinu $M_1 \subseteq M$ tak, že $M_1 = \overline{M}_1$, $\mathrm{m}(M_1) > 0$, $\mathrm{d}(M_1) < \varepsilon_1$ a $0 < f(x,y) < \varepsilon_1$ na M_1. Dále postupujeme indukcí. Jsou-li zkonstruovány množiny $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_i$, najdeme pomocí předchozího postupu množinu $M_{i+1} \subseteq M_i$ tak, že $M_{i+1} = \overline{M}_{i+1}$, $\mathrm{m}(M_{i+1}) > 0$, $\mathrm{d}(M_{i+1}) < \varepsilon_{i+1}$ a $0 < f(x,y) < \varepsilon_{i+1}$ na M_{i+1}. Sestrojili jsme neklesající (vzhledem k inkluzi) posloupnost uzavřených množin $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž $\mathrm{d}(M_n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Protože $(\mathbb{R}^2, \varrho)$ je úplný metrický prostor, je průnik této posloupnosti jednoprvkový, tj. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n = \{(x_0, y_0)\}$ — viz např. [6, věta 3.5 na str. 31]. Platí tudíž $0 < f(x_0, y_0) < \varepsilon_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což není možné, protože $\varepsilon_n \to 0$ pro $n \to \infty$.

22. Použijte výsledek cvičení 21 na funkci $f - g$.

23. Nechť nejprve M je obdélník. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\varepsilon c^2 > 0$ existuje dělení D obdélníku M s dílky M_{ij}, $(i,j) \in I = \{(i,j) : i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n\}$ tak, že $S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon c^2$. Označme $v_{ij} = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in M_{ij}\}$, $V_{ij} = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in M_{ij}\}$, $w_{ij} = \inf\{1/f(x,y) : (x,y) \in M_{ij}\}$, $W_{ij} = \sup\{1/f(x,y) : (x,y) \in M_{ij}\}$, $(i,j) \in I$. Platí $w_{ij} = 1/V_{ij}$, $W_{ij} = 1/v_{ij}$, $v_{ij} \geqq c$, $V_{ij} \geqq c$, $(i,j) \in I$. Pak $S(D,1/f) - s(D,1/f) = \sum\limits_{(i,j)\in I} (W_{ij} - w_{ij})\,\mathrm{m}(M_{ij}) = \sum\limits_{(i,j)\in I} (1/v_{ij} - 1/V_{ij})\,\mathrm{m}(M_{ij}) = \sum\limits_{(i,j)\in I} (V_{ij} - v_{ij})/(v_{ij}V_{ij})\,\mathrm{m}(M_{ij}) \leqq \sum\limits_{(i,j)\in I} (V_{ij} - v_{ij})/c^2\,\mathrm{m}(M_{ij}) = 1/c^2 \big(S(D,f) - s(D,f)\big) < (1/c^2)\,\varepsilon c^2 = \varepsilon$. Podle lemmatu 1.9 je funkce $1/f$ integrovatelná na M.
Jiný důkaz lze udělat pomocí cvičení 12 (zvolíme $\varphi(t) = 1/t$, $t \in \langle 1/k, 1/c\rangle$, kde $0 < c \leqq f(x,y) \leqq k$ na M).
Není-li M obdélník, zvolme obdélník $R \supset M$. Pak $R \setminus M$ je měřitelná podle věty 1.38, část d) a rozšíření funkce f na $R \setminus M$ dané předpisem $f(x,y) = c$ je na $R \setminus M$ integrovatelná funkce podle věty 1.47. Tedy podle věty 1.50, část c) je funkce f integrovatelná na R; přitom $f(x,y) \geqq c$ na R. Podle předchozí části je funkce $1/f$ integrovatelná na R. Protože M je měřitelná, je funkce $1/f$ podle věty 1.52 integrovatelná i na M.

24. Plyne ze cvičení 23 a věty 1.51.
Poznámka: Uvedený výsledek lze následovně zobecnit:
Nechť funkce f, g jsou integrovatelné na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Předpokládejme, že jejich podíl f/g je definovaný a ohraničený na M. Pak f/g je integrovatelná na M.
Důkaz lze provést s využitím nutné a postačující podmínky riemannovské integrovatelnosti, která se dokazuje v teorii Lebesgueova integrálu — viz [15, str. 447].

25. Označme $T(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Nechť $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ je dělení intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Délkou lomené čáry L s vrcholy $T(t_0), \dots, T(t_n)$ „vepsané“ křivce γ rozumíme číslo $\mathrm{m}_1(L) = \sum_{i=1}^{n} \varrho(T(t_{i-1}), T(t_i))$ (ϱ je eukleidovská metrika v rovině). Délku křivky γ definujeme vztahem $\mathrm{m}_1(\gamma) = \sup\{\mathrm{m}_1(L) : L$ je lomená čára „vepsaná“ $\gamma\}$. Protože φ, ψ jsou spojité na kompaktním intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, jsou podle Weierstrassovy věty ohraničené, a tudíž i graf G je omezená množina v $\mathbb{R}^2$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Označme $\delta = \min\bigl\{\varepsilon/(8\,\mathrm{m}_1(\gamma)), \sqrt{\varepsilon}/4\bigr\}$. Nechť K_0 je uzavřený kruh se středem $T(t_0)$, $t_0 = \alpha$, a poloměrem δ. Buď je $T(t) \in K_0$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, nebo existuje t_1, $t_0 < t_1 < \beta$, takové, že $\varrho(T(t_0), T(t_1)) = \delta$, $T(t) \in K_0$ pro $t_0 \leqq t \leqq t_1$ a není pravda, že $T(t) \in K_0$ pro všechna $t \in (t_1, \beta \rangle$.
Pokud nastane druhá možnost, označme K_1 uzavřený kruh se středem $T(t_1)$ a poloměrem δ. Buď je $T(t) \in K_1$ pro $t \in \langle t_1, \beta \rangle$, nebo existuje t_2, $t_1 < t_2 < \beta$, takové, že $\varrho(T(t_1), T(t_2)) = \delta$, $T(t) \in K_1$ pro $t_1 \leqq t \leqq t_2$ a není pravda, že $T(t) \in K_1$ pro všechna $t \in (t_2, \beta \rangle$. Dále pokračujeme indukcí.
Po konečném počtu kroků k musí nastat první možnost. Jinak bychom mohli najít lomenou čáru L vepsanou křivce γ délky větší než $\mathrm{m}_1(\gamma)$. Skutečně, pro lomenou čáru L s vrcholy $T(t_0), T(t_1), \dots, T(t_k), T(\beta)$ je $\mathrm{m}_1(L) = k\delta + \varrho(T(t_k), T(\beta)) \geqq$ $\geqq k\delta \to \infty$ pro $k \to \infty$. Pak $K_0 \cup \dots \cup K_k \supseteq G$, $k \in N$, a $k \leqq \mathrm{m}_1(\gamma)/\delta$.
Označme R_i čtverec se středem $T(t_i)$ o straně 2δ, $i = 0, \dots, k$. Platí $\mathrm{m}_2(R_0) + \dots +$ $+ \mathrm{m}_2(R_k) = (k+1)4\delta^2 \leqq 4\delta^2\bigl(\mathrm{m}_1(\gamma)/\delta\bigr) + 4\delta^2 = 4\delta\,\mathrm{m}_1(\gamma) + 4\delta^2 \leqq \varepsilon/2 + \varepsilon/4 < \varepsilon$. Podle cvičení 17 je $\mathrm{m}_2(G) = 0$.

26. Definujme $f(1/n) = 0$ pro liché $n \in \mathbb{N}$ a $f(1/n) = 1/n$ pro sudé $n \in \mathbb{N}$. Na intervalech $\langle 1/(n+1), 1/n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, dodefinujme f na lineární funkci. Konečně položme $f(0) = 0$. Snadno se ověří, že f je spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$. Označme $T_n = [0, f(1/n)]$, $n \in \mathbb{N}$, $T_0 = [0, f(0)]$. Nechť L_n je lomená čára s vrcholy $T_1, T_2, \dots, T_n, T_0$, $n \in \mathbb{N}$. Pak pro $k \in \mathbb{N}$ platí (ϱ je eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^2$) $\mathrm{m}_1(L_{2k+1}) = \sum_{i=1}^{2k} \varrho(T_i, T_{i+1}) + \varrho(T_{2k+1}, T_0) > 2\sum_{i=1}^{k} 1/(2i) = \sum_{i=1}^{k} 1/i \to \infty$ pro $k \to \infty$. Tedy pro graf G funkce f platí $\mathrm{m}_1(G) = +\infty$.

27. Označme $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Množina $E = M \cap \mathbb{Q}^2$ je spočetná, tedy její prvky lze uspořádat do posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dále pro $S \subseteq \mathbb{R}^2$ položme $\widehat{S} = \{s +$ $+ [2, 0] : s \in S\}$ ($\widehat{S}$ vznikne posunutím S o dvě doprava).
   a) Jednoprvkové množiny $A_n = \{[0, n]\}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné, protože funkce χ_{A_n} se liší od nulové funkce v jediném bodě (věta 1.53). Množina $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je zřejmě neomezená v $\mathbb{R}^2$.
   b) Množiny $B_n = \{e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné ze stejného důvodu jako v části a). Avšak množina $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ není měřitelná, protože funkce χ_B není podle příkladu 1.6 integrovatelná.

c) Protože množina B z části b) není měřitelná, není měřitelná ani množina $C = M \setminus B = \bigcap_{n=1}^{\infty} (M \setminus B_n)$. Přitom množiny $C_n = M \setminus B_n$, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné protože jsou rozdílem dvou měřitelných množin.

d) Množiny $D_n = B_n \cup \widehat{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné, protože jsou sjednocením dvou měřitelných množin (měřitelnost $\widehat{C}_n$ se zdůvodní obdobně jako v části c)). Ale ani množina $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = B \cup \widehat{M}$ ani množina $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \widehat{C}$ nejsou měřitelné. V prvním případě to plyne z toho, že podle věty 1.38, část d), by byla měřitelná i množina $D \cap M = B$, což je spor. V druhém případě se stejně jako v části c) ověří, že množina $\widehat{C}$ je rozdílem měřitelné množiny $\widehat{M}$ a neměřitelné množiny $\widehat{B}$.

28. Pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$ platí: $\max\{a, b\} = (a + b + |a - b|)/2$, $\min\{a, b\} = (a + b - |a - b|)/2$. Tvrzení plyne z věty 1.49.

29. Je-li f integrovatelná, jsou podle cvičení 28 integrovatelné i f^+ a f^-. Naopak, jsou-li integrovatelné f^+ a f^-, je integrovatelná i $f = f^+ - f^-$. Rovnost integrálů je pak zřejmá.

30. a) $\frac{1}{2}$, b) $2(e^4 + e^{-4} - 2)$, c) $2 - 2e^{-4}$, d) 1,
e) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$, f) $\frac{15}{2} - \ln 4$, g) $\frac{1}{3}$, h) $3\ln 3 - 2$,
i) $\frac{3}{2} - \ln 2$, j) $\frac{4}{3}$, k) $\frac{4}{3}$, l) $\frac{1}{2}$.

31. a) $\frac{105}{2}$, b) $\frac{\pi}{12}$, c) $\frac{8}{3}\sqrt{6}$ d) 0, e) 3, f) $e - \frac{4}{3}$.

32. a) $\frac{a^2b^2}{4}$, b) 0, c) 90.

33. a) $\frac{14}{3}$, b) $\frac{15\pi - 16}{150}$, c) $\frac{19}{6}$, d) $\frac{12}{5}$, e) $\frac{16}{3}$,
f) $\frac{\pi}{6}$, g) $\frac{1}{2}$, h) $\frac{3}{2}$, i) $\frac{\pi a^3}{3}$, j) $\frac{\pi}{2} a$,
k) $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, l) $\pi + 2$, m) 4, n) $\frac{a^2}{4}(\pi + 4)$.

34. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{33}{140}$, c) $2\ln 2 - \frac{3}{4}$, d) $\frac{3\pi}{2}$, e) 9,
f) $\frac{e^4 - e^3 - e + 1}{2}$, g) $\frac{\pi^2}{288}$, h) -2, i) $-\frac{11}{120}$, j) $\frac{1}{30}$,
k) $2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln^2 2 - \frac{9}{8}$, l) $\frac{9}{4}$, m) $\frac{a^2b^2}{8}$, n) $\frac{32}{3}\sqrt{2}$.

35. a) $\frac{11}{24}$, b) $\frac{9}{4}$, c) $\frac{4}{3}$, d) 2π, e) 0, f) $\frac{4\pi}{3} + 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

36. a) $\frac{(b^2-a^2)(d^2-c^2)}{4}$, b) $\frac{1}{36}$, c) $\frac{r^4}{8}$, d) $\frac{35}{48}$, e) $\frac{16}{15}$, f) $\pi + 2$.

37. a) $\int_a^b \bigl(\int_y^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\bigr)\,\mathrm{d}y$, b) $\int_{-4}^0 \bigl(\int_{-\sqrt{x+4}}^0 f(x,y)\,\mathrm{d}y\bigr)\,\mathrm{d}x$,

c) $\int_0^1 \bigl(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\bigr)\,\mathrm{d}y$,

d) $\int_1^{\mathrm{e}} \bigl(\int_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\bigr)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{e}}^{\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}-1}} \bigl(\int_0^{\mathrm{e}+\frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\bigr)\,\mathrm{d}x$,

e) $\int_0^1 \bigl(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\bigr)\,\mathrm{d}y$, f) $\int_1^{\mathrm{e}} \bigl(\int_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\bigr)\,\mathrm{d}x$,

g) $\int_0^1 \bigl(\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\bigr)\,\mathrm{d}y$, h) $\int_0^4 \bigl(\int_{y^2/4}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\bigr)\,\mathrm{d}y$,

i) $\int_0^1 \bigl(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\bigr)\,\mathrm{d}x$, j) $\int_0^2 \bigl(\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\bigr)\,\mathrm{d}y$,

k) $\int_0^1 \bigl(\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\bigr)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \bigl(\int_0^{(3-x)/2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\bigr)\,\mathrm{d}x$,

l) $\int_0^{\ln 3} \bigl(\int_{\mathrm{e}^x-1}^{2x/\ln 3} f(x,y)\,\mathrm{d}y\bigr)\,\mathrm{d}x$, m) $\int_0^3 \bigl(\int_{(x-1)^2}^{x+1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\bigr)\,\mathrm{d}x$,

n) $\int_0^3 \bigl(\int_x^{4-(x-2)^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\bigr)\,\mathrm{d}x$, o) $\int_1^2 \bigl(\int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\bigr)\,\mathrm{d}x$.

38. a) $(\mathrm{e}^2 - 1)^2$, b) 4, c) $\frac{128}{35}$, d) $\frac{9}{4} + \frac{18\sqrt{3}}{7}$,

e) $\frac{16}{15}$, f) $\frac{9}{2}$, g) $\sqrt{3} + 2 - \frac{5\pi}{12}$, h) 6.

39. a) 0, b) 40π, c) $-\frac{153}{320}$, d) 0,

e) $\frac{2}{3}ab^2$, f) $\frac{11}{30}a^5$, g) $\frac{4}{3}a^3$, h) $4(3-\sqrt{3})$,

i) $\frac{1}{16}$, j) $\frac{3}{2}$, k) $\frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}$, l) $(\mathrm{e}+1)[\ln(\mathrm{e}+1) - 1] - \frac{1}{2}$.

40. a) $\frac{a^3}{6}$, b) e, c) 2, d) $\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}$, e) $\frac{3-\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)}$, f) $\frac{(a-1)^2}{2}$.

41. a) $\frac{49}{6}$, b) $\frac{17}{6}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{8}{3}$, e) $\frac{17}{2}$, f) $\frac{15}{4}$.

42. a) $\frac{14}{3}$, b) $\frac{652}{15}$, c) $\ln 16 - \frac{1}{16}$, d) 84,

e) $\frac{10}{3}$, f) $\frac{13}{3}$, g) $\mathrm{e}^{\mathrm{e}}(\mathrm{e}-1) + \frac{5-2\mathrm{e}^3}{6}$.

43. a) $\int_0^{\pi}\left(\int_0^{y^2} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \pi$,

$\int_0^{\pi^2}\left(\int_{\sqrt{x}}^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ — vnitřní integrál nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí,

b) $\int_0^{1/2}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-y^2\sin^2 x}\right)\mathrm{d}y = \left|\operatorname{tg} x = t\right| = \int_0^{1/2}\left(\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2(1-y^2)+1}\right)\mathrm{d}y =$

$= \frac{\pi}{2}\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi^2}{12}$,

$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix}\text{parciální}\\ \text{zlomky}\end{matrix}\right| = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\sin x}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\,\mathrm{d}x =$

$= \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right| = \int_0^1 \frac{1}{2t}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix}\text{per}\\ \text{partes}\end{matrix}\right| = \int_0^1 \frac{t^2-1}{t^4+t^2+1}\ln t\,\mathrm{d}t$,

c) $\int_2^3\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}y}{1+x^2\operatorname{tg}^2 y}\right)\mathrm{d}x = \left|\operatorname{tg} y = t\right| = \int_2^3\left(\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\right)\mathrm{d}x =$

$= \left|\begin{matrix}\text{parciální}\\ \text{zlomky}\end{matrix}\right| = \frac{\pi}{2}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{3}$,

$\int_0^{\pi/2}\left(\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\operatorname{tg}^2 y}\right)\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\operatorname{cotg} y(\operatorname{arctg} 3\operatorname{tg} y - \operatorname{arctg} 2\operatorname{tg} y)\,\mathrm{d}y =$

$= \left|\operatorname{tg} y = t\right| = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 3t - \operatorname{arctg} 2t}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$.

Kapitola 2

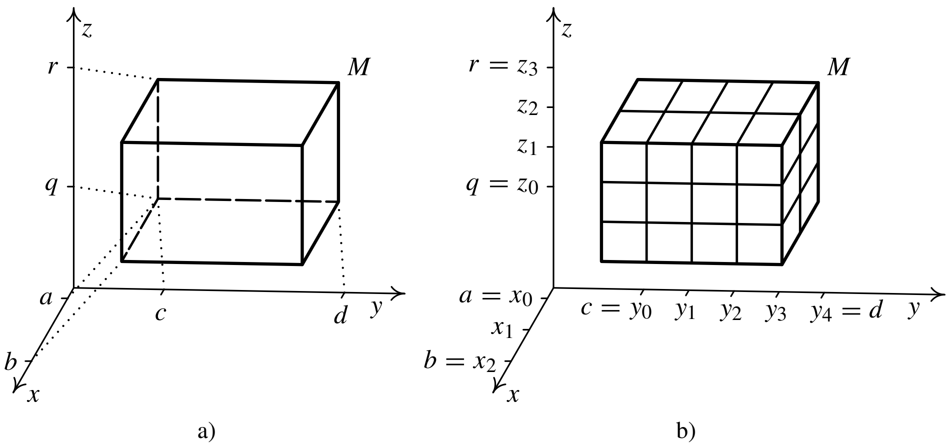
Integrály v prostorech obecné dimenze

V kapitole 1 byl zaveden integrál funkcí dvou proměnných. Naprosto obdobně je možné vybudovat integrál funkcí libovolného konečného počtu proměnných. Nejprve se definuje integrál na n-rozměrných intervalech, pomocí něho se zavedou měřitelné množiny a nakonec se definuje integrál na měřitelných množinách. Veškeré definice i výsledky předchozí kapitoly se snadno přenesou na případ obecného n, po technické stránce jsou důkazy všech tvrzení obdobné, jen zápisy jsou komplikovanější. Proto většinou jejich formulace ani důkazy nebudeme opakovat.

V následujících oddílech si všimneme nejprve případu $n = 3$. Ten je důležitý v aplikacích a navíc si při něm dokážeme ještě představit integrační obory. Potom se zmíníme o případu obecného n a nakonec krátce o případu $n = 1$, který bude zobecněním konstrukce jednorozměrného integrálu na intervalu, známé ze základního kurzu matematické analýzy.

2.1. Trojný integrál

Při definici trojného integrálu postupujeme zcela analogicky jako u integrálu dvojného. Nejprve definujeme trojný integrál funkce f ohraničené na nedegenerovaném trojrozměrném uzavřeném omezeném intervalu $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \times \langle q, r\rangle$. Takový interval budeme stručně nazývat *kvádrem*. Pro dělení D kvádru M používáme označení $D = D_x \times D_y \times D_z$, přičemž $D_x\colon a = x_0 < x_1 < < \cdots < x_m = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, $D_y\colon c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ je dělení intervalu $\langle c, d\rangle$ a $D_z\colon q = z_0 < z_1 < \cdots < z_p = r$ je dělení intervalu



Obr. 2.1: Trojrozměrný interval M a jeho dělení

$\langle q, r\rangle$. Roviny $x = x_i$, $y = y_j$, $z = z_k$ $(i = 1, \dots, m-1;\ j = 1, \dots, n-1;\ k = 1, \dots, p-1)$ dělí kvádr M na menší kvádry zvané *dílky*, které se značí M_{ijk} (viz obr. 2.1); přitom $M_{ijk} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle \times \langle z_{k-1}, z_k\rangle$. *Horní* a *dolní součty* pro danou funkci f jsou nyní tvaru

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} V_{ijk}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}),$$
$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} v_{ijk}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}),$$

kde

$$V_{ijk} = \sup\{f(x, y, z) : [x, y, z] \in M_{ijk}\},$$
$$v_{ijk} = \inf\{f(x, y, z) : [x, y, z] \in M_{ijk}\}.$$

Označíme-li $\mathrm{m}(M_{ijk}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$, pak lze psát

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} V_{ijk}\,\mathrm{m}(M_{ijk}),$$
$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} v_{ijk}\,\mathrm{m}(M_{ijk}),$$

přičemž $\mathrm{m}(M_{ijk})$ budeme nazývat *mírou* (*objemem*) kvádru M_{ijk}. *Dolní* a *horní integrál* funkce f přes kvádr M definujeme vztahy

$$\underline{\iiint_M} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sup\{s(D, f)\}$$

a

$$\overline{\iiint_M} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \inf\{S(D, f)\}.$$

Jejich případnou společnou hodnotu nazýváme *trojný integrál* a značíme

$$\iiint_M f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Všechny vlastnosti uvedené pro dvojný integrál na obdélníku platí analogicky i pro trojný integrál na kvádru. Vzorce Fubiniovy věty pro trojný integrál na kvádru $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle q, r\rangle$ mají pro různá pořadí proměnných integrace tvar

$$\begin{aligned}
\iiint_M f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle} \left(\overline{\int_q^r} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iint_{\langle a,b\rangle\times\langle q,r\rangle} \left(\overline{\int_c^d} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z = \\
&= \iint_{\langle c,d\rangle\times\langle q,r\rangle} \left(\overline{\int_a^b} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&= \iint_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle} \left(\underline{\int_q^r} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iint_{\langle a,b\rangle\times\langle q,r\rangle} \left(\underline{\int_c^d} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z = \\
&= \iint_{\langle c,d\rangle\times\langle q,r\rangle} \left(\underline{\int_a^b} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

a také (při jiném „sdružení“ integračních proměnných)

$$\iiint_M f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\overline{\iint}_{\langle c,d\rangle\times\langle q,r\rangle} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_c^d \Bigg(\overline{\iint\limits_{\langle a,b\rangle \times \langle q,r\rangle}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \Bigg)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_q^r \Bigg(\overline{\iint\limits_{\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Bigg)\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_a^b \Bigg(\underline{\iint}\limits_{\langle c,d\rangle \times \langle q,r\rangle} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \Bigg)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_c^d \Bigg(\underline{\iint}\limits_{\langle a,b\rangle \times \langle q,r\rangle} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \Bigg)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_q^r \Bigg(\underline{\iint}\limits_{\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Bigg)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Zejména pro funkci f spojitou na kvádru $M = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle q,r\rangle$ platí

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_a^b \left\{ \int_c^d \left(\int_q^r f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b \left\{ \int_q^r \left(\int_c^d f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}x = \\
&= \int_c^d \left\{ \int_a^b \left(\int_q^r f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y = \\
&= \int_c^d \left\{ \int_q^r \left(\int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}y = \\
&= \int_q^r \left\{ \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}z = \\
&= \int_q^r \left\{ \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Trojný integrál $\iiint\limits_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ se někdy označuje jako *integrál trojrozměrný*, zatímco integrály

$$
\int_a^b \left\{ \int_c^d \left(\int_q^r f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x, \quad \int_a^b \left\{ \int_q^r \left(\int_c^d f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}x,
$$

$$
\int_c^d \left\{ \int_a^b \left(\int_q^r f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y, \quad \int_c^d \left\{ \int_q^r \left(\int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}y
$$

a rovněž integrály

$$\int_q^r \left\{ \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y, z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}z, \qquad \int_q^r \left\{ \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}z$$

jako *integrály trojnásobné*.

Poznámka 2.1. K označení trojnásobných integrálů se používá rovněž zápisů

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{d}y \int_q^r f(x, y, z)\,\mathrm{d}z, \qquad \int_a^b \mathrm{d}x \int_r^q \mathrm{d}z \int_c^d f(x, y, z)\,\mathrm{d}y$$

a čtyř dalších analogických zápisů pro zbývající permutace proměnných x, y, z.

Příklad 2.2. Vypočtěte trojný integrál $I = \iiint\limits_M (x + 2y - 3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde integrační obor M je kvádr $\langle 1, 3\rangle \times \langle -1, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$.

Řešení. Integrand je funkce spojitá na M (dokonce na $\mathbb{R}^3$). Podle Fubiniovy věty platí

$$I = \iiint\limits_M (x + 2y - 3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^3 \left\{ \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 (x + 2y - 3z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Pro přehlednost vypočteme postupně jednotlivé jednoduché integrály samostatně.

$$\int_0^2 (x + 2y - 3z)\,\mathrm{d}z = \left[xz + 2yz - \frac{3}{2} z^2 \right]_0^2 = 2x + 4y - 6.$$

Dále

$$\int_{-1}^1 (2x + 4y - 6)\,\mathrm{d}y = \left[2xy + 2y^2 - 6y \right]_{-1}^1 =$$
$$= (2x + 2 - 6) - (-2x + 2 + 6) = 4x - 12.$$

Celkově dostaneme

$$I = \int_1^3 (4x - 12)\,\mathrm{d}x = \left[2x^2 - 12x \right]_1^3 = (18 - 36) - (2 - 12) = -8.$$

Zvolili jsme pořadí integrace nejprve podle z, pak podle y a nakonec podle x. Jakékoliv jiné pořadí by dalo díky Fubiniově větě stejný výsledek a výpočet by byl přibližně stejně obtížný. ▲

Také charakteristická funkce množiny $M \subseteq \mathbb{R}^3$ a její měřitelnost se definují analogicky jako v $\mathbb{R}^2$. Vzorec pro (Jordanovu) míru omezené množiny $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je tvaru

$$\mathrm{m}(M) = \iiint\limits_R \chi_M(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde R je takový kvádr, že $M \subseteq R$ a

$$\chi_M(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x, y, z] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y, z] \notin M \end{cases}$$

je charakteristická funkce množiny M. Někdy, abychom odlišili míru v $\mathbb{R}^3$ od měr v prostorech jiných dimenzí, píšeme $\mathrm{m}_3(M)$ místo $\mathrm{m}(M)$. Míra v $\mathbb{R}^3$ má stejné vlastnosti jako v $\mathbb{R}^2$. Je-li $z = f(x, y)$ spojitá funkce na kompaktní množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$, pak míra grafu této funkce v $\mathbb{R}^3$ je rovna 0. Analogické tvrzení platí pro grafy funkcí $y = f(x, z)$, $x = f(y, z)$ spojitých na kompaktních množinách.

Trojný integrál funkce f ohraničené na měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^3$ definujeme rovností

$$\iiint\limits_M f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_R (\chi_M f)(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $R \supseteq M$ je libovolný kvádr a funkce $\chi_M f$ je dána vztahem

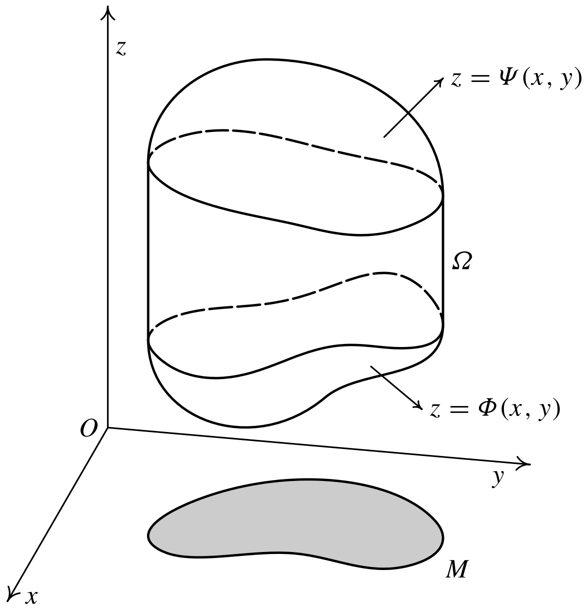
$$(\chi_M f)(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{pro každé } [x, y, z] \in M, \\ 0 & \text{pro každé } [x, y, z] \notin M. \end{cases}$$

Trojný integrál má stejné vlastnosti jako integrál dvojný. Elementární množina vzhledem k rovině xy je definována takto:

Definice 2.3. Buď M elementární množina v $\mathbb{R}^2$ (vzhledem k ose x nebo vzhledem k ose y) a nechť $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ jsou spojité funkce na M takové, že $\Phi(x, y) \leqq \Psi(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$. Množinu

$$\Omega = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M, \Phi(x, y) \leqq z \leqq \Psi(x, y)\right\}$$

nazýváme *elementární množinou vzhledem k rovině xy* v $\mathbb{R}^3$ (viz obr. 2.2).
Analogicky definujeme *elementární množinu vzhledem k rovině xz*, resp. *vzhledem k rovině yz* v $\mathbb{R}^3$.
Elementární množinou v $\mathbb{R}^3$ rozumíme elementární množinu vzhledem k některé z rovin xy, resp. xz, resp. yz.



Obr. 2.2: Elementární množina Ω v trojrozměrném prostoru

Podobně jako v $\mathbb{R}^2$ platí, že elementární množina v $\mathbb{R}^3$ je měřitelná a že funkce spojitá na elementární množině v $\mathbb{R}^3$ je integrovatelná. Analogicky jako v $\mathbb{R}^2$ platí věta:

Věta 2.4. *Buď Ω elementární množina v $\mathbb{R}^3$ vzhledem k rovině xy, tj. $\Omega = \big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M, \Phi(x, y) \leqq z \leqq \Psi(x, y)\big\}$, kde Φ, Ψ jsou funkce spojité na M takové, že $\Phi(x, y) \leqq \Psi(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$ a M je elementární množina v $\mathbb{R}^2$. Je-li funkce f spojitá na Ω, pak*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{M} \left(\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.1}$$

Předpokládáme-li např., že M je elementární množina vzhledem k ose x, tj. $M = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b, \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\big\}$, přičemž φ, ψ jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$, takové, že $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, pak

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Poznámka 2.5.

a) Analogicky platí další dvě tvrzení, ve kterých vzorec (2.1) nabývá tvaru

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\widetilde{M}} \left(\int_{\widetilde{\Phi}(x,z)}^{\widetilde{\Psi}(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\widehat{M}} \left(\int_{\widehat{\Phi}(y,z)}^{\widehat{\Psi}(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

b) Záměnou pořadí proměnných v (2.2) dostáváme dalších pět vzorců:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\Phi_1(x,z)}^{\Psi_1(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}x,$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \left\{ \int_{\varphi_2(y)}^{\psi_2(y)} \left(\int_{\Phi_2(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y,$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \left\{ \int_{\varphi_3(y)}^{\psi_3(y)} \left(\int_{\Phi_3(y,z)}^{\Psi_3(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}y,$$

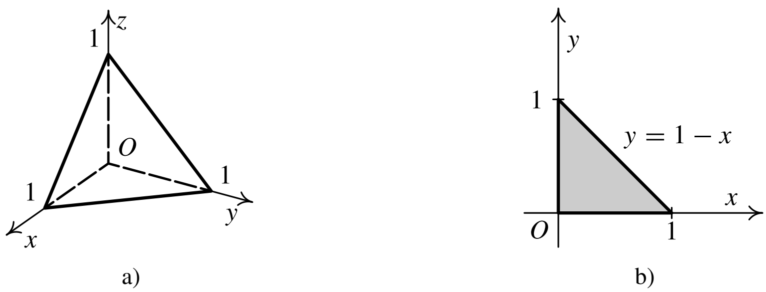
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_q^r \left\{ \int_{\varphi_4(z)}^{\psi_4(z)} \left(\int_{\Phi_4(x,z)}^{\Psi_4(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}z,$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_q^r \left\{ \int_{\varphi_5(z)}^{\psi_5(z)} \left(\int_{\Phi_5(y,z)}^{\Psi_5(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}z.$$

c) Integrál $\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ se nazývá *trojný integrál*, integrály na pravé straně rovnosti (2.2) a na pravých stranách posledních pěti rovností se nazývají *trojnásobné integrály*.

d) Tvrzení první části věty 2.4 a tvrzení části a) poznámky 2.5 zůstane v platnosti, i když bude funkce f integrovatelná (tj. ne nutně spojitá) na množině Ω. Ve vnitřních integrálech je však třeba doplnit znaky pro horní resp. dolní jednoduchý integrál.

Příklad 2.6. Vypočtěte $\displaystyle\iiint_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je množina omezená plochami $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$.



Obr. 2.3

Řešení. Všechny čtyři plochy uvedené v zadání jsou roviny, přičemž první tři jsou souřadnicové roviny. Integrační obor je čtyřstěn, který je znázorněn na obr. 2.3 a). Jeho průmět do roviny xy je trojúhelník z obr. 2.3 b).

Zapíšeme-li Ω jako elementární množinu vzhledem k rovině xy, máme

$$\Omega: \quad \begin{aligned} &0 \leqq x \leqq 1, \\ &0 \leqq y \leqq 1 - x, \\ &0 \leqq z \leqq 1 - x - y. \end{aligned}$$

Integrovaná funkce je spojitá na Ω (dokonce na $\mathbb{R}^3$). Užitím vzorce (2.2) dostáváme

$$\iiint_\Omega x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} x^2 \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[x^2 z \right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (x^2 - x^3 - x^2 y) \,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left[x^2 y - x^3 y - \frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 - x^3 + x^4 - \frac{1}{2} x^2 (1-x)^2 \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4 - \frac{1}{2} x^4 + x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^4 - x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6 - 15 + 10}{60} = \frac{1}{60}.$$

▲

2.2. Další příklady na výpočet trojného integrálu Fubiniovou větou

Příklad 2.7. Vypočtěte $I = \iiint\limits_V (x - y + 2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina V je dána nerovnostmi:

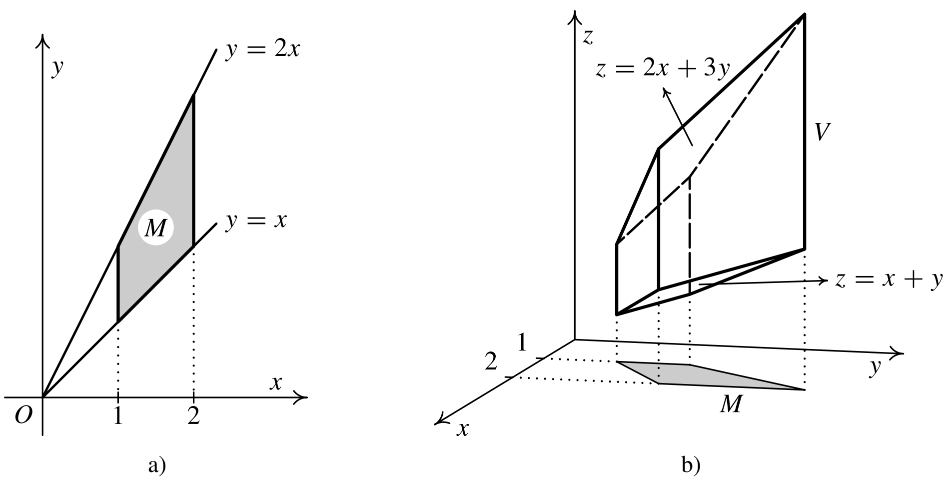
$$V: \quad \begin{aligned} 1 &\leqq x \leqq 2, \\ x &\leqq y \leqq 2x, \\ x + y &\leqq z \leqq 2x + 3y. \end{aligned}$$

Řešení. Integračním oborem je rovnoběžnostěn znázorněný na obr. 2.4 a integrand je funkce, která je na něm spojitá. Podle Fubiniovy věty bude:

$$I = \iiint\limits_V (x - y + 2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^2 \left\{ \int_x^{2x} \left(\int_{x+y}^{2x+3y} (x - y + 2z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Vypočteme postupně jednotlivé integrály:

$$\begin{aligned} \int_{x+y}^{2x+3y} (x - y + 2z)\,\mathrm{d}z &= \left[(x - y)z + z^2\right]_{x+y}^{2x+3y} = \\ &= \left((x - y)(2x + 3y) + (2x + 3y)^2\right) - \left((x - y)(x + y) + (x + y)^2\right) = \\ &= 4x^2 + 11xy + 6y^2, \end{aligned}$$



Obr. 2.4

$$\int_x^{2x} (4x^2 + 11xy + 6y^2)\,\mathrm{d}y = \left[4x^2 y + \frac{11}{2}\,xy^2 + 2y^3\right]_x^{2x} =$$
$$= \left(4x^2 \cdot 2x + \frac{11}{2}\,x(2x)^2 + 2(2x)^3\right) - \left(4x^2 \cdot x + \frac{11}{2}\,x \cdot x^2 + 2x^3\right) =$$
$$= \frac{69}{2}\,x^3,$$

takže celkový výsledek bude

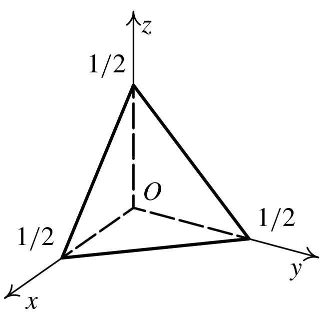
$$I = \int_1^2 \frac{69}{2}\,x^3\,\mathrm{d}x = \frac{69}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{69}{8}\,(16-1) = \frac{1035}{8}\,.$$

▲

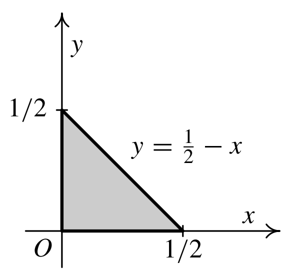
Příklad 2.8. Vypočtěte $I = \iiint\limits_M \frac{1}{1-x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina M je omezena plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1/2$.

Řešení. Integračním oborem je čtyřstěn, který je znázorněn na obr. 2.5 a). Jeho průmět do roviny xy je trojúhelník z obr. 2.5 b). Množinu M, která je elementární vzhledem k rovině xy, popíšeme následovně:

$$M\colon\ \begin{aligned} &0 \leqq x \leqq 1/2,\\ &0 \leqq y \leqq 1/2 - x,\\ &0 \leqq z \leqq 1/2 - x - y. \end{aligned}$$



a)



b)

Obr. 2.5

Integrand $1/(1-x-y)$ je funkce spojitá na množině M, neboť $1-x-y \geqq 1/2$ pro každé $[x, y, z] \in M$. Podle Fubiniovy věty platí:

$$I = \iiint\limits_V \frac{1}{1-x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^{1/2} \left\{ \int_0^{1/2-x} \left(\int_0^{1/2-x-y} \frac{1}{1-x-y}\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Postupně vypočítáme:

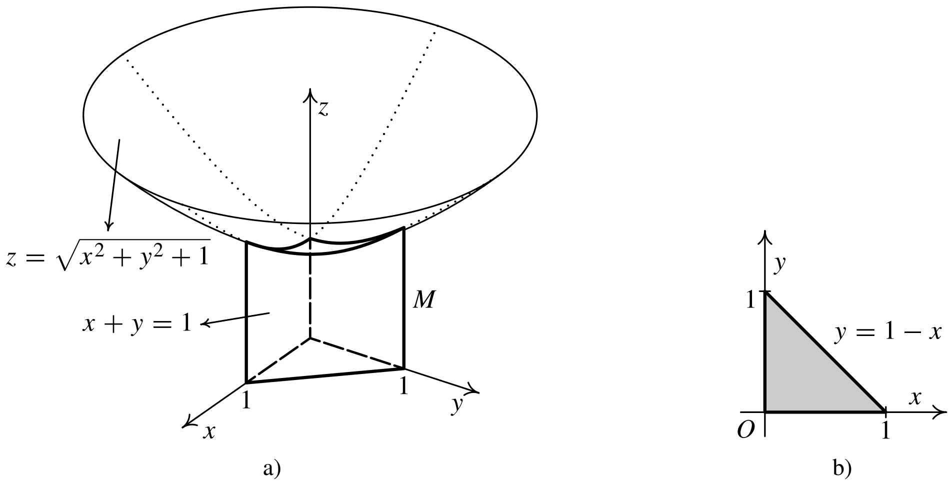
$$\int_0^{1/2-x-y} \frac{1}{1-x-y}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{1-x-y}\big[z\big]_0^{1/2-x-y} = \frac{1/2-x-y}{1-x-y} =$$
$$= \frac{1-x-y-1/2}{1-x-y} = 1 + \frac{1}{2(x+y-1)},$$

$$\int_0^{1/2-x} \left(1 + \frac{1}{2(x+y-1)}\right) \mathrm{d}y = \left[y + \frac{1}{2}\ln|x+y-1|\right]_0^{1/2-x} =$$
$$= \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}\ln\left|x + \frac{1}{2} - x - 1\right| - \frac{1}{2}\ln|x-1| =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - x - \frac{1}{2}\ln(1-x).$$

Při úpravě jsme využili toho, že pro $0 \leqq x \leqq 1/2$ je $x - 1 < 0$, takže $|x-1| = 1 - x$. Celkově tedy dostaneme s použitím metody per partes (všimněte si drobného triku, když místo očekávaného $v = x$ zvolíme $v = x - 1$, čímž se následující integrál $\int u'v\,\mathrm{d}x$ značně zjednoduší):

$$I = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - x - \frac{1}{2}\ln(1-x)\right) \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - x\right) \mathrm{d}x -$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \ln(1-x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(1-x) & u' = \frac{1}{x-1} \\ v' = 1 & v = x - 1 \end{array} \right| =$$
$$= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right)x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} - \frac{1}{2}\big[(x-1)\ln(1-x)\big]_0^{1/2} + \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{4}(1 - \ln 2) - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\big[x\big]_0^{1/2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\ln 2.$$ ▲

Příklad 2.9. Vypočtěte $\iiint\limits_M 2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina M je část prvního oktantu $x, y, z \geqq 0$ omezená plochami $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $x + y = 1$.



Obr. 2.6

Řešení. První plochou je dvojdílný rotační hyperboloid s osou rotace v ose z. Druhou plochou je rovina, která je rovnoběžná s osou z. Z hyperboloidu nás tedy bude zajímat jen jeho horní část ležící v prvním oktantu. Integrační obor M je znázorněn na obr. 2.6 a). Jeho průmětem do roviny xy je trojúhelník z obr. 2.6 b). Integrační obor je tedy elementární množinou vzhledem k rovině xy. Z rovnice hyperboloidu určíme, že $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Množinu M popíšeme následovně:

$$M\colon \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1, \\ 0 \leqq y \leqq 1 - x, \\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{x^2 + y^2 + 1}. \end{array}$$

Podle Fubiniovy věty bude:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_M 2z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2+1}} 2z \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[z^2 \right]_0^{\sqrt{x^2+y^2+1}} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (x^2 + y^2 + 1) \, \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left(x^2(1 - x) + \frac{1}{3}(1 - x)^3 + 1 - x \right) \mathrm{d}x =
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + \frac{4}{3}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}x\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

▲

Poznámka 2.10. Podobně jako u dvojného integrálu (viz poznámka 1.64), v případě, že integrační obor je trojrozměrný interval $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle q, r\rangle$ a integrand má tvar součinu $g(x)h(y)k(z)$, kde g je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, h je funkce spojitá na intervalu $\langle c, d\rangle$ a k je funkce spojitá na intervalu $\langle q, r\rangle$, lze výpočet podle Fubiniovy věty zjednodušit a výrazně urychlit:

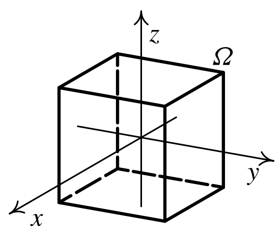
$$\begin{aligned}\iiint\limits_J g(x)h(y)k(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_a^b \left\{\int_c^d \left(\int_q^r g(x)h(y)k(z)\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right\} \mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b \left\{\int_c^d g(x)h(y)\left(\int_q^r k(z)\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right\} \mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b \left\{g(x)\cdot\left(\int_q^r k(z)\,\mathrm{d}z\right)\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\right\} \mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y \cdot \int_q^r k(z)\,\mathrm{d}z. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Integrály $\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y$ a $\int_q^r k(z)\,\mathrm{d}z$ jsou totiž konstanty, které lze z integrálů vytknout.

Příklad 2.11. Vypočtěte integrál $\iiint\limits_{\Omega} (1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina Ω je omezena plochami $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, $z = 1$, $z = -1$.

Řešení. Integrační obor je krychle omezená šesti rovinami, kolmými k souřadnicovým osám, která je znázorněná na obr. 2.7. Jde tedy o trojrozměrný interval $\langle -1, 1\rangle^3$, tj.

$$\Omega:\ \begin{aligned} -1 &\leqq x \leqq 1,\\ -1 &\leqq y \leqq 1,\\ -1 &\leqq z \leqq 1.\end{aligned}$$



Obr. 2.7

Vzhledem ke tvaru integrandu, který je na Ω spojitý, můžeme při použití Fubiniovy věty výpočet zjednodušit pomocí vzorce (2.3) (označíme $g(x) = 1 - x^2$, $h(y) = \sqrt{1 - y^2}$ a $k(z) = 1$). Vyjde (na druhý integrál použijeme substituční metodu):

$$\iiint_{\Omega} (1 - x^2)\sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{d}y \cdot \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z =$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = \sin u \\ \mathrm{d}y = \cos u\,\mathrm{d}u \\ -1 \rightsquigarrow -\frac{\pi}{2},\ \ 1 \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

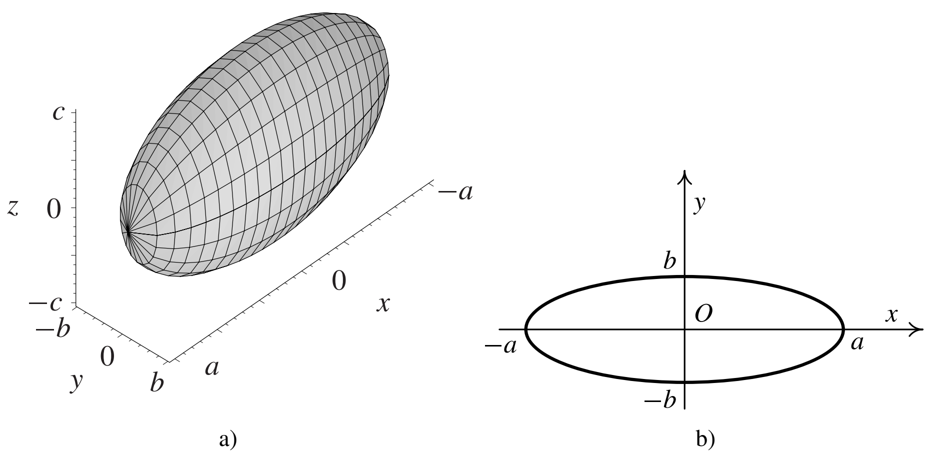
$$= \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 u} \cdot \cos u\,\mathrm{d}u \cdot \big[z\big]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2u)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{4}{3}\left[u + \frac{1}{2}\sin 2u\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3}\,\pi.$$

Při úpravách jsme využili, že $\sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$, protože $\cos u \geqq 0$ pro každé $u \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. ▲

Příklad 2.12. Vypočtěte $\displaystyle\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1$, $a, b, c > 0$.



Obr. 2.8

Řešení. Integrační obor Ω je tvořen obecným elipsoidem (včetně vnitřku), jehož osy jsou umístěny v souřadnicových osách. Je znázorněn na obr. 2.8 a). Jeho průmětem do roviny xy je elipsa (včetně vnitřku) z obr. 2.8 b) daná nerovností $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqq 1$, kterou dostaneme jako průsečnici daného elipsoidu a roviny o rovnici $z = 0$. Jde tedy o elementární množinu vzhledem k rovině xy, kterou lze popsat následovně:

$$\Omega: \qquad \begin{aligned} -a &\leqq x \leqq a, \\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} &\leqq y \leqq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \\ -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} &\leqq z \leqq c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

Integrand je roven konstantě jedna, takže integrál vyjadřuje objem $\mathrm{m}_3(\Omega)$ množiny Ω, tj. obecného elipsoidu. Podle Fubiniovy věty dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_3(\Omega) &= \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-a}^{a}\left\{\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-a}^{a}\left\{\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\Big[z\Big]_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-a}^{a}\left\{\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Nyní určíme samostatně vnitřní integrál. Při výpočtu rozlišíme dva případy. Pro pevné x, kde $-a < x < a$, je $1 - x^2/a^2 > 0$. Užitím substituce tedy vyjde:

$$\begin{aligned} &\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{l} y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\sin t \\ \mathrm{d}y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\cos t\,\mathrm{d}t \\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \rightsquigarrow -\frac{\pi}{2},\ b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\ &= 2c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2 t}\cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \\ &= 2bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \end{aligned}$$

$$= 2bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Přitom pro $t \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ je $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$.
Pro $x = \pm a$ je $1 - x^2/a^2 = 0$, takže v tomto případě má vnitřní integrál tvar

$$\int_0^0 2c\sqrt{-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Tedy pro libovolné x, kde $-a \leqq x \leqq a$, platí:

$$\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Celkově tudíž dostaneme:

$$\mathrm{m}_3(\Omega) = \int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \pi bc\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Ve speciálním případě $a = b = c = r$ dostáváme známý vzorec pro objem koule.

Předchozí výpočet byl poměrně komplikovaný. V kapitole 3 si ukážeme, jak lze vypočítat objem obecného elipsoidu podstatně snáze a rychleji (příklad 3.27).

▲

2.3. *n*-rozměrný integrál

Zcela analogicky, jako tomu bylo u dvojných a trojných integrálů, lze definovat integrály přes množiny v prostorech libovolné dimenze n, kde $n \geqq 2$, a vyšetřovat jejich vlastnosti. V této souvislosti mluvíme o *n-rozměrných integrálech*. K jejich označení používáme zápisu

$$\int\cdots\int_M f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

přičemž f je funkce integrovatelná (integrace schopná) na měřitelné množině M v $\mathbb{R}^n$. Při označení $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$, lze n-rozměrný integrál psát rovněž ve tvaru

$$\int\limits_M \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\cdots\,\mathrm{d}x_n \quad \text{nebo} \quad \int\limits_M \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Míru měřitelné množiny M v prostoru $\mathbb{R}^n$ značíme $\mathrm{m}(M)$ nebo $\mathrm{m}_n(M)$. Je-li M speciálně n-rozměrný uzavřený omezený nedegenerovaný interval v $\mathbb{R}^n$, značí symboly

$$\underline{\int\limits_M \cdots \int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\cdots\,\mathrm{d}x_n,$$

$$\overline{\int\limits_M \cdots \int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\cdots\,\mathrm{d}x_n$$

dolní resp. *horní integrál* ohraničené funkce f na intervalu M. Fubiniovu větu lze zformulovat například následujícím způsobem:

Věta 2.13 (Fubini). *Je-li funkce f integrace schopna na n-rozměrném intervalu $M = M_1 \times M_2$, kde M_1 je uzavřený omezený nedegenerovaný interval v $\mathbb{R}^m$, přičemž $m < n$, a M_2 je uzavřený omezený nedegenerovaný interval v $\mathbb{R}^{n-m}$, pak obě funkce*

$$\underline{\int\limits_{M_2} \cdots \int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_{m+1}\,\mathrm{d}x_{m+2}\,\cdots\,\mathrm{d}x_n,$$

$$\overline{\int\limits_{M_2} \cdots \int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_{m+1}\,\mathrm{d}x_{m+2}\,\cdots\,\mathrm{d}x_n$$

jsou integrovatelné na M_1 a platí

$$\begin{aligned}
&\int\limits_M \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\cdots\,\mathrm{d}x_n = \\
&= \int\limits_{M_1} \cdots \int \Bigg(\underline{\int\limits_{M_2} \cdots \int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_{m+1}\,\mathrm{d}x_{m+2}\,\cdots\,\mathrm{d}x_n \Bigg) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\cdots\,\mathrm{d}x_m = \\
&= \int\limits_{M_1} \cdots \int \Bigg(\overline{\int\limits_{M_2} \cdots \int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_{m+1}\,\mathrm{d}x_{m+2}\,\cdots\,\mathrm{d}x_n \Bigg) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\cdots\,\mathrm{d}x_m.
\end{aligned}$$

Platí také modifikace poslední věty: za předpokladů uvedených ve větě 2.13 jsou rovněž funkce

$$\underline{\int \cdots \int_{M_1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m,$$
$$\overline{\int \cdots \int_{M_1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m$$

integrovatelné na množině M_2 a platí

$$\begin{aligned}
&\int \cdots \int_M f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \\
&= \int \cdots \int_{M_2} \left(\underline{\int \cdots \int_{M_1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m \right) \mathrm{d}x_{m+1}\,\mathrm{d}x_{m+2} \cdots \mathrm{d}x_n = \\
&= \int \cdots \int_{M_2} \left(\overline{\int \cdots \int_{M_1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m \right) \mathrm{d}x_{m+1}\,\mathrm{d}x_{m+2} \cdots \mathrm{d}x_n.
\end{aligned}$$

Pro funkci f spojitou na n-rozměrném intervalu $M = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle$ dostáváme

$$\begin{aligned}
&\int \cdots \int_M f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \\
&\qquad = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Integrál na pravé straně rovnosti (2.4) se nazývá *n-násobný integrál*. Analogické vzorce lze obdržet záměnou pořadí proměnných.

Pojem elementární množiny v $\mathbb{R}^n$ pro $n > 3$ zavádíme induktivně: *elementární množinou* v $\mathbb{R}^n$ vzhledem k nadrovině $x_1x_2\ldots x_{n-1}$ (tj. nadrovině o rovnici $x_n = 0$) rozumíme množinu tvaru

$$\begin{aligned}
\Omega = \{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n : [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}] \in M,& \\
\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \leqq x_n \leqq \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}&\},
\end{aligned}$$

kde M je elementární množina v $\mathbb{R}^{n-1}$ a Φ, Ψ jsou funkce $n-1$ proměnných spojité na množině M. Pro funkci f spojitou na této elementární množině Ω

platí

$$\int\!\cdots\!\int\limits_{\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int\!\cdots\!\int\limits_{M} \left(\int_{\Phi(x_1,\dots,x_{n-1})}^{\Psi(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_{n-1}. \tag{2.5}$$

Příklad 2.14. Vypočítejte čtyřrozměrný integrál

$$\iiiint\limits_{M} (1 - x - y - z - u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u,$$

kde $M = \left\{[x, y, z, u] \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+u \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ u \geqq 0\right\}$.

Řešení. Funkce $f(x, y, z, u) = 1 - x - y - z - u$ je spojitá na množině M. Přitom množina M je elementární množina, kterou lze vymezit nerovnostmi

$$M: \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1, \\ 0 \leqq y \leqq 1 - x, \\ 0 \leqq z \leqq 1 - x - y, \\ 0 \leqq u \leqq 1 - x - y - z. \end{array}$$

Označíme-li $M_1 = \{[x, y, z] : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 - x,\ 0 \leqq z \leqq 1 - x - y\}$, $M_2 = \{[x, y] : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1-x\}$, můžeme v souladu se vzorcem (2.5) psát

$$\iiiint\limits_{M} (1 - x - y - z - u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u =$$

$$= \iiint\limits_{M_1} \left(\int_0^{1-x-y-z} (1 - x - y - z - u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \iint\limits_{M_2} \left[\int_0^{1-x-y} \left(\int_0^{1-x-y-z} (1 - x - y - z - u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} \left(\int_0^{1-x-y-z} (1 - x - y - z - u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} \left[(1-x-y-z)u - \frac{u^2}{2} \right]_0^{1-x-y-z} \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} \frac{1}{2}(1-x-y-z)^2 \, \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[-\frac{(1-x-y-z)^3}{3} \right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (1-x-y)^3 \, \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^4}{4} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{24} \int_0^1 (1-x)^4 \, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{24} \left[-\frac{(1-x)^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{120} .
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 2.15. Pro dané přirozené n vypočtěte

$$
\int \cdots \int_M \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \right) \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n ,
$$

kde $M = \left\{ [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n : 0 \leqq x_j \leqq 1 \ (j = 1, \ldots, n) \right\}$.

Řešení. Ukážeme si dva způsoby výpočtu tohoto integrálu ze spojité funkce přes n-rozměrnou krychli $\langle 0, 1 \rangle^n$.

Užitím vzorce (2.4) dostáváme

$$
\int \cdots \int_M (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\cdots \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \, \mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_{n-1} \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\cdots \left(\int_0^1 \left[(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2) x_n + \frac{x_n^3}{3} \right]_0^1 \mathrm{d}x_{n-1} \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\cdots \left(\int_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}x_{n-1} \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\cdots \left(\int_0^1 \left[\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + \frac{1}{3} \right) x_{n-1} + \right. \right. \right. \right. \\
&\qquad\qquad \left. \left. \left. \left. + \frac{x_{n-1}^3}{3} \right]_0^1 \mathrm{d}x_{n-2} \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 =
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^1 \Bigl(\int_0^1 \Bigl(\cdots \Bigl(\int_0^1 \Bigl(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Bigr) \mathrm{d}x_{n-2} \Bigr) \cdots \Bigr) \mathrm{d}x_2 \Bigr) \mathrm{d}x_1 =$$
$$= \cdots =$$
$$= \int_0^1 \Bigl(\frac{n-1}{3} + x_1^2 \Bigr) \mathrm{d}x_1 = \Bigl[\frac{n-1}{3} x_1 + \frac{x_1^3}{3} \Bigr]_0^1 = \frac{n}{3}.$$

Druhou možností je využití symetrie integračního oboru a integrandu. Zřejmě

$$\int \cdots \int_M (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = n \int \cdots \int_M x_1^2 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Analogicky jako v poznámkách 1.64 a 2.10 platí

$$\int \cdots \int_M x_1^2 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_0^1 x_1^2 \,\mathrm{d}x_1 \int_0^1 \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^1 \mathrm{d}x_n = \Bigl[\frac{x_1^3}{3} \Bigr]_0^1 = \frac{1}{3},$$

což dává celkově stejný výsledek. ▲

2.4. Jednorozměrný integrál

Postupujeme-li analogickým způsobem u integrálu v $\mathbb{R}^1$, pak definici integrálu přes uzavřený omezený nedegenerovaný interval odpovídá integrál přes jednorozměrný kompaktní interval $\langle a, b \rangle$, což je zřejmě Riemannův určitý integrál definovaný v základním kurzu integrálního počtu. Definujeme-li charakteristickou funkci množiny $M \subseteq \mathbb{R}^1$ analogicky jako dříve, pak vzorec pro míru měřitelné množiny je

$$\mathrm{m}(M) = \int_a^b \chi_M(x) \,\mathrm{d}x,$$

kde $\langle a, b \rangle$ je takový interval, že $\langle a, b \rangle \supseteq M$. Míru v $\mathbb{R}^1$ značíme také $\mathrm{m}_1(M)$. *Jednoduchý* (*jednorozměrný*) *integrál* na měřitelné množině M definujeme rovností

$$\int_M f(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b (\chi_M f)(x) \,\mathrm{d}x,$$

kde $\langle a, b \rangle \supseteq M$ a funkce $\chi_M f$ je dána vztahem

$$(\chi_M f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro každé } x \in M, \\ 0 & \text{pro každé } x \notin M. \end{cases}$$

Jednorozměrný integrál má stejné základní vlastnosti jako integrál dvojrozměrný či trojrozměrný a je zobecněním Riemannova určitého integrálu s mezemi a, b na integrál přes obecnější množinu než je interval $\langle a, b\rangle$.

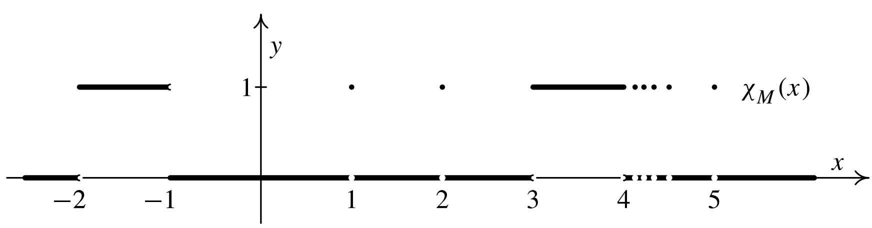
Příklad 2.16. Vypočítejte integrál $\int_M x\,\mathrm{d}x$, kde $M = M_1 \cup M_2 \cup I_1 \cup I_2$, přičemž $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{4 + 1/k : k \in \mathbb{N}\}$, $I_1 = \langle -2, -1)$, $I_2 = \langle 3, 4\rangle$.

Řešení. Charakteristická funkce množiny M je znázorněna na obr. 2.9. Množina M_1 je konečná, takže $\mathrm{m}_1(M_1) = 0$ (viz cvičení 18 ke kapitole 1). Pro každé $\varepsilon > 0$ lze psát $M_2 = M_2^* \cup M_2^{**}$, kde $M_2^* = \{4 + 1/k : k \in \mathbb{N},\ k > \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1\}$, $M_2^{**} = \{4+1/k : k = 1, 2, \dots, \lfloor 1/\varepsilon\rfloor + 1\}$, přičemž $\lfloor 1/\varepsilon \rfloor$ značí celou část čísla $1/\varepsilon$ (obecně pro $a \in \mathbb{R}$ platí $a - 1 < \lfloor a \rfloor \leqq a$). Pak $\chi_{M_2} = \chi_{M_2^*} + \chi_{M_2^{**}}$, protože $M_2^* \cap M_2^{**} = \emptyset$.

Jelikož M_2^{**} je konečná, platí $\int_{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}^5 \chi_{M_2^{**}}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{m}_1(M_2^{**}) = 0$ pro každé $\varepsilon > 0$. Dále pro každé $\varepsilon > 0$ máme $0 \leqq \overline{\int_4^{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}} \chi_{M_2^*}(x)\,\mathrm{d}x \leqq$ $\leqq \mathrm{m}_1\big(\big\langle 4, 4 + \frac{1}{1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor}\big\rangle\big) = \frac{1}{1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor} < \varepsilon$. Podle poznámky 1) na str. 16 před Fubiniovou větou (viz též cvičení 2 ke kapitole 1) dostáváme

$$
\begin{aligned}
0 \leqq \overline{\int_4^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x &= \overline{\int_4^{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \overline{\int_4^{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}} \chi_{M_2^*}(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}^5} \chi_{M_2^{**}}(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \overline{\int_4^{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}} \chi_{M_2^*}(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

tedy $0 \leqq \overline{\int_4^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$. To znamená, že $\overline{\int_4^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Jelikož funkce χ_{M_2} je nezáporná, platí $0 \leqq \underline{\int_4^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_4^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x \leqq 0$,



Obr. 2.9: Charakteristická funkce množiny M

takže $\underline{\int}_4^5 \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int}_4^5 \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Tudíž integrál $\int_4^5 \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je roven nule. Množina M_2 je proto měřitelná a $\mathrm{m}_1(M_2) = \int_4^5 \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Protože funkce $f(x) = x$ je ohraničená na množinách M_1, M_2 míry 0, platí $\int_{M_1} x\,\mathrm{d}x = 0$, $\int_{M_2} x\,\mathrm{d}x = 0$. Užitím aditivity integrálu vzhledem k integračnímu oboru dostáváme

$$\begin{aligned}\int_M x\,\mathrm{d}x &= \int_{M_1} x\,\mathrm{d}x + \int_{M_2} x\,\mathrm{d}x + \int_{I_1} x\,\mathrm{d}x + \int_{I_2} x\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{I_1} x\,\mathrm{d}x + \int_{I_2} x\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} x\,\mathrm{d}x + \int_3^4 x\,\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4 = \frac{1}{2} - 2 + 8 - \frac{9}{2} = 2.\end{aligned}$$

▲

Poznámka 2.17. Pro úplnost si všimněme v předchozím příkladu podrobněji integrálu $\int_{I_1} x\,\mathrm{d}x$, jehož integračním oborem je *polootevřený* interval $I_1 = \langle -2, -1)$. Označme $I = \langle -2, -1\rangle$. Podle definice integrálu přes obecnou měřitelnou množinu pak je

$$\int_{I_1} x\,\mathrm{d}x = \int_I (\chi_{I_1} x)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} (\chi_{I_1} x)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} x\,\mathrm{d}x,$$

protože funkce $(\chi_{I_1} x)(x)$ a x se na intervalu I liší jen v pravém konci $x = -1$. Přitom poslední dva integrály mají za integrační obor *kompaktní* interval, jsou to tedy Riemannovy určité integrály, se kterými jste se seznámili v základním kurzu.

Cvičení

1. Ověřte, že úlohy 2–29 ze cvičení k první kapitole lze formulovat pro integrály libovolné dimenze. Udělejte potřebné úpravy a rozmyslete si, jak by bylo nutné modifikovat důkazy.

2. Vypočtěte integrál $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ přes danou množinu Ω:

   a) $\Omega:\ -1 \leqq x \leqq 0,\ -\pi/4 \leqq y \leqq -x,\ -1 \leqq z \leqq x^2,$

   b) $\Omega:\ -\sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{y},\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 4 - x - y,$

   c) $\Omega: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ z \leqq 1 - x - 2y,$

d) $\Omega: 0 \leqq z \leqq 3,\ x^2 + y^2 \leqq 4,$

e) $\Omega: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 - x^2,\ 0 \leqq z \leqq 2 - x - y,$

f) $\Omega: 3y \leqq z \leqq 4 - 2x,\ x^2 + y^2 \leqq 1,$

g) $\Omega: 0 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq y \leqq x + 1,\ 0 \leqq z \leqq xy,$

h) Ω je těleso omezené plochami $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 2x + y = 4,$ $z = 4 - x^2,$

i) Ω je těleso omezené plochami $z = xy,\ y = \sqrt{x},\ x + y = 2,$ $y = 0,\ z = 0,$

j) $\Omega: y^2 \leqq x \leqq 2 - y,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 2 - x - y,$

k) $\Omega: 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq x^2 + y^2,$

l) Ω je těleso omezené plochami $y = 1/x,\ 2x + 2y + z = 5,\ z = 0,$ přičemž $x, y \geqq 0$.

3. Vypočtěte trojný integrál přes danou množinu Ω:

a) $\displaystyle\iiint_\Omega xy^2z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad\Omega: 0 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 3,\ 1 \leqq z \leqq 2,$

b) $\displaystyle\iiint_\Omega 6\mathrm{e}^{3x+2y+z} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad\Omega: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1,$

c) $\displaystyle\iiint_\Omega y^2 z \cos x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad\Omega: 0 \leqq x \leqq 2\pi,\ 0 \leqq y \leqq b,$ $-a/2 \leqq z \leqq a/2,\ a, b > 0,$

d) $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{1}{1 - x - y} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad\Omega: 0 \leqq x \leqq 1,\ 2 \leqq y \leqq 5,\ 2 \leqq z \leqq 4,$

e) $\displaystyle\iiint_\Omega 2x^2 y \mathrm{e}^{xzy} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad\Omega$ je těleso omezené plochami $x = 0,$ $x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 1,$

f) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad\Omega:\ -b \leqq x \leqq b,\ -c \leqq y \leqq c,$ $-a \leqq z \leqq a,\ a, b, c > 0,$

g) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} y^2 z \cos xyz \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega$ je těleso omezené plochami $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \pi$, $z = 0$, $z = 2$,

h) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{z \cos y}{x^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega\colon 1 \leqq x \leqq 2$, $-\pi/2 \leqq y \leqq \pi/2$, $2 \leqq z \leqq 4$.

4. Vypočtěte trojný integrál přes danou množinu Ω:

a) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} xyz \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega$ je těleso omezené plochami $y = 0$, $z = 0$, $x = a$, $y = x$, $z = y$, kde $a > 0$,

b) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega$ je těleso omezené plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $z = xy$,

c) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega\colon 0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq 4 - 2x - 2y$,

d) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} y \cos(x + z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega$ je těleso omezené plochami $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $z = 0$, $x + z = \pi/2$,

e) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x + y + z + 1)^3}$, $\quad\Omega$ je čtyřstěn omezený rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$,

f) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} (x + y)z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega$ je osmina koule $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ ležící v I. oktantu.

5. Vypočtěte trojný integrál přes danou množinu Ω:

a) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega\colon 0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1 - x^2$, $0 \leqq z \leqq 2 - x - y$,

b) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{z(x^2 + y^2)}{(2y + 1)^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega\colon 0 \leqq x \leqq 1$, $1 - x \leqq y \leqq 2 - 2x$, $0 \leqq z \leqq 1\big/\sqrt{x^2 + y^2}$,

c) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} x^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega\colon x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$, $a > 0$,

d) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} r^4 \sin\alpha \cos\alpha \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi$, $\quad\Omega\colon 0 \leqq r \leqq R$, $0 \leqq \alpha \leqq \pi/2$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$,

e) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} y^2 z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad \Omega: 0 \leqq x \leqq \pi/2,\ 0 \leqq y \leqq 2\cos x,\ 0 \leqq z \leqq 1,$

f) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad \Omega: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x + y + z \leqq 1.$

6. Trojný integrál $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ vyjádřete jako trojnásobný:

a) Ω je těleso určené nerovnostmi: $z \geqq 0,\ x \leqq 1/2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,$

b) Ω je těleso omezené plochami: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1,$

c) Ω je těleso omezené plochami: $y = 0,\ z = 0,\ -x + 3y + 3z = 3,$ přičemž $x \leqq 2,$

d) Ω je těleso omezené plochami: $2x + 3y + 4z = 1,\ y = 0,\ y = \sqrt{x}/3,\ z = 0,$

e) Ω je těleso omezené plochami: $x = 0,\ z = 0,\ z = 4 - y^2,$ přičemž $y \geqq 0,\ y \geqq \ln x.$

7. Vypočtěte trojnásobné integrály:

a) $\displaystyle\int_0^a \left\{ \int_0^x \left(\int_0^{xy} x^3 y^2 z \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x, \quad a > 0,$

b) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} x^2 y \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x,$

c) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_1^2 \left(\int_0^2 (3x^2 y + z) \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x,$

d) $\displaystyle\int_{-2}^2 \left\{ \int_{y^2}^4 \left(\int_0^{4-z} \frac{z+1}{(x+z+1)^2} \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}y,$

e) $\displaystyle\int_a^b \left\{ \int_0^d \left[\int_0^h \left(\frac{6xy^2}{b^2 d^3 h} + \frac{2z}{bdh^2} \right) \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x, \quad a < b,\ d > 0,\ h > 0,$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \left\{ \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{2-y} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 z \sqrt{x + 2y + 1}} \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}z.$

8. Vypočtěte trojný integrál přes danou množinu Ω:

a) $\displaystyle\iiint_\Omega y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega$ je těleso omezené plochami $y = 1$, $y = \sqrt{x^2 + z^2}$,

b) $\displaystyle\iiint_\Omega z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega$ je těleso omezené plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 5$, $x + z = 6$,

c) $\displaystyle\iiint_\Omega z^4 \cos^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega\colon 0 \leqq x \leqq \pi/2,\ 0 \leqq y \leqq \pi/2,\ 0 \leqq z \leqq \sin x \cos y$,

d) $\displaystyle\iiint_\Omega xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega\colon x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq x^2 + y^2 + 1$,

e) $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x + y + 1}$, $\quad\Omega\colon x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x + y + z \leqq 1$,

f) $\displaystyle\iiint_\Omega x^2yz^3 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad\Omega\colon z \leqq xy,\ y \geqq x,\ y \leqq 1,\ z \geqq 0$.

9. Vypočtěte trojnásobné integrály:

a) $$\int_0^b \left\{ \int_0^a \left(\int_0^\pi z^2 r \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}r \right\} \mathrm{d}z, \quad a > 0,\ b > 0,$$

b) $$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \varrho^3 \sin\varphi \cos\varphi \,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}z, \quad h > 0,$$

c) $$\int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} z \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x,$$

d) $$\int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{z}{1 - x - y} \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x,$$

e) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2\cos\varphi} \left(\int_0^a \varrho^2 z \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varrho \right\} \mathrm{d}\varphi, a > 0,$$

f) $$\int_0^a \left\{ \int_0^{a-y} \left(\int_0^{a-x-y} (x + y + z) \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y, \quad a > 0,$$

g) $$\int_0^3 \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}z.$$

10. Vypočtěte čtverný integrál přes danou množinu Ω:

a) $\displaystyle\iiiint\limits_{\Omega} (1 - x - y - z - u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u, \quad \Omega = \langle 0, 1\rangle^4,$

b) $\displaystyle\iiiint\limits_{\Omega} u^4 \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u, \qquad \Omega:\ 0 \leqq z \leqq u,\ 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq zu,\ 0 \leqq x \leqq yzu,$

c) $\displaystyle\iiiint\limits_{\Omega} xy^2zu\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u, \qquad \Omega:\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ u \geqq 0.$

11. Vypočtěte pětirozměrné a šestirozměrné integrály přes danou množinu Ω:

a) $\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\limits_{\Omega} (1 - x - y - z - u - v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad \Omega = \langle 0, 1\rangle^5,$

b) $\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\limits_{\Omega} (x + y)zuv\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad \Omega:\ x + y + z \leqq 1,\ u + v \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ u \geqq 0,\ v \geqq 0,$

c) $\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\limits_{\Omega} (x + y + z + t + u + v)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad \Omega = \langle 0, 1\rangle^6,$

d) $\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\limits_{\Omega} xyztuv\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad \Omega:\ x + y + z \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ t + u + v \leqq 1,\ t \geqq 0,\ u \geqq 0,\ v \geqq 0.$

12. Vypočtěte n-rozměrné integrály:

a) $\displaystyle\int\limits_{M}\!\cdots\!\int (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\ldots\mathrm{d}x_n,$

kde $M = \big\{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n : 0 \leqq x_j \leqq 1\ (j = 1, 2, \ldots, n)\big\}.$

b) $\displaystyle\int\limits_{M}\!\cdots\!\int (x_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\ldots\mathrm{d}x_n,$

kde $M = \big\{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n : 0 \leqq x_k \leqq k\ (k = 1, 2, \ldots, n)\big\},$

c) $\displaystyle\int\limits_{M}\!\cdots\!\int \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\ldots\mathrm{d}x_n,$

kde $M = \big\{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n \leqq 1,\ 0 \leqq x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)\big\},$

d) $\displaystyle\int\limits_M \cdots \int x_1 x_2 \cdots x_n \,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n,$

kde $M = \big\{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n : 0 \leqq x_1 \leqq 1,\ 0 \leqq x_2 \leqq x_1,\ \ldots,$
$0 \leqq x_n \leqq x_{n-1}\big\}.$

13. Dokažte, že

$$F(n, a) = \int\limits_{M_n} \cdots \int (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^a \,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{(n+a)(n-1)!},$$

je-li $M_n = \big\{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq 1,\ x_j \geqq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)\big\}$ a $a \geqq 0$ (výsledek platí i pro $-n < a < 0$, kdy však jde o nevlastní konvergentní integrál — viz cvičeni 6 ke kapitole 5).

14. Za předpokladu spojitosti funkce f dokažte:

a)

$$\int_0^a \left\{ \int_0^{x_1} \left[\cdots \left(\int_0^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \right) \cdots \right] \mathrm{d}x_2 \right\} \mathrm{d}x_1 =$$
$$= \int_0^a \left\{ \int_{x_n}^a \left[\cdots \left(\int_{x_2}^a f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \right) \cdots \right] \mathrm{d}x_{n-1} \right\} \mathrm{d}x_n,$$

je-li $a > 0$, $n \geqq 2$,

b)

$$\int_0^t \left\{ \int_0^{t_1} \left[\cdots \left(\int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \ldots f(t_n)\,\mathrm{d}t_n \right) \cdots \right] \mathrm{d}t_2 \right\} \mathrm{d}t_1 =$$
$$= \frac{1}{n!} \left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \right)^n,$$

je-li $t > 0$, $n \geqq 2$,

c)

$$\int_0^x \left\{ \int_0^{x_1} \left[\cdots \left(\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,\mathrm{d}x_n \right) \cdots \right] \mathrm{d}x_2 \right\} \mathrm{d}x_1 =$$
$$= \int_0^x f(s)\,\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}s,$$

je-li $x > 0$, $n \geqq 2$,

d)

$$\int_0^x \left\{ \int_0^{x_1} \left[\cdots \left(\int_0^{x_n} x_1 x_2 \cdots x_n f(x_{n+1})\, \mathrm{d}x_{n+1} \right) \cdots \right] \mathrm{d}x_2 \right\} \mathrm{d}x_1 =$$
$$= \frac{1}{2^n n!} \int_0^x \left(x^2 - s^2\right)^n f(s)\, \mathrm{d}s,$$

je-li $x > 0$, $n \geqq 1$.

15. Nechť $K(x, y)$ je spojitá funkce v množině $\langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle$ a nechť

$$K_n(x, y) = \int \cdots \int\limits_{M_n} K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_n, y)\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_n,$$

kde $M_n = \left\{[t_1, t_2, \cdots, t_n] \in \mathbb{R}^n : a \leqq t_j \leqq b \ (j = 1, 2 \ldots, n)\right\}$. Dokažte, že

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y)\, \mathrm{d}t.$$

16. Nechť $M \subset \mathbb{R}^m$ je měřitelná množina. Nechť posloupnost $\{f_n\}$ funkcí integrovatelných na M konverguje stejnoměrně na M k funkci f. Pak je f integrovatelná na M a platí $\lim\limits_{n\to\infty} \int \cdots \int\limits_M f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int \cdots \int\limits_M f(x)\, \mathrm{d}x$. Dokažte.

17. Nechť $M \subset \mathbb{R}^m$ je měřitelná množina. Nechť funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou integrovatelné na M a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M k funkci f. Pak je součet f funkce integrovatelná na M a platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int\limits_M f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int \cdots \int\limits_M f(x)\, \mathrm{d}x$. Dokažte.

18. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená množina a existují konstanty $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$, $|a_1| + \cdots + |a_n| > 0$, tak, že $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$ pro každé $[x_1, \ldots, x_n] \in M$ (M je podmnožinou nějaké nadroviny). Dokažte, že pak $\mathrm{m}_n(M) = 0$.

19. Nechť $M \subset \mathbb{R}^m$ je libovolná množina a $R \subset \mathbb{R}^n$ je kvádr. Uvažujme množinu $V = M \times R \subset \mathbb{R}^{m+n}$ („válec“ s podstavou M). Je-li $\mathrm{m}_m(M) = 0$, pak $\mathrm{m}_{m+n}(V) = 0$. Dokažte.

20. Nechť $V \subset \mathbb{R}^{m+n}$ je omezená množina. Označme U její průmět na podprostor $\mathbb{R}^m$, tj. $U = \{x \in \mathbb{R}^m :\ \text{existuje } y \in \mathbb{R}^n \text{ tak, že } [x, y] \in V\}$. Dokažte, že když $\mathrm{m}_m(U) = 0$, pak $\mathrm{m}_{m+n}(V) = 0$.

21. Buďte $A \subset \mathbb{R}^m$ a $B \subset \mathbb{R}^n$ měřitelné množiny. Dokažte, že pak je množina $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ měřitelná.

22. Buďte $A \subset \mathbb{R}^m$ a $B \subset \mathbb{R}^n$ měřitelné množiny. Nechť funkce f je spojitá a ohraničená na $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Označme $x = [x_1, \dots, x_m]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$. Pak $\int\limits_{A\times B} \cdots \int f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{A} \cdots \int \Big(\int\limits_{B} \cdots \int f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x$. Dokažte.

Výsledky

2. a) $\frac{9+4\pi}{12}$, b) $\frac{68}{15}$, c) $\frac{1}{12}$, d) $12\,\pi$, e) $\frac{49}{60}$, f) 4π,
g) $\frac{11}{3}$, h) $\frac{40}{3}$, i) $\frac{3}{8}$, j) $\frac{17}{20}$ k) $\frac{44}{105}$, l) $\frac{57}{8} - 10\ln 2$.

3. a) 26, b) $(\mathrm{e}^3-1)(\mathrm{e}^2-1)(\mathrm{e}-1)$, c) 0, d) $10\ln\frac{4}{5}$,
e) $2\mathrm{e}-5$, f) $\frac{8}{3}abc\,(b^2+c^2)$, g) π, h) 6.

4. a) $\frac{a^6}{48}$, b) $\frac{1}{180}$, c) $\frac{1}{3}$, d) $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$, e) $\ln\sqrt{2} - \frac{5}{16}$, f) $\frac{2}{15}$.

5. a) $\frac{221}{420}$, b) $\frac{1}{8}\ln\frac{3}{\sqrt{5}}$, c) $\frac{4}{15}\pi a^5$, d) $\frac{R^5}{5}\pi$, e) $\frac{8}{9}$, f) $\frac{1}{60}$.

6. a) $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \Big\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}y \Big\}\,\mathrm{d}x$,
b) $\int_0^1 \Big\{ \int_0^{1-x} \Big(\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}y \Big\}\,\mathrm{d}x$,
c) $\int_{-3}^{2} \Big\{ \int_0^{1+\frac{x}{3}} \Big(\int_0^{1+\frac{x}{3}-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}y \Big\}\,\mathrm{d}x$,
d) $\int_0^{\frac{1}{6}} \Big\{ \int_{9y^2}^{\frac{1-3y}{2}} \Big(\int_0^{\frac{1-2x-3y}{4}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}x \Big\}\,\mathrm{d}y$,
e) $\int_0^2 \Big\{ \int_0^{\mathrm{e}^y} \Big(\int_0^{4-y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}x \Big\}\,\mathrm{d}y$.

7. a) $\frac{a^{11}}{110}$, b) $\frac{11}{60}$, c) 5, d) $\frac{256}{75}$, e) $2 - \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b}$, f) $\frac{23}{3} - 4\sqrt{3}$.

8. a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{1\,300}{3}$, c) $\frac{128}{2\,625}$, d) $\frac{7}{120}$, e) $\frac{3}{2} - 2\ln 2$, f) $\frac{1}{364}$.

9. a) $\frac{1}{6}\pi a^2 b^3$, b) 0, c) $\frac{1}{24}$, d) $\frac{1}{12}$, e) $\frac{8}{9}a^2$, f) $\frac{a^4}{8}$, g) -20.

10. a) -1, b) $\frac{2\mathrm{e}-5}{32}$, c) $\frac{1}{945}$.

11. a) $-\frac{3}{2}$, b) $\frac{1}{1\,440}$, c) $\frac{19}{2}$, d) $\frac{1}{8\,100}$.

12. a) $\frac{n(3n+1)}{12}$, b) $n!\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^k}{k+1}$, c) $\frac{1}{n!}$, d) $\frac{1}{2^n n!}$.

13. Dokáže se úplnou indukcí. Vztah se snadno ověří pro $n = 1$ a libovolné $a \geqq 0$. Indukční krok se provede pomocí Fubiniovy věty:

$$
\begin{aligned}
F(n+1, a) &= \int\limits_{M_{n+1}}\cdots\int (x_1 + \cdots + x_{n+1})^a \,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n+1} = \\
&= \tfrac{1}{a+1}\int\limits_{M_n}\cdots\int \left[(x_1 + \cdots + x_{n+1})^{a+1}\right]_0^{1-x_1-\cdots-x_n} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \\
&= \tfrac{1}{a+1}\big(F(n,0) - F(n, a+1)\big).
\end{aligned}
$$

14. a) Označme $M = \{[x_1,\dots,x_n] \in \mathbb{R}^n : 0 \leqq x_1 \leqq a,\ 0 \leqq x_2 \leqq x_1,\ \dots,\ 0 \leqq x_n \leqq x_{n-1}\}$ a $N = \{[x_1,\dots,x_n] \in \mathbb{R}^n : 0 \leqq x_n \leqq a,\ x_n \leqq x_{n-1} \leqq a,\ \dots,\ x_2 \leqq x_1 \leqq a\}$. Snadno se ověří, že $M = N$, tedy

$$\int\limits_M\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots ,\ \mathrm{d}x_n = \int\limits_N\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots ,\ \mathrm{d}x_n.$$

Protože množiny M, N jsou elementární, opakovaným použitím Fubiniovy věty (viz (2.5)) na tyto integrály dostaneme dokazovanou rovnost.

b) Označme $F(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$. Pro libovolné číslo $k \in \mathbb{N}$ platí $\int_0^t f(s)F^k(s)\,\mathrm{d}s = F^{k+1}(t)/(k+1)$. Opakovaným použitím tohoto vztahu ověříme dokazovanou rovnost.

c) Při označení z části a) dostaneme po použití Fubiniovy věty na rovnost

$$\int\limits_M\cdots\int f(x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int\limits_N\cdots\int f(x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

že

$$
\begin{aligned}
&\int_0^x \Big\{\int_0^{x_1}\Big[\cdots\Big(\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\Big)\cdots\Big]\,\mathrm{d}x_2\Big\}\,\mathrm{d}x_1 = \\
&\qquad = \int_0^x \Big\{\int_{x_n}^x\Big[\cdots\Big(\int_{x_2}^x f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\Big)\cdots\Big]\,\mathrm{d}x_{n-1}\Big\}\,\mathrm{d}x_n.
\end{aligned}
$$

Nyní postupným výpočtem pravého n-násobného integrálu dostaneme výsledek.

d) Obdobně jako v části c) odvodíme rovnost

$$
\begin{aligned}
&\int_0^x \Big\{\int_0^{x_1}\Big[\cdots\Big(\int_0^{x_n} x_1\cdots x_n f(x_{n+1})\,\mathrm{d}x_{n+1}\Big)\cdots\Big]\,\mathrm{d}x_2\Big\}\,\mathrm{d}x_1 = \\
&\qquad = \int_0^x \Big\{\int_{x_{n+1}}^x\Big[\cdots\Big(\int_{x_2}^x x_1\cdots x_n f(x_{n+1})\,\mathrm{d}x_1\Big)\cdots\Big]\,\mathrm{d}x_n\Big\}\,\mathrm{d}x_{n+1}
\end{aligned}
$$

a postupným výpočtem pravého $(n+1)$-násobného integrálu dostaneme výsledek.

15. Protože $M_{n+m+1} = \langle a, b\rangle \times M_n \times M_m$, podle Fubiniovy věty je

$$K_{n+m+1}(x,y) = \int\limits_{M_{n+m+1}}\cdots\int K(x,t_1)\cdots K(t_{n+m+1}, y)\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n+m+1} =$$

$$= \int_a^b \Big\{ \int_{M_n}\cdots\int \Big(\int_{M_m}\cdots\int K(x,t_1)\cdots K(t_{n+m+1},y)\times$$
$$\times\, \mathrm{d}t_{n+2}\cdots \mathrm{d}t_{n+m+1}\Big)\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\Big\}\,\mathrm{d}t_{n+1} =$$
$$= \int_a^b \Big\{ \int_{M_n}\cdots\int K(x,t_1)\cdots K(t_n,t_{n+1})K_n(t_{n+1},y)\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\Big\}\,\mathrm{d}t_{n+1} =$$
$$= \int_a^b K_m(x,t_{n+1})K_n(t_{n+1},y)\,\mathrm{d}t_{n+1}.$$

16. Buď $R \supseteq M$ libovolný n-rozměrný kvádr. Protože $f_n \rightrightarrows f$ na M (symbol $\rightrightarrows$ značí stejnoměrnou konvergenci), podle definice stejnoměrné konvergence zřejmě také $\chi_M f_n \rightrightarrows \chi_M f$ na R . Tudíž k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 tak, že pro každé $n \geqq n_0$ platí $(\chi_M f_n)(x) - \varepsilon < (\chi_M f)(x) < (\chi_M f_n)(x) + \varepsilon$ na M. Tedy zejména $\chi_M f$ je ohraničená. Z předchozí nerovnosti vyjde
$$\int_R\cdots\int[(\chi_M f_n)(x)-\varepsilon]\,\mathrm{d}x = \underline{\int_R\cdots\int}[(\chi_M f_n)(x)-\varepsilon]\,\mathrm{d}x \leqq \underline{\int_R\cdots\int}(\chi_M f)(x)\,\mathrm{d}x \leqq$$
$$\leqq \overline{\int_R\cdots\int}(\chi_M f)(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_R\cdots\int}[(\chi_M f_n)(x)+\varepsilon]\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_R\cdots\int[(\chi_M f_n)(x)+\varepsilon]\,\mathrm{d}x.$$
Protože $\int_R\cdots\int[\chi_M f_n)(x)\pm\varepsilon]\,\mathrm{d}x = \int_R\cdots\int \chi_M(f_n)(x)\,\mathrm{d}x \pm \varepsilon\,\mathrm{m}(R)$, dostaneme, že
$$0 \leqq \overline{\int_R\cdots\int}(\chi_M f)(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_R\cdots\int}(\chi_M f)(x)\,\mathrm{d}x \leqq 2\varepsilon\,\mathrm{m}(R).$$
Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, musí se horní a dolní integrál z předchozího vztahu rovnat, takže $\chi_M f$ je integrovatelná na R, tj. f je integrovatelná na M. Dále pro $n \geqq n_0$ platí
$$\Big|\int_M\cdots\int f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_M\cdots\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_M\cdots\int[f_n(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x\Big| \leqq$$
$$\leqq \int_M\cdots\int |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x \leqq \int_M\cdots\int \varepsilon\,\mathrm{d}x = \varepsilon\,\mathrm{m}(M).$$
Odsud již plyne zbytek tvrzení.

17. Použijte výsledek cvičení 16 na posloupnost částečných součtů dané řady.

18. Podle předpokladů je aspoň jeden koeficient a_i nenulový, nechť je to např. a_n. Uvažujme spojitou funkci f závisející na $n-1$ proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ danou vztahem $f(x_1,\ldots,x_{n-1}) = -\frac{a_1}{a_n}x_1 - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_{n-1} + \frac{b}{a_n}$. Podle předpokladu je M omezená, takže existuje n-rozměrný kvádr $R = R_1 \times \langle a, b\rangle$ tak, že $M \subset R$; přitom R_1 je $(n-1)$-rozměrný kvádr. Označme G graf funkce f na R_1. Z předpokladů plyne, že $M \subseteq G$. Podle analogie věty 1.38, část e), pro obecné n (viz též strana 89) je $\mathrm{m}_n(G) = 0$, tedy podle analogie věty 1.37 pro obecné n platí $\mathrm{m}_n(M) = 0$.

19. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle analogie cvičení 17 z kapitoly 1 pro obecné n existují

m-rozměrné kvádry $R_1, \dots, R_k$ tak, že $M \subset R_1 \cup \dots \cup R_k$ a $\mathrm{m}_m(R_1) + \dots + \mathrm{m}_m(R_k) < \varepsilon / \mathrm{m}_n(R)$. Označme $V_i = R_i \times R$, $i = 1, \dots, k$. Potom V_i jsou $(m+n)$-rozměrné kvádry, $\mathrm{m}_{m+n}(V_i) = \mathrm{m}_m(R_i)\,\mathrm{m}_n(R)$ a platí $V \subset V_1 \cup \dots \cup V_k$, $\mathrm{m}_{m+n}(V_1) + \dots + \mathrm{m}_{m+n}(V_k) < \varepsilon$. Podle zmíněného cvičení je $\mathrm{m}_{m+n}(V) = 0$.

20. Podle předpokladu existuje $(m+n)$-rozměrný kvádr $R = R_1 \times R_2$, kde R_1 je m-rozměrný kvádr a R_2 je n-rozměrný kvádr, takový, že $V \subset R$. Platí $V \subset U \times R_2$. Dále podle cvičení 19 k této kapitole je $\mathrm{m}_{m+n}(U \times R_2) = 0$, tudíž podle analogie věty 1.37 pro obecné n je množina V měřitelná a $\mathrm{m}_{m+n}(V) = 0$.

21. Označme po řadě $h(A)$, $\mathrm{int}(A)$ a $\mathrm{ext}(A)$ hranici, vnitřek a vnějšek množiny A (v $\mathbb{R}^m$). Tyto množiny jsou po dvou disjunktní, první je uzavřená a zbývající dvě otevřené. Analogicky zaveďme $h(B)$, $\mathrm{int}(B)$ a $\mathrm{ext}(B)$ (v $\mathbb{R}^m$). Snadno se ověří, že platí rovnosti $\mathrm{int}(A \times B) = \mathrm{int}(A) \times \mathrm{int}(B)$, $h(A \times B) = (h(A) \times h(B)) \cup \cup (h(A) \times \mathrm{int}(B)) \cup (\mathrm{int}(A) \times h(B)) = (h(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times h(B))$ a $\mathrm{ext}(A \times B) = = (\mathrm{ext}(A) \times \mathbb{R}^n) \cup (\mathbb{R}^m \times \mathrm{ext}(B))$ (v $\mathbb{R}^{m+n}$). Ze cvičení 20 k této kapitole plyne, že $\mathrm{m}_{m+n}(h(A \times B)) = 0$, tedy $A \times B$ je měřitelná množina.

22. Množina $A \times B$ je podle cvičení 21 k této kapitole měřitelná. Podle analogie věty 1.47 pro více proměnných je funkce f na ní integrovatelná. Dále postupujte jako v důkazu lemmatu 3.47.

Kapitola 3

Transformace integrálů

V předchozí kapitole jsme se seznámili se základní metodou výpočtu vícerozměrných integrálů — převodem na násobné integrály. Z teorie jednorozměrného Riemannova integrálu na intervalu víme, že významnou metodou výpočtu určitého Riemannova integrálu je substituční metoda, kterou lze formulovat v následující podobě:
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce φ na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, přičemž $\varphi(t) \in \langle a, b\rangle$ pro každé $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, pak za předpokladu spojitosti funkce φ' na intervalu (α, β) platí

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Při užití této metody nás zajímá především změna integrandu, který chceme „zjednodušit", abychom dokázali najít primitivní funkci a mohli ji použít pro výpočet určitého integrálu (Newtonova-Leibnizova formule). Rovněž v případě vícerozměrných integrálů má substituční metoda značný význam pro jejich výpočet. Motivace je zde však poněkud jiná. Často nám totiž jde zejména o *změnu integračního oboru* do podoby, která umožní snadnější převod na násobné integrály, a to mnohdy i *za cenu případného zkomplikování integrandu*. Místo o substituční metodě se u vícerozměrných integrálů často mluví o *záměně proměnných* v integrálu nebo o *transformaci integrálu*. Než vyslovíme příslušná tvrzení, uveďme poněkud pozměněnou formulaci věty o substituci v jednorozměrném integrálu, která bude více připomínat formulace vět o transformaci ve vícerozměrných integrálech.

Věta 3.1. *Nechť φ je funkce definovaná na kompaktním intervalu I a má derivaci φ' spojitou a různou od nuly v každém bodě z I. Nechť f je funkce spojitá na* *intervalu $\varphi(I)$. Pak platí*

$$\int_{\varphi(I)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

Důkaz. Protože I je kompaktní interval, existují reálná čísla α, β taková, že $I = \langle\alpha, \beta\rangle$. Funkce φ má derivaci na intervalu I, je tedy na tomto intervalu spojitá. Odtud vyplývá, že $\varphi(I)$ je skutečně (kompaktní) interval. Protože φ' je spojitá a od nuly různá na I, platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in I$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in I$. V prvním případě je funkce φ rostoucí, takže platí $\varphi(I) = \langle a, b\rangle$, kde $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ a $\varphi(t) \in \langle a, b\rangle$ pro každé $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Pak dostáváme

$$\int_{\varphi(I)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Ve druhém případě je funkce φ klesající, takže platí $\varphi(I) = \langle a, b\rangle$, kde $a = \varphi(\beta)$, $b = \varphi(\alpha)$ a $\varphi(t) \in \langle a, b\rangle$ pro každé $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. V tomto případě dostáváme

$$\int_{\varphi(I)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))[-\varphi'(t)]\,\mathrm{d}t = \int_I f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

Poznámka 3.2. Všimněte si, že v integrálu na levé straně vzorce (3.1) může být $\varphi(\alpha) \geqq \varphi(\beta)$. Integrály ve vzorci (3.1), můžeme tedy chápat jako integrály přes „orientované“ intervaly. Naproti tomu na levé straně rovnosti (3.2) vystupuje integrál s integračním oborem $\varphi(I)$, což je interval „neorientovaný“, jehož levý krajní bod nemůže být větší než jeho pravý krajní bod.

Věty o transformaci integrálu v této kapitole nejprve uvedeme bez důkazů a na konkrétních příkladech ukážeme způsoby jejich užití. Důkazům bude věnován závěrečný oddíl celé kapitoly.

3.1. Transformace dvojného integrálu

Ve formulaci věty o transformaci dvojného integrálu budeme potřebovat, aby funkce g a h, které realizují záměnu obou proměnných, měly spojité parciální derivace. To má smysl jen ve vnitřních bodech množiny, na které funkce g, h uvažujeme. Proto zavedeme následující pojem.

Definice 3.3. Nechť g, h jsou funkce definované na dané množině $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Buď $F\colon B \to \mathbb{R}^2$ zobrazení přiřazující každému bodu $[u, v] \in B$ bod $F(u, v) = [g(u, v), h(u, v)]$. Řekneme, že zobrazení F je *spojitě diferencovatelné* v B, jestliže existuje otevřená množina $\Omega \supseteq B$ taková, že funkce g, h lze rozšířit na Ω takovým způsobem, že funkce g, h mají v Ω spojité parciální derivace prvního řádu podle obou proměnných u, v.

Je-li $F\colon B \to \mathbb{R}^2$ spojitě diferencovatelné zobrazení v B, nazývá se při označení použitém v definici 3.3 determinant

$$J = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix}$$

jakobián zobrazení F. Jakobián $J\colon B \to \mathbb{R}$ je funkcí proměnných u a v.

Definice 3.4. Spojitě diferencovatelné zobrazení $F\colon B \to \mathbb{R}^2$ na otevřené množině B se nazývá *regulární*, je-li jeho jakobián J různý od nuly v každém bodě množiny B.

Nyní již můžeme zformulovat základní větu o transformaci dvojného integrálu.

Věta 3.5. *Nechť $B \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $B \subseteq \Omega$. Nechť $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ je prosté regulární zobrazení takové, že $F(u, v) = [g(u, v), h(u, v)]$ pro každé $[u, v] \in B$. Nechť funkce f proměnných x a y je spojitá v množině $A = F(B)$.*

Pak platí vztah

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{3.3}$$

Poznámka 3.6.

1. Všimněme si, že vzorec (3.3) je analogický vzorci (3.2).
2. Vysvětlíme si význam jakobiánu ve vzorci (3.3). Zvolíme-li $f(x, y) = 1$ pro každé $(x, y) \in A$ a předpokládáme-li pro jednoduchost, že jakobián zobrazení F má konstantní hodnotu $J \neq 0$, dostáváme z (3.3) rovnost $\iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B |J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = |J| \iint_B \mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Podle definice 1.31 a 1.45 to znamená, že $\mathrm{m}_2(F(B)) = \mathrm{m}_2(A) = |J| \iint_B \mathrm{d}u\mathrm{d}v = |J|\,\mathrm{m}_2(B)$. Lze tedy očekávat, že

„malá“ souvislá množina B zobrazením F přejde v množinu $A = F(B)$ o míře $m_2(A)$ rovné $m_2(A) = |J(u, v)|\, m_2(B)$ pro vhodné $[u, v] \in B$ i v případě, že jakobián není konstantní.

Ilustrujme tuto skutečnost na příkladě: Nechť B je obdélník $\langle 0, \alpha\rangle \times \langle 0, \beta\rangle$, kde $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Zřejmě $m_2(B) = \alpha\beta$. Uvažujme lineární zobrazení F takové, že $F(u, v) = [au + bv, cu + dv]$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou takové konstanty, že $ad - bc \neq 0$. Pro jakobián J zobrazení F v každém bodě $[u, v]$ platí

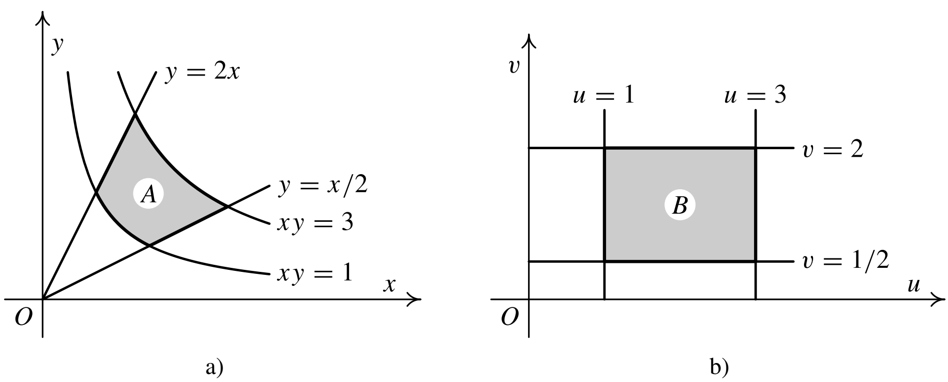
$$J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

a množina $A = F(B)$ je rovnoběžník s vrcholy $[0, 0]$, $[a\alpha, c\alpha]$, $[b\beta, d\beta]$, $[a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta]$. Z elementární geometrie plyne $m_2(A) = \left|\det \left(\begin{smallmatrix} a\alpha & c\alpha \\ b\beta & d\beta \end{smallmatrix}\right)\right| = |ad - bc|\alpha\beta = |J|\, m_2(B)$. Vzhledem k linearitě zobrazení F vyšla rovnost $m_2(A) = |J(u, v)|\, m_2(B)$ přesně pro každý bod $[u, v] \in B$.

Srovnejte též cvičení 4 k této kapitole.

Příklad 3.7. Vypočtěte $\displaystyle\iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina A leží v prvním kvadrantu a je omezena křivkami $xy = 1$, $xy = 3$, $y = x/2$ a $y = 2x$.

Řešení. První dvě křivky jsou hyperboly, druhé dvě přímky. Integrační obor A je znázorněn na obr. 3.1 a). Množinu A lze popsat jako elementární množinu, popřípadě sjednocení elementárních množin, vzhledem k ose x nebo vzhledem k ose y. Najít tento popis by však bylo poměrně pracné. Ukážeme, že volbou vhodné transformace se výpočet značně zjednoduší. Každým vnitřním bodem



Obr. 3.1

prvního kvadrantu s kartézskými souřadnicemi $[x_0, y_0]$ prochází právě jedna z hyperbol $xy = u_0$ a právě jedna z přímek $y = v_0 x$, kde $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ jsou parametry. Čísla u_0 a v_0 jsou jednoznačně určena: $u_0 = x_0 y_0$ a $v_0 = y_0/x_0$. Dvojici $[u_0, v_0]$ lze tedy zvolit za nové souřadnice daného bodu. Vztah mezi původními a novými souřadnicemi je tudíž dán rovnicemi (vynecháme pro jednoduchost index nula) $xy = u$ a $y/x = v$. Z nich snadno vypočítáme $x = \sqrt{u/v}$, $y = \sqrt{uv}$. Dostáváme tedy prosté zobrazení se souřadnicovými funkcemi $g(u, v) = \sqrt{u/v}$ a $h(u, v) = \sqrt{uv}$. Tyto funkce mají uvnitř prvního kvadrantu spojité první parciální derivace podle obou proměnných. Vypočteme jakobián:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}.$$

Jakobián je tedy uvnitř prvního kvadrantu nenulový, takže zobrazení je regulární.

Body ležící na hyperbole $xy = 1$ mají všechny novou první souřadnici $u = 1$. Analogicky body ležící na hyperbole $xy = 3$ mají všechny novou první souřadnici $u = 3$. Podobně body ležící na přímce $y = x/2$ mají všechny novou druhou souřadnici $v = 1/2$ a body ležící na přímce $y = 2x$ mají všechny novou druhou souřadnici $v = 2$. Odtud je vidět, že množina A je v transformaci F dané funkcemi g a h obrazem dvojrozměrného intervalu $B = \langle 1, 3 \rangle \times \langle 1/2, 2 \rangle$ — viz obr. 3.1 b).

S použitím vztahů (3.3) a (1.18) dostaneme:

$$\iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^3 \mathrm{d}u \cdot \int_{1/2}^2 \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v =$$
$$= \frac{1}{2}\,\big[u\big]_1^3 \cdot \big[\ln v\big]_{1/2}^2 = \frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot\left(\ln 2 - \ln\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2.$$

Poznamenejme, že výsledné číslo $2\ln 2$ je rovno míře množiny A. ▲

V dalším uvedeme některé speciální transformace vhodné pro výpočet dvojných integrálů. Než se jimi začneme zabývat jednotlivě, všimneme si podmínek použití věty 3.5. Ukazuje se, že její univerzálnost má určité nedostatky. Předně, integrand musí být spojitá funkce a integrační obor uzavřená množina. Závažnější však je, že i u velmi jednoduchých transformací, se kterými se budeme dále seznamovat, protože jsou důležité v aplikacích, často nelze splnit předpoklady o transformačním zobrazení. Požadavek, aby je bylo možné *prostě* rozšířit na *otevřenou* nadmnožinu integračního oboru při zachování regularity, je často nesplnitelný. Proto nyní uvedeme větu o transformaci dvojného integrálu za obecnějších předpokladů. Formulace je sice komplikovanější, ale uplatnění je mnohem širší, což uvidíme níže při řešení příkladů. Stručně řečeno, obecnější věta 3.8 postihuje případy, kdy předpoklady věty 3.5 nejsou splněny na množinách míry nula. V konkrétních úlohách je ověření předpokladů obvykle snadné.

Věta 3.8. *Nechť $B_1 \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$, kde B_1 je otevřená množina, B je měřitelná množina a platí $\mathrm{m}_2(B \setminus B_1) = 0$.*

Buď $F\colon B \to \mathbb{R}^2$ spojitě diferencovatelné zobrazení s jakobiánem J, které je regulární a prosté v B_1. Označme $A = F(B)$, $A_1 = F(B_1)$. Předpokládejme, že množina A je měřitelná a platí $\mathrm{m}_2(A \setminus A_1) = 0$.

Buď funkce f ohraničená na množině A a spojitá na množině A_1. Nechť funkce s hodnotou $f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)|$ v každém bodě $[u, v] \in B$ je ohraničená.

Pak platí vztah (3.3), tj.

$$\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_B f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

3.1.1. Některé běžné typy transformací dvojného integrálu

Všimněme si nyní podrobněji několika běžných často užívaných transformací $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ dvojného integrálu.

Posunutí

Posunutí (*translace*) je dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= u + a, \\ y &= v + b, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde a, b jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dilatace

Dilatace (ve speciálním případě $a > 0$, $b > 0$ *změna měřítek na souřadnicových osách*) je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= au, \\ y &= bv, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde $a \neq 0$, $b \neq 0$ jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab.$$

Transformace do polárních souřadnic

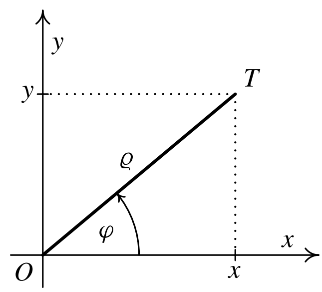
Transformace do polárních souřadnic je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, \\ y &= \varrho \sin \varphi, \end{aligned} \tag{3.6}$$

přičemž nové proměnné (tzv. *polární souřadnice bodu* $[x, y]$) značíme ϱ, φ namísto u, v. Jakobián zobrazení (3.6) je roven

$$J(\varrho, \varphi) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi \\ h_\varrho & h_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varrho \sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \varrho.$$

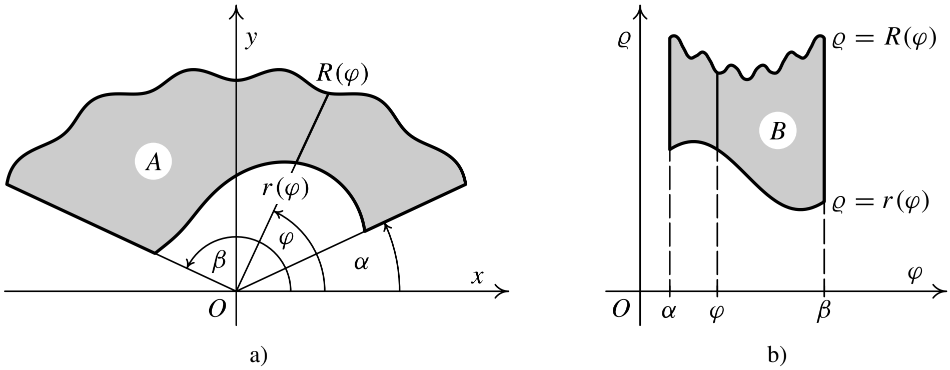
Připomeňme význam polárních souřadnic v rovině: Je-li T bod s kartézskými souřadnicemi $[x, y]$, značí ϱ vzdálenost bodu T od počátku O kartézské souřadnicové soustavy a φ úhel, který svírá vektor $\overrightarrow{OT}$ s kladnou poloosou x (viz obr. 3.2). Proměnná ϱ nabývá nezáporných hodnot, proměnná φ obvykle hodnot z vhodného intervalu délky 2π. Zobrazení do polárních souřadnic je regulární na množinách neobsahujících počátek. Transformace do polárních souřadnic se používá zvláště v případech, kdy popis množiny A v polárních souřadnicích je tvaru



Obr. 3.2

$$B: \quad \begin{aligned} \alpha \leqq \varphi \leqq \beta, \\ r(\varphi) \leqq \varrho \leqq R(\varphi), \end{aligned}$$

přičemž $\alpha < \beta$ jsou konstanty a r, R jsou spojité funkce na intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, viz obr. 3.3. Označíme-li F zobrazení dané rovnicemi (3.6), platí $F(B) = A$.



Obr. 3.3: Transformace do polárních souřadnic

Poznámka 3.9. V předchozím textu bylo uvedeno, že polární souřadnice φ nabývá obvykle hodnot z vhodného intervalu délky 2π. Slovo „obvykle" bylo použito záměrně, neboť existují i množiny, pro které toto tvrzení neplatí — viz obr. 3.4, kde $\varphi \in \langle 0, 3\pi\rangle$.

Transformace do eliptických (zobecněných polárních) souřadnic

Transformace do eliptických souřadnic ϱ, φ je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= a\varrho\cos\varphi, \\ y &= b\varrho\sin\varphi, \end{aligned} \tag{3.7}$$

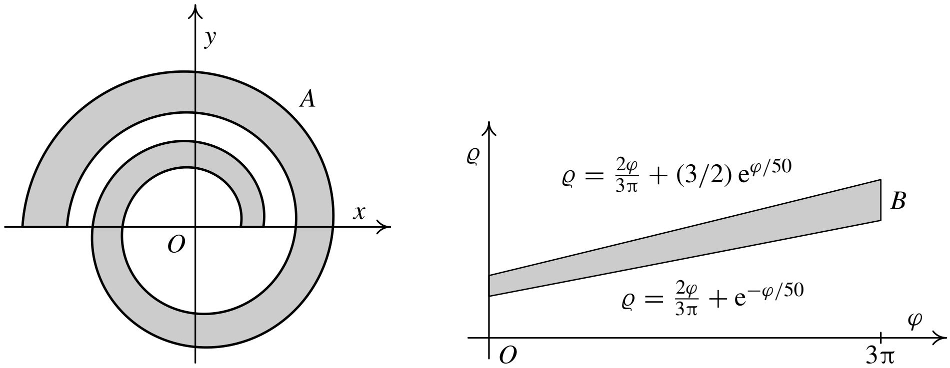
kde $a \neq 0$, $b \neq 0$ jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(\varrho, \varphi) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi \\ h_\varrho & h_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\varrho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\varrho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = ab\varrho.$$

Transformace do zobecněných eliptických souřadnic

Transformace do zobecněných eliptických souřadnic ϱ, φ je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= a\varrho\cos^n\varphi, \\ y &= b\varrho\sin^n\varphi, \end{aligned} \tag{3.8}$$



a) Kartézské souřadnice $[x, y]$ b) Polární souřadnice $[\varphi, \varrho]$

Obr. 3.4: Množina, jejíž polární souřadnice φ nenabývá hodnot z intervalu délky 2π.

kde $a \neq 0$, $b \neq 0$ a $n \in \mathbb{N}$ jsou konstanty. Pro jakobián zobrazení (3.8) v tomto případě platí

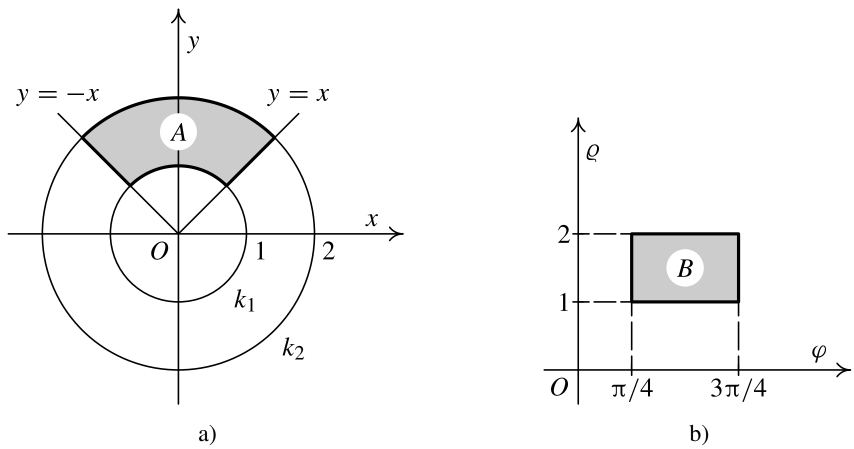
$$J(\varrho, \varphi) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi \\ h_\varrho & h_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos^n\varphi & -na\varrho\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi \\ b\sin^n\varphi & nb\varrho\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} =$$
$$= nab\varrho\cos^{n-1}\varphi\sin^{n-1}\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = nab\varrho\cos^{n-1}\varphi\sin^{n-1}\varphi.$$

Poznámka 3.10. Kromě uvedených obvyklých transformací připadají v úvahu i jiné transformace vhodné pro danou oblast integrace nebo daný integrand. Při výpočtu některých složitějších integrálů je mnohdy účelné provádět několik transformací postupně za sebou.

Příklad 3.11. Vypočtěte $\displaystyle\iint_A (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina A je určena podmínkami $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$, $y \geqq |x|$.

Řešení. Rovnice $x^2 + y^2 = 1$ a $x^2 + y^2 = 4$ určují kružnice k_1 a k_2 se středy v počátku O a poloměry 1 a 2. První podmínka tedy zadává mezikruží. Dále graf funkce $y = |x|$ je tvořen dvěma polopřímkami (osami prvního a druhého kvadrantu) o rovnicích $y = x$ a $y = -x$. Body splňující nerovnost $y \geqq |x|$ leží nad tímto grafem. Dohromady tudíž obě podmínky zadávají výseč mezikruží A z obr. 3.5 a).

Určíme, jak bude tato výseč popsána v polárních souřadnicích. Polopřímky vycházející z počátku O, které protínají množinu A, svírají s kladnou částí osy x



Obr. 3.5

úhel v rozmezí $\pi/4$ ($y = x$ je osa prvního kvadrantu) až $3\pi/4$ ($y = -x$ je osa druhého kvadrantu). Tedy $\pi/4 \leqq \varphi \leqq 3\pi/4$.

Libovolná taková polopřímka protíná množinu A v úsečce, jejíž koncové body mají od počátku O stále stejné vzdálenosti, a to $r = 1$ a $R = 2$. Tedy $1 \leqq \varrho \leqq 2$. To znamená, že množina B uspořádaných dvojic $[\varphi, \varrho]$ bude dvojrozměrný interval v rovině s kartézskými souřadnicemi φ, ϱ — viz obr. 3.5 b).

Snadno se ověří, že jsou splněny předpoklady věty 3.5. Za množinu Ω z této věty lze zvolit libovolný otevřený dvojrozměrný interval, který bude obsahovat uzavřený interval B, bude ležet v prvním kvadrantu a jehož horizontální rozměr bude menší než 2π. Zobrazení F dané rovnicemi (3.6) pak bude na Ω prosté a regulární. Protože integrand $f(x, y) = x^2 + y^2$ je funkce spojitá na A, lze zmíněnou větu skutečně použít. Podle (3.3) platí:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_A (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_B \big((\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2\big)\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \\
&= \iint\limits_B \varrho^3(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \iint\limits_B \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_1^2 \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho = \\
&= [\varphi]_{\pi/4}^{3\pi/4} \cdot \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_1^2 = \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{15\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Při výpočtu transformovaného integrálu jsme použili kromě Fubiniovy věty rovněž vztah (1.18). ▲

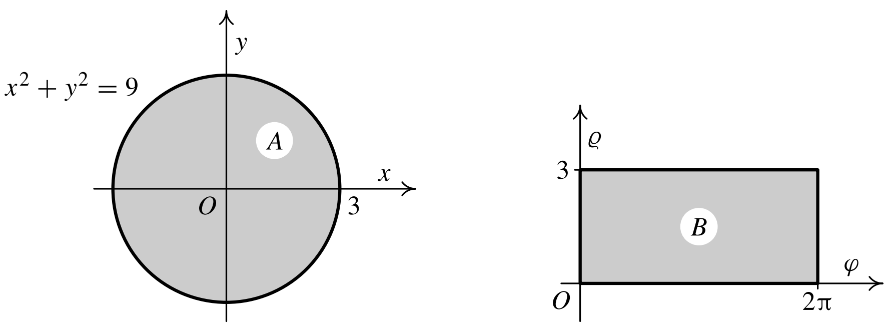
Příklad 3.12. Vypočtěte $\displaystyle\iint_A (2x-3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina A je určena podmínkou $x^2+y^2 \leqq 9$.

Řešení. Integračním oborem je kruh se středem v počátku souřadnic O a poloměrem 3 (obr. 3.6 a)). Použijeme opět transformaci do polárních souřadnic. Tentokrát integrační obor protíná libovolná polopřímka vycházející z počátku O. Tedy $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. Průnikem každé takové polopřímky s integračním oborem je úsečka délky 3 vycházející z počátku O, tedy $0 \leqq \varrho \leqq 3$. Množinou B uspořádaných dvojic $[\varphi, \varrho]$ je dvojrozměrný interval (obr. 3.6 b)).

Předpoklady věty 3.5 tentokrát nelze splnit. Zobrazení $F\colon B \to A$ není prosté na množině B. Všechny body dolní hraniční úsečky obdélníku B se zobrazí na počátek O. Dále pro každé $c \in \langle 0, 3\rangle$ se body $[0, c]$ a $[2\pi, c]$ ležící na levé resp. pravé hraniční úsečce obdélníku B zobrazí na tentýž bod $[c, 0] \in A$. Pokud bychom za B zvolili např. obdélník popsaný nerovnostmi $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $0 < \varrho \leqq 3$ doplněný o bod $[0, 0]$, bylo by sice zobrazení F prosté, ale B by nebyla uzavřená množina.

Lze však použít větu 3.8. Za množinu B_1 z této věty lze zvolit vnitřek intervalu B. Pak množina $B \smallsetminus B_1$ je tvořena čtyřmi hraničními úsečkami intervalu B a množina $F(B) \smallsetminus F(B_1)$ je tvořena hraniční kružnicí kruhu A a úsečkou spojující jeho střed O s bodem $[3, 0]$. Na množině B_1 je zobrazení F regulární i prosté a rovněž všechny další předpoklady věty 3.8 jsou splněny. Platí proto:

$$I = \iint_A (2x-3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B (2\varrho\cos\varphi - 3\varrho\sin\varphi)\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi =$$



a) b)

Obr. 3.6

$$= \iint_B \varrho^2(2\cos\varphi - 3\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}(2\cos\varphi - 3\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^3 \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \big[2\sin\varphi + 3\cos\varphi\big]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^3 = (0+3-0-3)(9-0) = 0.$$

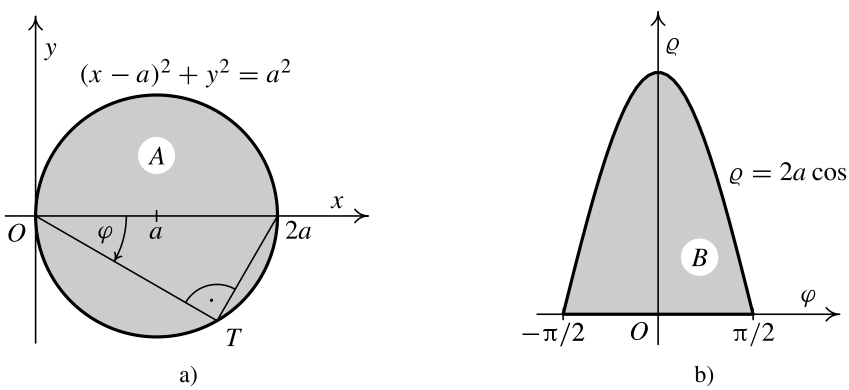
Při výpočtu transformovaného integrálu jsme opět použili kromě Fubiniovy věty i vztah (1.18). ▲

Příklad 3.13. Vypočtěte $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina A je určena podmínkou $x^2+y^2-2ax \leqq 0$, kde $a > 0$ je daná konstanta.

Řešení. Rovnice $x^2+y^2-2ax = 0$ zadává nějakou kuželosečku. Doplněním na čtverec určíme jakou:

$$x^2+y^2-2ax = (x-a)^2 - a^2 + y^2 = 0, \text{ takže } (x-a)^2+y^2 = a^2.$$

Jde o kružnici se středem v bodě $[a, 0]$ a poloměrem a. Integračním oborem A je tedy kruh — viz obr. 3.7 a). S ohledem na tvar integrované funkce použijeme transformaci do polárních souřadnic. Kdybychom se místo o zjednodušení integrandu pokusili zjednodušit integrační obor posunutím středu kruhu A do počátku s následným zavedením polárních souřadnic, integrovaná funkce by se nepříjemně zkomplikovala. Vzhledem k poloze množiny A (leží v prvním a čtvrtém kvadrantu) bude výhodnější volit rozmezí úhlů z intervalu $(-\pi, \pi\rangle$. Polopřímky vycházející z počátku O, které protínají množinu A i v jiných bodech než



Obr. 3.7

v počátku O, svírají totiž s kladnou částí osy x úhly z intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Budeme tedy mít $-\pi/2 \leqq \varphi \leqq \pi/2$.

Nyní určíme omezení pro ϱ. Z obrázku je zřejmé, že délky úseček $|\overline{OT}|$, které jsou průnikem uvažovaných polopřímek s množinou A, se budou měnit a budou záviset na úhlu φ. Dosazením polárních souřadnic do rovnice kružnice obdržíme:

$$(\varrho \cos \varphi)^2 + (\varrho \sin \varphi)^2 - 2a\varrho \cos \varphi = 0, \text{ odkud } \varrho(\varrho - 2a \cos \varphi) = 0.$$

Hodnotě $\varrho = 0$ odpovídá počátek O, pro druhý průsečík polopřímky s kružnicí platí $\varrho = 2a \cos \varphi$. (Tento výsledek lze snadno zdůvodnit i geometricky. V trojúhelníku s vrcholy O, $[2a, 0]$ a T (obr. 3.7 a)) je podle Thaletovy věty u vrcholu T pravý úhel. Z definice kosinu vyplývá, že $\varrho = |\overline{OT}| = 2a \cos \varphi$.) Celkově tedy dostáváme, že

$$B: \begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \leqq \varrho \leqq 2a \cos \varphi. \end{array}$$

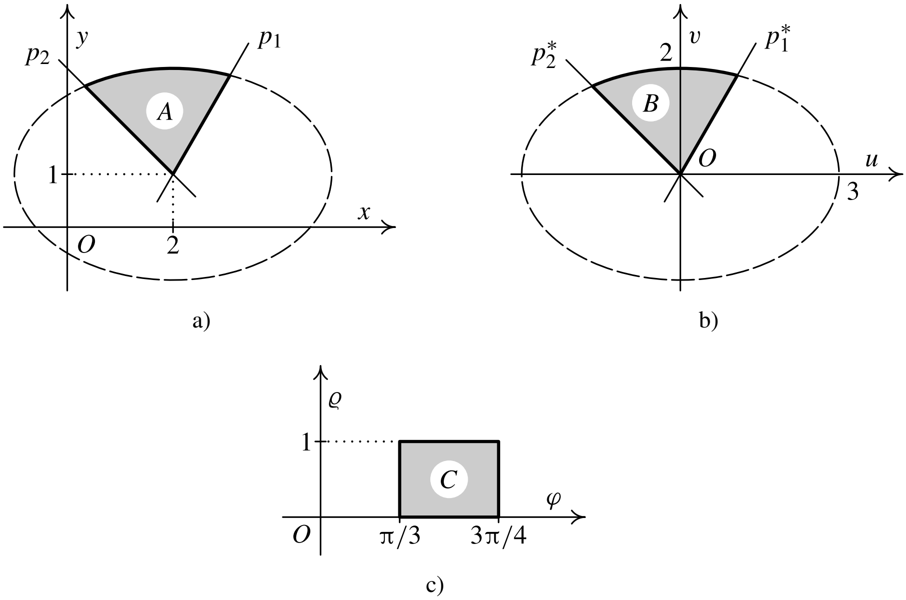
Množina B je tudíž elementární vzhledem k φ (obr. 3.7 b)).

Použitím věty 3.8 dostaneme (zdůvodněte sami obdobně jako v předchozím příkladu, že všechny její předpoklady jsou splněny):

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_A \sqrt{x^2 + y^2}\, dx dy = \iint\limits_B \sqrt{(\varrho \cos \varphi)^2 + (\varrho \sin \varphi)^2}\, \varrho \, d\varrho d\varphi = \\
&= \iint\limits_B \varrho^2 \, d\varrho d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2a \cos \varphi} \varrho^2 \, d\varrho \right) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{\varrho^3}{3} \right]_0^{2a \cos \varphi} d\varphi = \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3} a^3 \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{8}{3} a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \, d\varphi = \\
&= \left| \begin{array}{c} \sin \varphi = t \\ \cos \varphi \, d\varphi = dt \\ -\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow -1, \ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \frac{8}{3} a^3 \int_{-1}^{1} (1 - t^2) \, dt = \frac{8}{3} a^3 \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{32}{9} a^3.
\end{aligned}$$

Na výpočet transformovaného integrálu jsme použili Fubiniovu větu 1.55, vzniklý jednoduchý integrál jsme pak počítali substituční metodou. ▲

Příklad 3.14. Vypočtěte $\displaystyle\iint\limits_A (x + y^2)\, dx dy$, kde množina A je dána nerovnostmi $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} \leqq 1$, $2x - \sqrt{3}\, y + \sqrt{3} - 4 \leqq 0$ a $2x + 3y - 7 \geqq 0$.



Obr. 3.8: Eliptická výseč a eliptické souřadnice

Řešení. První nerovnost vyjadřuje elipsu (vnitřek včetně hranice) se středem v bodě [2, 1], která má poloosy o velikostech 3 a 2 a jejíž osy jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Další dvě nerovnosti určují poloroviny. Označme $p_1\colon 2x - \sqrt{3}\,y + \sqrt{3} - 4 = 0$ a $p_2\colon 2x + 3y - 7 = 0$ jejich hraniční přímky. Dosazením se můžeme přesvědčit, že obě tyto přímky procházejí středem elipsy. Přímka p_1 má kladnou směrnici $2/\sqrt{3}$, přímka p_2 má zápornou směrnici $-2/3$. Integrační obor A je znázorněn na obr. 3.8 a). Jde o výseč elipsy.

K výpočtu integrálu použijeme nejdříve posunutí

$$\begin{aligned} x &= u + 2, \\ y &= v + 1, \end{aligned} \qquad |J| = 1,$$

po kterém přejde střed původní elipsy do počátku. Dosazením do nerovnosti určující původní elipsu a do rovnic hraničních přímek dostaneme

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} \leqq 1, \qquad 2u - \sqrt{3}\,v = 0, \qquad 2u + 3v = 0.$$

Po posunutí tedy množina A přešla v množinu $B = \left\{[u, v] \in \mathbb{R}^2\colon \frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} \leqq 1,\ 2u - \sqrt{3}\,v \leqq 0,\ 2u + 3v \geqq 0\right\}$, což je shodná výseč shodné elipsy se středem v počátku souřadnicové soustavy proměnných u, v; přímky p_1, p_2 přitom přešly v přímky p_1^*, p_2^* procházející počátkem (obr. 3.8 b)).

Nyní provedeme transformaci množiny B do eliptických souřadnic

$$\begin{aligned} u &= 3\varrho\cos\varphi, \\ v &= 2\varrho\sin\varphi, \end{aligned} \qquad |J| = 6\varrho.$$

Dosazením do nerovnosti určující elipsu dostaneme

$$\frac{(3\varrho\cos\varphi)^2}{9} + \frac{(2\varrho\sin\varphi)^2}{4} \leqq 1, \text{ takže } \varrho^2 \leqq 1.$$

Tedy $0 \leqq \varrho \leqq 1$.

Dále dosadíme do rovnic posunutých přímek. Vyjde nám

$$\begin{aligned} p_1^*&: 2\cdot 3\varrho\cos\varphi - \sqrt{3}\cdot 2\varrho\sin\varphi = 0, \\ p_2^*&: 2\cdot 3\varrho\cos\varphi + 3\cdot 2\varrho\sin\varphi = 0, \end{aligned} \qquad \text{odkud} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg}\varphi &= -1. \end{aligned}$$

Přímce p_1^* tudíž odpovídá hodnota $\varphi = \pi/3$ a přímce p_2^* hodnota $\varphi = 3\pi/4$, takže $\pi/3 \leqq \varphi \leqq 3\pi/4$. Množina B tedy přešla v množinu C, která je obdélníkem (obr. 3.8 c)):

$$C: \begin{aligned} \pi/3 \leqq \varphi \leqq 3\pi/4\,, \\ 0 \leqq \varrho \leqq 1. \end{aligned}$$

Použijeme větu 3.8 (ověřte sami, že všechny její předpoklady jsou splněny):

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_A (x + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_B \bigl(u + 2 + (v+1)^2\bigr)\cdot 1\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= \iint\limits_B \bigl(u + v^2 + 2v + 3\bigr)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= \iint\limits_C \Bigl(3\varrho\cos\varphi + (2\varrho\sin\varphi)^2 + 4\varrho\sin\varphi + 3\Bigr)6\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \\ &= 6\iint\limits_C (3\varrho^2\cos\varphi + 4\varrho^3\sin^2\varphi + 4\varrho^2\sin\varphi + 3\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \\ &= 24\iint\limits_C \varrho^3\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi + 6\iint\limits_C \varrho^2(3\cos\varphi + 4\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi + \\ &\quad + 18\iint\limits_C \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Další výpočet provedeme odděleně pro každý ze tří integrálů I_1, I_2, I_3. Na každý z nich použijeme Fubiniovu větu a vztah (1.18). V prvním integrálu použijeme identitu $\sin^2\varphi = (1-\cos 2\varphi)/2$.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 12\int_0^1 \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (1-\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 3\big[\varrho^4\big]_0^1 \cdot \Big[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big]_{\pi/3}^{3\pi/4} = \\
&= 3\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}(-1) - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{4} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\,,\\
I_2 &= 6\int_0^1 \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (3\cos\varphi + 4\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\big[\varrho^3\big]_0^1 \cdot \big[3\sin\varphi - 4\cos\varphi\big]_{\pi/3}^{3\pi/4} = \\
&= 2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\frac{1}{2}\right) = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 4,\\
I_3 &= 18\int_0^1 \varrho\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_{\pi/3}^{3\pi/4} \mathrm{d}\varphi = 9\big[\varrho^2\big]_0^1 \cdot \big[\varphi\big]_{\pi/3}^{3\pi/4} = 9\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{15\pi}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Sečtením dostaneme celkový výsledek:

$$
I = 5\pi + \frac{11}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4} + 7\sqrt{2}.
$$

▲

Příklad 3.15. Transformací $u = x+y$, $v = x-y$ vypočtěte $\displaystyle\iint_M (x^2-y^2)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon 0 \leqq y \leqq x \leqq 1\big\}$.

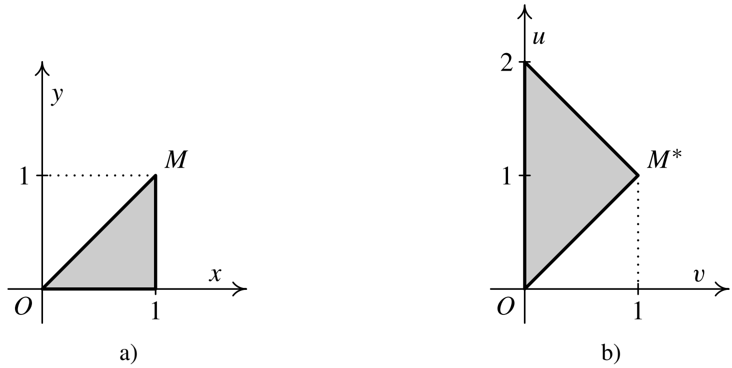
Řešení. Množinu M lze zapsat ve tvaru $\big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\big\}$. Geometricky se jedná o trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$ (obr. 3.9 a)). Inverzní transformace k transformaci $u = x+y$, $v = x-y$ je transformace $F\colon x = (u+v)/2$, $y = (u-v)/2$. Snadno se ověří, že pro její jakobián platí $J = -1/2$. Dosazením vztahů $x = (u+v)/2$, $y = (u-v)/2$ do nerovností $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq x$ dostáváme

$$
0 \leqq \frac{1}{2}(u+v) \leqq 1, \quad 0 \leqq \frac{1}{2}(u-v) \leqq \frac{1}{2}(u+v).
$$

Odtud plynou nerovnosti

$$
0 \leqq v, \quad u \geqq v, \quad v \leqq 1, \quad u \leqq 2-v.
$$

Naopak se snadno ověří, že z posledních nerovností plynou původní nerovnosti $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq x$. Množina M tedy transformací F^{-1} přejde v množinu



Obr. 3.9: Afinní transformace

$M^* = \{[u, v] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq v \leqq 1,\ v \leqq u \leqq 2 - v\}$ (obr. 3.9 b)). Užitím věty 1.55 nyní dostáváme

$$\iint_M (x^2 - y^2)^2 \, dx dy = \iint_{M^*} u^2 v^2 \frac{1}{2} \, du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_v^{2-v} u^2 v^2 \, du \right) dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{u^3 v^2}{3} \right]_v^{2-v} dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{8v^2 - 12v^3 + 6v^4 - v^5 - v^5}{3} \, dv =$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 \left(8v^2 - 12v^3 + 6v^4 - 2v^5\right) dv = \frac{1}{3} \left[\frac{4}{3} v^3 - \frac{6}{4} v^4 + \frac{3}{5} v^5 - \frac{1}{6} v^6 \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3} \, \frac{40 - 45 + 18 - 5}{30} = \frac{4}{45} .$$

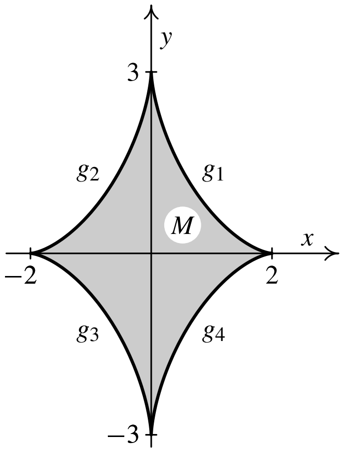
▲

Příklad 3.16. Vypočtěte integrál $\iint_M (x + 1) \, dx dy$, kde

$$M = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} \leqq 1 \right\} .$$

Řešení. Množina M je omezena uzavřenou křivkou γ, která je dána rovností

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} = 1, \tag{3.9}$$



Obr. 3.10: Množina M omezená křivkou $\gamma\colon \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} = 1$

prochází body [2,0], [0,3], [−2,0], [0,−3] a je tvořena grafy čtyř funkcí $g_j(x)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ — viz obr. 3.10. Ze vztahu (3.9) lze snadno získat funkční předpisy pro funkce $g_j(x)$ a výpočtem jejich první a druhé derivace ověřit, že grafy těchto funkcí mají skutečně tvar nakreslený v obr. 3.10.

K výpočtu zadaného integrálu použijeme transformace do zobecněných eliptických souřadnic $x = 2\varrho\cos^3\varphi$, $y = 3\varrho\sin^3\varphi$ — viz 3.8. Pro příslušný jakobián platí $J = 18\varrho\cos^2\varphi\sin^2\varphi$. Dosazením transformačních vztahů do nerovnosti

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} \leqq 1$$

dostáváme $\varrho^{2/3}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \leqq 1$, což je splněno právě tehdy, když $\varrho \leqq 1$. Množině M v polárních souřadnicích odpovídá obdélník $M^* = \left\{[\varphi, \varrho] \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \varrho \leqq 1\right\}$. Ověřte si sami, že na jeho vnitřku je transformace prostá. Nyní

$$\iint\limits_M (x+1) = \iint\limits_{M^*} (2\varrho\cos^3\varphi + 1)18\varrho\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 36\int_0^{2\pi}\cos^5\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho + 18\iint\limits_{M^*}\varrho\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 36\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\varphi)^2\sin^2\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho + \frac{9}{2}\iint\limits_{M^*}\varrho\sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 36\int_0^{2\pi}(\sin^6\varphi - 2\sin^4\varphi + \sin^2\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho +$$
$$+ \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1\varrho\,\mathrm{d}\varrho =$$

$$= 36\left[\frac{\sin^7\varphi}{7} - 2\frac{\sin^5\varphi}{5} + \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi}\cdot\int_0^1\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho +$$
$$+ \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= 0\cdot\int_0^1\varrho^2\,\mathrm{d}r + \frac{9}{8}\left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{9}{8}\cdot 2\pi = \frac{9}{4}\pi.$$

▲

3.2. Transformace trojného integrálu

Problematika transformace trojného integrálu je zcela analogická jako u transformace dvojného integrálu. Definice spojitě diferencovatelného zobrazení, jeho jakobiánu a regulárního zobrazení mají v trojrozměrném případě následující podobu:

Definice 3.17. Nechť $B \subseteq \mathbb{R}^3$ a nechť g, h, k jsou funkce definované na množině B. Buď $F: B \to \mathbb{R}^3$ zobrazení přiřazující každému bodu $[u, v, w] \in B$ bod $F(u, v, w) = [g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)]$. Řekneme, že zobrazení F je *spojitě diferencovatelné* v B, jestliže existuje otevřená množina $\Omega \supseteq B$ taková, že funkce g, h, k lze rozšířit na Ω takovým způsobem, aby měly v Ω spojité parciální derivace prvního řádu podle všech tří proměnných u, v, w.

Je-li $F: B \to \mathbb{R}^3$ spojitě diferencovatelné zobrazení v B, determinant

$$J = \begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix}$$

se při označení použitém v definici 3.17 nazývá *jakobián* zobrazení F. Jakobián $J: B \to \mathbb{R}$ je funkcí proměnných u, v a w.

Definice 3.18. Spojitě diferencovatelné zobrazení $F: B \to \mathbb{R}^3$ na otevřené množině B se nazývá *regulární*, je-li jeho jakobián J různý od nuly v každém bodě množiny B.

Větu o transformaci trojného integrálu analogickou větě 3.5 lze zformulovat takto:

Věta 3.19. *Nechť $B \subseteq \mathbb{R}^3$ je uzavřená měřitelná množina a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $B \subseteq \Omega$. Nechť $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ je prosté regulární zobrazení s jakobiánem J takové, že $F(u, v, w) = [g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)]$ pro každé $[u, v, w] \in B$. Nechť funkce f proměnných x, y a z je spojitá v množině $A = F(B)$.*

Pak platí vztah

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&\qquad = \iiint\limits_B f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w))|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Podobně jako u dvojného integrálu je někdy užitečná následující obecnější, avšak poněkud komplikovanější věta, analogická větě 3.8:

Věta 3.20. *Nechť* $B_1 \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^3$, *kde* B_1 *je otevřená množina,* B *je měřitelná množina a platí* $\mathrm{m}_3(B \setminus B_1) = 0$.

Buď $F\colon B \to \mathbb{R}^3$ *spojitě diferencovatelné zobrazení s jakobiánem* J, *které je regulární a prosté v* B_1. *Označme* $A = F(B)$, $A_1 = F(B_1)$. *Předpokládejme, že množina* A *je měřitelná a platí* $\mathrm{m}_3(A \setminus A_1) = 0$.

Buď funkce f *ohraničená na množině* A *a spojitá na množině* A_1. *Nechť funkce s hodnotou* $f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w))|J(u,v,w)|$ *v každém bodě* $[u,v,w] \in B$ *je ohraničená.*

Pak platí vztah (3.10), *tj.*

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&\qquad = \iiint\limits_B f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w))|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.
\end{aligned}
$$

3.2.1. Některé běžné typy transformací trojného integrálu

Uveďme nyní podrobněji několik běžných, často užívaných transformací $x = g(u,v,w)$, $y = h(u,v,w)$, $z = k(u,v,w)$ trojného integrálu.

Posunutí

Posunutí (*translace*) je dáno rovnicemi

$$
\begin{aligned}
x &= u + a,\\
y &= v + b,\\
z &= w + c,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

kde a, b, c jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dilatace

Dilatace (ve speciálním případě $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ *změna měřítek na souřadnicových osách*) je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= au, \\ y &= bv, \\ z &= cw, \end{aligned} \tag{3.12}$$

kde a, b, c jsou nenulové konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

Transformace do válcových souřadnic

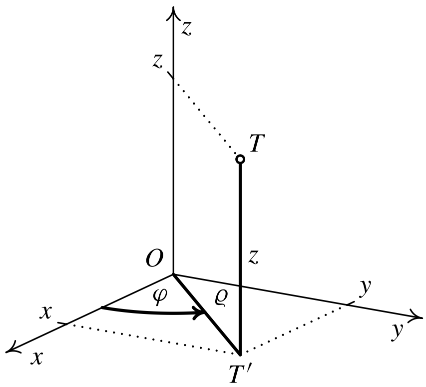
Transformace do válcových (cylindrických) souřadnic ϱ, φ, z je dána vztahy

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, \\ y &= \varrho \sin \varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Jakobián zobrazení (3.13) je roven

$$J(\varrho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi & g_z \\ h_\varrho & h_\varphi & h_z \\ k_\varrho & k_\varphi & k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho \cos^2 \varphi + \varrho \sin^2 \varphi = \varrho.$$

Všimněme si nyní geometrického významu cylindrických souřadnic bodu T majícího kartézské souřadnice $[x, y, z]$. Označme T' kolmý průmět bodu T do souřadnicové roviny xy, tedy T' má souřadnice $[x, y, 0]$. Bod T' vyjádříme v polárních souřadnicích $[\varrho, \varphi]$ v rovině xy. Polohu bodu T v prostoru lze nyní určit trojicí čísel $[\varrho, \varphi, z]$, což jsou cylindrické souřadnice bodu T — viz obr. 3.11. Podotkněme ještě, že vzdálenost ϱ je nezáporná, úhel φ obvykle volíme



Obr. 3.11: Cylindrické souřadnice

z vhodného intervalu délky 2π a souřadnice z se nemění. Všimněme si, že při konstantním $\varrho_0 > 0$ je rovnicí $\varrho = \varrho_0$ určena „nekonečná" rotační válcová plocha s osou v souřadnicové ose z, zatímco při $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ je rovnicí $\varphi = \varphi_0$ v $\mathbb{R}^3$ dána polorovina, jejíž hranicí je souřadnicová osa z. Transformace do válcových je výhodné užívat zejména v případech, kdy integrační obor je rotační těleso s osou rotace v ose z, nebo jeho vhodná část. V případě, že integrand je těleso mající osu rotace v ose x nebo v ose y, je možné použít patřičně modifikované transformace do válcových souřadnic.

Transformace do sférických souřadnic

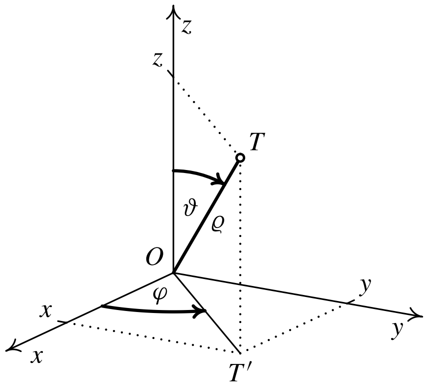
Transformace do sférických (kulových) souřadnic ϱ, φ, ϑ je dána vztahy

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\varphi \sin\vartheta, \\ y &= \varrho \sin\varphi \sin\vartheta, \\ z &= \varrho \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Jakobián zobrazení (3.14) je roven

$$J(\varrho,\varphi,\vartheta) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi & g_\vartheta \\ h_\varrho & h_\varphi & h_\vartheta \\ k_\varrho & k_\varphi & k_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -\varrho\sin\varphi\sin\vartheta & \varrho\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \varrho\cos\varphi\sin\vartheta & \varrho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -\varrho\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= -\varrho^2\cos^2\varphi\sin^3\vartheta - \varrho^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \varrho^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \\ &\quad - \varrho^2\sin^2\varphi\sin^3\vartheta = -\varrho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\cos^2\vartheta\sin\vartheta + \\ &\quad - \varrho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\sin^3\vartheta = -\varrho^2\sin\vartheta(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = -\varrho^2\sin\vartheta. \end{aligned}$$



Obr. 3.12: Sférické souřadnice

Věnujme nyní pozornost geometrickému významu sférických souřadnic bodu T majícího kartézské souřadnice $[x, y, z]$. Označme T' kolmý průmět bodu T do souřadnicové roviny xy, který má souřadnice $[x, y, 0]$. Označme ϱ vzdálenost bodu T od počátku O kartézské souřadnicové soustavy. Dále označme φ úhel, který svírá polopřímka $\overrightarrow{OT'}$ s kladnou částí osy x (analogicky jako v polárních souřadnicích). Konečně označme ϑ úhel, který svírá polopřímka $\overrightarrow{OT}$ s kladnou částí osy z. Polohu bodu T v prostoru pak určíme trojicí čísel $[\varrho, \varphi, \vartheta]$, což jsou sférické souřadnice bodu T — viz obr. 3.12. Protože $\triangle OT'T$ je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu T', platí $\left|OT'\right| = \varrho \sin \vartheta$ a $z = \varrho \cos \vartheta$. Přitom vzdálenost ϱ je nezáporná, úhel φ volíme obvykle z intervalu délky 2π a úhel ϑ je obvykle z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Všimněme si, že při konstantním $\varrho_0 > 0$ je rovnicí $\varrho = \varrho_0$ určena kulová plocha se středem v počátku o poloměru ϱ_0, při konstantním $\vartheta_0 \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ je rovnicí $\vartheta = \vartheta_0$ v $\mathbb{R}^3$ dána část rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku a osou v souřadnicové ose z, zatímco při konstantním $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ rovnice $\varphi = \varphi_0$ v R^3 popisuje polorovinu, jejíž hranicí je souřadnicová osa z. Transformace do sférických souřadnic se používá hlavně v případě, kdy integrační obor je koule nebo její vhodná část.

Transformace do zobecněných válcových souřadnic

Transformace do zobecněných válcových (cylindrických) souřadnic ϱ, φ, z je dána vztahy

$$\begin{aligned} x &= a\varrho \cos \varphi, \\ y &= b\varrho \sin \varphi, \\ z &= z, \end{aligned} \tag{3.15}$$

kde $a \neq 0$, $b \neq 0$ jsou konstanty. Jakobián zobrazení (3.15) je roven

$$J(\varrho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi & g_z \\ h_\varrho & h_\varphi & h_z \\ k_\varrho & k_\varphi & k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos\varphi & -a\varrho \sin\varphi & 0 \\ b \sin\varphi & b\varrho \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= ab\varrho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = ab\varrho.$$

Používá se nejčastěji, je-li integrační obor eliptický válec nebo jeho vhodná část.

Transformace do zobecněných sférických souřadnic

Transformace do zobecněných sférických (kulových) souřadnic ϱ, φ, ϑ je dána vztahy

$$\begin{aligned} x &= a\varrho \cos\varphi \sin\vartheta, \\ y &= b\varrho \sin\varphi \sin\vartheta, \\ z &= c\varrho \cos\vartheta, \end{aligned} \tag{3.16}$$

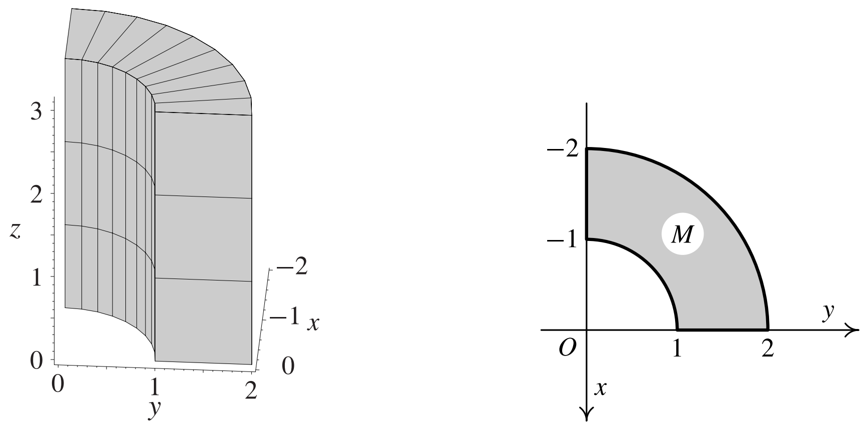
kde $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ jsou konstanty. Jakobián zobrazení (3.16) je roven

$$J(\varrho, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi & g_\vartheta \\ h_\varrho & h_\varphi & h_\vartheta \\ k_\varrho & k_\varphi & k_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos\varphi \sin\vartheta & -a\varrho \sin\varphi \sin\vartheta & a\varrho \cos\varphi \cos\vartheta \\ b \sin\varphi \sin\vartheta & b\varrho \cos\varphi \sin\vartheta & b\varrho \sin\varphi \cos\vartheta \\ c \cos\vartheta & 0 & -c\varrho \sin\vartheta \end{vmatrix} =$$
$$= abc \begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta & -\varrho \sin\varphi \sin\vartheta & \varrho \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta & \varrho \cos\varphi \sin\vartheta & \varrho \sin\varphi \cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -\varrho \sin\vartheta \end{vmatrix} = -abc\varrho^2 \sin\vartheta.$$

Používá se nejčastěji, je-li integrační obor elipsoid nebo jeho vhodná část.

Příklad 3.21. Vypočtěte $\displaystyle\iiint\limits_A xz\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina A je množina omezená plochami $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=3$ a ležící v průniku poloprostorů $x \leqq 0$, $y \geqq 0$.

Řešení. Rovnice $x^2+y^2=1$ a $x^2+y^2=4$ zadávají rotační válcové plochy s osou v souřadnicové ose z o poloměrech 1 a 2. Ty určují dutý válec, z něhož je rovinami $z=0$ a $z=3$ odříznuta část o výšce 3. Z ní pak nerovnosti $x \leqq 0$ a $y \geqq 0$ určí jednu čtvrtinu — viz obr. 3.13 a). Průmětem tohoto tělesa do roviny xy je množina M, představující jednu čtvrtinu mezikruží ve druhém kvadrantu — viz obr. 3.13 b).



a) b)

Obr. 3.13

Vyjádření množiny M v polárních souřadnicích je snadné — zřejmě $\pi/2 \leqq \varphi \leqq \pi$ a $1 \leqq \varrho \leqq 2$. Obrazem množiny A v transformaci do cylindrických souřadnic je tedy množina

$$B: \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\leqq \varphi \leqq \pi, \\ 1 &\leqq \varrho \leqq 2, \\ 0 &\leqq z \leqq 3, \end{aligned}$$

což je trojrozměrný interval. Použijeme větu 3.19. Za množinu Ω v ní lze zvolit trojrozměrný otevřený interval $\Omega \supset B$, který bude mít jen nepatrně větší rozměry než B. Na něm bude zobrazení F dané rovnicemi (3.13) regulární a prosté. Vzniklý trojný integrál vypočteme pomocí Fubiniovy věty. Výpočet proběhne takto:

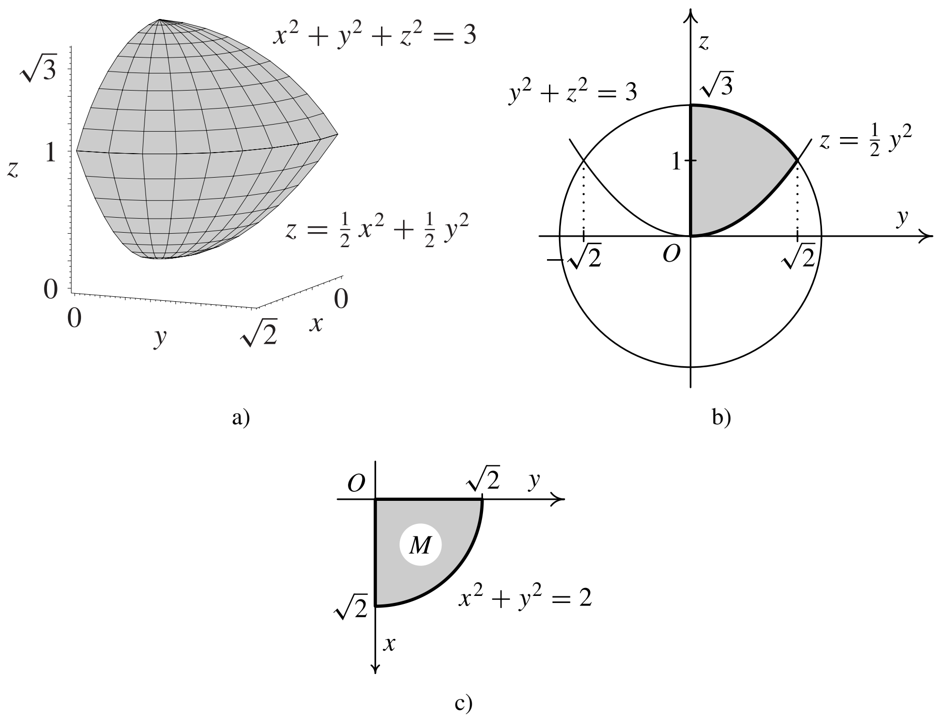
$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_A xz\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\ &= \iiint\limits_B \varrho\cos\varphi \cdot z\,\sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi} \cdot \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \\ &= \iiint\limits_B \varrho^3 z\cos\varphi\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_{\pi/2}^{\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_1^2 \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^3 z\,\mathrm{d}z = \\ &= \big[\sin\varphi\big]_{\pi/2}^{\pi} \cdot \left[\frac{1}{4}\varrho^4\right]_1^2 \cdot \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^3 = (0-1)\cdot\frac{16-1}{4}\cdot\frac{9-0}{2} = -\frac{135}{8}\,. \end{aligned}$$

▲

Příklad 3.22. Vypočtěte $\displaystyle\iiint\limits_A 4xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina A je určena podmínkami $z \geqq x^2/2 + y^2/2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3$, $x \geqq 0$ a $y \geqq 0$.

Řešení. Rovnice $z = x^2/2+y^2/2$ určuje rotační paraboloid s osou v souřadnicové ose z a vrcholem v počátku. Rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ určuje kulovou plochu se středem v počátku o poloměru $\sqrt{3}$. Půjde tedy o rotační těleso, které je zdola omezené paraboloidem a shora kulovou plochou. Nerovnosti $x \geqq 0$ a $y \geqq 0$ pak říkají, že z tohoto tělesa máme uvažovat jen čtvrtinu — viz obr. 3.14 a).

Abychom množinu A popsali v cylindrických souřadnicích, uvažujme její řez souřadnicovou rovinou $x = 0$. Výsledek je znázorněn na obr. 3.14 b). Určíme souřadnice průsečíku paraboly $z = y^2/2$ a kružnice $y^2 + z^2 = 3$. Dosazením první rovnice do druhé obdržíme kvadratickou rovnici $z^2 + 2z - 3 = 0$, která má kořeny 1 a -3. Pro nás má smysl pouze kladný kořen. K němu pak určíme, že $y = \pm\sqrt{2}$. Průsečíky tedy mají souřadnice $\left[\pm\sqrt{2}, 1\right]$. Z toho je vidět, že



Obr. 3.14

kolmým průmětem M množiny A do roviny xy je čtvrtkruh se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{2}$, ležící v prvním kvadrantu — viz obr. 3.14 c).

Vyjádření množiny M v polárních souřadnicích je snadné: $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$ a $0 \leqq \varrho \leqq \sqrt{2}$. Dále dosazením z rovnic (3.13) do rovnice paraboloidu dostaneme

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi) = \frac{1}{2}\varrho^2$$

a do rovnice kulové plochy (její horní poloviny) dostaneme

$$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2} = \sqrt{3 - \varrho^2\cos^2\varphi - \varrho^2\sin^2\varphi} = \sqrt{3 - \varrho^2}.$$

Množina A se tedy při přechodu k cylindrickým souřadnicím transformuje na množinu B, jejíž popis je:

$$B: \quad \begin{aligned} 0 \leqq \varphi &\leqq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqq \varrho &\leqq \sqrt{2}, \\ \frac{1}{2}\varrho^2 \leqq z &\leqq \sqrt{3 - \varrho^2}. \end{aligned}$$

Větu 3.19 tentokrát není možné použít. Všechny body z B tvaru $[0, \varphi, z]$, kde $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$, se transformací F danou rovnicemi (3.13) zobrazí na body $[0, 0, z]$, tj. F není prosté ani na množině B. Jsou však splněny předpoklady věty 3.20, když za množinu B_1 zvolíme vnitřek množiny B. Na vzniklý integrál použijeme Fubiniovu větu. Vzhledem k popisu množiny B je přitom nutné, aby integrace vzhledem k proměnné z proběhla dříve než integrace vzhledem k proměnné ϱ. Pořadí integrace vzhledem k proměnné φ je libovolné. Při výpočtu použijeme mimo jiné vzorec $2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$. Vyjde nám:

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_A 4xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_B 4\varrho\cos\varphi \cdot \varrho\sin\varphi \cdot z \cdot \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \\ &= \iiint\limits_B 2\varrho^3 z\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \\ &= \int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_{\varrho^2/2}^{\sqrt{3-\varrho^2}} 2\varrho^3 z\sin 2\varphi\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varrho\right\}\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{\sqrt{2}} \varrho^3\sin 2\varphi\left[z^2\right]_{\varrho^2/2}^{\sqrt{3-\varrho^2}}\mathrm{d}\varrho\right\}\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{\sqrt{2}} \varrho^3\sin 2\varphi\left(3 - \varrho^2 - \frac{1}{4}\varrho^4\right)\mathrm{d}\varrho\right\}\mathrm{d}\varphi = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{\sqrt{2}} \sin 2\varphi \left(3\varrho^3 - \varrho^5 - \frac{1}{4}\varrho^7 \right) \mathrm{d}\varrho \right\} \mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \left[\frac{3}{4}\varrho^4 - \frac{1}{6}\varrho^6 - \frac{1}{32}\varrho^8 \right]_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \left(3 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{7}{6} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \\
&= -\frac{7}{12} \left[\cos 2\varphi \right]_0^{\pi/2} = -\frac{7}{12}(-1-1) = \frac{7}{6}.
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 3.23. Vypočtěte $\iiint\limits_A \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+z^2+1}$, kde množina A je omezená plochami $y = 2 - \sqrt{x^2+z^2}$ a $y = 1$.

Řešení. Rovnice první plochy je rovnicí části rotační kuželové plochy v poloprostoru $y \leqq 2$ s osou rotace v souřadnicové ose y a vrcholem v bodě $[0, 2, 0]$. Toto je vidět ze skutečnosti, že řezy plochy rovinami $y = c$, kde $c < 2$, jsou kružnice, zatímco průměty plochy do rovin $x = 0$, resp. $z = 0$, mají rovnice $y = 2 - |z|$, resp. $y = 2 - |x|$. Množina A je tedy kuželem na obr. 3.15 a). Můžeme ji snadno popsat v cylindrických souřadnicích, jen musíme oproti rovnicím (3.13) zaměnit role souřadnicových os, což nemá vliv na vyjádření jakobiánu v polárních souřadnicích příslušné souřadnicové roviny. Zvolíme

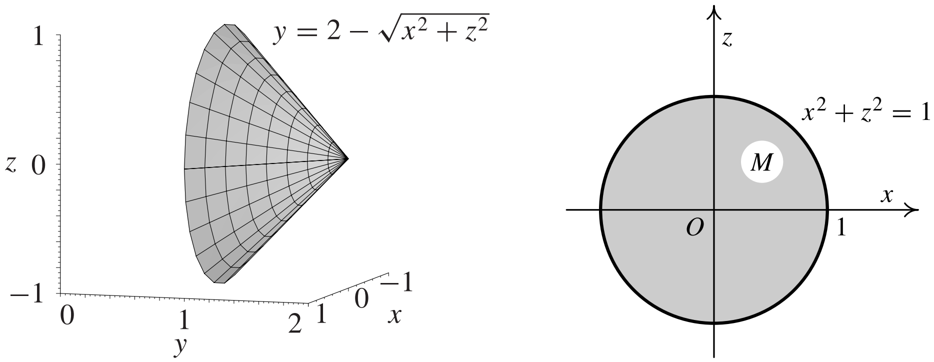
$$
\begin{aligned}
x &= \varrho \cos\varphi, \\
z &= \varrho \sin\varphi, \qquad |J| = \varrho. \\
y &= y,
\end{aligned}
$$

Průmětem M množiny A do souřadnicové roviny xz je kruh. Jeho rovnici dostaneme dosazením vztahu $y = 1$ do rovnice kuželové plochy. Vyjde $x^2 + z^2 = 1$, takže poloměr kruhu je jedna (obr. 3.15 b)). Bude tedy $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ a $0 \leqq \varrho \leqq 1$. Dále dosadíme vyjádření x a z pomocí φ a ϱ do rovnice poloviny kuželové plochy. Vyjde

$$
y = 2 - \sqrt{x^2+z^2} = 2 - \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi} = 2 - \varrho.
$$

Množina A se tedy transformuje na množinu B, jejíž popis je:

$$
B\colon \begin{aligned}
0 &\leqq \varphi \leqq 2\pi, \\
0 &\leqq \varrho \leqq 1, \\
1 &\leqq y \leqq 2 - \varrho.
\end{aligned}
$$



a) b)

Obr. 3.15

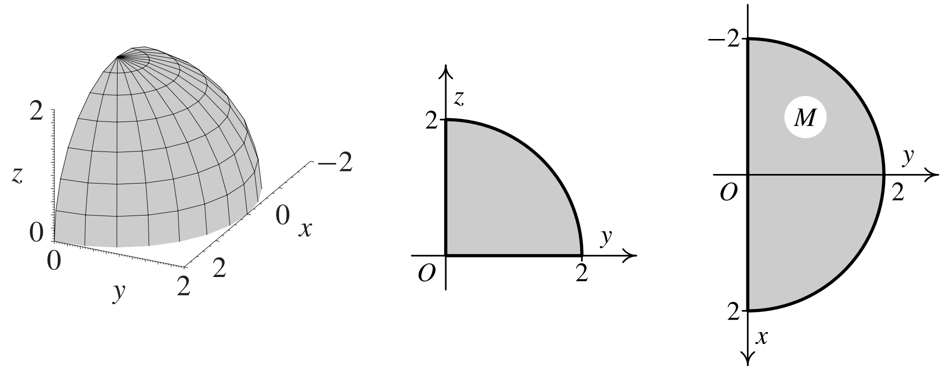
Použijeme větu 3.20. Za množinu B_1 se v ní zvolí vnitřek množiny B. Výsledný integrál upravíme pomocí Fubiniovy věty. Vzhledem k popisu množiny B musí integrace podle y předcházet integraci podle ϱ. Integrace podle φ může proběhnout kdykoli. Dostaneme:

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_A \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+z^2+1} = \iiint\limits_B \frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}y}{\varrho^2+1} = \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_1^{2-\varrho} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\varrho\,\mathrm{d}\varphi}{\varrho^2+1} \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}\varrho = \int_0^1 \left\{ \int_1^{2-\varrho} \frac{\varrho}{\varrho^2+1} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}\varrho = \\
&= \int_0^1 \frac{2\pi\varrho}{\varrho^2+1} \left[y\right]_1^{2-\varrho} \mathrm{d}\varrho = 2\pi \int_0^1 \frac{\varrho-\varrho^2}{\varrho^2+1} \,\mathrm{d}\varrho = \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{-\varrho^2-1+\varrho+1}{\varrho^2+1} \,\mathrm{d}\varrho = 2\pi \int_0^1 \left(-1 + \frac{1}{2}\,\frac{2\varrho}{\varrho^2+1} + \frac{1}{\varrho^2+1} \right) \mathrm{d}\varrho = \\
&= 2\pi \left[-\varrho + \frac{1}{2} \ln(\varrho^2+1) + \operatorname{arctg} \varrho \right]_0^1 = 2\pi \left(-1 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \right).
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 3.24. Vypočtěte $\iiint\limits_A (x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina A je určena nerovnostmi $x^2+y^2+z^2 \leqq 4$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$.

Řešení. Rovnice $x^2+y^2+z^2 = 4$ je rovnicí kulové plochy se středem v počátku O souřadnicového systému a poloměrem 2. První podmínka tedy určuje kouli. Další



a) b) c)

Obr. 3.16

dvě podmínky určují poloprostory, vymezené rovinami xz a xy. Celkově dostáváme, že množina A je čtvrtina koule, která je znázorněná na obr. 3.16 a). Pro výpočet integrálu použijeme transformaci do sférických souřadnic.

Libovolná rovina, která prochází osou z a svírá s kladnou částí osy x úhel z intervalu $(0, \pi)$, protne množinu A ve čtvrtkruhu — viz obr. 3.16 b), kde je znázorněn řez rovinou yz. Z toho vidíme, že $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$.

Dále průmětem M množiny A do roviny xy je půlkruh z obr. 3.16 c). To znamená, že $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. Konečně je zřejmě $0 \leqq \varrho \leqq 2$. Obrazem množiny A v transformaci do sférických souřadnic tudíž bude množina

$$B\colon \begin{array}{l} 0 \leqq \varrho \leqq 2, \\ 0 \leqq \varphi \leqq \pi, \\ 0 \leqq \vartheta \leqq \dfrac{\pi}{2}, \end{array}$$

což je trojrozměrný interval. Zobrazení Φ dané rovnicemi (3.14) není na této množině prosté. Např. $\Phi(0, \varphi, \vartheta) = (0, 0, 0)$ pro libovolná φ a ϑ, tj. celá jedna stěna kvádru B se zobrazí na počátek O. Proto použijeme větu 3.20. Za množinu B_1 z této věty lze zvolit vnitřek intervalu B. Transformovaný integrál rozdělíme na dva a na každý z nich pak použijeme Fubiniovu větu. S použitím vztahů (3.14) a $|J| = \varrho^2 \sin\vartheta$ pro sférické souřadnice a jejich jakobián dostaneme:

$$I = \iiint\limits_A (x + y + z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$
\begin{aligned}
&= \iiint\limits_B (\varrho\cos\varphi\sin\vartheta + \varrho\sin\varphi\sin\vartheta + \varrho\cos\vartheta)\varrho^2\sin\vartheta \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \\
&= \iiint\limits_B \varrho^3(\cos\varphi+\sin\varphi)\sin^2\vartheta \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta + \iiint\limits_B \varrho^3\cos\vartheta\sin\vartheta \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \\
&= \int_0^2 \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi} (\cos\varphi+\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta + \\
&\quad + \int_0^2 \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \\
&= \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[\sin\varphi - \cos\varphi\right]_0^{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[\varphi\right]_0^{\pi} \times \\
&\quad \times \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{\cos 2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 4\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 4\pi.
\end{aligned}
$$

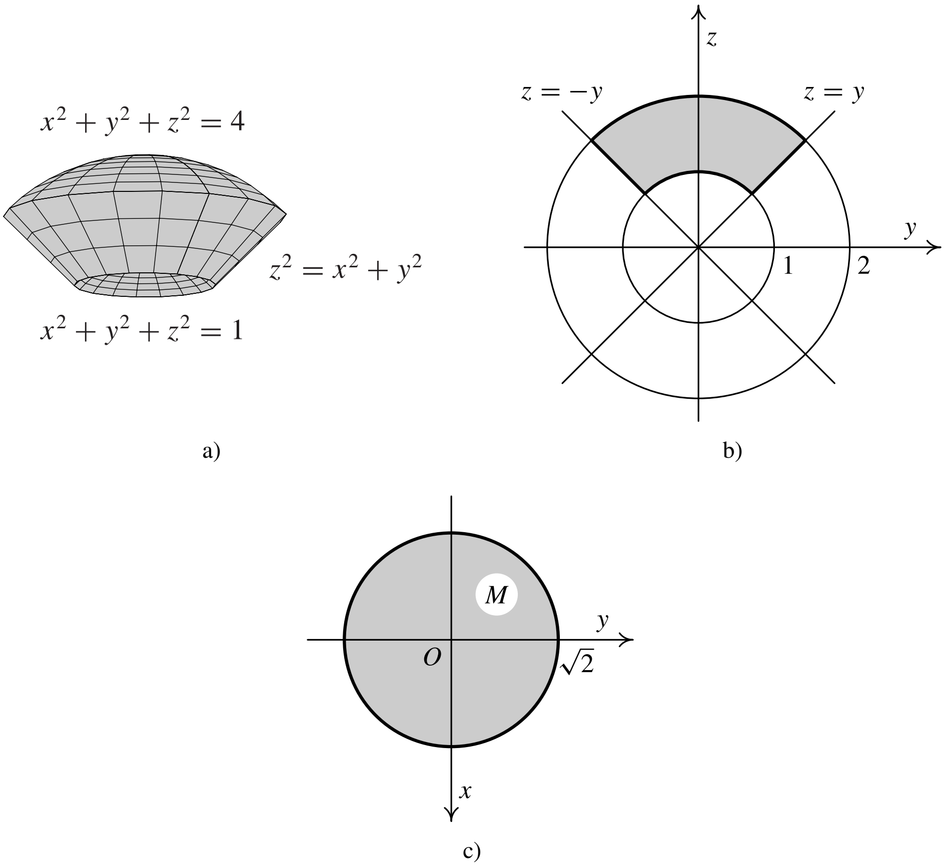
▲

Příklad 3.25. Vypočtěte $\iiint\limits_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina A je určená nerovnostmi $z \geqq \sqrt{x^2+y^2}$, $1 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq 4$.

Řešení. Rovnice $z = \sqrt{x^2+y^2}$ určuje rotační kuželovou plochu v poloprostoru $z \geqq 0$ s osou v souřadnicové ose z a vrcholem v počátku. První nerovnost tedy zadává množinu bodů ležících na a nad horní polovinou zmíněné rotační kuželové plochy. Dále rovnice $x^2+y^2+z^2 = r^2$ je pro každé $r > 0$ rovnicí kulové plochy se středem v počátku O a poloměrem r. Podmínka $1 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq 4$ tudíž říká, že množina A je rovněž omezena dvěma soustřednými kulovými plochami o poloměrech 1 a 2. Výsledek je znázorněn na obr. 3.17 a). Pro výpočet integrálu použijeme transformaci do sférických souřadnic.

Protože zadané těleso je rotační, bude řez libovolnou rovinou procházející rotační souřadnicovou osou z stejný. Na obr. 3.17 b) je znázorněn takový řez rovinou yz. Z něho určíme rozmezí pro úhel ϑ. Protože přímka $y = z$ je osou prvního kvadrantu, svírá s osou z úhel $45\,°$, což znamená, že $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/4$.

Průmětem M množiny A do roviny xy je zřejmě kruh se středem v počátku O, jehož hraniční kružnice je průmětem kružnice, kterou dostaneme jako průnik kuželové plochy a větší kulové plochy — srovnejte obr. 3.17 a). Vyloučením proměnné z z rovnic $z^2 = x^2+y^2$ a $x^2+y^2+z^2 = 4$ dostaneme, že $x^2+y^2 = 2$, tj. poloměr kruhu M je $\sqrt{2}$ — viz obr. 3.17 c). Tento údaj však není důležitý, určili jsme jej jen pro úplnost; podstatné je, že pro úhel φ platí $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$.



Obr. 3.17

Konečně pro sférickou souřadnici ϱ zřejmě platí $1 \leqq \varrho \leqq 2$. Obrazem množiny A při transformaci do sférických souřadnic tedy je množina

$$B: \begin{array}{l} 1 \leqq \varrho \leqq 2, \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ 0 \leqq \vartheta \leqq \dfrac{\pi}{4}, \end{array}$$

což je trojrozměrný interval. Zobrazení F dané rovnicemi (3.14) není na B prosté. Platí totiž např. $F(\varrho, 0, \vartheta) = F(\varrho, 2\pi, \vartheta)$ pro libovolná $1 \leqq \varrho \leqq 2$ a $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/4$ nebo $F(\varrho, \varphi, 0) = F(\varrho, 0, 0)$ pro libovolná $1 \leqq \varrho \leqq 2$ a $0 \leqq \varphi \leqq$ $\leqq 2\pi$. Proto použijeme větu 3.20. Za množinu B_1 z této věty lze zvolit vnitřek intervalu B. Na transformovaný integrál použijeme Fubiniovu větu. S použitím vztahů (3.14) pro sférické souřadnice a jejich jakobián a rovnosti $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$ dostaneme:

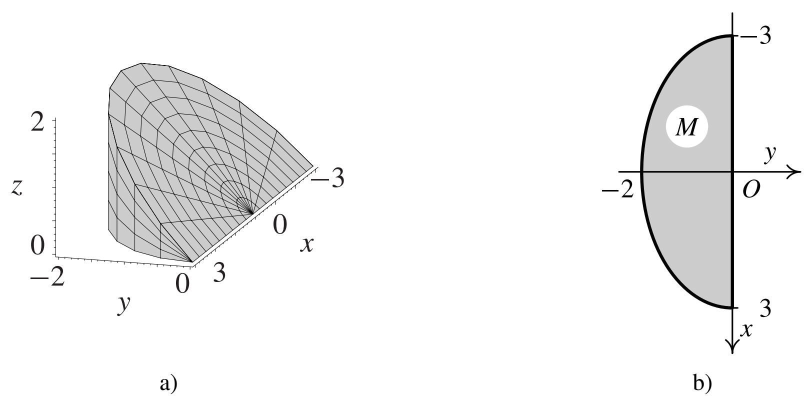
$$I=\iiint\limits_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_B \varrho\cdot\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta=$$
$$=\int_1^2\varrho^3\,\mathrm{d}\varrho\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\pi/4}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_1^2\cdot\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\cdot\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi/4}=$$
$$=\frac{15}{4}\cdot 2\pi\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\frac{15\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}.$$

▲

Příklad 3.26. Vypočtěte $\iiint\limits_A yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina A je určena nerovnostmi $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leqq 1$ a $0\leqq z\leqq -y$.

Řešení. Rovnice $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ určuje eliptický válec s osou v souřadnicové ose z. Dále $z=0$ a $z=-y$ jsou rovnice dvou rovin, které ze zmíněného válce vytnou „klín“ znázorněný na obr. 3.18 a). Kolmým průmětem množiny A do roviny xy je polovina elipsy znázorněná na obr. 3.18 b). Použijeme transformaci do zobecněných cylindrických souřadnic. V (3.15) zvolíme $a=3$, $b=2$:

$$x=3\varrho\cos\varphi,\qquad y=2\varrho\sin\varphi,\qquad z=z,\qquad |J|=6\varrho.$$



Obr. 3.18

Změna měřítek na souřadnicových osách x a y způsobí, že polovina elipsy přejde v polovinu jednotkového kruhu, který musíme vyjádřit v polárních souřadnicích. Pro ně bude tudíž platit $\pi \leqq \varphi \leqq 2\pi$ a $0 \leqq \varrho \leqq 1$. Dosazením transformačních rovnic do omezení pro z dostaneme $0 \leqq z \leqq -2\varrho \sin\varphi$. Množina A se tedy transformuje na množinu

$$B\colon \begin{array}{l} \pi \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ 0 \leqq \varrho \leqq 1, \\ 0 \leqq z \leqq -2\varrho \sin\varphi. \end{array}$$

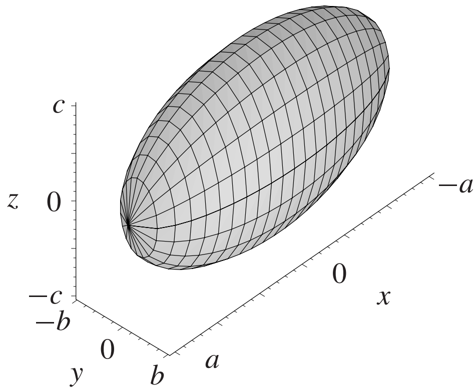
Použijeme větu 3.20 (můžete se přesvědčit, že transformace není na B prostá). Vzniklý integrál vypočítáme pomocí Fubiniovy věty. Množina B je elementární vzhledem k $\varrho\varphi$. Nejprve tedy musíme integrovat podle proměnné z (v mezích pro tuto proměnnou figuruje φ i ϱ), další pořadí je libovolné. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_A yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_B 2\varrho\sin\varphi\cdot z\cdot 6\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \\
&= \iiint\limits_B 12\varrho^2 z\sin\varphi\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \\
&= \int_\pi^{2\pi}\left\{\int_0^1\left(\int_0^{-2\varrho\sin\varphi} 12\varrho^2 z\sin\varphi\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varrho\right\}\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_\pi^{2\pi}\left\{\int_0^1 6\varrho^2\sin\varphi\left[z^2\right]_0^{-2\varrho\sin\varphi}\mathrm{d}\varrho\right\}\mathrm{d}\varphi = \int_\pi^{2\pi}\left\{\int_0^1 24\varrho^4\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varrho\right\}\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_\pi^{2\pi}\frac{24}{5}\sin^3\varphi\left[\varrho^5\right]_0^1\mathrm{d}\varphi = \frac{24}{5}\int_\pi^{2\pi}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \left|\begin{array}{c} \cos\varphi = t \\ -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t \\ \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}t \\ \pi \rightsquigarrow -1,\ 2\pi \rightsquigarrow 1 \end{array}\right| = -\frac{24}{5}\int_{-1}^1(1-t^2)\,\mathrm{d}t = -\frac{24}{5}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^1 = -\frac{32}{5}.
\end{aligned}$$

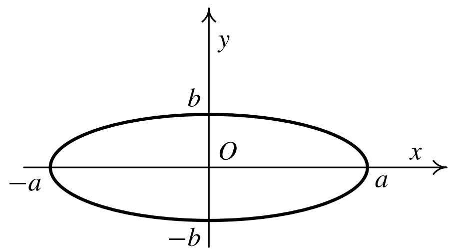
▲

Příklad 3.27. Vypočtěte $\displaystyle\iiint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $A\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1$, $a, b, c > 0$.

Řešení. Integračním oborem A je elipsoid z obrázku 3.19 a). Vzhledem k definicím měřitelné množiny a trojného integrálu přes měřitelnou množinu bude



a)



b)

Obr. 3.19

výsledkem vzorec pro míru elipsoidu s poloosami a, b, c. Použijeme zobecněné sférické souřadnice. Zvolíme

$$\begin{aligned} x &= a\varrho\cos\varphi\sin\vartheta, \\ y &= b\varrho\sin\varphi\sin\vartheta, \qquad |J| = abc\varrho^2\sin\vartheta. \\ z &= c\varrho\cos\vartheta, \end{aligned}$$

Změna měřítek na souřadnicových osách způsobí, že elipsoid přejde v jednotkovou kouli. Tu musíme vyjádřit ve sférických souřadnicích. Množina A se přitom transformuje v množinu

$$B\colon\ \begin{aligned} 0 &\leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ 0 &\leqq \varrho \leqq 1, \\ 0 &\leqq \vartheta \leqq \pi. \end{aligned}$$

To je trojrozměrný interval, takže na integrál vzniklý po použití věty 3.20 můžeme snadno aplikovat Fubiniovu větu. Dostaneme:

$$\iiint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_B abc\varrho^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$
$$= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\cdot\int_0^{\pi}\sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta =$$
$$= abc\big[\varphi\big]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^1\cdot\big[-\cos\vartheta\big]_0^{\pi} = abc\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3}\,\pi abc.$$

▲

3.3. Transformace n-rozměrného integrálu

Pokud jde o transformaci n-rozměrného integrálu, je situace naprosto analogická jako u transformace dvojného či trojného integrálu. Uvedeme proto přímo definice spojitě diferencovatelného zobrazení, jakobiánu a regulárního zobrazení.

Definice 3.28. Předpokládejme, že $B \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť g_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, jsou funkce definované na množině B. Buď $F\colon B \to \mathbb{R}^n$ zobrazení, které přiřazuje libovolnému bodu $[u_1, u_2, \ldots, u_n] \in B$ bod $F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = [g_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), g_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, g_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)]$. Řekneme, že zobrazení F je *spojitě diferencovatelné* v B, jestliže existuje otevřená množina $\Omega \supseteq B$ taková, že funkce g_j $(j = 1, 2 \ldots, n)$ lze rozšířit na Ω takovým způsobem, aby měly v Ω spojité parciální derivace prvního řádu podle všech svých proměnných.

Je-li $F\colon B \to \mathbb{R}^n$ spojitě diferencovatelné zobrazení v B, determinant

$$J = \begin{vmatrix} g_{1|u_1} & g_{1|u_2} & \cdots & g_{1|u_n} \\ g_{2|u_1} & g_{2|u_2} & \cdots & g_{2|u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n|u_1} & g_{n|u_2} & \cdots & g_{n|u_n} \end{vmatrix},$$

kde $g_{i|u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} g_i$, se při označení použitém v definici 3.28 nazývá *jakobián* zobrazení F. Jakobián $J\colon B \to \mathbb{R}$ je funkcí proměnných $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Definice 3.29. Spojitě diferencovatelné zobrazení $F\colon B \to \mathbb{R}^n$ na otevřené množině B se nazývá *regulární*, je-li jeho jakobián J různý od nuly v každém bodě množiny B.

Věty o transformaci n-rozměrného integrálu lze zformulovat takto:

Věta 3.30. *Nechť $B \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená měřitelná množina a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $B \subseteq \Omega$. Nechť $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení s jakobiánem J takové, že $F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = [g_1(u), g_2(u), \ldots, g_n(u)]$ pro každé $u = [u_1, u_2, \ldots, u_n] \in B$. Označme $A = F(B)$ a předpokládejme,že funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$ je spojitá.*

Pak platí vztah

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_A f(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n &= \\ &= \int \cdots \int_B f(g_1(u), g_2(u), \cdots, g_n(u))|J(u)|\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Věta 3.31. *Nechť $B_1 \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, kde B_1 je otevřená množina, B je měřitelná množina a platí $\mathrm{m}_n(B \setminus B_1) = 0$.*

Buď F spojitě diferencovatelné zobrazení B do $\mathbb{R}^n$, které je regulární a prosté v B_1. Označme $A = F(B)$, $A_1 = F(B_1)$. Předpokládejme, že množina A je měřitelná a platí $\mathrm{m}_n(A \setminus A_1) = 0$.

Buď funkce f ohraničená na množině A a spojitá na množině A_1. Nechť funkce, která každému $u \in B$ přiřazuje hodnotu $f(g_1(u), g_2(u), \dots, g_n(u))|J(u)|$, je ohraničená.

Pak platí vztah (3.17), tj.

$$\int \cdots \int_A f(x)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n =$$
$$= \int \cdots \int_B f(g_1(u), g_2(u), \dots, g_n(u))|J(u)|\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_n.$$

3.3.1. Některé běžné typy transformací n-rozměrného integrálu

Uveďme, podobně jako u dvojného a trojného integrálu, některé běžně užívané transformace $x_1 = g_1(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $x_2 = g_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \dots, x_n = g_n(u_1, u_2, \dots, u_n)$ n-rozměrného integrálu.

Posunutí

Posunutí (*translace*) je dáno rovnicemi

$$x_1 = u_1 + a_1,\ x_2 = u_2 + a_2,\ \dots,\ x_n = u_n + a_n, \tag{3.18}$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou konstanty. Jakobián této transformace je $J = 1$.

Dilatace

Dilatace (ve speciálním případě $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ *změna měřítek na souřadnicových osách*) je dána rovnicemi

$$x_1 = a_1 u_1,\ x_2 = a_2 u_2,\ \dots,\ x_n = a_n u_n \tag{3.19}$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou nenulové konstanty. Pro jakobián tohoto zobrazení platí $J(u_1, u_2, \dots, u_n) = a_1 a_2 \cdots a_n$.

Transformace do sférických souřadnic

Transformace do sférických souřadnic $\varrho, \varphi, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-2}$ (používá se též název *hypersférické souřadnice*), kde $n \geqq 2$ (pro $n = 2$ jde o polární souřadnice), je dána vztahy

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varrho \cos\varphi \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_2 &= \varrho \sin\varphi \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_3 &= \varrho \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_4 &= \varrho \cos\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
&\vdots\\
x_{n-2} &= \varrho \cos\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_{n-1} &= \varrho \cos\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_n &= \varrho \cos\vartheta_{n-2}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Označme $J_n = J_n(\varrho, \varphi, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-2})$ jakobián transformace (3.20). Pak, značí-li $g_1^n, g_2^n, \dots, g_n^n$ pravé strany ve vztazích (3.20) (horní index n znamená, že jde o transformaci v $\mathbb{R}^n$), máme

$$J_n = \begin{vmatrix}
g^n_{1|\varrho} & g^n_{1|\varphi} & g^n_{1|\vartheta_1} & \cdots & g^n_{1|\vartheta_{n-3}} & g^n_{1|\vartheta_{n-2}}\\
g^n_{2|\varrho} & g^n_{2|\varphi} & g^n_{2|\vartheta_1} & \cdots & g^n_{2|\vartheta_{n-3}} & g^n_{2|\vartheta_{n-2}}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
g^n_{n-1|\varrho} & g^n_{n-1|\varphi} & g^n_{n-1|\vartheta_1} & \cdots & g^n_{n-1|\vartheta_{n-3}} & g^n_{n-1|\vartheta_{n-2}}\\
g^n_{n|\varrho} & g^n_{n|\varphi} & g^n_{n|\vartheta_1} & \cdots & g^n_{n|\vartheta_{n-3}} & g^n_{n|\vartheta_{n-2}}
\end{vmatrix}. \tag{3.21}$$

Platí $g_k^n = g_k^{n-1} \sin\vartheta_{n-2}$, $k = 1, \dots, n-1$. Označme ještě $h_1^n, h_2^n, \dots, h_n^n$ pravé strany ve vztazích (3.20) bez proměnné ϱ, tj. $g_k^n = \varrho h_k^n$, $k = 1, \dots, n$. Vypočteme-li všechny parciální derivace vystupující v determinantu (3.21), vidíme, že z druhého až $(n-1)$-ního sloupce lze vytknout $\sin\vartheta_{n-2}$ a z n-tého sloupce lze vytknout ϱ. Dále vynásobíme první sloupec determinantu J_n funkcí $\sin\vartheta_{n-2}$ a přičteme k němu poslední sloupec vynásobený $\cos\vartheta_{n-2}$. Postupně dostaneme

$$J_n = \begin{vmatrix}
g^{n-1}_{1|\varrho}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{1|\varphi}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{1|\vartheta_1}\sin\vartheta_{n-2} & \dots & g^{n-1}_{1|\vartheta_{n-3}}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{1}\cos\vartheta_{n-2}\\
g^{n-1}_{2|\varrho}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{2|\varphi}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{2|\vartheta_1}\sin\vartheta_{n-2} & \dots & g^{n-1}_{2|\vartheta_{n-3}}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{2}\cos\vartheta_{n-2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
g^{n-1}_{n-1|\varrho}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{n-1|\varphi}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{n-1|\vartheta_1}\sin\vartheta_{n-2} & \dots & g^{n-1}_{n-1|\vartheta_{n-3}}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{n-1}\cos\vartheta_{n-2}\\
\cos\vartheta_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\varrho\sin\vartheta_{n-2}
\end{vmatrix} =$$

$$
= \varrho \sin^{n-2}\vartheta_{n-2} \begin{vmatrix} h_1^{n-1}\sin\vartheta_{n-2} & g_{1|\varphi}^{n-1} & g_{1|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{1|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_1^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ h_2^{n-1}\sin\vartheta_{n-2} & g_{2|\varphi}^{n-1} & g_{2|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{2|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_2^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1}^{n-1}\sin\vartheta_{n-2} & g_{n-1|\varphi}^{n-1} & g_{n-1|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{n-1|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_{n-1}^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ \cos\vartheta_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sin\vartheta_{n-2} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \varrho \sin^{n-3}\vartheta_{n-2} \begin{vmatrix} h_1^{n-1}(\sin^2\vartheta_{n-2}+\cos^2\vartheta_{n-2}) & g_{1|\varphi}^{n-1} & g_{1|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{1|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_1^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ h_2^{n-1}(\sin^2\vartheta_{n-2}+\cos^2\vartheta_{n-2}) & g_{2|\varphi}^{n-1} & g_{2|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{2|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_2^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1}^{n-1}(\sin^2\vartheta_{n-2}+\cos^2\vartheta_{n-2}) & g_{n-1|\varphi}^{n-1} & g_{n-1|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{n-1|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_{n-1}^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sin\vartheta_{n-2} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \varrho \sin^{n-3}\vartheta_{n-2} \begin{vmatrix} g_{1|\varrho}^{n-1} & g_{1|\varphi}^{n-1} & g_{1|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{1|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_1^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ g_{2|\varrho}^{n-1} & g_{2|\varphi}^{n-1} & g_{2|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{2|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & g_2^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1|\varrho}^{n-1} & g_{n-1|\varphi}^{n-1} & h_{n-1|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{n-1|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_{n-1}^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sin\vartheta_{n-2} \end{vmatrix} = -\varrho\sin^{n-2}\vartheta_{n-2} J_{n-1}.
$$

Opakovaným užitím tohoto výsledku postupně plyne

$$
\begin{aligned} J_n &= -\varrho\sin^{n-2}\vartheta_{n-2}J_{n-1} = \varrho^2\sin^{n-3}\vartheta_{n-3}\sin^{n-2}\vartheta_{n-2}J_{n-2} = \dots = \\ &= (-1)^{n-2}\varrho^{n-2}\sin\vartheta_1\sin^2\vartheta_2\cdots\sin^{n-2}\vartheta_{n-2}J_2. \end{aligned}
$$

Protože

$$
J_2 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho,
$$

a $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, dostáváme

$$
J_n = (-1)^n\varrho^{n-1}\sin\vartheta_1\sin^2\vartheta_2\cdots\sin^{n-2}\vartheta_{n-2}. \tag{3.22}
$$

Snadno lze ověřit, že

$$
x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \varrho^2.
$$

Přitom souřadnice ϱ je nezáporná, úhel φ obvykle volíme z intervalu délky 2π a úhly ϑ_j ($j = 1, 2, \dots, n-2$) jsou obvykle z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Zobrazení dané vztahy (3.20) zobrazí takovou množinu na celý prostor $\mathbb{R}^n$ a je prosté a regulární na jejím vnitřku — viz cvičení 2 k této kapitole. Geometricky lze vzorce (3.20) interpretovat následujícím způsobem: Hodnota ϱ je vzdálenost bodu $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ od počátku, tj. $\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Pro kolmý průmět bodu x na souřadnicovou osu x_n platí $x_n = \varrho\cos\vartheta_{n-2}$, kde ϑ_{n-2} je úhel, který svírá průvodič bodu x, tj. vektor určený počátkem a bodem x, s kladným směrem osy x_n. Označme $x^{[1]}$ kolmý průmět bodu x do prostoru $x_n = 0$, tj. do podprostoru $\mathbb{R}^n$ určeného souřadnicemi $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Pro „délku“ ϱ_1 průvodiče bodu $x^{[1]}$ platí $\varrho_1 = \varrho \sin \vartheta_{n-2}$. Kolmý průmět bodu $x^{[1]}$ do souřadnicové osy x_{n-1} je tedy $x_{n-1} = \varrho_1 \cos \vartheta_{n-3} = \varrho \cos \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2}$, kde ϑ_{n-3} je úhel, který svírá průvodič bodu $x^{[1]}$ s kladným směrem souřadnicové osy x_{n-1}. Nyní bod $x^{[1]}$ kolmo promítneme do podprostoru proměnných $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ a jeho průmět označíme $x^{[2]}$. Tímto způsobem postupujeme dále, až po konečném počtu kroků získáme všechny rovnosti v (3.20). Transformace do sférických souřadnic se u n-rozměrného integrálu používá hlavně v případě, kdy integrační obor je n-rozměrná koule nebo její vhodná část.

Příklad 3.32. Vypočtěte $\displaystyle\int \cdots \int\limits_V \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right)^\alpha \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n$, kde $V = \left\{[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqq R^2\right\}$, přičemž $R > 0$, $\alpha \geqq 0$ jsou konstanty a $n \geqq 2$ je dané celé číslo.

Řešení. Předpokládejme, že $n \geqq 3$ a použijme transformaci do sférických souřadnic (3.20). Množina V touto transformací přejde v množinu V^*, která je vymezena následujícími nerovnostmi:

$$V^*\colon \quad \begin{array}{rcl} 0 \leqq & \varrho & \leqq R, \\ 0 \leqq & \varphi & \leqq 2\pi, \\ 0 \leqq & \vartheta_1 & \leqq \pi, \\ & \vdots & \\ 0 \leqq & \vartheta_{n-2} & \leqq \pi. \end{array}$$

Pro absolutní hodnotu jakobiánu zvolené transformace platí

$$|J| = \varrho^{n-1} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \cdots \sin^{n-2} \vartheta_{n-2}.$$

Aplikací věty 3.31 a Fubiniovy věty dostáváme

$$\int \cdots \int\limits_V \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right)^\alpha \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int \cdots \int\limits_{V^*} \varrho^{2\alpha+n-1} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \cdots \sin^{n-2} \vartheta_{n-2} \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta_1 \cdots \mathrm{d}\vartheta_{n-2} =$$

$$= \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi \cdots \left(\int_0^\pi \varrho^{2\alpha+n-1} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \cdots \sin^{n-2} \vartheta_{n-2} \times \right.\right.\right.$$

$$\times\, \mathrm{d}\vartheta_1\Big) \cdots \mathrm{d}\vartheta_{n-2}\Big]\, \mathrm{d}\varphi\Big\}\, \mathrm{d}\varrho =$$

$$= \int_0^R \varrho^{2\alpha+n-1}\, \mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\vartheta_1\, \mathrm{d}\vartheta_1 \cdots \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \mathrm{d}\vartheta_{n-2}. \tag{3.23}$$

Užitím rekurentního vzorce

$$\int_0^{\pi} \sin^k \vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = \frac{k-1}{k} \int_0^{\pi} \sin^{k-2}\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta,$$

který platí (viz pozn. 3.33) pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geqq 2$, snadno zjistíme, že

$$\int_0^{\pi} \sin^k \vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-3}{k-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \frac{(k-1)!!}{k!!}[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 2\,\frac{(k-1)!!}{k!!} \qquad \text{pro } k \text{ liché}$$

a

$$\int_0^{\pi} \sin^k \vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-3}{k-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta = \pi\,\frac{(k-1)!!}{k!!} \qquad \text{pro } k \text{ sudé.}$$

Přitom $k!!$ definujeme vztahem $k!! = k \cdot (k-2) \cdot (k-4) \cdots 3 \cdot 1$, je-li $k \geqq 3$ liché, a vztahem $k!! = k \cdot (k-2) \cdot (k-4) \cdots 4 \cdot 2$, je-li $k \geqq 2$ sudé; dále klademe $0!! = 1$, $1!! = 1$. Položíme-li $\gamma_n = \pi$ pro n sudé a $\gamma_n = 2$ pro n liché, dostáváme dosazením do (3.23)

$$\int \cdots \int_V \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\alpha} \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n =$$
$$= \left[\frac{\varrho^{2\alpha+n}}{2\alpha+n}\right]_0^R \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot 2 \cdot \pi\,\frac{1}{2} \cdot 2\,\frac{2}{3} \cdot \pi\,\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} \cdot 2\,\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} \cdots \gamma_n\,\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!} =$$
$$= \frac{R^{2\alpha+n}}{2\alpha+n} \cdot 2\pi \cdot 2^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} \cdot \pi^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} \cdot \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} \cdots \frac{(n-4)!!}{(n-3)!!} \cdot \frac{(n-3)!!}{(n-2)!!} =$$
$$= \frac{R^{2\alpha+n}}{(2\alpha+n)(n-2)!!} \cdot 2^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor} \cdot \pi^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}.$$

Přitom $\lfloor x \rfloor$ značí celou část čísla x. Snadno se ověří, že výsledek platí i pro $n = 2$. Podrobněji viz příklad 4.7 v kapitole 4. ▲

Poznámka 3.33. Při výpočtu integrálu v předcházejícím příkladu byl užit rekurentní vzorec pro integrál z k-té mocniny funkce sinus. Tento vzorec se snadno odvodí metodou per partes. Označme $I_k = \int_0^\pi \sin^k \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta$, kde $k \in \mathbb{N}$, $k \geqq 2$. Pak

$$
\begin{aligned}
I_k &= \int_0^\pi \sin^k \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \left| \begin{matrix} u = \sin^{k-1} \vartheta & u' = (k-1) \sin^{k-2} \vartheta \cos \vartheta \\ v' = \sin \vartheta & v = -\cos \vartheta \end{matrix} \right| = \\
&= \left[-\sin^{k-1} \vartheta \cos \vartheta \right]_0^\pi + (k-1) \int_0^\pi \sin^{k-2} \vartheta \cos^2 \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \\
&= (k-1) \int_0^\pi \sin^{k-2} \vartheta (1 - \sin^2 \vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta = \\
&= (k-1) \left(\int_0^\pi \sin^{k-2} \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta - \int_0^\pi \sin^k \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \right) = (k-1)(I_{k-2} - I_k).
\end{aligned}
$$

Odtud dostáváme $kI_k = (k-1)I_{k-2}$, takže $I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}$, což je dokazovaný rekurentní vzorec. Všimněte si, že stejný vzorec zůstává v platnosti, když funkci sinus nahradíme funkcí kosinus, nebo když horní mez nahradíme libovolným z čísel $\pi/2$, $3\pi/2$, 2π.

Příklad 3.34. Vypočtěte integrál

$$
\iiiint_V \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \mathrm{d}u,
$$

je-li $V = \left\{ [x, y, z, u] \in \mathbb{R}^4 \colon x^2 + y^2 \leqq z^2 + u^2 \leqq 1 \right\}$.

Řešení. S ohledem na oblast integrace použijeme transformace do nových proměnných ϱ, φ, r, ϑ, které jsou s původními proměnnými vázány vztahy

$$
\begin{aligned}
x &= \varrho \cos \varphi, & z &= r \cos \vartheta, \\
y &= \varrho \sin \varphi, & u &= r \sin \vartheta.
\end{aligned}
$$

Jde vlastně o pár polárních souřadnic v rovinách xy a zu. Jakobián této transformace je

$$
J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ 0 & 0 & \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{vmatrix} = \varrho r.
$$

Podmínky vymezující množinu V se v nových souřadnicích vyjádří nerovnostmi $\varrho^2 \leqq r^2 \leqq 1$. Napíšeme-li odpovídající množinu V^* ve tvaru elementární množiny, máme

$$V^*: \quad \begin{aligned} &0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ &0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi, \\ &0 \leqq r \leqq 1, \\ &0 \leqq \varrho \leqq r, \end{aligned}$$

přičemž transformace je na vnitřku množiny V^* prostá a regulární. Označme $M = \{[\varrho, r] \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \varrho \leqq r\}$. Užitím věty 3.31 a Fubiniovy věty dostáváme

$$\iiiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u = \iiiint\limits_{V^*} \varrho r \,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\iint\limits_M \varrho r \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta \right\} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \cdot \iint\limits_M \varrho r \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}r =$$

$$= 2\pi \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 \left(\int_0^r \varrho r \,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}r = 4\pi^2 \int_0^1 r \left[\frac{\varrho^2}{2} \right]_0^r \mathrm{d}r =$$

$$= 4\pi^2 \int_0^1 \frac{r^3}{2}\,\mathrm{d}r = 2\pi^2 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{2}.$$

▲

3.4. Důkaz věty o transformaci n-rozměrného integrálu

Cílem tohoto oddílu je dokázat věty 3.30 a 3.31. Důkazy těchto tvrzení jsou technicky poměrně náročné a rozsáhlé. Rozčleníme je proto do několika pomocných tvrzení. Hlavní kroky důkazu budou tyto:

- Najdeme vzorec pro jakobián složeného zobrazení (lemma 3.35).
- Odvodíme některé vlastnosti prostých regulárních zobrazení. Zejména ukážeme, jak zobrazují vnitřní a hraniční body (lemma 3.39), že obrazem množiny nulové míry je opět množina nulové míry a že obrazem kompaktní měřitelné množiny je měřitelná množina (lemma 3.43).
- Ukážeme, že regulární zobrazení je možné lokálně vyjádřit jako složení dvou regulárních zobrazení s jistými speciálními vlastnostmi (lemma 3.44).
- Dokážeme, že jestliže vzorec (3.17) platí pro mnohorozměrné intervaly, platí pro libovolné kompaktní měřitelné množiny v prostoru téže dimenze (lemma 3.46).
- Indukcí vzhledem k dimenzi dokážeme (s využitím předchozích dvou bodů a Fubiniovy věty) platnost vzorce (3.17) pro intervaly libovolné dimenze (lemma 3.49).
- Z předchozích dvou bodů dostaneme důkaz věty 3.30.

- Pomocí věty 3.30 dokážeme jistým aproximačním postupem větu 3.31.

Aby se princip důkazů neztratil v komplikovaném označení, provedeme většinu z nich pro $n = 2$ nebo $n = 3$. Přenesení na případ obecné dimenze n je bez komplikací.

Lemma 3.35. *Nechť $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny a $F\colon \Omega_1 \to \Omega_2$, $G\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitě diferencovatelná zobrazení s jakobiány J_F a J_G. Pak pro jakobián složeného zobrazení $G \circ F$ platí $J_{G\circ F}(x) = J_G(F(x))J_F(x)$ pro každé $x \in \Omega_1$.*

Důkaz. Dokážeme pro $n = 2$. Nechť $F(x_1, x_2) = [f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]$, $G(y_1, y_2) = [g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)]$ a $H(x_1, x_2) = [h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)]$, kde $H = G \circ F$. Pak

$$H(x_1, x_2) = \big[g_1\big(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\big), g_2\big(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\big)\big].$$

Označme po řadě

$$M_F = \begin{pmatrix} f_{1|x_1} & f_{1|x_2} \\ f_{2|x_1} & f_{2|x_2} \end{pmatrix}, \quad M_G = \begin{pmatrix} g_{1|y_1} & g_{1|y_2} \\ g_{2|y_1} & g_{2|y_2} \end{pmatrix}, \quad M_H = \begin{pmatrix} h_{1|x_1} & h_{1|x_2} \\ h_{2|x_1} & h_{2|x_2} \end{pmatrix}$$

matice parciálních derivací zobrazení F, G a H. Nechť $y = F(x)$. Podle vzorce pro derivaci složené funkce dvou proměnných platí $h_{i|x_j}(x) = g_{i|y_1}(y) f_{1|x_j}(x) + g_{i|y_2}(y) f_{2|x_j}(x)$, $i, j \in \{1, 2\}$. Odtud plyne, že $M_H(x) = M_G(y) \cdot M_F(x)$, kde $\cdot$ značí násobení matic. Z definice jakobiánu zobrazení a Cauchyovy věty o determinantu součinu dvou matic dostáváme tvrzení. $\square$

Lemma 3.36. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je regulární zobrazení. Pak k libovolnému bodu $x \in \Omega$ existuje otevřená množina $U \subset \Omega$, $x \in U$, taková, že:*

i) *Zobrazení F je prosté na U.*
ii) *Množina $F(U)$ je otevřená.*
iii) *Inverzní zobrazení k restrikci $F|_U$, které je definované na množině $F(U)$, je spojitě diferencovatelné.*

Důkaz. Dokážeme pro $n = 2$. Nechť $F(x, y) = [f_1(x, y), f_2(x, y)] = [u, v]$. Uvažujme zobrazení $G\colon \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané rovností

$$G(x, y, u, v) = [g_1(x, y, u, v), g_2(x, y, u, v)] = [f_1(x, y) - u, f_2(x, y) - v]$$

nebo stručněji $G(z, w) = F(z) - w$, položíme-li $[x, y] = z$ a $[u, v] = w$. Označme J_F jakobián zobrazení F. Nechť $z_0 \in \Omega$ a $F(z_0) = w_0$. Protože je zobrazení F regulární, je $J_F(z_0) \neq 0$, tedy matice

$$G_z = \begin{pmatrix} g_{1|x} & g_{1|y} \\ g_{2|x} & g_{2|y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1|x} & f_{1|y} \\ f_{2|x} & f_{2|y} \end{pmatrix}$$

je regulární v bodě z_0. Přitom $G(z_0, w_0) = [0, 0]$. Podle věty o implicitní funkci — viz [5, str. 103] nebo [26, str. 211] — existují okolí $\mathscr{O}(z_0)$, $\mathscr{O}(w_0)$ a spojitě diferencovatelné zobrazení $H\colon \mathscr{O}(w_0) \to \mathscr{O}(z_0)$, $H = [h_1, h_2]$, takové, že $\mathscr{O}(z_0) \times \mathscr{O}(w_0) \subset \Omega \times \mathbb{R}^2$,

$G(H(w), w) = [0, 0]$ pro každé $w \in \mathscr{O}(w_0)$ a přitom pro každé $w \in \mathscr{O}(w_0)$ je $H(w)$ jediný bod z v $\mathscr{O}(z_0)$, pro nějž platí $G(z, w) = [0, 0]$, tj. $F(z) = w$.

Označme $V = F^{-1}(\mathscr{O}(w_0)) = \{[x, y] \in \Omega : F(x, y) \in \mathscr{O}(w_0)\}$ úplný vzor okolí $\mathscr{O}(w_0)$ v zobrazení F a položme $U = V \cap \mathscr{O}(z_0)$. Protože zobrazení F je spojitě diferencovatelné, a tudíž i spojité, je V otevřená množina obsahující vzhledem k rovnosti $F(z_0) = w_0$ bod z_0. Tedy množina U je rovněž otevřená a $z_0 \in U$.

Z vlastností zobrazení H odvodíme, že $F(U) = \mathscr{O}(w_0)$ a $H(\mathscr{O}(w_0)) = U$, že restrikce $F|_U$ je prostá a že $H = (F|_U)^{-1}$. Protože $U \subseteq V$, je $F(U) \subseteq \mathscr{O}(w_0)$. Buď $w \in \mathscr{O}(w_0)$ libovolný bod. Pak $H(w) \in \mathscr{O}(z_0)$ a $G(H(w), w) = [0, 0]$, tj. $F(H(w)) = w$. To znamená, že $H(w) \in V$, a tedy $H(w) \in U$, tj. $H(\mathscr{O}(w_0)) \subseteq U$. Tudíž $F|_U$ je surjekce U na $\mathscr{O}(w_0)$. Dále buď $z_1 \in U$ libovolný bod. Označme $w_1 = F(z_1)$. Platí, že z_1 je řešením rovnice $G(z, w_1) = [0, 0]$, přičemž $[z_1, w_1] \in \mathscr{O}(z_0) \times \mathscr{O}(w_0)$. To však znamená, že $z_1 = H(w_1)$, tj. $H(F(z_1)) = z_1$, takže H je surjekce $\mathscr{O}(w_0)$ na U. Protože $F|_U \circ H = \mathrm{id}$ na $\mathscr{O}(w_0)$ a $H \circ F|_U = \mathrm{id}$ na U, je $F|_U$ prosté zobrazení, tedy bijekce U na $\mathscr{O}(w_0)$ a H je zobrazení k němu inverzní.

Zejména je $F(U) = \mathscr{O}(w_0)$, tj. množina $F(U)$ je otevřená, a zobrazení $(F|_U)^{-1} = H$ je spojitě diferencovatelné na $F(U) = \mathscr{O}(w_0)$. □

Zobrazení, které je prosté a regulární na otevřené množině a takové, že inverzní zobrazení F^{-1} je spojité, se nazývá *difeomorfismus* neboli *difeomorfní zobrazení*. Předchozí lemma říká, že regulární zobrazení je tzv. *lokálně difeomorfní*. Je-li dokonce prosté, je difeomorfní.

Důsledek 3.37. *Je-li zobrazení F regulární na otevřené množině Ω, je množina $F(\Omega)$ otevřená.*

Důkaz. Z lemmatu 3.36, tvrzení ii) vyplývá, že každý bod množiny $F(\Omega)$ je vnitřní. □

V případě prostého zobrazení tvrzení předchozího důsledku platí i za předpokladu pouhé spojitosti (tzv. Brouwerova[1] věta o invariantnosti oblasti). Důkaz je však daleko obtížnější (přímý důkaz např. [12, str. 265]; obvykle se dokazuje prostředky algebraické topologie, např. [4, str. 100]).

Důsledek 3.38. *Je-li zobrazení F prosté a spojitě diferencovatelné na otevřené množině B a inverzní zobrazení F^{-1} je rovněž spojitě diferencovatelné, jsou F i F^{-1} difeomorfní zobrazení. Zejména, je-li F difeomorfismus, je F^{-1} také difeomorfismus.*

Důkaz. Podle předpokladů existuje otevřená množina $C \supseteq F(B)$ a zobrazení G, které je spojitě diferencovatelné na C a takové, že $G|F(B) = F^{-1}$. Platí $G \circ F = F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_B$, kde id_B je identické zobrazení na B, mající konstantní jakobián rovný jedné. Z lemmatu 3.35 vyplývá, že pro každé $x \in B$ platí $J_F(x) J_{F^{-1}}(F(x)) = 1$, tedy jakobián J_F

[1] **Luitzen Egbertus Jan Brouwer** (1881–1966) (čti brauer) — holandský matematik. Autor významných výsledků z počátků vzniku topologie. Zakladatel matematického intuicionismu.

je nenulový na B a jakobián $J_{F^{-1}}$ je nenulový na $F(B)$. Podle důsledku 3.37 je množina $F(B)$ otevřená. Obě zobrazení F i F^{-1} jsou regulární na otevřených množinách, tedy jsou to i difeomorfismy.

Je-li F difeomorfní zobrazení, plyne z lemmatu 3.36, že F^{-1} je spojitě diferencovatelné, takže podle první části důkazu je rovněž difeomorfní. $\square$

Lemma 3.39. *Nechť $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je prosté a regulární zobrazení na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť množina A je i se svým uzávěrem obsažena v Ω. Pak pro její hranici platí $F(h(A)) \subseteq h(F(A))$. Je-li množina A omezená, je dokonce $F(h(A)) = h(F(A))$.*

Důkaz. Nechť $x_0 \in h(A)$ a $y_0 = F(x_0)$. Buď $\mathscr{O}(y_0)$ libovolné okolí. Zobrazení F je spojité, tedy existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že $F(\mathscr{O}(x_0)) \subseteq \mathscr{O}(y_0)$. Jelikož x_0 je hraniční bod A, existují body $x_1, x_2 \in \mathscr{O}(x_0)$ takové, že $x_1 \in A$ a $x_2 \notin A$. Pak $F(x_1) \in F(A)$ a $F(x_2) \notin F(A)$ (protože zobrazení F je prosté). Z $F(x_1), F(x_2) \in \mathscr{O}(y_0)$ proto plyne $y_0 \in h(F(A))$, tj. $F(h(A)) \subseteq h(F(A))$.

Nechť je nyní množina A omezená. Potom je její uzávěr $\overline{A} \subset \Omega$ kompaktní. Buď $y_0 \in h(F(A))$ libovolný bod. Pak existuje posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F(A)$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Nechť $F(x_n) = y_n$, kde $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Protože je množina $\overline{A}$ kompaktní, existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in \overline{A}$. Ze spojitosti F vyplývá, že $F(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} F(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$, tedy $F(x_0) = y_0$. Připusťme, že x_0 je vnitřní bod A. Pak existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že $\mathscr{O}(x_0) \subset A$. Podle důsledku 3.37 je množina $F(\mathscr{O}(x_0))$ otevřená, obsahuje bod y_0 a leží v $F(A)$. Tudíž y_0 je vnitřní bod $F(A)$, což je spor. Proto $x_0 \in h(A)$, takže $h(F(A)) \subseteq F(h(A))$. Odtud a z první části důkazu již plyne dokazovaná rovnost. $\square$

Bez předpokladu omezenosti množiny A nemusí v předchozí větě nastat rovnost $F(h(A)) = h(F(A))$. Zvolme např. $n = 1$, $A = \Omega = \mathbb{R}$ a $F = \operatorname{arctg}$. Pak $h(A) = \emptyset = F(h(A))$, kdežto $F(A) = (-\pi/2, \pi/2)$, tedy $h(F(A)) = \{\pm\pi/2\}$.

Řekneme, že zobrazení $F\colon A \to \mathbb{R}^n$, kde $A \subseteq \mathbb{R}^n$, splňuje *Lipschitzovu podmínku* neboli je *lipschitzovské*, jestliže existuje konstanta $\alpha > 0$ taková, že pro každá $x, y \in A$ platí $\varrho(F(x), F(y)) \leqq \alpha\varrho(x, y)$; přitom ϱ značí eukleidovskou metriku v $\mathbb{R}^n$. Každé lipschitzovské zobrazení je zřejmě spojité.

Lemma 3.40. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je omezená množina a $F\colon A \to \mathbb{R}^n$ je lipschitzovské zobrazení s konstantou α. Buďte R_1, R_2 takové dva n-rozměrné uzavřené a ohraničené intervaly, že $A \subseteq R_1$ a $F(A) \subseteq R_2$. Pak platí*

$$\overline{\int\cdots\int_{R_2}} \chi_{F(A)}(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \leqq \alpha^n 2^n n^{n/2}\, \overline{\int\cdots\int_{R_1}} \chi_A(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Důkaz. Poznamenejme nejprve, že z omezenosti množiny A a lipschitzovskosti zobrazení F plyne omezenost $F(A)$, takže interval obsahující tuto množinu skutečně existuje.

Dokážeme pro $n = 2$. Zvolme za R_1 čtverec o straně délky $a > 0$. Označme D_m jeho dělení na m^2 stejných čtverců o délkách stran a/m, $m \in \mathbb{N}$. Pak $\nu(D_m) = a\sqrt{2}/m$. Nechť

$M_1, \dots, M_k$, $k \leqq m^2$, jsou dílky dělení D_m, které mají neprázdný průnik s A. Uvažujme funkci χ_A na obdélníku R_1. Platí $S(D_m, \chi_A) = \mathrm{m}_2(M_1) + \dots + \mathrm{m}_2(M_k) = ka^2/m^2$.

Nechť $1 \leqq j \leqq k$ je libovolné. Potom pro každou dvojici $x, y \in M_j$ je $\varrho(x, y) \leqq \nu(D_m)$, takže $\varrho(F(x), F(y)) \leqq \alpha\nu(D_m)$. Tedy obraz $F(M_j)$ je podmnožinou nějakého kruhu K_j o poloměru $\alpha\nu(D_m)$ a ten je podmnožinou čtverce C_j o délce strany $2\alpha\nu(D_m)$. Vyberme za R_2 obdélník obsahující všechny čtverce C_j, $j = 1, \dots, k$. Platí

$$F(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} F(M_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} C_j = C,$$

tudíž na R_2 je

$$\chi_{F(A)} \leqq \chi_C = \max\{\chi_{C_j} : j = 1, \dots, k\} \leqq \sum_{j=1}^{k} \chi_{C_j}.$$

Odtud podle cvičení 4 ke kapitole 1 dostaneme

$$\begin{aligned}\overline{\iint_{R_2}} \chi_{F(A)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\leqq \sum_{j=1}^{k} \overline{\iint_{R_2}} \chi_{C_j}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{k} \iint_{R_2} \chi_{C_j}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{m}_2(C_j) = k \cdot 4\alpha^2\nu^2(D_m) = k \cdot 8\alpha^2 a^2/m^2 = \\ &= 8\alpha^2 S(D_m, \chi_A).\end{aligned}$$

Limitním přechodem pro $m \to \infty$ vyjde podle věty 1.10, že $\overline{\iint_{R_2}} \chi_{F(A)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq 8\alpha^2 \overline{\iint_{R_1}} \chi_A(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Podle cvičení 3 ke kapitole 1 dokázaný odhad nezáleží na konkrétní volbě obdélníků R_1 a R_2. □

Důsledek 3.41. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina nulové míry a $F \colon A \to \mathbb{R}^n$ je lipschitzovské zobrazení. Pak množina $F(A)$ je rovněž měřitelná a má míru nula.*

Důkaz. Nechť kvádry R_1, R_2 mají stejný význam jako v lemmatu 3.40. Označme $x = [x_1, \dots, x_n]$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$. Podle předpokladu je $\mathrm{m}(A) = \int_{R_1}\cdots\int \chi_A(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_{R_1}\cdots\int} \chi_A(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Protože funkce $\chi_{F(A)}$ je nezáporná, je

$$0 \leqq \underline{\int_{R_2}\cdots\int} \chi_{F(A)}(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_{R_2}\cdots\int} \chi_{F(A)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z lemmatu 3.40 plyne, že

$$\underline{\int_{R_2}\cdots\int} \chi_{F(A)}(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_{R_2}\cdots\int} \chi_{F(A)}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Tudíž funkce $\chi_{F(A)}$ je integrovatelná na R_2 a $\int_{R_2}\cdots\int \chi_{F(A)}(x)\,\mathrm{d}x = 0 = \mathrm{m}(F(A))$. □

Lemma 3.42. *Nechť M je n-rozměrný interval a $F \colon M \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení, jehož složky mají ohraničené parciální derivace na M. Pak je F lipschitzovské zobrazení.*

Důkaz. Dokážeme pro $n = 2$. Nechť $F = [f_1, f_2]$. Podle předpokladu existuje konstanta $K > 0$ taková, že $|f_{j|x}(x, y)| \leqq K$, $|f_{j|y}(x, y)| \leqq K$, $j = 1, 2$, pro každé $[x, y] \in M$. Nechť $[x_i, y_i] \in M$, $i = 1, 2$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě — viz [5, str. 34] — existují čísla ξ ležící mezi x_1, x_2 a η ležící mezi y_1, y_2 taková, že platí $f_1(x_2, y_2) - f_1(x_1, y_1) = f_{1|x}(\xi, y_1)(x_2 - x_1) + f_{1|y}(x_2, \eta)(y_2 - y_1)$. Odtud dostaneme $|f_1(x_2, y_2) - f_1(x_1, y_1)| \leqq K(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|) \leqq 2K\varrho([x_1, y_1], [x_2, y_2])$. Obdobná nerovnost platí pro složku f_2. Tudíž

$$\varrho^2(F(x_1, y_1), F(x_2, y_2)) = \sum_{j=1}^{2} \big(f_j(x_1, y_1) - f_j(x_2, y_2)\big)^2 \leqq 8K^2\varrho^2([x_1, y_1], [x_2, y_2]).$$

Zobrazení F je tedy lipschitzovské s konstantou $\alpha = 2K\sqrt{2}$. □

Lemma 3.43. *Nechť $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, je prosté regulární zobrazení. Nechť M je omezená množina taková, že $\overline{M} \subset \Omega$. Pak množina M je měřitelná právě tehdy, když je měřitelná množina $F(M)$. Zejména, M má míru nula právě tehdy, když $F(M)$ má míru nula.*

Důkaz. Podle lemmatu 3.39 pro hranici množiny M platí, že $F(h(M)) = h(F(M))$.

Předpokládejme nejprve, že M je měřitelná množina. Pak $h(M)$ je kompaktní množina a podle podle důsledku 1.41 je $\mathrm{m}(h(M)) = 0$. Ke každému $x \in h(M)$ najdeme kvádr $K(x)$ takový, že $x \in \operatorname{int} K(x) = L(x) \subset K(x) \subset \Omega$. Množiny $L(x)$, $x \in h(M)$, tvoří otevřené pokrytí kompaktní množiny $h(M)$, takže podle Heineho-Borelova lemmatu — viz [6, str. 65] nebo [11, str. 50] — lze vybrat konečné podpokrytí $L(x_1)$ až $L(x_k)$. Označme $M_j = h(M) \cap K(x_j)$, $j = 1, \ldots, k$. Jelikož množina $h(M)$ má míru nula, platí podle věty 1.37, že $\mathrm{m}(M_j) = 0$, $j = 1, \ldots, k$.

Protože zobrazení F je regulární, mají jeho složky spojité parciální derivace, které jsou na kompaktních množinách $K(x_j)$, $j = 1, \ldots, k$, podle Weierstrassovy věty ohraničené. Podle lemmatu 3.42 je zobrazení F na těchto obdélnících lipschitzovské, a tedy podle důsledku 3.41 platí $\mathrm{m}(F(M_j)) = 0$, $j = 1, \ldots, k$. Jelikož $F(h(M)) = F(M_1 \cup \cup \cdots \cup M_k) = F(M_1) \cup \cdots \cup F(M_k)$, platí podle věty 1.39, že $\mathrm{m}(F(h(M))) = 0$. To znamená, že rovněž $\mathrm{m}(h(F(M))) = 0$, takže podle důsledku 1.41 je množina $F(M)$ měřitelná.

Má-li M míru nula, má nutně prázdný vnitřek, takže $M \subseteq h(M)$. Tehdy $F(M) \subseteq \subseteq F(h(M)) = h(F(M))$ a podle předchozí části má $F(M)$ míru nula.

Podle lemmatu 3.36 a důsledků 3.37 a 3.38 je inverzní zobrazení F^{-1} prosté a regulární na otevřené množině $F(\Omega)$. Protože $\overline{F(M)} = F(M) \cup h(F(M)) = F(M) \cup \cup F(h(M)) \subset F(\Omega)$, vyplývá (záměnou F a F^{-1} a M a $F(M)$) z první části důkazu, že měřitelnost $F(M)$ implikuje měřitelnost M a nulová míra $F(M)$ implikuje nulovost míry M. □

Lemma 3.44. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je prosté a regulární zobrazení. Buď $\widehat{x} \in \Omega$ libovolný bod. Pak existuje okolí U bodu $\widehat{x}$, zobrazení $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ a $\Psi\colon \Phi(U) \to \mathbb{R}^n$ a přirozené číslo i, $1 \leqq i \leqq n$, takové, že platí:*

i) *Zobrazení Φ je prosté a regulární na U.*

ii) *Zobrazení Ψ je prosté a regulární na otevřené množině $\Phi(U)$.*
iii) *$F = \Psi \circ \Phi$ na U.*
iv) *Zobrazení $\Phi\colon [x_1, \dots, x_n] \mapsto [y_1, \dots, y_n]$ má tvar*

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n),$$
$$y_2 = x_1,\ \ y_3 = x_2,\ \ \dots,\ \ y_i = x_{i-1},\ \ y_{i+1} = x_{i+1},\ \ \dots,\ \ y_n = x_n,$$

kde $\varphi = f_1$ (f_1 je první složka zobrazení F).
v) *Zobrazení $\Psi\colon [y_1, \dots, y_n] \mapsto [z_1, \dots, z_n]$ má tvar*

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1, \\ z_2 &= \psi_2(y_1, \dots, y_n), \\ z_3 &= \psi_3(y_1, \dots, y_n), \\ &\ \vdots \\ z_n &= \psi_n(y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Důkaz. Dokážeme pro $n = 3$. Nechť $F\colon [x_1, x_2, x_3] \mapsto [z_1, z_2, z_3]$ má složky

$$\begin{aligned} z_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ z_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ z_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Podle předpokladu má zobrazení F na Ω nenulový jakobián, takže $J_F(\widehat{x}) \neq 0$. Tedy alespoň jeden z prvků $f_{1|x_1}(\widehat{x})$, $f_{1|x_2}(\widehat{x})$, $f_{1|x_3}(\widehat{x})$, které tvoří první řádek, je nenulový. Nechť např. $f_{1|x_1}(\widehat{x}) \neq 0$ a pro určitost nechť $f_{1|x_1}(\widehat{x}) > 0$. Ze spojitosti derivace $f_{1|x_1}$ vyplývá existence kvádrového okolí U bodu $\widehat{x}$ takového, že $f_{1|x_1}(x) > 0$ pro každé $x \in U$. Zobrazení $\Phi\colon [x_1, x_2, x_3] \mapsto [y_1, y_2, y_3]$ budeme definovat vztahy (viz tvrzení iv) pro $i = 1$)

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3),\ \ y_2 = x_2,\ \ y_3 = x_3, \qquad [x_1, x_2, x_3] \in U.$$

Ukážeme, že Φ je prosté na U. Nechť $[x_1, x_2, x_3], [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3] \in U$, $[x_1, x_2, x_3] \neq$ $\neq [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$. Pak buď $[x_2, x_3] \neq [\bar{x}_2, \bar{x}_3]$, nebo $[x_2, x_3] = [\bar{x}_2, \bar{x}_3]$ a $x_1 \neq \bar{x}_1$. V prvním případě je zřejmě $\Phi(x_1, x_2, x_3) \neq \Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. V druhém případě je $f_1(x_1, x_2, x_3) \neq$ $\neq f_1(\bar{x}_1, x_2, x_3)$, protože funkce f_1 má při pevném druhém a třetím argumentu kladnou derivaci $f_{1|x_1}$ na intervalu, který je průmětem U do osy x_1 (U je kvádrové okolí), takže je vzhledem k prvnímu argumentu rostoucí. Tedy opět $\Phi(x_1, x_2, x_3) \neq \Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. Existuje tudíž inverzní zobrazení $\Phi^{-1}\colon [y_1, y_2, y_3] \mapsto [x_1, x_2, x_3]$, které má tvar

$$x_1 = \omega_1(y_1, y_2, y_3),\ \ x_2 = y_2,\ \ x_3 = y_3, \qquad [y_1, y_2, y_3] \in \Phi(U).$$

Přitom platí $\Phi \circ \Phi^{-1} = \mathrm{id}_{\Phi(U)}$, zejména tedy

$$f_1\bigl(\omega_1(y_1, y_2, y_3), y_2, y_3\bigr) = y_1, \qquad [y_1, y_2, y_3] \in \Phi(U). \tag{3.24}$$

Vypočteme jakobián J_Φ zobrazení Φ:

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} f_{1|x_1} & f_{1|x_2} & f_{1|x_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = f_{1|x_1}.$$

Jakobián je tedy na U nenulový ($f_{1|x_1} > 0$ na U), takže Φ je regulární zobrazení. Podle důsledku 3.37 je množina $\Phi(U)$ otevřená. Dále podle lemmatu 3.36 a důsledku 3.38 je inverzní zobrazení Φ^{-1} regulární na množině $\Phi(U)$.

Položme nyní $\Psi = F \circ \Phi^{-1}$ na množině $\Phi(U)$. Zobrazení Ψ je složením prostých zobrazení, takže je rovněž prosté. Podle lemmatu 3.35 je regulární. Zřejmě platí $F = \Psi \circ \Phi$ na U. Označme $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]$. Vzhledem k rovnosti (3.24) platí

$$\psi_1(y_1, y_2, y_3) = f_1\big(\omega_1(y_1, y_2, y_3), y_2, y_3\big) = y_1,$$

což je tvrzení v). Zobrazení Φ a Ψ mají všechny požadované vlastnosti. □

Předchozí lemma říká, že prosté regulární zobrazení F lze lokálně vyjádřit jako složení dvou zobrazení takových, že první z nich změní pouze jednu souřadnici a ostatní souřadnice ponechá, zatímco druhé ponechá změněnou souřadnici a ostatní souřadnice změní. Tento rozklad nám umožní udělat indukční krok v důkazu lemmatu 3.49.

Lemma 3.45. *Nechť A, B jsou neprázdné disjunktní podmnožiny $\mathbb{R}^n$, A je kompaktní a B je uzavřená. Pak jejich vzdálenost $d = \inf\{\varrho(x, y) : x \in A, \ y \in B\}$ je kladná (ϱ značí eukleidovskou metriku na $\mathbb{R}^n$).*

Důkaz. Z definice infima plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n \in A$ a $y_n \in B$ tak, že $d \leqq \varrho(x_n, y_n) < d + 1/n$. Protože $\{x_n\} \subseteq A$, je posloupnost $\{x_n\}$ ohraničená. Nechť $L_1 > 0$ je taková konstanta, že $\varrho(O, x_n) \leqq L_1$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ (O je počátek souřadnicové soustavy). Z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme pro každé n, že $\varrho(O, y_n) \leqq \varrho(O, x_n) + \varrho(x_n, y_n) \leqq L_1 + d + 1 = L_2$. Označme $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(O, x) \leqq L_2\}$ kouli se středem v počátku souřadnic O a poloměrem L_2 a položme $C = B \cap K$. Množina C je omezená a uzavřená, což zaručuje v $\mathbb{R}^n$ její kompaktnost, a $\{y_n\} \subseteq C$.

Podle definice kompaktní množiny (např. [6, str. 33]) lze z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$. Podobně lze z posloupnosti $\{y_{n_k}\}$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{y_{n_{k_l}}\}$. Nechť $x_{n_{k_l}} \to x_0$, $y_{n_{k_l}} \to y_0$ pro $l \to \infty$. Protože množiny A, C jsou uzavřené, platí $x_0 \in A$, $y_0 \in C \subseteq B$. Ze spojitosti metriky ϱ vyplývá, že $\varrho(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) \to \varrho(x_0, y_0)$ pro $l \to \infty$, a tedy vzhledem k tomu, že $\varrho(x_n, y_n) \to d$ pro $n \to \infty$, platí $d = \varrho(x_0, y_0)$. Protože $A \cap B = \emptyset$, je $x_0 \neq y_0$, takže $d = \varrho(x_0, y_0) > 0$. □

Připomeňme, že v oddílu 2.3 jsme pro $x = [x_1, \dots, x_n]$ zavedli zkrácené označení $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$.

Lemma 3.46. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je prosté a regulární zobrazení. Nechť pro každý uzavřený interval $M \subset \Omega$ a každou funkci f spojitou na $F(M)$ platí*

$$\int_{F(M)} \cdots \int f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{M} \cdots \int f[F(x)] \cdot |J_F(x)|\,\mathrm{d}x, \tag{3.25}$$

kde J_F je jakobián zobrazení F.

Pak pro libovolnou uzavřenou měřitelnou množinu $A \subset \Omega$ a libovolnou funkci f spojitou na $F(A)$ platí

$$\int_{F(A)} \cdots \int f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{A} \cdots \int f[F(x)] \cdot |J_F(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{3.26}$$

Důkaz. Dokážeme pro $n = 2$.

1) Předpokládejme nejprve, že $A = M_1 \cup \cdots \cup M_k$, kde M_j, $j = 1, \dots, k$, jsou obdélníky, přičemž žádné dva různé z nich nemají společné vnitřní body, tedy platí $\mathrm{m}(M_i \cap M_j) = 0$ pro $i \neq j$. Podle lemmatu 3.43 jsou množiny A, M_1, …, M_k měřitelné a $\mathrm{m}\bigl(F(M_i) \cap F(M_j)\bigr) = \mathrm{m}\bigl(F(M_i \cap M_j)\bigr) = 0$ pro $i \neq j$. Přitom $F(A) = F(M_1) \cup \cdots \cup F(M_k)$. Je-li f funkce spojitá na $F(A)$, podle předpokladu (3.25) a věty 1.50, část c) platí

$$\begin{aligned}\iint_{F(A)} f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 &= \sum_{j=1}^{k} \iint_{F(M_j)} f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \\ &= \sum_{j=1}^{k} \iint_{M_j} f[F(x_1, x_2)] \cdot |J_F(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \\ &= \iint_{A} f[F(x_1, x_2)] \cdot |J_F(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

Tudíž rovnost (3.26) platí pro množiny, které jsou sjednocením konečně mnoha obdélníků majících po dvou disjunktní vnitřky.

2) Nechť nyní $A \subset \Omega$ je libovolná neprázdná uzavřená měřitelná množina a $R \supseteq A$ je obdélník. Pak funkce χ_A je integrovatelná na R. Podle lemmatu 1.9 k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje dělení D obdélníku R takové, že $S(D, \chi_A) - s(D, \chi_A) < \varepsilon$. Přitom lze předpokládat, že norma $\nu(D)$ je libovolně malá, protože zjemněním dělení D se dolní součty nezmenší a horní součty se nezvětší, takže uvedená nerovnost bude platit i pro každé zjemnění dělení D. Označme M sjednocení všech dílků dělení D, které jsou podmnožinami A, a N sjednocení všech dílků dělení D, které mají neprázdný průnik s A. Platí $M \subseteq A \subseteq N$ (srovnejte cvičení 15 ke kapitole 1). Protože $A \subset \Omega$, je rovněž $M \subseteq \Omega$. Je-li $\Omega = \mathbb{R}^2$, je i $N \subseteq \Omega$. Pokud je $\Omega \neq \mathbb{R}^2$, nemusí předchozí inkluze platit. V tom případě je podle lemmatu 3.45 vzdálenost d kompaktní množiny A a neprázdné uzavřené množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ kladná, protože tyto množiny jsou disjunktní. Zvolme dělení D tak, aby $\nu(D) < d$. Potom jeho dílky, které mají neprázdný průnik s A, nemohou mít společné body s $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, takže jsou podmnožinami Ω. Bude tedy platit $M \subseteq A \subseteq N \subset \Omega$. Z definice dolního a horního součtu plyne, že $\mathrm{m}(N) - \mathrm{m}(M) = S(D, \chi_A) - s(D, \chi_A) < \varepsilon$.

3) Podle předchozí části k číslu $\varepsilon = 1$ existuje dělení D_1 takové, že pro sestrojené množiny M_1, N_1 platí $M_1 \subseteqq A \subseteqq N_1 \subset \Omega$. Jakobián J_F je spojitá funkce na kompaktní množině N_1, tedy podle Weierstrassovy věty existuje konstanta $K > 0$ taková, že $|J_F(x_1, x_2)| \leqq K$ pro každé $[x_1, x_2] \in N_1$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. K číslu $\varepsilon/K > 0$ existuje podle druhé části důkazu dělení D a z něj sestrojené množiny $M \subseteq A \subseteq N \subset \Omega$ takové, že $\mathrm{m}(N) - \mathrm{m}(M) < < \varepsilon/K$. Přitom lze předpokládat, že dělení D je zjemněním dělení D_1, takže bude platit $M_1 \subseteqq M \subseteqq A \subseteqq N \subseteqq N_1 \subset \Omega$. Odtud máme $F(M) \subseteqq F(A) \subseteqq F(N)$, přičemž tyto množiny jsou podle lemmatu 3.43 měřitelné.
Množiny M a N jsou sjednocením konečně mnoha obdélníků, majících po dvou disjunktní vnitřky. Tudíž podle první části důkazu a vztahu (3.26), v němž zvolíme $f(y_1, y_2) = 1$ pro každé $[y_1, y_2] \in N$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}(F(N)) - \mathrm{m}(F(M)) &= \iint\limits_{F(N)} \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 - \iint\limits_{F(M)} \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \\
&= \iint\limits_{N} |J_F(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - \iint\limits_{M} |J_F(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \\
&= \iint\limits_{N \setminus M} |J_F(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \leqq \\
&\leqq K\,\mathrm{m}(N \setminus M) = K[\mathrm{m}(N) - \mathrm{m}(M)] < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Zejména tedy platí $\mathrm{m}(F(A)) - \mathrm{m}(F(M)) \leqq \mathrm{m}(F(N)) - \mathrm{m}(F(M)) < \varepsilon$.

4) Nechť f je funkce spojitá na $F(A)$. Protože množina A je kompaktní, je rovněž množina $F(A)$ kompaktní a podle Weierstrassovy věty existuje konstanta $L > 0$ taková, že $|f(y_1, y_2)| \leqq L$ pro každé $[y_1, y_2] \in F(A)$, a tedy $\big|f[F(x_1, x_2)] \cdot J_F(x_1, x_2)\big| \leqq KL$ pro každé $[x_1, x_2] \in A$. Nechť M je množina z třetí části důkazu. Podle první části důkazu ze vztahu (3.26) obdržíme rovnost

$$\iint\limits_{F(M)} f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \iint\limits_{M} f[F(x_1, x_2)] \cdot |J_F(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

Jejím použitím dostaneme

$$\begin{aligned}
&\Big|\iint\limits_{F(A)} f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 - \iint\limits_{A} f[F(x_1, x_2)] \cdot |J_F(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\Big| = \\
&= \Big|\iint\limits_{F(A)} f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 - \iint\limits_{F(M)} f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 + \\
&\quad + \iint\limits_{M} f[F(x_1, x_2)] \cdot |J_F(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - \\
&\qquad\qquad - \iint\limits_{A} f[F(x_1, x_2)] \cdot |J_F(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\Big| \leqq \\
&\leqq \Big|\iint\limits_{F(A) \setminus F(M)} f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\Big| + \Big|\iint\limits_{A \setminus M} f[F(x_1, x_2)] \cdot |J_F(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\Big| \leqq \\
&\leqq L[\mathrm{m}(F(A)) - \mathrm{m}(F(M))] + KL[\mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(M)] < L\varepsilon + KL\,\tfrac{\varepsilon}{K} = 2L\varepsilon.
\end{aligned}$$

Protože číslo $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, musí platit rovnost (3.26). $\square$

V důkazu lemmatu 3.49 budeme potřebovat jistou modifikaci Fubiniovy věty. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ je množina. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}^m$ označme $A_{(x,\cdot)} = \{y \in \mathbb{R}^n : [x, y] \in A\}$. Analogicky zavedeme symbol $A_{(\cdot,y)}$, kde $y \in \mathbb{R}^n$. Množiny $A_{(x,\cdot)}$ a $A_{(\cdot,y)}$ jsou průměty „řezů“ množiny A afinními podprostory prostoru $\mathbb{R}^{m+n}$ o rovnicích $z_1 = x_1, \dots, z_m = x_m$ resp. $z_{m+1} = y_1, \dots, z_{m+n} = y_n$ — srovnejte též poznámku 1.13.

Lemma 3.47. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ je měřitelná množina a f je funkce integrovatelná na A. Buď R $(m+n)$-rozměrný kompaktní interval takový, že $A \subseteq R = M \times N$, kde $M \subset \mathbb{R}^m$ a $N \subset \mathbb{R}^n$ jsou kompaktní intervaly. Nechť pro každé $x \in M$ existuje integrál $\int\limits_{A_{(x,\cdot)}} \cdots \int f(x, y)\, dy$. Pak platí, že $\int\limits_{A} \cdots \int f(x, y)\, dx dy = \int\limits_{M} \cdots \int \Big(\int\limits_{A_{(x,\cdot)}} \cdots \int f(x, y)\, dy\Big) dx$.*

Důkaz. Dokážeme pro $m = n = 1$. Podle předpokladu je funkce $\chi_A f$ integrovatelná na R. S využitím Fubiniovy věty 1.14 dostaneme, že

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\, dx dy = \iint\limits_{R} (\chi_A f)(x, y)\, dx dy = \int\limits_{M} \Big(\overline{\int\limits_{N}} (\chi_A f)(x, y)\, dy \Big)\, dx. \tag{3.27}$$

Pro libovolné $x \in M$ a $y \in A_{(x,\cdot)}$ je $(\chi_A f)(x, y) = (\chi_{A_{(x,\cdot)}} f)(x, y)$, takže z existence integrálu $\int\limits_{A_{(x,\cdot)}} \cdots \int f(x, y)\, dy$ vyplývá, že

$$\int\limits_{A_{(x,\cdot)}} f(x, y)\, dy = \int\limits_{N} (\chi_{A_{(x,\cdot)}} f)(x, y)\, dy = \int\limits_{N} (\chi_A f)(x, y)\, dy = \overline{\int\limits_{N}} (\chi_A f)(x, y)\, dy.$$

Dosazením do (3.27) dostáváme tvrzení. □

Lemma 3.48. *Nechť množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je sjednocením uzavřených nedegenerovaných intervalů $I_1, \dots, I_m$. Pak existují uzavřené nedegenerované intervaly $J_1, \dots, J_k$ tak, že*

i) *$A = J_1 \cup \dots \cup J_k$.*
ii) *Intervaly J_i, J_j, $1 \leqq i < j \leqq k$, nemají společné vnitřní body.*
iii) *Každý interval J_j, $j = 1, \dots, k$, je podmnožinou některého intervalu I_i, $i = 1, \dots, m$.*

Důkaz. Dokážeme pro $n = 2$. Nechť $I_i = \langle a_i, b_i \rangle \times \langle c_i, d_i \rangle$, $i = 1, \dots, m$. Označme $a = \min\{a_1, \dots, a_m\}$, $b = \max\{b_1, \dots, b_m\}$, $c = \min\{c_1, \dots, c_m\}$, $d = \max\{d_1, \dots, d_m\}$. Položme $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Nechť D^1 je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, které obsahuje všechny body a_i, b_i a D^2 je dělení intervalu $\langle c, d \rangle$, které obsahuje všechny body c_i, d_i, $i = 1, \dots, m$. Buď $D = D^1 \times D^2$ dělení obdélníku M. Nechť $J_1, \dots, J_k$ jsou všechny dílky dělení D, které jsou podmnožinami A. Snadno se ověří, že tyto uzavřené nedegenerované intervaly mají požadované vlastnosti. □

Lemma 3.49. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je prosté a regulární zobrazení. Potom pro libovolný uzavřený interval $M \subset \Omega$ a libovolnou funkci f spojitou na $F(M)$ platí rovnost (3.25).*

Důkaz. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Přitom se stačí omezit na nedegenerované intervaly. Pro degenerovaný interval M tvrzení totiž triviálně platí, protože pak $\mathrm{m}_n(M) = 0$ a podle lemmatu 3.43 je také $\mathrm{m}_n(F(M)) = 0$, takže podle věty 1.50, část b), resp. její analogie pro vícerozměrné integrály, jsou integrály na obou stranách vztahu (3.25) rovny nule.

Pro jednorozměrné integrály, tj. $n = 1$, lemma platí — viz věta 3.1.

Předpokládejme nyní, že tvrzení lemmatu platí pro n-rozměrné integrály, kde n je nějaké přirozené číslo. Dokážeme, že pak tvrzení platí i pro $(n+1)$-rozměrné integrály. Důkaz provedeme pro $n = 2$, tj. $n + 1 = 3$.

Nechť zobrazení $F\colon [x_1, x_2, x_3] \mapsto [z_1, z_2, z_3]$ je dáno rovnicemi $z_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, kde $[x_1, x_2, x_3] \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ a Ω, F splňují předpoklady dokazovaného lemmatu.

Ukážeme nejprve (v 8 krocích), že pro každý bod $\widehat{x} \in \Omega$ existuje okolí $\mathscr{O}(\widehat{x})$ takové, že pro každý kvádr $I \subset \mathscr{O}(\widehat{x})$ a každou funkci f spojitou na $F(I)$ platí

$$\iiint\limits_{F(I)} f(z)\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{I} f[F(x)] \cdot |J_F(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{3.28}$$

1) Buď $\widehat{x} \in \Omega$ libovolný bod. Podle lemmatu 3.44 existuje okolí $\mathscr{O}(\widehat{x}) = U \subseteq \Omega$, na němž má zobrazení F rozklad tvaru $F = \Psi \circ \Phi$, kde $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^3$ a $\Psi\colon \Phi(U) \to \mathbb{R}^3$ jsou prostá diferencovatelná zobrazení, přičemž $\Phi\colon [x_1, x_2, x_3] \mapsto [y_1, y_2, y_3]$ je např. tvaru $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3)$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ a $\Psi\colon [y_1, y_2, y_3] \mapsto [z_1, z_2, z_3]$ je tvaru $z_1 = y_1$, $z_2 = \psi_2(y_1, y_2, y_3)$, $z_3 = \psi_3(y_1, y_2, y_3)$. Z rovnosti $F = \Psi \circ \Phi$ a tvaru zobrazení Φ a Ψ vyplývá, že $\varphi_1 = f_1$ na U. Pro jejich jakobiány podle lemmatu 3.35 platí $J_F(x) = J_\Psi(\Phi(x))J_\Phi(x)$ pro $x \in U$.
2) Množina $\Phi(U)$ je podle důsledku 3.37 otevřená (v $\mathbb{R}^3$), takže množina $\Phi(U)_{(y_1,\cdot,\cdot)}$ je pro libovolné y_1 rovněž otevřená (v $\mathbb{R}^2$). Pro každé y_1, pro něž je $\Phi(U)_{(y_1,\cdot,\cdot)} \neq \emptyset$, definujme zobrazení $\Psi_{y_1}\colon \Phi(U)_{(y_1,\cdot,\cdot)} \to \mathbb{R}^2$ vztahy
$$z_2 = \psi_2(y_1, y_2, y_3), \quad z_3 = \psi_3(y_1, y_2, y_3).$$
Ověříme, že zobrazení Ψ_{y_1} je regulární pro každé y_1, pro něž je definované. Platí
$$J_{\Psi_{y_1}} = \begin{vmatrix} \psi_{2|y_2} & \psi_{2|y_3} \\ \psi_{3|y_2} & \psi_{3|y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \psi_{2|y_1} & \psi_{2|y_2} & \psi_{2|y_3} \\ \psi_{3|y_1} & \psi_{3|y_2} & \psi_{3|y_3} \end{vmatrix} = J_\Psi,$$
tedy $J_{\Psi_{y_1}}(y_2, y_3) = J_\Psi(y_1, y_2, y_3) \neq 0$ pro $[y_2, y_3] \in \Phi(U)_{(y_1,\cdot,\cdot)}$. Protože zobrazení Ψ je prosté na $\Phi(U)$, je zobrazení Ψ_{y_1} prosté na $\Phi(U)_{(y_1,\cdot,\cdot)}$.
3) Buď $I_1 \subset \Phi(U)$ libovolný kvádr. Nechť $I_1 = \langle c_1, d_1\rangle \times \langle c_2, d_2\rangle \times \langle c_3, d_3\rangle$. Označme $I_2 = \langle c_2, d_2\rangle \times \langle c_3, d_3\rangle$. Pak $I_1 = \langle c_1, d_1\rangle \times I_2$. Podle lemmatu 3.43 je množina $\Psi(I_1)$ měřitelná (v $\mathbb{R}^3$). Přitom z vlastností zobrazení Ψ vyplývá, že tato množina je tvořena právě body $[z_1, z_2, z_3]$, pro něž platí $z_1 \in \langle c_1, d_1\rangle$ a $[z_2, z_3] \in \Psi_{z_1}(I_2)$. Tudíž pro libovolné $z_1 \in \langle c_1, d_1\rangle$ je $\Psi(I_1)_{(z_1,\cdot,\cdot)} = \Psi_{z_1}(I_2)$. Protože podle části 2) je zobrazení Ψ_{z_1} prosté a regulární na otevřené množině $\Phi(U)_{(z_1,\cdot,\cdot)}$, která obsahuje obdélník I_2, je množina $\Psi_{z_1}(I_2)$ podle lemmatu 3.43 měřitelná (v $\mathbb{R}^2$) pro každé $z_1 \in \langle c_1, d_1\rangle$.

4) Buď f libovolná funkce spojitá na $\Psi(I_1)$. Protože tato množina je kompaktní, existuje podle důsledku 1.48 integrál $\iiint\limits_{\Psi(I_1)} f(z_1, z_2, z_3)\, \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3$. Ze stejných důvodů bude pro každé $z_1 \in \langle c_1, d_1\rangle$ existovat integrál $\iint\limits_{\Psi_{z_1}(I_2)} f(z_1, z_2, z_3)\, \mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3$. Podle lemmatu 3.47 (v němž zvolíme $M = \langle c_1, d_1\rangle$ a za N vybereme libovolný dostatečně velký obdélník) bude platit

$$\iiint\limits_{\Psi(I_1)} f(z_1, z_2, z_3)\, \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 = \int_{c_1}^{d_1} \Big[\iint\limits_{\Psi(I_1)_{(z_1,\cdot,\cdot)}} f(z_1, z_2, z_3)\, \mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 \Big]\, \mathrm{d}z_1 =$$
$$= \int_{c_1}^{d_1} \Big[\iint\limits_{\Psi_{z_1}(I_2)} f(z_1, z_2, z_3)\, \mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 \Big]\, \mathrm{d}z_1.$$

Podle indukčního předpokladu (rovnost (3.25) platí pro dvojné integrály) dostaneme

$$\iint\limits_{\Psi_{z_1}(I_2)} f(z_1, z_2, z_3)\, \mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 =$$
$$= \iint\limits_{I_2} f[z_1, \psi_2(z_1, y_2, y_3), \psi_3(z_1, y_2, y_3)] \cdot \big|J_{\Psi_{z_1}}(y_2, y_3)\big|\, \mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3.$$

S využitím Fubiniovy věty pro trojný integrál přes kvádr (viz str. 86) a vztahu mezi jakobiány odvozeného v části 2) celkem vyjde

$$\iiint\limits_{\Psi(I_1)} f(z_1, z_2, z_3)\, \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 =$$
$$= \int_{c_1}^{d_1} \Big[\iint\limits_{I_2} f[z_1, \psi_2(z_1, y_2, y_3), \psi_3(z_1, y_2, y_3)] \cdot \big|J_{\Psi_{z_1}}(y_2, y_3)\big|\, \mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3 \Big]\, \mathrm{d}z_1 =$$
$$= \iiint\limits_{I_1} f[y_1, \psi_2(y_1, y_2, y_3), \psi_3(y_1, y_2, y_3)] \cdot \big|J_{\Psi}(y_1, y_2, y_3)\big|\, \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3,$$

neboť integrand výsledného integrálu je funkce spojitá na kvádru I_1 a označení integračních proměnných není podstatné.

5) V bodu 4) jsme tedy dokázali, že pro libovolný kvádr $I_1 \subset \Phi(U)$ a pro libovolnou funkci f spojitou na $\Psi(I_1)$ ve stručnějším označení platí

$$\iiint\limits_{\Psi(I_1)} f(z)\, \mathrm{d}z = \iiint\limits_{I_1} f[\Psi(y)] \cdot |J_\Psi(y)|\, \mathrm{d}y.$$

Z lemmatu 3.46 plyne, že pro libovolnou kompaktní měřitelnou množinu $A \subset \Phi(U)$ a libovolnou funkci f spojitou na $F(A)$ platí

$$\iiint\limits_{\Psi(A)} f(z)\, \mathrm{d}z = \iiint\limits_{A} f[\Psi(y)] \cdot |J_\Psi(y)|\, \mathrm{d}y. \tag{3.29}$$

6) Množina U je otevřená (v $\mathbb{R}^3$), proto je pro libovolné $[x_2, x_3]$ otevřená i množina $U_{(\cdot,x_2,x_3)}$ (v $\mathbb{R}$). Pro libovolné $[x_2, x_3]$ takové, že $U_{(\cdot,x_2,x_3)} \neq \emptyset$, definujme zobrazení

$\Phi_{(x_2,x_3)}\colon U_{(\cdot,x_2,x_3)} \to \mathbb{R}$ vztahem $\Phi_{(x_2,x_3)}(x_1) = \varphi(x_1,x_2,x_3)$. Protože Φ je prosté na U, je $\Phi_{(x_2,x_3)}$ prosté na $U_{(\cdot,x_2,x_3)}$. Ukážeme, že je regulární. Platí

$$J_{\Phi_{(x_2,x_3)}} = \varphi_{1|x_1} = \begin{vmatrix} \varphi_{1|x_1} & \varphi_{1|x_2} & \varphi_{1|x_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = J_\Phi ,$$

tedy $J_{\Phi_{(x_2,x_3)}}(x_1) = J_\Phi(x_1,x_2,x_3) \neq 0$ pro každé $x_1 \in U_{(\cdot,x_2,x_3)}$.

7) Buď nyní $I \subset U$ libovolný kvádr. Nechť $I = \langle a_1,b_1\rangle \times \langle a_2,b_2\rangle \times \langle a_3,b_3\rangle$. Označme $I_3 = \langle a_1,b_1\rangle$ a $I_4 = \langle a_2,b_2\rangle \times \langle a_3,b_3\rangle$. Pak $I = I_3 \times I_4$. Množina $\Phi(I)$ je podle lemmatu 3.43 měřitelná (v $\mathbb{R}^3$). Z vlastností zobrazení Φ vyplývá, že množina $\Phi(I)$ je tvořena právě body $[y_1,y_2,y_3]$, pro něž platí $[y_2,y_3] \in I_4$ a $y_1 \in \Phi_{(y_2,y_3)}(I_3)$. Tudíž pro libovolné $[y_2,y_3] \in I_4$ je $\Phi(I)_{(\cdot,y_2,y_3)} = \Phi_{(y_2,y_3)}(I_3)$. Protože podle části 6) je zobrazení $\Phi_{(y_2,y_3)}$ prosté a regulární na otevřené množině $U_{(\cdot,y_2,y_3)}$, která obsahuje interval I_3, je množina $\Phi_{(y_2,y_3)}(I_3)$ podle lemmatu 3.43 měřitelná (v $\mathbb{R}$) pro každé $[y_2,y_3] \in I_4$. (Vzhledem k tomu, že zobrazení $\Phi_{(y_2,y_3)}$ je vlastně funkce jedné proměnné, která je spojitá a prostá na kompaktním intervalu I_3, musí být ve skutečnosti ryze monotónní, takže $\Phi_{(y_2,y_3)}(I_3)$ je opět kompaktní interval.)

8) Protože množina $\Phi(I) \subset \Phi(U)$ je kompaktní a měřitelná, pro libovolnou funkci f spojitou na $F(I)$ podle (3.29) platí

$$\iiint\limits_{F(I)} f(z)\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Phi(I)} f[\Psi(y)]\cdot|J_\Psi(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{3.30}$$

Vypočteme integrál na pravé straně předchozí rovnosti. Pro každé $[y_2,y_3] \in I_4$ existuje integrál

$$\int\limits_{\Phi_{(y_2,y_3)}(I_3)} f[y_1,\psi_2(y_1,y_2,y_3),\psi_3(y_1,y_2,y_3)]\cdot|J_\Psi(y_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}y_1.$$

Podle lemmatu 3.47 (v němž volíme $M = I_4$ a za N vybereme libovolný dostatečně veliký interval), bude platit

$$\iiint\limits_{\Phi(I)} f[y_1,\psi_2(y_1,y_2,y_3),\psi_3(y_1,y_2,y_3)]\cdot|J_\Psi(y_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3 =$$

$$= \iint\limits_{I_4}\Big[\int\limits_{\Phi(I)_{(\cdot,y_2,y_3)}} f[y_1,\psi_2(y_1,y_2,y_3),\psi_3(y_1,y_2,y_3)]\cdot|J_\Psi(y_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}y_1\Big]\,\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3 =$$

$$= \iint\limits_{I_4}\Big[\int\limits_{\Phi_{(y_2,y_3)}(I_3)} f[y_1,\psi_2(y_1,y_2,y_3),\psi_3(y_1,y_2,y_3)]\cdot|J_\Psi(y_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}y_1\Big]\,\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3.$$

S využitím věty 3.1 (tj. vlastně podle vztahu (3.25) pro jednoduché integrály), vztahu mezi jakobiány odvozeného v části 6) a vzorce pro jakobián J_F z části 1) pro vnitřní integrál dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Phi_{(y_2,y_3)}(I_3)} f[y_1,\psi_2(y_1,y_2,y_3),\psi_3(y_1,y_2,y_3)]\cdot|J_\Psi(y_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}y_1 = \\
&\quad= \int\limits_{I_3} f\{\varphi_1(x_1,y_2,y_3),\psi_2[\varphi_1(x_1,y_2,y_3),y_2,y_3],\psi_3[\varphi_1(x_1,y_2,y_3),y_2,y_3]\}\times \\
&\qquad\qquad\qquad \times |J_\Psi(\varphi_1(x_1,y_2,y_3),y_2,y_3)|\cdot|J_{J_{\Phi_{(y_2,y_3)}}}(x_1)|\,\mathrm{d}x_1 = \\
&\quad= \int\limits_{I_3} f[f_1(x_1,y_2,y_3),f_2(x_1,y_2,y_3),f_3(x_1,y_2,y_3)]\times \\
&\qquad\qquad\qquad \times |J_\Psi(\varphi_1(x_1,y_2,y_3),y_2,y_3)|\cdot|J_\Phi(x_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}x_1 = \\
&\quad= \int\limits_{I_3} f[F(x_1,y_2,y_3)]\cdot|J_\Psi(\Phi(x_1,y_2,y_3)|\cdot|J_\Phi(x_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}x_1 = \\
&\quad= \int\limits_{I_3} f[F(x_1,y_2,y_3)]\cdot|J_F((x_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}x_1.
\end{aligned}$$

Z Fubiniovy věty pro trojný integrál přes kvádr (viz str. 86) tudíž pro integrál na pravé straně vztahu (3.30) vyjde

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Phi(I)} f[\Psi(y_1,y_2,y_3)]\cdot|J_\Psi(y_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3 = \\
&\qquad\qquad = \iint\limits_{I_4}\Big[\int\limits_{I_3} f[F(x_1,y_2,y_3)]\cdot|J_F((x_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}x_1\Big]\,\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3 = \\
&\qquad\qquad = \iiint\limits_{I} f[F(x)]\cdot|J_F(x)|\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

neboť integrand výsledného integrálu je funkce spojitá na kvádru I a označení integračních proměnných není podstatné. Tím je vzhledem k rovnosti (3.30) vztah (3.28) dokázán.

Nechť nyní $M \subset \Omega$ je libovolný kvádr a f libovolná funkce spojitá na $F(M)$. Podle dokázané lokální verze existuje ke každému bodu $x \in M$ okolí $\mathscr{O}(x)$ takové, že pro libovolný kvádr $I \subset \mathscr{O}(x)$ a libovolnou funkci g spojitou na $F(I)$ platí

$$\iiint\limits_{F(I)} g(z)\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{I} g[F(x)]\cdot|J_F(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{3.31}$$

Vyberme v každém okolí $\mathscr{O}(x)$ kvádr I_x tak, aby x byl jeho vnitřním bodem. Pak vnitřky kvádrů I_x, $x \in M$, tvoří otevřené pokrytí kvádru M. Podle Heineho-Borelova lemmatu lze z tohoto pokrytí vybrat konečné podpokrytí. Nechť je toto podpokrytí tvořeno vnitřky kvádrů $I_1, \dots, I_p$. Předpokládejme, že $\mathring{I}_i \cap M \neq \emptyset$ („nepotřebné“ kvádry můžeme vyřadit). Platí $M \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_p$. To znamená, že $M = (M \cap I_1) \cup \dots \cup (M \cap I_p)$. Množiny $M \cap I_i$, $i = 1, \dots, p$, jsou kvádry, nemohou to být degenerované intervaly, neboť $\mathring{I}_i \cap M \neq \emptyset$. Podle lemmatu 3.48 existují kvádry $J_1, \dots, J_q$ takové, že $M = J_1 \cup \cup \dots \cup J_q$, žádné dva různé z nich nemají společné vnitřní body a každý z nich je podmnožinou některého kvádru $M \cap I_i$. Z poslední vlastnosti vyplývá, že funkce f je spojitá na každé množině $F(J_j)$, $j = 1, \dots, q$.

Ze vztahu (3.31) dostáváme, že

$$\iiint\limits_{F(J_j)} f(z)\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{J_j} f[F(x)] \cdot |J_F(x)|\,\mathrm{d}x, \qquad j = 1, \dots, q.$$

Množiny J_i, J_j, $1 \leqq i < j \leqq q$ nemají společné vnitřní body, tedy $\mathrm{m}(J_i \cap J_j) = 0$. Platí tudíž $\mathrm{m}(F(J_i) \cap F(J_j)) = 0$ (viz část 1) důkazu lemmatu 3.46). Přitom $F(M) = F(J_1) \cup \dots \cup F(J_q)$ Podle analogie věty 1.50, část c) pro trojné integrály vyjde, že

$$\iiint\limits_{F(M)} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{q} \iiint\limits_{F(J_j)} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{q} \iiint\limits_{J_j} f[F(x)] \cdot |J_F(x)|\,\mathrm{d}x =$$
$$= \iiint\limits_{M} f[F(x)] \cdot |J_F(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Tím je platnost vztahu (3.25) pro $n + 1 = 3$ dokázána. Zcela analogicky se postupuje v obecném případě. Vzorec tedy platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. □

Důkaz věty 3.30

Platnost tvrzení bezprostředně vyplývá z lemmat 3.49 a 3.46. □

Důkaz věty 3.31

Dokážeme pro $n = 2$.

Protože $\mathrm{m}(B \setminus B_1) = 0$, je množina $B \setminus B_1$ měřitelná. Tudíž i množina $B_1 = B \setminus (B \setminus B_1)$ je měřitelná. Analogicky se zdůvodní, že i množina $F(B_1)$ je měřitelná. Podle věty 1.50 platí

$$\iint\limits_{B} f[F(u)] \cdot |J_F(u)|\,\mathrm{d}u = \iint\limits_{B_1} f[F(u)] \cdot |J_F(u)|\,\mathrm{d}u + \iint\limits_{B \setminus B_1} f[F(u)] \cdot |J_F(u)|\,\mathrm{d}u =$$
$$= \iint\limits_{B_1} f[F(u)] \cdot |J_F(u)|\,\mathrm{d}u,$$
$$\iint\limits_{F(B)} f(x)\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{F(B_1)} f(x)\,\mathrm{d}x + \iint\limits_{F(B) \setminus F(B_1)} f(x)\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{F(B_1)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Stačí tedy dokázat rovnost

$$\iint\limits_{F(B_1)} f(x)\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{B_1} f[F(u)] \cdot |J_F(u)|\,\mathrm{d}u. \tag{3.32}$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. Protože je množina $F(B_1)$ měřitelná, existuje množina $M_1 \subset F(B_1)$ taková, že $\mathrm{m}(F(B_1) \setminus M_1) = \mathrm{m}(F(B_1)) - \mathrm{m}(M_1) < \varepsilon$ — viz část 2) důkazu lemmatu 3.46 nebo cvičení 15 ke kapitole 1. Přitom M_1 je sjednocením konečně mnoha obdélníků, takže je kompaktní.

Protože množina B_1 je otevřená, ke každému $u \in B_1$ existuje kruhové okolí $\mathscr{O}_\delta(u)$ o poloměru $\delta > 0$, které je podmnožinou B_1 (δ závisí na u). Nechť $\overline{\mathscr{O}_{\delta/2}(u)}$ je uzavřený kruh o poloměru $\delta/2$ se středem v bodě u. Zřejmě $\overline{\mathscr{O}_{\delta/2}(u)} \subset \mathscr{O}_\delta(u)$. Protože uzavřený kruh je měřitelná množina, jsou množiny $M_u = F(\overline{\mathscr{O}_{\delta/2}(u)})$, $u \in B_1$, podle lemmatu 3.43 měřitelné. Dále podle lemmatu 3.39 je vnitřek množiny M_u okolím bodu $F(u)$. Tedy systém vnitřků $\mathring{M}_{F^{-1}(x)}$, $x \in M_1$, tvoří otevřené pokrytí množiny M_1 (připomeňme, že F je prosté na B_1). Podle Heineho-Borelova lemmatu lze z tohoto pokrytí vybrat konečné podpokrytí. Nechť je toto podpokrytí tvořeno vnitřky množin $M_{u^i} = F(\overline{\mathscr{O}_{\delta_i/2}(u)})$, $i = 1, \dots, p$. Tedy $M_1 \subseteq M_{u^1} \cup \dots \cup M_{u^p}$.

Rovněž množina B_1 je měřitelná, takže existuje množina $N_1 \subset B_1$, tvořená sjednocením konečně mnoha obdélníků, taková, že $\mathrm{m}(B_1 \setminus N_1) = \mathrm{m}(B_1) - \mathrm{m}(N_1) < \varepsilon$. Položme $N = N_1 \cup \overline{\mathscr{O}_{\delta_1/2}(u^1)} \cup \dots \cup \overline{\mathscr{O}_{\delta_p/2}(u^p)}$. Množina N je kompaktní. Dále $N_1 \subseteq N \subset B_1$, takže platí $\mathrm{m}(B_1 \setminus N) = \mathrm{m}(B_1) - \mathrm{m}(N) \leqq \mathrm{m}(B_1) - \mathrm{m}(N_1) < \varepsilon$.

Nechť $M = F(N)$. Potom $M \supseteq F(\overline{\mathscr{O}_{\delta_1/2}(u^1)}) \cup \dots \cup F(\overline{\mathscr{O}_{\delta_p/2}(u^p)}) = M_{u^1} \cup \dots \cup M_{u^p} \supseteq M_1$. Proto $\mathrm{m}(F(B_1) \setminus M) = \mathrm{m}(F(B_1)) - \mathrm{m}(M) \leqq \mathrm{m}(F(B_1)) - \mathrm{m}(M_1) < \varepsilon$.

Vzhledem k předpokladům existují konstanty K, L takové, že $|f(x)| < K$ na $F(B)$ a $|f[F(u)] \cdot J_F(u)| < L$ na B. Podle věty 3.30 platí

$$\iint_M f(x)\,\mathrm{d}x = \iint_N f[F(u)] \cdot |J_F(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
&\Big|\iint_{F(B_1)} f(x)\,\mathrm{d}x - \iint_{B_1} f[F(u)] \cdot |J_F(u)|\,\mathrm{d}u\Big| = \\
&= \Big|\iint_{F(B_1)} f(x)\,\mathrm{d}x - \iint_M f(x)\,\mathrm{d}x + \iint_N f[F(u)] \cdot |J_F(u)|\,\mathrm{d}u - \iint_{B_1} f[F(u)] \cdot |J_F(u)|\,\mathrm{d}u\Big| \leqq \\
&\leqq \Big|\iint_{F(B_1)\setminus M} f(x)\,\mathrm{d}x\Big| + \Big|\iint_{B_1 \setminus N} f[F(u)] \cdot |J_F(u)|\,\mathrm{d}u\Big| \leqq K\varepsilon + L\varepsilon = \varepsilon(K + L).
\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, musí platit (3.32). □

Poznámka 3.50. Z důkazu věty 3.31 je zřejmé, že předpoklad spojité diferencovatelnosti zobrazení F na B není nutný, stačí regularita F na B_1. Pak ovšem nemá smysl jakobián J_F na $B \setminus B_1$. Tato množina však má míru nula, takže hodnoty J_F na ní můžeme definovat libovolně tak, abychom dostali ohraničenou funkci.

Cvičení

1. Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^3$ se někdy zavádějí odlišně. Význam souřadnic ϱ a φ je stejný jako u transformace s rovnicemi (3.14), ale souřadnice ϑ udává orientovaný úhel mezi průvodičem bodu s kartézskými souřadnicemi $[x, y, z]$ a průvodičem jeho průmětu do roviny xy. Najděte vztahy mezi souřadnicemi x, y, z a $\varrho, \varphi, \vartheta$ a vypočtěte jakobián této transformace.

2. Ukažte, že transformace do sférických souřadnic daná vztahy (3.20) zobrazuje n-rozměrný kvádr $A = \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \pi\rangle^{n-2}$ na $\mathbb{R}^n$ a je prostá a regulární na jeho vnitřku.

3. Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 3$, se rovněž zadávají vztahy

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varrho \cos\varphi \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-4} \cos\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
x_2 &= \varrho \sin\varphi \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-4} \cos\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
x_3 &= \varrho \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-4} \cos\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
x_4 &= \varrho \sin\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-4} \cos\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
&\vdots\\
x_{n-2} &= \varrho \sin\vartheta_{n-4} \cos\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
x_{n-1} &= \varrho \sin\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
x_n &= \varrho \sin\vartheta_{n-2}.
\end{aligned}$$

kde $[\varrho, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}] \in B = \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle -\pi/2, \pi/2\rangle^{n-2}$. Vypočtěte jakobián této transformace a ukažte, že tato transformace zobrazuje n-rozměrný kvádr B na $\mathbb{R}^n$ a je prostá a regulární na jeho vnitřku. Vysvětlete geometrický význam úhlů $\varphi, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-2}$.

4. Nechť zobrazení $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je prosté a regulární na otevřené množině Ω. Nechť $\widehat{x} \in \Omega$ je pevně zvolený bod. Buď $\{M_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, posloupnost uzavřených měřitelných množin v $\mathbb{R}^n$ majících následující vlastnosti:

   1) $\mathrm{m}_n(M_k) > 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$,
   2) $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{d}(M_k) = 0$ ($\mathrm{d}(M) = \sup\{\varrho(x, y) : x, y \in M\}$ je průměr množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$; ϱ je eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^n$),
   3) $\widehat{x} \in M_k \subset \Omega$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

   Pak $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{m}_n(F(M_k))/\,\mathrm{m}_n(M_k) = |J_F|(\widehat{x})$, kde J_F je jakobián zobrazení F. (Tedy pro množinu M kladné míry, která obsahuje bod $\widehat{x}$ a má velmi malý průměr, platí $\mathrm{m}_n(F(M)) \doteq |J_F|(\widehat{x})\,\mathrm{m}_n(M)$, tj. absolutní hodnota jakobiánu v bodě $\widehat{x}$ přibližně udává, kolikrát se při zobrazení F zmenší resp. zvětší míra „malé“ množiny M obsahující tento bod.)

5. Nechť F je prosté afinní zobrazení prostoru $\mathbb{R}^n$ do sebe dané vztahy $y^T = Ax^T + b$, kde $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$, A je čtvercová matice rozměrů $n \times n$ a b je n-rozměrný sloupec. Ukažte, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je

měřitelná právě tehdy, když je měřitelná množina $F(M)$. Nastane-li tento případ, platí $\mathrm{m}_n(F(M)) = |\det A| \cdot \mathrm{m}_n(M)$; dokažte.

6. Nechť F je izometrické zobrazení prostoru $\mathbb{R}^n$ do sebe. Ukažte, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná právě tehdy, když je měřitelná množina $F(M)$. V případě měřitelnosti M platí $\mathrm{m}_n(F(M)) = \mathrm{m}_n(M)$.

   (Množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývají *kongruentní*, jestliže existuje izometrické zobrazení F na $\mathbb{R}^n$ takové, že $F(A) = B$. Kongruentní množiny jsou buď současně měřitelné a mají tutéž míru, nebo jsou současně neměřitelné.)

7. Nechť $F\colon A \to \mathbb{R}^n$, kde $A = (0, +\infty)^n$, je transformace daná vztahy $x_1 = u_1$, $x_2 = (u_1 + u_2)/u_1$, $x_3 = (u_1 + u_2 + u_3)/(u_1 + u_2)$ až $x_n = (u_1 + \dots + u_n)/(u_1 + \dots + u_{n-1})$. Vypočtěte její jakobián a dokažte, že je prostá a regulární.

8. Nechť $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je transformace daná vztahy $x_1 = u_1 + \dots + u_n$, $x_2 = u_1u_2 + u_1u_3 + \dots + u_{n-1}u_n$, $\dots$, $x_n = u_1 \cdots u_n$, ve kterých na pravých stranách vystupují tzv. elementární symetrické mnohočleny proměnných $u_1, u_2, \dots, u_n$. Vypočtěte její jakobián a dokažte, že je na množině $A = \big\{[u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^n : u_1 < u_2 < \dots < u_n\big\}$ prostá a regulární.

9. Dané integrály transformujte do polárních souřadnic:

   a) $\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq 2,\ y \geqq x,$

   b) $\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq 1,\ x + y \geqq 1,$

   c) $\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq y,\ y \geqq x,\ x \geqq 0$

   d) $\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega$ je množina omezená křivkami $y = x$, $y = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$,

   e) $\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq ax,\ a > 0,$

   f) $\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega\colon x^2 + y^2 \geqq a^2,\ x^2 + y^2 \leqq b^2,\ y \geqq 0,\ y \leqq x,$ $a > 0,\ b > 0, a < b,$

g) $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq ax,\ x^2 + y^2 \leqq by,\ a > 0,\ b > 0.$

10. Vypočtěte dané integrály:

a) $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,$

b) $\iint\limits_{\Omega} (x + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,$

c) $\iint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,$

d) $\iint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq ax,\ y \geqq 0,\ a > 0,$

e) $\iint\limits_{\Omega} x\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq 4,\ y \geqq 0,$

f) $\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega$ je množina omezená křivkami $y = x$, $y = 0,\ x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x.$

g) $\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \Omega\colon (x - a)^2 + y^2 \leqq a^2,\ a > 0,$

h) $\iint\limits_{\Omega} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \Omega\colon x^2 + y^2 \geqq 1,\ x^2 + y^2 \leqq 3,$ $x/\sqrt{3} \leqq y \leqq \sqrt{3}x.$

11. Vypočtěte dané integrály:

a) $\iint\limits_{\Omega} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq a^2,\ y \geqq 0,\ x > 0,$ $a > 0,$

b) $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{\dfrac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,$

c) $\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \Omega\colon x^2 + y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,$ $a > 0,$

d) $\displaystyle\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega\colon (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2),$ $a>0,$

e) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega\colon x^2+y^2 \leqq a^2,\ a>0,$

f) $\displaystyle\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega$ je množina omezená křivkami $x^2+y^2=y,\ y=x,\ y=-x,$

g) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega\colon \pi^2/36 \leqq x^2+y^2 \leqq \pi^2/4,$ $y \geqq 0,$

h) $\displaystyle\iint_\Omega (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega\colon x^2+y^2 \leqq a^2,\ a>0,$

i) $\displaystyle\iint_\Omega (h-2x-3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega\colon x^2+y^2 \leqq a^2,\ a>0,\ h\in\mathbb{R},$

j) $\displaystyle\iint_\Omega \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega\colon x^2+y^2 \leqq a^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,$ $a>0.$

12. Vypočtěte dané integrály:

a) $\displaystyle\iint_\Omega 2xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega\colon 0\leqq y\leqq x,\ x^2+y^2\leqq 9,$

b) $\displaystyle\iint_\Omega 15x^2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega\colon x^2+y^2\leqq 4,\ y\geqq x/\sqrt{3},\ x\geqq 0,$

c) $\displaystyle\iint_\Omega \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega\colon x^2+y^2\leqq 2,$

d) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x}{y^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega\colon x^2+y^2\leqq 4,\ x^2+y^2\geqq 1,$ $x/\sqrt{3}\leqq y\leqq x\sqrt{3},$

e) $\displaystyle\iint_\Omega (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega\colon 0\leqq y\leqq x,\ x^2+y^2\geqq 3,\ x^2+y^2\leqq 5,$

f) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2},$ $\qquad \Omega\colon x^2+y^2\leqq 9,\ x^2+y^2\geqq 9/4,$ $y\geqq x/\sqrt{3},\ y\geqq -x/\sqrt{3},$

g) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$, $\quad \Omega: x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x/\sqrt{3}$,

h) $\displaystyle\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega: x^2+y^2 \geqq 4,\ x^2+y^2 \leqq 16,\ x \leqq 0,\ y \geqq 0$,

⋆i) $\displaystyle\iint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega: x^4+y^4 \leqq 1$,

j) $\displaystyle\iint_\Omega \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega: \pi^2 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\pi^2$.

13. Vypočtěte dané integrály:

a) $\displaystyle\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ a, b > 0$,

b) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ a, b > 0$,

c) $\displaystyle\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \geqq 1,\ \dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2} \leqq 1$ $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ a, b > 0$,

d) $\displaystyle\iint_\Omega (2x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega: x^2+4y^2 \leqq 4$,

e) $\displaystyle\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25} \leqq 1,\ y \leqq \dfrac{5}{3}\sqrt{3}x,\ y \geqq \dfrac{5}{3}x$.

14. Vypočtěte dané integrály přes integrační obor Ω omezený uvedenými křivkami. Použijte vhodnou transformaci:

a) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega: y^2 = x,\ y^2 = 2x,\ xy = 1,\ xy = 2$, volte transformaci $xy = u$, $\dfrac{y^2}{x} = v$,

⋆b) $\displaystyle\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad \Omega: xy = 1,\ x + y = \dfrac{5}{2}$, volte transformaci $xy = u$, $x = v$,

c) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (x^2 - y + 2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\Omega\colon xy = 1,\ xy = 4,\ y = 4x,\ y = \dfrac{x}{4}$, volte transformaci $xy = u$, $\dfrac{y}{x} = v$,

d) $\displaystyle\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\Omega\colon x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$, volte transformaci $u = x + y$, $v = x - y$.

e) Pomocí transformace $u = x + y$, $v = \dfrac{y}{x}$ vyřešte úlohy 30 a) a 41 c) ze cvičení ke kapitole 1.

f) Pomocí transformace $u = \dfrac{x^2}{y}$, $v = \dfrac{y^2}{x}$ vyřešte úlohu 41 d) ze cvičení ke kapitole 1.

15. Určete jakobiány zobrazení:

a) $x = uv,\ \ y = u + v$,

b) $x = uv,\ \ y = u/v$,

c) $x = uv,\ \ y = v^2/u$,

d) $x = u + v,\ \ y = v/(u + v)$,

e) $x = u\big/(u^2 + v^2),\ \ y = v\big/(u^2 + v^2)$,

f) $x = u/v,\ \ y = v/u$,

g) $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$,
$y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$,
$\alpha \in \mathbb{R}$ (otočení o úhel α),

h) $x = \alpha u + \beta v$,
$y = \gamma u + \delta v$,
$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,\ \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

16. Dokažte, že pro každé $a > 0$ platí

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi(1 - \mathrm{e}^{-a^2})} < \textstyle\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x < \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi(1 - \mathrm{e}^{-2a^2})}\,.$$

Pomocí těchto nerovností vypočtěte $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

17. Převeďte trojný integrál $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ přes oblast Ω, která je omezena danými plochami, resp. jejíž body vyhovují uvedeným nerovnostem, na trojnásobný integrál v cylindrických souřadnicích:

a) $\Omega\colon x = 0,\ \ y = 1,\ \ z = 0,\ \ z = a,\ \ x = y^2,\ \ a > 0$,

b) $\Omega\colon x = \sqrt{y},\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ z = 2,\ \ x^2 + y^2 = 2$,

c) $\Omega\colon x^2 + y^2 \leqq a^2,\ \ y \geqq a - x,\ \ z = 0,\ \ z = a,\ \ a > 0$,

d) $\Omega\colon x = 0,\ \ y = a,\ \ z = 0,\ \ z = 2a,\ \ (x - a)^2 + y^2 = a^2,\ \ a > 0$.

18. Vypočtěte dané integrály:

a) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: x^2+y^2 \leqq 9,\ y \geqq 0,\ 0 \leqq z \leqq 2,$

b) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2},$
$0 \leqq z \leqq \sqrt{1-x^2-y^2},$

c) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{xy}{(4+z)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: x^2+y^2 \leqq 4z \leqq 16,$

d) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,$
$z \geqq 0,$

e) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,\ z \geqq 0,\ a > 0,$

f) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 3z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: x^2+y^2 \leqq z \leqq 2-(x^2+y^2),$

g) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: 0 \leqq z \leqq y,\ x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,$

h) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} (1+2x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: (x^2+y^2)/2 \leqq z \leqq 2,$

i) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: 0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{2x-x^2},$
$0 \leqq z \leqq a,\ a > 0,$

j) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: x^2+y^2 \leqq 2z,\ z \leqq 2.$

19. Vypočtěte dané integrály:

a) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: x^2+y^2 \leqq 2y,\ z \geqq 0,\ z \leqq 1/2,$

b) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: (x-1)^2+y^2 \geqq 1,\ y \leqq 3-x,$
$x > 0,\ y \leqq x,\ y \geqq 0,\ 0 \leqq z \leqq 2,$

c) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 8y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega: -1+2\sqrt{x^2+z^2} \leqq y \leqq \sqrt{x^2+z^2},$
$y \geqq 0,$

d) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 24x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2x,\ x \leqq y^2 + z^2,$

e) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 60xz \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad \Omega: \dfrac{x^2+z^2}{a} \leqq y \leqq \sqrt{x^2+z^2},\ x \geqq 0,$
$z \leqq 0,\ a > 0,$

f) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} x^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad \Omega: 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq z \leqq 3 - y,$

g) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad \Omega: \dfrac{b^2}{a^2} \leqq \dfrac{x^2+y^2}{a^2} \leqq z \leqq 1,\ a > b > 0,$

h) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad \Omega: x^2 + y^2 \leqq a^2,\ z \geqq 0,\ z \leqq b,$
$a, b > 0,$

i) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $\quad \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,$
$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leqq 1.$

20. Převeďte trojný integrál $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ přes danou oblast Ω na trojnásobný integrál ve sférických souřadnicích:

a) Ω je část koule $x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2$ ležící v prvním oktantu, $R > 0$,

b) $\Omega: z \geqq \sqrt{x^2+y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,$

c) $\Omega: (x^2 + y^2 + z^2)^3 \leqq a^2 z^4,\ a > 0,$

d) Ω je průnik dvou koulí $x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2,\ x^2 + y^2 + (z-R)^2 \leqq R^2,$
$R > 0.$

21. Vypočtěte dané integrály:

a) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad \Omega: 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{a^2 - x^2},$
$0 \leqq z \leqq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ a > 0,$

b) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$, Ω leží v prvním oktantu, $a > 0$,

c) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\quad \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \geqq a^2,\ z \leqq 0,$
$x^2 + y^2 + z^2 \leqq b^2,\ 0 < a < b,$

d) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad \Omega\colon x^2+y^2+z^2 \leqq r^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ r > 0,$

e) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 15\sqrt{2}\,yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad \Omega\colon x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,\ a > 0,\ z \leqq -\sqrt{x^2+y^2},$

f) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad \Omega\colon x^2+y^2+z^2 \leqq z,$

g) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad \Omega\colon 0 \leqq x,\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{4-x^2+y^2},$

h) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad \Omega\colon x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,\ y \geqq 0,\ a > 0,$

i) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}}$, $\quad \Omega$ je těleso omezené horní polovinou kulové plochy $x^2+y^2+z^2=4$ a kuželovou plochou $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$,

j) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad \Omega\colon x^2+y^2+z^2 \leqq 2z,\ z^2 \geqq x^2+y^2,$

k) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad \Omega\colon 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2} \leqq z \leqq \sqrt{2-x^2-y^2}.$

22. Vypočtěte dané integrály:

a) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad \Omega\colon x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,\ z \geqq a/2,\ z \geqq \sqrt{x^2+y^2},\ a > 0,$

b) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad \Omega\colon x^2+y^2+(z-2)^2 \leqq 4,\ z \geqq \sqrt{x^2+y^2},$

c) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad \Omega\colon (x^2+y^2+z^2)^2 \leqq 3z,$

$\star$d) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{xyz}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\quad \Omega\colon (x^2+y^2+z^2)^2 < a^2xy,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ a > 0,$

e) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\qquad \Omega:\ -R \leqq x \leqq R,$
$\quad -\sqrt{R^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{R^2-x^2},$
$\quad 0 \leqq z \leqq \sqrt{R^2-x^2-y^2},\ R>0,$

f) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z^2,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\qquad \Omega:\ z \geqq x^2/4+y^2,\ x^2/4+y^2+z^2 \leqq 6,$

g) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\qquad \Omega$ je oblast omezená $x^2+y^2=2ay$,
$x^2+y^2+z^2=4a^2,\ z \geqq 0,\ a>0,$

h) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\qquad \Omega:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1,$
$a,b,c>0,$

i) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\qquad \Omega:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1,$
$a,b,c>0.$

23. Vypočtěte dané integrály pomocí transformace do sférických nebo cylindrických souřadnic:

a) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\qquad \Omega:\ 0 \leqq x \leqq y,\ z \geqq 0,$
$x^2+y^2+z^2 \leqq 1,$

b) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{z^2}{13}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\qquad \Omega:\ x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,$
$z \geqq \dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{a}-a,\ a>0,$

c) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2)^2},$ $\qquad \Omega:\ x^2+y^2 \geqq 1/4,$
$x^2+y^2-1 \leqq z \leqq 1-x^2-y^2,$

d) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\qquad \Omega:\ x \geqq 0,$
$\sqrt{x^2+y^2}-1 \leqq z \leqq 1-\sqrt{x^2+y^2}.$

24. Užitím transformace $x=u$, $y=(u+v)/u$, $z=(u+v+w)/(u+v)$ vypočtěte integrál $\displaystyle\iiint\limits_{V} \mathrm{e}^{xyz}x^2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $V=\big\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1,\ xyz \leqq 2\big\}$.

25. Vypočtěte dané integrály:

a) $$\iiiint\limits_A \mathrm{e}^{-x_1^2-x_2^2-x_3^3-x_4^2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4,$$
kde $A = \left\{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leqq a^2\right\}$, $a > 0$,

b) $$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\limits_V \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_5,$$
kde $V = \left\{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqq x_4^2 + x_5^2 \leqq 1\right\}$.

26. Pro spojitou funkci $f\colon \langle 0, R\rangle \to \mathbb{R}$, kde $R > 0$ je konstanta, vypočtěte

$$\int\limits_V \cdots \int f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\right) \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

kde $V = \left\{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq R^2\right\}$ a $n \geqq 2$.

27. Nechť $K = \left\{[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n \leqq 1,\ x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0\right\}$. Vypočtěte následující integrály:

a) $$\int\limits_K \cdots \int (x_1 + \cdots + x_n)^\alpha\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,\quad \alpha \geqq 0,$$

b) $$\int\limits_K \cdots \int \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}{(1 + x_1 + \cdots + x_n)^n},$$

c) $$\int\limits_K \cdots \int f(x_1 + \cdots + x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,$$
kde f je funkce spojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

28. Najděte příklad spojité ohraničené funkce definované na omezeném intervalu (a, b), která zobrazí nějakou množinu $M \subset (a, b)$ jednorozměrné míry nula na neměřitelnou množinu. V důsledku 3.41 tedy nestačí předpokládat pouhou spojitost.

Výsledky

1. $x = \varrho\cos\varphi\cos\vartheta,\ y = \varrho\sin\varphi\cos\vartheta,\ z = \varrho\sin\vartheta,\ J(\varrho,\varphi,\vartheta) = \varrho^2\cos\vartheta.$

2. Nejprve ukážeme indukcí, že pro libovolný bod $[t_1,\dots,t_n]\in\mathbb{R}^n$, $t_1^2+\dots+t_n^2=1$, existuje bod $[\varphi,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2}]\in B=\langle 0,2\pi)\times\langle 0,\pi\rangle^{n-2}\subset\mathbb{R}^{n-1}$ takový, že

$$\begin{aligned}
t_1 &= \cos\varphi\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{n-4}\sin\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},\\
t_2 &= \sin\varphi\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{n-4}\sin\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},\\
t_3 &= \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{n-4}\sin\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},\\
&\ \vdots\\
t_{n-1} &= \cos\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},\\
t_n &= \cos\vartheta_{n-2}.
\end{aligned}$$

Pro $n=2$ (odpovídá polárním souřadnicím) je $t_1^2+t_2^2=1$, takže existuje úhel φ z intervalu $\langle 0,2\pi)$ takový, že $t_1=\cos\varphi$ a $t_2=\sin\varphi$.
Nechť tvrzení platí pro nějaké $n-1$, kde $n\geqq 2$.
Je-li $t_n=1$ resp. $t_n=-1$, je $t_1=\dots=t_{n-1}=0$. Položme $\vartheta_{n-2}=0$ resp. $\vartheta_{n-2}=\pi$. Pak $\sin\vartheta_{n-2}=0$, takže hodnoty $\varphi,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-3}$ můžeme zvolit libovolně.
Je-li $|t_n|<1$, existuje úhel $\vartheta_{n-2}\in(0,\pi)$ tak, že $t_n=\cos\vartheta_{n-2}$; přitom $\sin\vartheta_{n-2}\neq 0$. Položme $u_j=t_j/\sin\vartheta_{n-2}$ $(j=1,\dots,n-1)$. Je $u_1^2+\dots+u_{n-1}^2=(1-t_n^2)/\sin^2\vartheta_{n-2}=(1-\cos^2\vartheta_{n-2})/\sin^2\vartheta_{n-2}=1$. Podle indukčního předpokladu tudíž existuje $[\varphi,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-3}]$ tak, že platí $u_1=\cos\varphi\sin\vartheta_1\cdots\sin\vartheta_{n-3}$ až $u_{n-1}=\cos\vartheta_{n-3}$. Odtud již plyne platnost tvrzení pro číslo n.

Označme F transformaci do sférických souřadnic danou vztahy (3.20). Ukážeme, že $F(A)=\mathbb{R}^n$:
Je-li $x=[x_1,\dots,x_n]=[0,\dots,0]$, zvolíme $\varrho=0$ a hodnoty $\varphi,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2}$ vybereme libovolně.
Je-li $x=[x_1,\dots,x_n]\neq[0,\dots,0]$, zvolíme $\varrho=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}>0$. Označíme-li $t_j=x_j/\varrho$, platí $t_1^2+\dots+t_n^2=1$, takže podle první části důkazu existuje takový bod $[\varphi,\vartheta_1,\dots,\vartheta_n]\in B$, že $F(\varrho,\varphi,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2})=x$.

Ukážeme, že F je prostá na vnitřku kvádru $\mathring{A}=(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)^{n-2}$:
Nechť $[\varrho,\varphi,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2}]\in\mathring{A}$ a $F(\varrho,\varphi,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2})=[x_1,\dots,x_n]=x$. Ze vztahů (3.20) plyne, že $\varrho=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$, tedy hodnota ϱ je obrazem x jednoznačně určena. Na intervalu $(0,\pi)$ je funkce kosinus prostá a funkce sinus nenulová.
Protože $x_n=\varrho\cos\vartheta_{n-2}$ a $\varrho>0$ pro body v $\mathring{A}$, určuje rovnost $x_n/\varrho=\cos\vartheta_{n-2}$ jednoznačně úhel $\vartheta_{n-2}\in(0,\pi)$. Dále platí $x_{n-1}=\varrho\cos\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2}$, takže ze vztahu $x_{n-1}/(\varrho\sin\vartheta_{n-2})=\cos\vartheta_{n-3}$ je jednoznačně určen úhel $\vartheta_{n-3}\in(0,\pi)$ atd. Nakonec vztahy $x_1/(\varrho\sin\vartheta_1\cdots\sin\vartheta_{n-2})=\cos\varphi$, $x_2/(\varrho\sin\vartheta_1\cdots\sin\vartheta_{n-2})=\sin\varphi$ jednoznačně určují úhel $\varphi\in(0,2\pi)$.
Regularita F na vnitřku A plyne ze vzorce pro jakobián.

3. $J_n = \varrho^{n-1} \cos \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2 \cdots \cos^{n-2} \vartheta_{n-2}$ — postupujte obdobně jako při důkazu vzorce (3.22). Vlastnosti transformace dokažte jako ve cvičení 2 k této kapitole. Úhly mají podobný význam jako v (3.20) (viz označení z popisu za vztahem (3.22)) — ϑ_{n-2} je úhel, který svírá průvodič bodu x s průvodičem bodu $x^{[1]}$, tj. s podprostorem o rovnici $x_n = 0$, ϑ_{n-3} je úhel, který svírá průvodič bodu $x^{[1]}$ s průvodičem bodu $x^{[2]}$, tj. s podprostorem o rovnicích $x_{n-1} = 0$, $x_n = 0$, atd.

4. Označme $J_F = J_F(u_1, \dots, u_n)$ jakobián transformace F. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je podle věty 3.30 množina $F(M_k)$ měřitelná a platí
$$\mathrm{m}_n(F(M_k)) = \int_{F(M_k)}\!\!\cdots\int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_{M_k}\!\!\cdots\int |J_F|\, \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n.$$
Označme $a_k = \inf\{|J_F(u)| : u \in M_k\}$ a $b_k = \sup\{|J_F(u)| : u \in M_k\}$. Podle vět 1.49 a 1.50 je $a_k\, \mathrm{m}_n(M_k) \leqq \int_{M_k}\!\cdots\int |J_F|\, \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n \leqq b_k\, \mathrm{m}_n(M_k)$. Položme $c_k = \int_{M_k}\!\cdots\int |J_F|\, \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n \big/ \mathrm{m}_n(M_k)$. Pak $a_k \leqq c_k \leqq b_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Protože funkce $|J_F|$ je spojitá na M_k, existují podle Weierstrassovy věty body $A_k, B_k \in M_k$ takové, že $a_k = |J_F|(A_k)$ a $b_k = |J_F|(B_k)$. Jelikož $\varrho(A_k, \widehat{x}) \leqq \mathrm{d}(M_k)$ a $\varrho(B_k, \widehat{x}) \leqq \mathrm{d}(M_k)$, platí $A_k \to \widehat{x}$ a $B_k \to \widehat{x}$ pro $k \to +\infty$. Ze spojitosti $|J_F|$ vyplývá, že $a_k = |J_F|(A_k) \to |J_F|(\widehat{x})$ a $b_k = |J_F|(B_k) \to |J_F|(\widehat{x})$ pro $k \to +\infty$. Z věty o třech posloupnostech dostáváme, že rovněž $c_k \to |J_F|(\widehat{x})$ pro $k \to +\infty$.

5. Afinní zobrazení F je prosté (a surjektivní) právě tehdy, když matice A je regulární. Pro jeho jakobián J_F zřejmě platí $J_F = \det A \neq 0$, takže transformace F je regulární. Zbytek tvrzení plyne z lemmatu 3.43 a ze vztahu (3.17).

6. Ukážeme, že zobrazení F je izometrické, tj. pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho(x, y) = \varrho(F(x), F(y))$, kde ϱ značí eukleidovskou metriku, právě tehdy, když má tvar $z^T = Qx^T + b$, kde $x = [x_1, \dots, x_n]$, $z = [z_1, \dots, z_n]$, Q je čtvercová ortogonální matice rozměrů $n \times n$, tj. $Q^T Q = E$, kde E je jednotková matice, a b je n-rozměrný sloupec.

   Nechť F je izometrické zobrazení takové, že $F(O) = O$, kde O počátek souřadnicového systému. Označme $(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ skalární součin na $\mathbb{R}^n$. Pro vzdálenost bodů x, y platí $\varrho^2(x, y) = (x - y, x - y)$, speciálně $\varrho^2(x, O) = (x, x)$. Protože F zachovává vzdálenosti, je $\varrho^2(x, O) = \varrho^2(F(x), F(O))$, tj. $(x, x) = (F(x), F(x))$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}^n$. Z rovnosti $\varrho^2(x, y) = (x, x) - 2(x, y) + (y, y)$ dostaneme, že $\varrho^2(F(x), F(y)) = (F(x), F(x)) - 2(x, y) + (F(y), F(y))$, a odtud vyjde, že $(F(x), F(y)) = (x, y)$. Tedy zobrazení F zachovává rovněž skalární součin.
   Nechť $e_1, \dots, e_n$ je standardní ortonormální báze v $\mathbb{R}^n$ (j-tá složka e_j je rovna jedné, ostatní jsou nulové). Označme $f_j = F(e_j)$, $j = 1, \dots, n$. Protože F zachovává skalární součin, tvoří $f_1, \dots, f_n$ rovněž ortonormální bázi.

Ukážeme, že zobrazení F je lineární. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí $(F(x), f_j) = (F(x), F(e_j)) = (x, e_j) = x_j$, a tedy $(F(\alpha x + \beta y), f_j) = (\alpha x + + \beta y, e_j) = \alpha x_j + \beta y_j$. Odtud plyne, že $(F(\alpha x + \beta y) - \alpha F(x) - \beta F(y), f_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Protože $f_1, \ldots, f_n$ je ortonormální báze, musí platit $F(\alpha x + \beta y) - - \alpha F(x) - \beta F(y) = O$, tj. $F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$.
Z lineární algebry je známo, že zobrazení F má tvar $F(x) = z$, kde $z^T = Qx^T$ a Q je čtvercová matice. Protože $(x, y) = xy^T$, musí platit $(F(x), F(y)) = xQ^T Qy^T = = (x, y)$. Volbami $x = e_i$, $y = e_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, dostaneme, že $Q^T Q = E$, takže matice Q je ortogonální.
Nechť nyní neplatí $F(O) = O$. Označme $F(O) = b$ a položme $G(x) = F(x) - b$ pro $x \in \mathbb{R}^n$. Pak G je izometrické zobrazení a $G(O) = O$, takže podle předchozí části má tvar $z^T = Qx^T$ s ortogonální maticí Q, tedy F má tvar $z^T = Qx^T + b$.
Naopak každé zobrazení tohoto tvaru je izometrické, protože platí:
$\varrho^2(F(x), F(y)) = (F(x) - F(y), F(x) - F(y)) = (xQ^T + b^T - yQ^T - b^T, xQ^T + + b^T - yQ^T - b^T) = ((x - y)Q^T, (x - y)Q^T) = (x - y)Q^T Q(x - y)^T = = (x - y)(x - y)^T = (x - y, x - y) = \varrho^2(x, y)$.
Z rovnosti $E = Q^T Q$ plyne $1 = \det E = \det Q^T \cdot \det Q = (\det Q)^2$, tedy $\det Q = = \pm 1$. Zbytek tvrzení tudíž plyne ze cvičení 5 k této kapitole.

7. $J_F = 1 \Big/ \prod_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} u_i$ (prvky jakobiánu nad hlavní diagonálou jsou nulové).
Platí: $u_1 = x_1$, $u_2 = (x_2 - 1)u_1, \ldots, u_n = (x_n - 1)(u_1 + \cdots + u_{n-1})$. Tedy transformace je na A regulární a prostá.

8. Dokážeme indukcí, že $J_n(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (u_i - u_j)$.
Pro $n = 2$ tvrzení zřejmě platí.
Nechť tvrzení platí pro nějaké $n - 1$, kde $n \geqq 3$. Označme g_k^n, $k = 1, \ldots, n$, pravé strany vztahů, kterými je transformace definovaná (horní index n značí, že jede o transformaci v $\mathbb{R}^n$). Pak $g_1^n = g_1^{n-1} + u_n$, $g_k^n = g_k^{n-1} + u_n g_{k-1}^{n-1}$, $k = 2, \ldots, n - 1$, a $g_n^n = u_n g_{n-1}^{n-1}$. Po výpočtu derivací odečteme v determinantu od druhého řádku u_n-násobek prvního řádku, pak od třetího řádku u_n-násobek druhého řádku atd. až od posledního řádku odečteme u_n-násobek předposledního řádku. Postupně dostaneme

$$J_n = \begin{vmatrix} g^n_{1|u_1} & \cdots & g^n_{1|u_{n-1}} & g^n_{1|u_n} \\ g^n_{2|u_1} & \cdots & g^n_{2|u_{n-1}} & g^n_{2|u_n} \\ g^n_{3|u_1} & \cdots & g^n_{3|u_{n-1}} & g^n_{3|u_n} \\ \hdotsfor{4} \\ g^n_{n-1|u_1} & \cdots & g^n_{n-1|u_{n-1}} & g^n_{n-1|u_n} \\ g^n_{n|u_1} & \cdots & g^n_{n|u_{n-1}} & g^n_{n|u_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} g^{n-1}_{1|u_1} & \dots & g^{n-1}_{1|u_{n-1}} & 1 \\ g^{n-1}_{2|u_1} + u_n\, g^{n-1}_{1|u_1} & \dots & g^{n-1}_{2|u_{n-1}} + u_n\, g^{n-1}_{1|u_{n-1}} & g^{n-1}_1 \\ g^{n-1}_{3|u_1} + u_n\, g^{n-1}_{2|u_1} & \dots & g^{n-1}_{3|u_{n-1}} + u_n\, g^{n-1}_{2|u_{n-1}} & g^{n-1}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g^{n-1}_{n-1|u_1} + u_n\, g^{n-1}_{n-2|u_1} & \dots & g^{n-1}_{n-1|u_{n-1}} + u_n\, g^{n-1}_{n-2|u_{n-1}} & g^{n-1}_{n-2} \\ u_n\, g^{n-1}_{n-1|u_1} & \dots & u_n\, g^{n-1}_{n-1|u_{n-1}} & g^{n-1}_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} g^{n-1}_{1|u_1} & \dots & g^{n-1}_{1|u_{n-1}} & 1 \\ g^{n-1}_{2|u_1} & \dots & g^{n-1}_{2|u_{n-1}} & g^{n-1}_1 - u_n \\ g^{n-1}_{3|u_1} & \dots & g^{n-1}_{3|u_{n-1}} & g^{n-1}_2 - u_n\, g^{n-1}_1 + u_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g^{n-1}_{n-1|u_1} & \dots & g^{n-1}_{n-1|u_{n-1}} & g^{n-1}_{n-2} - u_n\, g^{n-1}_{n-3} + \dots + (-1)^{n-2} u_n^{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & g^{n-1}_{n-1} - u_n\, g^{n-1}_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} u_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= J_{n-1}\bigl(g^{n-1}_{n-1} - u_n\, g^{n-1}_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} u_n^{n-1}\bigr).$$

Zvolme pevně vzájemně různé hodnoty $u_1, \dots, u_{n-1}$. Podle indukčního předpokladu je $J_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) \neq 0$, takže J_n je polynom stupně $n-1$ v proměnné u_n. Položme $u_n = u_j$ pro některé $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Pak $J_n = 0$, protože determinant má dva stejné sloupce. To znamená, že polynom J_n má $n-1$ různých kořenů, tedy $J_n = (-1)^{n-1} J_{n-1}(u_n - u_1) \cdots (u_n - u_{n-1}) = J_{n-1}(u_1 - u_n) \cdots (u_{n-1} - u_n)$ pro vzájemně různé hodnoty $u_1, \dots, u_n$. Je-li $u_i = u_j$ pro některou dvojici $i \neq j$, rovnost rovněž platí, protože na obou stranách dostáváme nulu. Vzorec tudíž platí i pro číslo n.

Z předchozího výsledku plyne, že transformace F je na množině A regulární. Ukážeme, že je zde i prostá. Nechť $u = [u_1, \dots, u_n] \in A$ a $F(u) = x = [x_1, \dots, x_n]$. Označme $P_x(y) = y^n - x_1 y^{n-1} + x_2 y^{n-2} + \dots + (-1)^n x_n$. Tedy P_x je mnohočlen stupně n. Ze vztahů mezi kořeny a koeficienty algebraických rovnic plyne, že $u_1, \dots, u_n$ jsou kořeny polynomu P_x. Nechť také $v = [v_1, \dots, v_n] \in A$ a $F(u) = F(v) = x$. Potom jsou $v_1, \dots, v_n$ rovněž kořeny polynomu P_x Avšak stupeň P_x je n a čísla u_j jsou vzájemně různá, tedy P_x nemůže mít další kořeny. To znamená, že posloupnost $(v_1, \dots, v_n)$ je permutací posloupnosti $(u_1, \dots, u_n)$. Protože souřadnice prvků množiny A jsou uspořádané vzestupně podle velikosti, je $u_j = v_j$, $j = 1, \dots, n$.

9. a) $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \varrho f(\varrho \cos\varphi, \varrho \sin\varphi)\, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi,$$

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}}^{1} \varrho f(\varrho \cos\varphi, \varrho \sin\varphi)\, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi,$$

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sin\varphi} \varrho f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi,$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} \left(\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \varrho f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi,$

e) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\cos\varphi} \varrho f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi,$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_a^{b} \varrho f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi,$

g) $\displaystyle\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} \left(\int_0^{b\sin\varphi} \varrho f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi +$

$$+ \int_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\cos\varphi} \varrho f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi.$$

10. a) $\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{\pi(\mathrm{e}-1)}{2\mathrm{e}}$, d) $\frac{a^3}{12}$,
e) 0, f) $\frac{3}{4}(\pi+2)$, g) $\frac{3}{2}\pi a^4$, h) $\frac{\pi^2}{24}$.

11. a) $\frac{a^2\pi^2}{16}$, b) $\frac{\pi}{8}(\pi-2)$, c) $\frac{\pi a^4}{8}$, d) $2a^2$, e) $\frac{2}{3}\pi a^3$, f) $\frac{\pi+2}{8}$,
g) $\frac{\pi}{2}$, h) $\frac{\pi a^4}{4}\ln\frac{a^4}{\mathrm{e}}$, i) $\pi h a^2$, j) $\frac{\pi}{4}\big[(1+a^2)\ln(1+a^2)-a^2\big]$.
V úloze a) je integrand ohraničený, protože arkuskotangens je ohraničená funkce. V úloze h) je třeba ověřit ohraničenost integrandu v okolí počátku. V polárních souřadnicích je: $(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \varrho^2\ln\varrho^2 \to 0$ pro $\varrho \to 0$.

12. a) $81/8$, b) $12\sqrt{3}$, c) $\pi(\mathrm{e}^2-1)$, d) $\ln\sqrt[3]{16}$, e) 2,
f) $\frac{\pi}{3}\ln\frac{40}{13}$, g) $\frac{\pi}{6}\big(\sqrt{2}-1\big)$, h) -30, i) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, j) $-6\pi^2$.

13. a) $\frac{a^2b^2}{8}$, b) $\frac{2}{3}ab\pi$, c) $\frac{15}{8}a^2b^2$, d) 0, e) $\frac{5}{8}\pi$.

14. a) $\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)\ln 2$, b) $\frac{165}{128}-\ln 2$, c) $\frac{113}{16}+12\ln 2$, d) $\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{4}$.
V úloze d) je třeba ověřit ohraničenost integrandu v okolí počátku. Pro $[x,y] \neq$ $\neq [0,0]$ je v prvním kvadrantu $\left|-\frac{x-y}{x+y}\right| \leqq \frac{x+y}{x+y} = 1$.

15. a) $v-u$, b) $-2u/v$, c) $3v^2/u$, d) $1/(u+v)$,
e) $-1/(u^2+v^2)^2$, f) 0, g) 1, h) $\alpha\delta-\beta\gamma$.

16. Porovnejte velikost integrálů $\iint\limits_{M_j} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $(j = 1, 2, 3)$ pro

$$M_1 = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq a^2\ x \geqq 0,\ \ y \geqq 0\right\},$$
$$M_2 = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle,$$
$$M_3 = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 2a^2\ x \geqq 0,\ \ y \geqq 0\right\}$$

a vypočtěte je. Limitním přechodem $a \to \infty$ vyjde $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$.

17. a) $$\int_0^a \left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi}} \varrho f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}z,$$

b) $$\int_0^2 \left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\sqrt{2}} \varrho f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}z,$$

c) $$\int_0^a \left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{a}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{a} \varrho f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}z,$$

d) $$\int_0^{2a} \left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2a\cos\varphi}^{\frac{a}{\sin\varphi}} \varrho f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}z.$$

18. a) 18π, b) $\frac{\pi}{48}$, c) 0, d) $\frac{1}{48}$, e) $\frac{4\pi a^5}{15}$,
f) $\frac{7\pi}{2}$, g) $\frac{\pi}{8}$, h) 4π, i) $\frac{8a^2}{9}$ j) $\frac{16\pi}{3}$.

19. a) $\frac{4}{9}$, b) $\pi - 2$, c) $\frac{5\pi}{6}$, d) 2π, e) $-a^5$,
f) $-\frac{21\pi}{8}$, g) $2\pi\left(\frac{2}{3}a + \frac{b^3}{3a^2} - b\right)$, h) $\pi a^2 b\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3}\right)$, i) $\frac{53\pi}{480}$.

20. a) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^R \varrho^2 \sin\vartheta\, f(\varrho\cos\varphi\sin\vartheta, \varrho\sin\varphi\sin\vartheta, \varrho\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\vartheta,$$

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \varrho^2 \sin\vartheta\, f(\varrho\cos\varphi\sin\vartheta, \varrho\sin\varphi\sin\vartheta, \varrho\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\vartheta,$$

c) $$\int_0^{\pi} \left\{\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{a\cos^2\vartheta} \varrho^2 \sin\vartheta\, f(\varrho\cos\varphi\sin\vartheta, \varrho\sin\varphi\sin\vartheta, \varrho\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\vartheta,$$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \varrho^2\sin\vartheta\, f(\varrho\cos\varphi\sin\vartheta,\varrho\sin\varphi\sin\vartheta,\varrho\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\vartheta\, +$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2R\cos\vartheta} \varrho^2\sin\vartheta\, f(\varrho\cos\varphi\sin\vartheta,\varrho\sin\varphi\sin\vartheta,\varrho\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\vartheta.$$

21. a) $\frac{a^4\pi}{8}$, b) $\frac{a^4\pi}{16}$, c) $\frac{4\pi}{15}(b^5-a^5)$, d) $\frac{r^5}{15}$, e) 0, f) $\frac{\pi}{10}$,

g) 4π, h) $2\pi a^4$, i) $\frac{4}{3}\pi^2-2\pi\sqrt{3}$, j) π, k) $\frac{\pi}{15}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

22. a) $a^2\pi\left(\ln\sqrt{2}-\frac{1}{8}\right)$, b) 0, c) π, d) $\frac{1}{288}a^4$, e) $\frac{8}{21}\pi R^{7/2}$,

f) $\frac{8\pi}{5}\left(6\sqrt{6}-7\right)$, g) $\frac{5}{4}\pi a^4$, h) $\frac{4\pi abc}{5}$, i) $\frac{\pi^2 abc}{4}$.

V úloze d) je třeba ověřit ohraničenost integrandu. Z nerovnosti $(x-y)^2 \geqq 0$ plyne pro $[x,y]\neq[0,0]$, že $\frac{|xy|}{x^2+y^2}\leqq\frac{1}{2}$. Z první nerovnosti popisu Ω se odvodí, že ve sférických souřadnicích je $\varrho\leqq a$, a tedy i $z\leqq a$.

23. a) $\frac{\pi}{16}$, b) $\frac{\pi a^5}{60}$, c) $2\pi(3-2\ln 2)$, d) 0.

24. $\frac{\mathrm{e}}{2}(\mathrm{e}-2)$.

25. a) $\pi^2\left[1-(a^2+1)\mathrm{e}^{-a^2}\right]$, b) $\frac{8\pi^2}{15}$.
V zadání b) použijte transformaci $x_1=\varrho\cos\varphi\sin\vartheta$, $x_2=\varrho\sin\varphi\sin\vartheta$, $x_3 = \varrho\cos\vartheta$, $x_4=r\cos\psi$, $x_5=r\sin\psi$ — srovnejte příklad 3.34.

26. $\frac{\pi^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}2^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}}{(n-2)!!}\int_0^R u^{n-1}f(u)\,\mathrm{d}u$ (srovnejte příklad 3.32).

27. a) $\frac{1}{(n+\alpha)(n-1)!}$, b) $\displaystyle\frac{1}{(n-1)!}\left(\ln 2+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k\frac{2^k-1}{k\cdot 2^k}\right)$,

c) $\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 u^{n-1}f(u)\,\mathrm{d}u$.

1. řešení:
Použijte transformaci $u_i=\sum\limits_{j=1}^{i}x_j$ $(i=1,\dots,n)$. Platí $x_1=u_1$ a $x_i=u_i-u_{i-1}$, $i=1,\dots,n$, tedy $J=1$. Množina K přejde v množinu $L=\left\{[u_1,\dots,u_n]\in\mathbb{R}^n : 0\leqq u_n\leqq 1,\ 0\leqq u_{i-1}\leqq u_i\ (i=2,\dots,n)\right\}$.

2. řešení:
Použijte transformaci $x_i=t_i^2$ $(i=1,\dots,n)$ mající jakobián $J=2^n t_1\cdots t_n$. Množina K přejde v množinu $M=\left\{[t_1,\dots,t_n]\in\mathbb{R}^n : t_1^2+\dots+t_n^2\leqq 1,\ t_i\geqq 0\ (i = 1,\dots,n)\right\}$. Pak použijte sférické souřadnice (3.20).

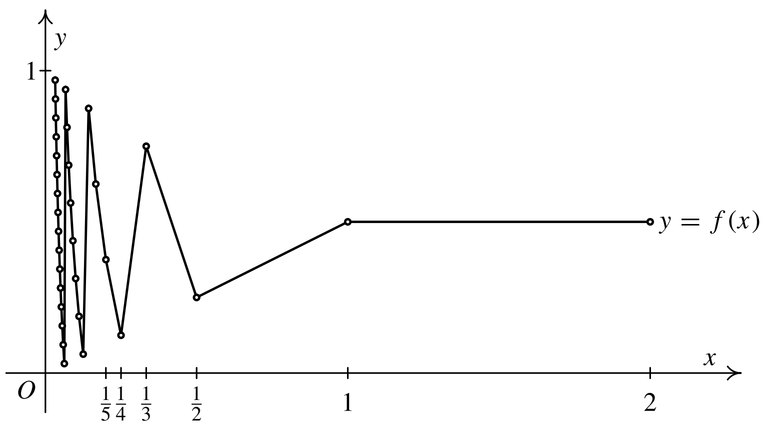
28. Položme $(a, b) = (0, 2)$, $M = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Pak $\mathrm{m}_1(M) = 0$ (srovnejte cvičení 25 ke kapitole 1). Každé přirozené číslo n lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $n = 2^k + m$, kde $k, m \in \mathbb{N}_0$ a $0 \leqq m < 2^k$. Funkci $f\colon (0, 2) \to (0, 1)$ definujme takto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2m+1}{2^{k+1}} & \text{pro } x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{2} & \text{na intervalu } (1, 2), \\ \text{lineární na každém intervalu } \left\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right\rangle, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá. Množina

$$f(M) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ f(1/2^k), f(1/(2^k+1)), \dots, f(1/(2^k+2^k-1)) \right\} = \\ = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ 1/2^{k+1}, 3/2^{k+1}, \dots, (2^{k+1}-1)/2^{k+1} \right\}$$

je hustá v intervalu $(0, 1)$ a její hranice je $h(f(M)) = \langle 0, 1 \rangle$, takže má kladnou míru. Tedy množina $f(M)$ není měřitelná.



Kapitola 4

Aplikace vícerozměrných integrálů

Integrální počet funkcí více proměnných má rozsáhlé použití jak v matematice a fyzice, tak i v oborech, které na nich staví. V této kapitole uvedeme některé geometrické a fyzikální aplikace, přičemž se omezíme jen na základní z nich. Vesměs se jedná o výpočet podobných veličin, které se vyskytují u aplikací jednoduchého určitého integrálu, nyní je však budeme umět určit v podstatně obecnější situaci (objem a hmotnost nepravidelných nehomogenních těles apod.).

4.1. Geometrické aplikace

Z geometrických aplikací se zaměříme na výpočet obsahů rovinných množin, obsahů ploch v prostoru a objemů prostorových množin.

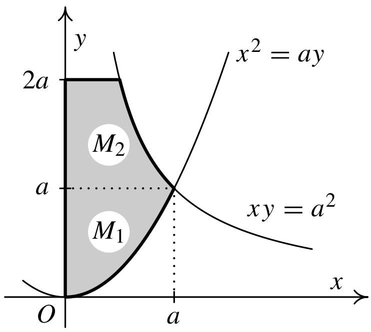
4.1.1. Míra (obsah) rovinné množiny

Nechť M je rovinná měřitelná množina. Z definic 1.31 a 1.45, popřípadě z tvrzení a) věty 1.50 vyplývá, že pro *míru (obsah)* $\mathrm{m}_2(M)$ této množiny platí

$$\mathrm{m}_2(M) = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{4.1}$$

Podle důsledku 1.41 víme, že omezená množina je měřitelná právě tehdy, když její hranice má míru nula. Tuto vlastnost mají všechny „rovinné obrazce“, se kterými se setkáváme v geometrii a v dalších běžných aplikacích.

Příklad 4.1. Vypočtěte obsah rovinné množiny M omezené křivkami $xy = a^2$, $x^2 = ay$, $y = 2a$, $x = 0$, kde $a > 0$ je konstanta.



Obr. 4.1

Řešení. Zjistíme nejprve průsečík křivek $xy = a^2$, $x^2 = ay$. Z první z těchto rovnic vidíme, že obě souřadnice průsečíku musí být různé od nuly. Vypočítáme-li z první rovnice neznámou y a dosadíme do druhé rovnice, obdržíme $x^2 = a^3/x$, takže $x^3 = a^3$. Odtud plyne, že $x = a$, a z rovnic křivek snadno určíme $y = a$. Jediným průsečíkem uvažovaných dvou křivek je tedy bod $[a, a]$. Množina M je znázorněna na obr. 4.1.

Označíme-li

$$M_1\colon \begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq a, \\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{ay}, \end{array} \qquad M_2\colon \begin{array}{l} a \leqq y \leqq 2a, \\ 0 \leqq x \leqq a^2/y, \end{array}$$

máme $M = M_1 \cup M_2$, $\mathrm{m}_2(M_1 \cap M_2) = 0$. Užitím tvrzení c) věty 1.50 dostáváme

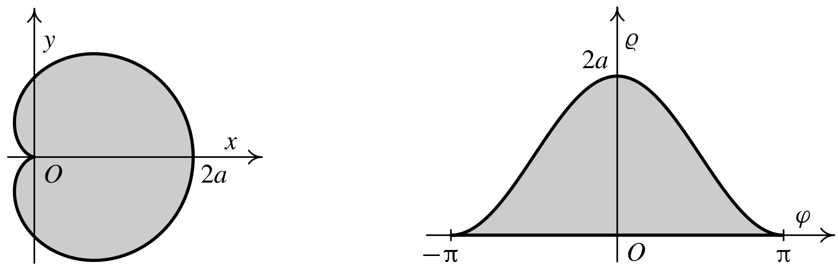
$$\begin{aligned} \mathrm{m}_2(M) &= \iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{M_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{ay}} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y + \int_a^{2a} \left[\int_0^{a^2/y} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y = \\ &= \sqrt{a}\left[\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^a + a^2\left[\ln|y|\right]_a^{2a} = \frac{2}{3}a^2 + a^2\ln 2 = a^2\left(\frac{2}{3} + \ln 2\right). \end{aligned}$$

▲

Příklad 4.2. Vypočtěte obsah množiny A omezené kardioidou, mající v polárních souřadnicích rovnici $\varrho = a(1 + \cos\varphi)$, $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$, $a > 0$ je konstanta.

Řešení. Množina je znázorněna na obr. 4.2 a). Vzhledem ke způsobu zadání kardioidy je vhodné použít transformaci do polárních souřadnic. Množina A se transformuje na množinu

$$B\colon \begin{array}{l} -\pi \leqq \varphi \leqq \pi, \\ 0 \leqq \varrho \leqq a(1 + \cos\varphi), \end{array}$$



a) b)

Obr. 4.2

což je elementární množina vzhledem k ose φ (obr. 4.2 b)). Na integrál transformovaný podle věty 3.8 proto můžeme použít Fubiniovu větu 1.55. Dostaneme:

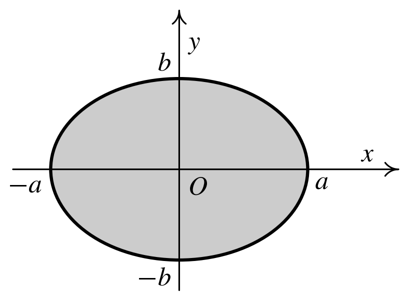
$$
\begin{aligned}
\mathrm{m}_2(A) &= \iint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_B \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{a(1+\cos\varphi)} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\varrho^2\right]_0^{a(1+\cos\varphi)} \mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{a^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}(3+4\cos\varphi+\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{a^2}{4}\left[3\varphi+4\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}.
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 4.3. Vypočtěte obsah vnitřku elipsy A o poloosách a a b, $a, b > 0$.

Řešení. Abychom si usnadnili výpočet, umístíme střed elipsy do počátku souřadnicové soustavy a osy souměrnosti do souřadnicových os (na obsah to nemá vliv) — viz obr. 4.3. Rovnice elipsy pak bude $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$. Nyní použijeme transformaci do eliptických souřadnic (3.7), konkrétně

$$
\begin{aligned}
x &= a\varrho\cos\varphi, \\
y &= b\varrho\sin\varphi,
\end{aligned}
\qquad |J| = ab\varrho.
$$



Obr. 4.3

Změnou měřítek na osách se elipsa transformuje na jednotkový kruh, který vyjádříme v „obyčejných“ polárních souřadnicích. Obrazem množiny A tedy bude množina

$$B: \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ 0 \leqq \varrho \leqq 1, \end{array}$$

což je obdélník. S použitím věty 3.8 a následně Fubiniovy věty 1.14 nám vyjde:

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_2(A) &= \iint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_B ab\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} ab\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 \varrho\,\mathrm{d}\varrho = \\ &= ab\big[\varphi\big]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 = ab \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

Pro $a = b = r$, kde $r > 0$, dostáváme jako speciální případ obsah πr^2 kruhu o poloměru r. ▲

4.1.2. Míra (objem) měřitelné množiny v trojrozměrném prostoru

Nechť A je měřitelná množina v trojrozměrném prostoru. Z definice míry v $\mathbb{R}^3$ a z definice trojného integrálu vyplývá, že pro *objem* $\mathrm{m}_3(A)$ této množiny platí

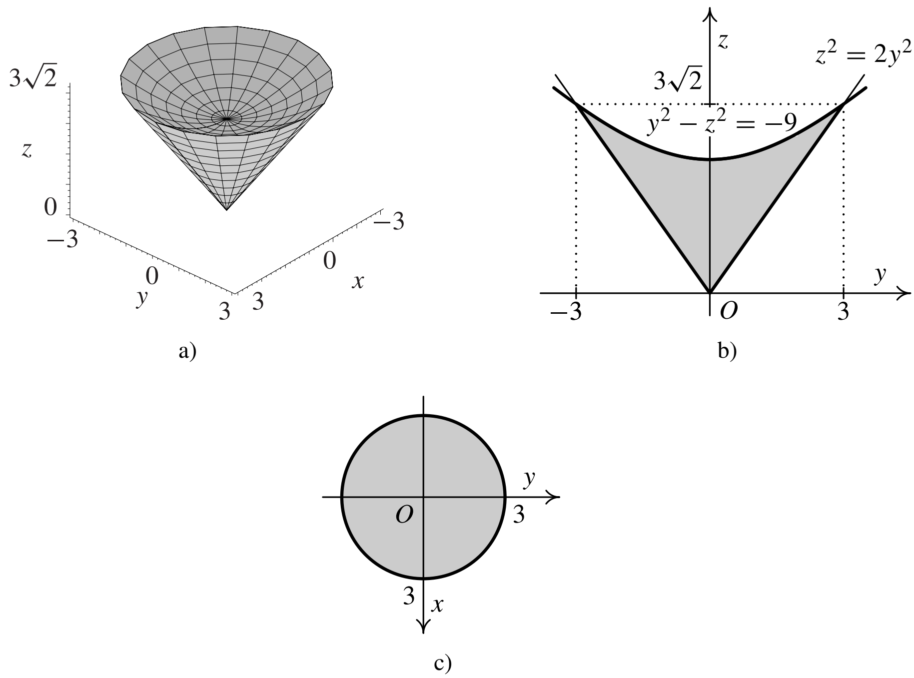
$$\mathrm{m}_3(A) = \iiint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{4.2}$$

Příklad 4.4. Vypočtěte objem tělesa A omezeného plochami $2(x^2+y^2)-z^2 = 0$ a $x^2 + y^2 - z^2 = -9$, leží-li A v poloprostoru $z \geqq 0$.

Řešení. První plochou je rotační kužel s osou z, druhou rotační dvojdílný hyperboloid s osou z. To lze snadno nahlédnout pomocí řezů plochy rovinami $x = 0$, $y = 0$ a $z = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Množina A je znázorněna na obr. 4.4 a). Na obr. 4.4 b) je řez této množiny rovinou $x = 0$. Zadané plochy se protínají v kružnici. Její rovnici dostaneme odečtením rovnic obou kvadrik. Vyjde $x^2+y^2 = 9$. Tedy kolmým průmětem množiny A do roviny xy je kruh K se středem v počátku o poloměru 3 (obr. 4.4 c)).

Použijeme transformaci do cylindrických souřadnic. Nejprve vyjádříme průmět K v polárních souřadnicích, tj. $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, $0 \leqq \varrho \leqq 3$. Z rovnic ploch určíme, že

$$\sqrt{2(x^2 + y^2)} \leqq z \leqq \sqrt{x^2 + y^2 + 9}.$$



Obr. 4.4

Odtud dosazením za $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ dostaneme, že $\sqrt{2}\varrho \leqq z \leqq \leqq \sqrt{\varrho^2+9}$. Množina A má v cylindrických souřadnicích tedy popis

$$B: \quad \begin{aligned} 0 &\leqq \varrho \leqq 3,\\ 0 &\leqq \varphi \leqq 2\pi,\\ \sqrt{2}\varrho &\leqq z \leqq \sqrt{\varrho^2+9}. \end{aligned}$$

To je elementární množina vzhledem k souřadnicové rovině $\varrho\varphi$. Na transformovaný integrál použijeme Fubiniovu větu. Integrace podle proměnné z musí předcházet integraci podle proměnné ϱ, na pořadí integrace podle proměnné φ nezáleží. Dostaneme:

$$\mathrm{m}_3(A) = \iiint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_B \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^3 \left\{ \int_{\sqrt{2}\varrho}^{\sqrt{\varrho^2+9}} \left(\int_0^{2\pi} \varrho\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}\varrho = \int_0^3 \left\{ \int_{\sqrt{2}\varrho}^{\sqrt{\varrho^2+9}} \varrho \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}\varrho =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^3 \left\{ \int_{\sqrt{2}\varrho}^{\sqrt{\varrho^2+9}} 2\pi\varrho \,\mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}\varrho = \int_0^3 \left\{ 2\pi\varrho \big[z\big]_{\sqrt{2}\varrho}^{\sqrt{\varrho^2+9}} \right\} \mathrm{d}\varrho = \\
&= 2\pi \int_0^3 \left(\varrho\sqrt{\varrho^2+9} - \varrho^2\sqrt{2}\right) \mathrm{d}\varrho = \\
&= 2\pi \int_0^3 \varrho\sqrt{\varrho^2+9}\,\mathrm{d}\varrho - 2\pi \int_0^3 \varrho^2\sqrt{2}\,\mathrm{d}\varrho = \left| \begin{array}{c} \varrho^2+9 = t \\ 2\varrho\mathrm{d}\varrho = \mathrm{d}t \\ \varrho\mathrm{d}\varrho = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 9,\ \ 3 \rightsquigarrow 18 \end{array} \right| = \\
&= \pi \int_9^{18} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t - 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^3 = \frac{2\pi}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_9^{18} - 18\pi\sqrt{2} = \\
&= \frac{2\pi}{3}\left(54\sqrt{2} - 27\right) - 18\pi\sqrt{2} = 18\pi\left(\sqrt{2} - 1\right).
\end{aligned}
$$

▲

Častý je případ, kdy těleso A, jehož objem hledáme, je elementární množina vzhledem k rovině xy, tj.

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M,\ \ f(x, y) \leqq z \leqq g(x, y)\},$$

kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina a f a g jsou spojité funkce na M, přičemž $f(x, y) \leqq g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$ (srovnejte obr. 2.2). Pak je možné vzorec (4.2) pro výpočet objemu upravit pomocí Fubiniovy věty na tvar

$$\mathrm{m}_3(A) = \iint\limits_M \big(g(x, y) - f(x, y)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4.3}$$

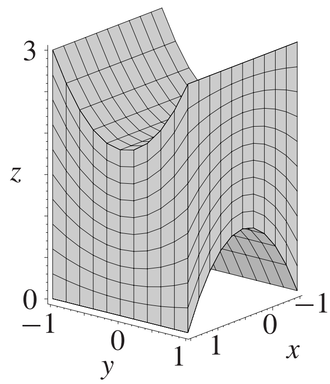
v němž figuruje jen dvojný integrál.

Příklad 4.5. Vypočtěte objem tělesa A určeného nerovnostmi $z \geqq 1 - x^2$ a $z \leqq$ $\leqq y^2 + 2$, přičemž $-1 \leqq x \leqq 1$, $-1 \leqq y \leqq 1$.

Řešení. Plochy, které omezují množinu A zdola resp. shora, jsou parabolické válce, jejichž povrchové přímky jsou rovnoběžné se souřadnicovou osou y resp. x — viz obr. 4.5. Kolmým průmětem množiny A do roviny xy je čtverec M: $\langle -$ $-1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$.

Použijeme vzorec (4.3), v němž zvolíme $f(x, y) = 1 - x^2$ a $g(x, y) = y^2 + 2$. Vzniklý integrál vypočítáme pomocí Fubiniovy věty. Vyjde:

$$\mathrm{m}_3(A) = \iint\limits_M \big((y^2 + 2) - (1 - x^2)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$



Obr. 4.5

$$= \iint\limits_M (x^2 + y^2 + 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} (x^2 + y^2 + 1)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_{-1}^{1} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(2x^2 + \frac{8}{3} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{8x}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{20}{3}.$$

▲

4.1.3. Míra měřitelné množiny v n-rozměrném prostoru

Stejně jako ve dvojrozměrném a trojrozměrném prostoru plyne z definice míry a z definice integrálu pro míru měřitelné množiny M v $\mathbb{R}^n$ vzorec

$$\mathrm{m}_n(M) = \int \cdots \int\limits_M \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n. \tag{4.4}$$

Příklad 4.6. Vypočtěte míru T_n n-rozměrného jehlanu (simplexu)

$$M_n = \left\{ [x_1, x_2, \dots, x_n] \colon x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \dots, x_n \geqq 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq h \right\},$$

kde $h > 0$ je konstanta.

Řešení. Proveďme nejprve dilataci $x_1 = hu_1, x_2 = hu_2, \dots, x_n = hu_n$. Pro jakobián J této transformace platí $J = h^n$ — viz (3.19). Množina M_n přejde po zmíněné transformaci v množinu

$M_n^* = \{[u_1, u_2, \ldots, u_n]: u_1 \geqq 0, u_2 \geqq 0, \ldots, u_n \geqq 0, u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqq 1\}.$

Množinu M_n^* jakožto elementární množinu můžeme vymezit pomocí nerovností:

$$M_n^*: \begin{array}{l} 0 \leqq u_n \quad\;\; \leqq 1, \\ 0 \leqq u_{n-1} \leqq 1 - u_n, \\ 0 \leqq u_{n-2} \leqq 1 - u_n - u_{n-1}, \\ \quad\vdots \\ 0 \leqq u_2 \quad\;\; \leqq 1 - u_n - \cdots - u_3, \\ 0 \leqq u_1 \quad\;\; \leqq 1 - u_n - \cdots - u_3 - u_2. \end{array}$$

Dostáváme pak

$$T_n = \int_{M_n} \cdots \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_{M_n^*} \cdots \int h^n \,\mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n = h^n \alpha_n,$$

kde

$$\alpha_n = \int_{M_n^*} \cdots \int \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_n.$$

Označíme-li při pevném $u_n \in \langle 0, 1\rangle$

$$\widetilde{M}_{n-1} = \{[u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}]: u_1 \geqq 0, u_2 \geqq 0, \ldots, u_{n-1} \geqq 0, \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \leqq 1 - u_n\},$$

vidíme, že

$$\alpha_n = \int_0^1 \Big(\int_{\widetilde{M}_{n-1}} \cdots \int \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{n-1} \Big) \mathrm{d}u_n.$$

Provedeme-li ve vnitřním integrálu novou dilataci $u_1 = (1 - u_n)\, v_1$, $u_2 = (1 - - u_n)\, v_2, \ldots, u_{n-1} = (1 - u_n)\, v_{n-1}$ s jakobiánem $J_{n-1} = (1 - u_n)^{n-1}$, obdržíme

$$\alpha_n = \int_0^1 (1 - u_n)^{n-1} \alpha_{n-1} \,\mathrm{d}u_n = \alpha_{n-1} \int_0^1 (1 - u_n)^{n-1} \,\mathrm{d}u_n = \\ = \left| \begin{array}{c} 1 - u_n = t \\ -\mathrm{d}u_n = \mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1, \;\; 1 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = -\alpha_{n-1} \int_1^0 t^{n-1} \,\mathrm{d}t = \alpha_{n-1} \frac{1}{n}.$$

Protože $\alpha_n = \alpha_{n-1}/n$, $\alpha_1 = 1$, snadno zjistíme, že $\alpha_n = 1/n!$ pro každé $n \geqq 1$. Odtud vyjde $T_n = h^n/n!$. ▲

Příklad 4.7. Vypočtěte míru V_n n-rozměrné koule $K_n = \{[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqq R^2\}$, kde $R > 0$ je její poloměr.

Řešení. Podle vzorce (4.4) máme $V_n = \int\limits_{K_n}\cdots\int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$. Užitím příkladu 3.32, kde volíme $\alpha = 0$, dostáváme pro $n \geqq 2$

$$V_n = \frac{R^n}{n!!} \cdot 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

kde $n!! = n(n-2)\cdots 3\cdot 1$ pro n liché, $n!! = n(n-2)\cdots 4 \cdot 2$ pro n sudé a $\lfloor x \rfloor$ značí celou část čísla x. Výsledek zřejmě platí i pro $n = 1$.

Pro míru (objem) V_n n-rozměrné *jednotkové* koule odtud dostáváme vzorce

$$V_{2k} = \frac{2^k \pi^k}{(2k)!!} \quad \text{pro} \quad n = 2k, \qquad \text{resp.} \quad V_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!} \quad \text{pro} \quad n = 2k+1,$$

přičemž $k \in \mathbb{N}$, resp. $k \in \mathbb{N}_0$.

Vypočtěme ještě pro zajímavost, jakou část objemu $\widehat{V}_n = 2^n$ n-rozměrné krychle o hraně 2, do níž je koule K_n vepsána, představuje objem V_n. Pro $n = 2k$ máme

$$\frac{V_n}{\widehat{V}_n} = \frac{\pi^k}{2^k \cdot (2k)!!} = \frac{\pi^k}{2^{2k} k!}, \tag{4.5}$$

zatímco pro $n = 2k + 1$ vychází

$$\frac{V_n}{\widehat{V}_n} = \frac{\pi^k}{2^k \cdot (2k+1)!!} = \frac{\pi^k k!}{(2k+1)!}. \tag{4.6}$$

Souhrnně pro všechna $n \in \mathbb{N}$ můžeme psát

$$\frac{V_n}{\widehat{V}_n} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{n!!}.$$

(Zvažte, že pro libovolné celé n platí $\left\lfloor -\frac{n}{2} \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, takže pro exponent mocniny čísla 2 bude v předchozím podílu platit $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - n = \left\lfloor \frac{n+1}{2} - n \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{n-1}{2} \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.)

Dodejme, že poslední výraz má nulovou limitu pro $n \to \infty$. To lze ověřit následovně: Uvažujme nekonečné řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, kde obecný člen a_k je dán vztahem (4.5) a obecný člen b_k je dán vztahem (4.6). Platí $a_{k+1}/a_k = \pi/(4(k+1)) \to 0$, $b_{k+1}/b_k = \pi/(2(2k+3)) \to 0$ pro $k \to \infty$. Z limitního podílového kritéria pro řady s nezápornými členy (viz [8, str. 17]) plyne, že obě řady jsou konvergentní. Podle nutné podmínky konvergence číselných řad to znamená, že $a_k \to 0$, $b_k \to 0$ pro $k \to \infty$. Z toho již plyne, že i $V_n/\widehat{V}_n \to 0$ pro $n \to \infty$. ▲

4.1.4. Míra (obsah) plochy v trojrozměrném prostoru

Další geometrickou aplikací je výpočet obsahu plochy v prostoru. Definice plochy je ovšem v obecném případu poměrně obtížná a stejně tak je tomu s definicí jejího obsahu. Omezíme se proto na speciální případ plochy vytvořené grafem funkce dvou proměnných. Příslušnou teorii, pojmy a vzorce lze nalézt v [26] nebo [27].

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená oblast (tj. souvislá otevřená množina), jejíž hranice je sjednocením konečně mnoha po částech hladkých křivek. Předpokládejme, že funkce f má spojité a ohraničené první parciální derivace na Ω a je spojitá na uzávěru $\overline{\Omega}$. Označme

$$G = \left\{[x, y, f(x, y)] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \overline{\Omega}\right\} \tag{4.7}$$

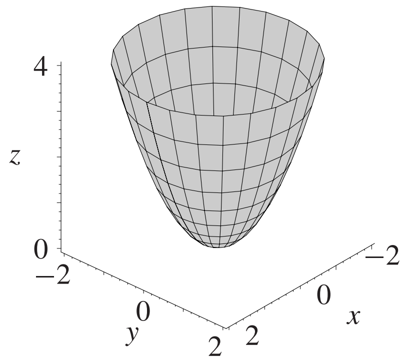
její graf. Pak lze dokázat, že pro *obsah* tohoto grafu platí:

$$S_2(G) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left[f'_x(x, y)\right]^2 + \left[f'_y(x, y)\right]^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.8}$$

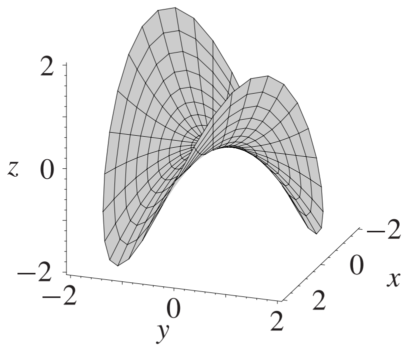
Náznak odvození vzorce (4.8). Nechť v $\mathbb{R}^3$ je dána rovina o rovnici $z = ax + by + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, a nechť $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$. Položme $z_0 = ax_0 + by_0 + c$. Pro libovolná v absolutní hodnotě malá nenulová čísla h, k uvažujme v rovině xy trojrozměrného prostoru xyz obdélník M s vrcholy $[x_0, y_0, 0]$, $[x_0 + h, y_0, 0]$, $[x_0, y_0 + k, 0]$, $[x_0 + h, y_0 + k, 0]$. Přímky kolmé k rovině xy procházející těmito vrcholy protnou danou rovinu v bodech $A = [x_0, y_0, z_0]$, $B = [x_0 + h, y_0, z_0 + ah]$, $C = [x_0, y_0 + k, z_0 + bk]$, $D = [x_0 + h, y_0 + k, z_0 + ah + bk]$. Tyto čtyři body jsou vrcholy rovnoběžníku $\widetilde{M}$ ležícího v dané rovině. Označíme-li $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{AB} = (h, 0, ah)$, $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{AC} = (0, k, bk)$, můžeme pomocí známého vzorce z lineární algebry vypočítat obsah tohoto rovnoběžníku: $S_2(\widetilde{M}) = |\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}| = |(-ahk, -bhk, hk)| = \sqrt{1 + a^2 + b^2}\,|hk| = \sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\mathrm{m}_2(M)$. Vezmeme-li nyní speciálně v úvahu tečnou rovinu ke grafu funkce f v bodě $[x^*, y^*, f(x^*, y^*)]$, kde $[x^*, y^*, 0] \in M$, máme $a = f_x(x^*, y^*)$, $b = f_y(x^*, y^*)$, $c = f(x^*, y^*) - x^* f_x(x^*, y^*) - y^* f_y(x^*, y^*)$. Přijmeme-li předpoklad, že obsah „kousku“ $\widetilde{G}$ grafu funkce f ležícího nad obdélníkem M je přibližně roven obsahu „kousku“ $\widetilde{M}$ tečné roviny ležícího nad obdélníkem M, platí přibližně $S_2(\widetilde{G}) = \sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\mathrm{m}_2(M) = \sqrt{1 + [f'_x(x^*, y^*)]^2 + [f'_y(x^*, y^*)]^2}\,\mathrm{m}_2(M)$.

Příklad 4.8. Vypočtěte obsah grafu G funkce f, která je definovaná na množině $\overline{\Omega} : x^2 + y^2 \leqq 4$, je-li

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, b) $f(x, y) = xy$.



a) Eliptický paraboloid



b) Hyperbolický paraboloid

Obr. 4.6

Řešení. Na výpočet použijeme vzorec (4.8). Množina $\overline{\Omega}$ je kruh se středem v počátku a poloměrem 2, takže na vzniklý integrál v obou případech použijeme transformaci do polárních souřadnic. Protože funkce f má v obou případech spojité parciální derivace v celé rovině $\mathbb{R}^2$, můžeme integrál počítat přes uzavřený kruh $\overline{\Omega}$ a ne jen přes otevřený kruh Ω (tyto množiny se liší o hraniční kružnici a ta má dvojrozměrnou míru nula). Obrazem $\overline{\Omega}$ bude množina

$$B\colon \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ 0 \leqq \varrho \leqq 2, \end{array}$$

což je dvojrozměrný interval, takže na transformovaný integrál můžeme použít Fubiniovu větu.

a) Jde o část eliptického paraboloidu. Platí $f'_x(x, y) = 2x$ a $f'_y(x, y) = 2y$, takže

$$\begin{aligned}
S_2(G) &= \iint\limits_{\overline{\Omega}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iint\limits_{B} \sqrt{1 + 4\varrho^2\cos^2\varphi + 4\varrho^2\sin^2\varphi}\cdot\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \\
&= \iint\limits_{B} \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^2 \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho = \\
&= \left| \begin{array}{c} 1 + 4\varrho^2 = t \\ 8\varrho\,\mathrm{d}\varrho = \mathrm{d}t \\ \varrho\,\mathrm{d}\varrho = \frac{1}{8}\,\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1,\ \ 2 \rightsquigarrow 17 \end{array} \right| = [\varphi]_0^{2\pi}\cdot\int_1^{17}\frac{1}{8}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_1^{17} = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right).$$

b) Jde o část hyperbolického paraboloidu. Platí $f'_x(x, y) = y$ a $f'_y(x, y) = x$, takže

$$\begin{aligned}
S_2(G) &= \iint\limits_{\overline{\Omega}} \sqrt{1 + y^2 + x^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iint\limits_{B} \sqrt{1 + \varrho^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2 \cos^2 \varphi} \cdot \varrho\, \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\varphi = \\
&= \iint\limits_{B} \varrho \sqrt{1 + \varrho^2}\, \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^2 \varrho \sqrt{1 + \varrho^2}\, \mathrm{d}\varrho = \\
&= \left| \begin{array}{c} 1 + \varrho^2 = t^2 \\ 2\varrho\, \mathrm{d}\varrho = 2t\, \mathrm{d}t \\ \varrho\, \mathrm{d}\varrho = t\, \mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1,\ 2 \rightsquigarrow \sqrt{5} \end{array} \right| = \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \int_1^{\sqrt{5}} t^2\, \mathrm{d}t = \\
&= 2\pi \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right).
\end{aligned}$$

Všimněte si, že pro procvičení jsme na zcela obdobný jednoduchý určitý integrál vzhledem k proměnné ϱ použili pokaždé poněkud odlišnou substituci. ▲

4.1.5. Míra (obsah) $(n-1)$-rozměrné plochy v n-rozměrném prostoru

Vzorec pro $(n-1)$-*rozměrnou míru* (obsah) v n-rozměrném prostoru grafu

$$G = \{[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})] \in \mathbb{R}^n : [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \in \overline{\Omega}\}$$

funkce f o $n-1$ proměnných je analogický vzorci (4.8):

$$S_{n-1}(G) = \int \cdots \int\limits_{\Omega} \left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} f'^2_{x_j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\right]^{1/2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_{n-1}. \quad (4.9)$$

Přitom předpokládáme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je omezená oblast, funkce f je spojitá na $\overline{\Omega}$ a má spojité a ohraničené parciální derivace na oblasti Ω, jejíž hranice je po částech hladká (tj. je sjednocením konečně mnoha grafů diferencovatelných funkcí $n-2$ proměnných $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-2}}$, $1 \leqq j_1 \leqq \cdots \leqq j_{n-2} \leqq n-1$, definovaných na kompaktních množinách, přičemž různé grafy mají společné nejvýše body svých „okrajů“). Přesný výklad pojmů *plocha v* $\mathbb{R}^n$ a *míra plochy v* $\mathbb{R}^n$ viz např. [26] nebo [27].

Příklad 4.9. Vypočtěte obsah S_{n-1} povrchu n-rozměrné koule K_n v n-rozměrném prostoru, která má daný poloměr $R > 0$.

Řešení. Výpočet nejprve provedeme pro $n \geqq 4$. Určíme obsah „horní“ poloviny povrchu (hranice) koule K_n. Užitím vzorce (4.9) dostáváme:

$$\frac{1}{2} S_{n-1} = \int \cdots \int_{K_{n-1}} \left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} f'^2_{x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \right]^{1/2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_{n-1},$$

kde $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2}$ a

$$K_{n-1} = \left\{ [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}] \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < R^2 \right\}.$$

Protože $f'_{x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = -x_j \big/ \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2}$, máme

$$1 + \sum_{j=1}^{n-1} f'^2_{x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \frac{R^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2}.$$

Dosazením do vzorce z úvodu řešení dostáváme

$$\frac{1}{2} S_{n-1} = \int \cdots \int_{K_{n-1}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_{n-1}.$$

Použitím transformace do sférických souřadnic

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varrho \cos\varphi \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-5} \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3},\\
x_2 &= \varrho \sin\varphi \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-5} \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3},\\
x_3 &= \varrho \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-5} \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3},\\
x_4 &= \varrho \cos\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-5} \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3},\\
&\vdots\\
x_{n-3} &= \varrho \cos\vartheta_{n-5} \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3},\\
x_{n-2} &= \varrho \cos\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3},\\
x_{n-1} &= \varrho \cos\vartheta_{n-3}
\end{aligned}$$

přejde množina K_{n-1} v množinu

$$K^*_{n-1}\colon \begin{array}{l} 0 \leqq \varrho < R, \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ 0 \leqq \vartheta_1 \leqq \pi, \\ \quad\vdots \\ 0 \leqq \vartheta_{n-3} \leqq \pi. \end{array}$$

Pro absolutní hodnotu jakobiánu této transformace platí

$$|J| = \varrho^{n-2} \sin\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \cdots \sin^{n-3}\vartheta_{n-3}.$$

Užitím vztahu $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = \varrho^2$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_{n-1} &= R \int_{K^*_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \frac{1}{\sqrt{R^2-\varrho^2}} \varrho^{n-2} \sin\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \cdots \sin^{n-3}\vartheta_{n-3} \times \\ &\qquad \times \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta_1\, \mathrm{d}\vartheta_2 \cdots \mathrm{d}\vartheta_{n-2} = \\ &= R \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \cdots \left(\int_0^{\pi} \frac{\varrho^{n-2}}{\sqrt{R^2-\varrho^2}} \sin\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \cdots \sin^{n-3}\vartheta_{n-3} \times \right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left. \times\, \mathrm{d}\vartheta_1 \right) \cdots \mathrm{d}\vartheta_{n-3} \right] \mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}\varrho = \\ &= R \int_0^R \frac{\varrho^{n-2}}{\sqrt{R^2-\varrho^2}}\, \mathrm{d}\varrho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta_1\, \mathrm{d}\vartheta_1 \cdots \int_0^{\pi} \sin^{n-3}\vartheta_{n-3}\, \mathrm{d}\vartheta_{n-3}. \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\varrho^{n-2}}{\sqrt{R^2-\varrho^2}}\, \mathrm{d}\varrho &= \left| \begin{array}{c} \varrho = R\sin t \\ \mathrm{d}\varrho = R\cos t\, \mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 0,\ \ R \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^{n-2}\sin^{n-2} t}{R\cos t} R\cos t\, \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^{n-2} \sin^{n-2} t\, \mathrm{d}t = R^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pomocí rekurentního vzorce $\int_0^{\pi} \sin^k\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = \frac{k-1}{k} \int_0^{\pi} \sin^{k-2}\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta$ (viz poznámka 3.33) a jeho analogie $\int_0^{\pi/2} \sin^k\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = \frac{k-1}{k} \int_0^{\pi/2} \sin^{k-2}\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta$, která se dokáže obdobně, obdržíme

$$\frac{1}{2} S_{n-1} = 2\pi R^{n-1} \gamma_n^* \frac{(n-3)!!}{(n-2)!!} \cdot 2 \cdot \pi \frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3} \cdot \pi \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} \cdots \gamma_{n-1} \frac{(n-4)!!}{(n-3)!!},$$

kde $\gamma_n = \pi$, $\gamma_n^* = \pi/2$ pro n sudé, $\gamma_n = 2$, $\gamma_n^* = 1$ pro n liché. Tedy

$$\frac{1}{2} S_{n-1} = 2\pi \frac{R^{n-1}}{(n-2)!!} 2^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} = \frac{R^{n-1}}{(n-2)!!} 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí celou část čísla x. Obsah povrchu celé koule je tedy roven číslu

$$S_{n-1} = \frac{R^{n-1}}{(n-2)!!} 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Výsledek je zřejmě správný i pro $n = 2$ a $n = 3$. Poznamenejme ještě závěrem, že pro limitu podílu objemu n-rozměrné koule o poloměru R (viz příklad 4.7) a obsahu jejího povrchu platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{S_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{R}{n} = 0.$$

▲

Poznámka 4.10. Pozorný čtenář si jistě všiml, že provedený výpočet nebyl zcela korektní. Integrovaná funkce totiž nebyla na K_{n-1} ohraničená. Náš výpočet však lze ospravedlnit, předpokládáme-li, že obsah $\frac{1}{2} S_{n-1}^*$ $(n-1)$-rozměrných kulových vrchlíků s osou v ose x_n, středem v počátku, o středovém úhlu 2ψ, kde $\psi \in (0, \pi/2\rangle$, je spojitou funkcí proměnné ψ. Skutečně, podobným postupem jako dříve dostaneme

$$\frac{1}{2} S_{n-1}^* = 2\pi R^{n-1} \int_0^{\psi} \sin^{n-2} t \,\mathrm{d}t \cdot 2^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \frac{1}{(n-3)!!} =$$
$$= \frac{R^{n-1}}{(n-3)!!} \int_0^{\psi} \sin^{n-2} t \,\mathrm{d}t \cdot 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}.$$

Vzhledem k tomu, že $\int_0^{\psi} \sin^{n-2} t \,\mathrm{d}t \to \gamma_n^* \frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}$ pro $\psi \to \pi/2-$, odtud snadno zjistíme, že

$$\frac{1}{2} S_{n-1} = \lim_{\psi\to\pi/2-} \frac{1}{2} S_{n-1}^* = \frac{R^{n-1}}{(n-2)!!} \gamma_n^* 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} = \frac{R^{n-1}}{(n-2)!!} 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Lze ukázat, že vzorec (4.9) platí i v případě, že integrál stojící na jeho pravé straně je nevlastní (viz kapitola 5) a konvergentní (parciální derivace f'_{x_j} tedy nemusí být nutně ohraničené na Ω). Srovnejte poznámku 5.27.

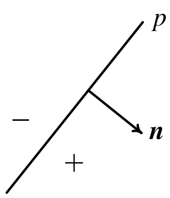
4.2. Fyzikální aplikace

Z fyzikálních aplikací uvedeme výpočet hmotnosti, souřadnic těžiště, momentu setrvačnosti a elektrického náboje. Odvození uvedených vzorců patří do teoretické fyziky.

4.2.1. Hmotnost a těžiště rovinné desky

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina, kterou chápeme jako model tenké rovinné desky. Označme $\rho(x, y)$ plošnou hustotu v bodě $X = [x, y] \in A$ a předpokládejme, že ρ je nezáporná integrovatelná funkce na množině A. *Hmotnost* $H(A)$ tenké desky A je dána vztahem

$$H(A) = \iint_A \rho(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.10}$$



Obr. 4.7

Nechť p je orientovaná přímka v rovině. To znamená, že je zvolen normálový vektor $\boldsymbol{n}$ přímky p, který míří do kladné poloroviny určené touto přímkou — viz obr. 4.7. O opačné polorovině pak říkáme, že je záporná. Symbolem $\mathrm{dist}(X, p)$ označme orientovanou vzdálenost bodu X od přímky p, tj. vzdálenost bodu X od přímky p (která je vždy nezáporná) opatřenou znaménkem plus pro body X v kladné polorovině a znaménkem mínus pro body X v záporné polorovině. *Statický moment množiny A vzhledem k přímce p* pak definujeme vztahem

$$S_p(A) = \iint_A \mathrm{dist}(X, p)\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.11}$$

Nás bude speciálně zajímat případ, když za přímku zvolíme některou ze souřadnicových os s jejich standardní orientací. Přitom říkáme, že osa x, resp. osa y, má standardní orientaci, jestliže platí $\mathrm{dist}(X, \text{osa } x) = y$, resp. $\mathrm{dist}(X, \text{osa } y) = x$ pro každý bod $X \in \mathbb{R}^2$. Tak dostaneme statické momenty vzhledem k souřadnicovým osám

$$S_x(A) = \iint_A y\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4.12}$$

$$S_y(A) = \iint_A x\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.13}$$

Označme konečně $T(A) = [\xi, \eta]$ *těžiště* tenké desky A. Pro jeho souřadnice platí:

$$\xi = \frac{S_y(A)}{H(A)}, \qquad \eta = \frac{S_x(A)}{H(A)}. \tag{4.14}$$

Poznámka 4.11. Statický moment hmotného bodu vzhledem k orientované přímce definujeme jako součin jeho hmotnosti a jeho orientované vzdálenosti od přímky. Statický moment konečné množiny hmotných bodů vzhledem k orientované přímce je pak algebraickým součtem statických momentů jednotlivých bodů.

Tím je motivována definice statického momentu tenké desky. Rozdělíme ji na malé části a v každé z nich zvolíme zástupce (bod). Statický moment jedné takové části bude přibližně součinem hmotnosti této části a orientované vzdálenosti zástupce od přímky. Hmotnost této části je opět přibližně součin jejího obsahu a plošné hustoty v zástupci. Sečtením přes všechny části se dostáváme k integrálním součtům, vedoucím k dvojným integrálům (4.12) a (4.13).

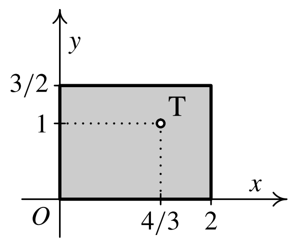
Představme si nyní, že celou hmotnost $H(A)$ tenké desky jsme soustředili do těžiště, tj. do bodu $[\xi, \eta]$. Vztahy (4.14) potom říkají, že statické momenty tohoto bodu jsou stejné jako statické momenty celé tenké desky. Tak si můžeme tyto vzorce zapamatovat.

Poznamenejme ještě, že ačkoli termín *statický moment* zní „fyzikálně“, teoretická fyzika takovou veličinu nezavádí. Termín se používá v technické mechanice a ve statice pro označení integrálů (4.11)–(4.13) a jejich různých analogií.

Příklad 4.12. Určete těžiště tenké obdélníkové desky $A\colon 0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 3/2$, mající v každém bodě $[x, y]$ plošnou hustotu $\rho(x, y) = xy$.

Řešení. Nejprve určíme hmotnost desky A. Ze vzorce (4.10) dostaneme s použitím Fubiniovy věty, že

$$H(A) = \iint_A xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 x \,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{3/2} y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{3/2} = 2 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{4}.$$



Obr. 4.8

Dále vypočítáme podle vzorců (4.12) a (4.13) statické momenty desky A vzhledem k souřadnicovým osám:

$$S_x(A) = \iint_A xy^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 x \,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{3/2} y^2 \,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{3/2} = 2 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{4},$$

$$S_y(A) = \iint_A x^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{3/2} y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{3/2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{8} = 3.$$

Konečně ze vzorců (4.14) určíme souřadnice těžiště:

$$\xi = \frac{3}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{3}, \qquad \eta = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad T(A) = [4/3, 1].$$

Výsledek je znázorněn na obr. 4.8. Poloha těžiště (je posunuté mimo střed obdélníku A) odpovídá tomu, že směrem vpravo nahoru hustota dané desky roste. ▲

4.2.2. Hmotnost a těžiště trojrozměrného tělesa

Nechť $V \subseteq \mathbb{R}^3$ je uzavřená měřitelná množina, kterou budeme chápat jako model zkoumaného tělesa. Označme $\rho(x, y, z)$ jeho (objemovou) hustotu v bodě $X = [x, y, z] \in V$ a předpokládejme, že nezáporná funkce ρ je integrovatelná na množině V. Obdobně jako v předchozím oddílu bude *hmotnost* $H(V)$ tělesa V dána vztahem

$$H(V) = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{4.15}$$

Nechť τ je orientovaná rovina v prostoru. To znamená, že je zvolen normálový vektor $\boldsymbol{n}$ roviny τ, mířící do kladného poloprostoru určeného touto rovinou. Opačná polorovina je pak záporná. Označme $\operatorname{dist}(X, \tau)$ orientovanou vzdálenost bodu X od roviny τ. Tím myslíme, že vzdálenost bodu X od roviny τ (která je vždy nezáporná) opatříme v kladném poloprostoru znaménkem plus a v záporném poloprostoru znaménkem mínus. *Statický moment množiny V vzhledem k rovině τ* definujeme vztahem

$$S_\tau(V) = \iiint\limits_V \operatorname{dist}(X, \tau)\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{4.16}$$

Opět bude nejdůležitější případ, kdy rovinami budou souřadnicové roviny orientované standardním způsobem, tj. normálovým vektorem bude směrový vektor odpovídající kladné souřadnicové poloose, která je kolmá k uvažované souřadnicové rovině. Pak platí $\operatorname{dist}(X, \text{rovina } xy) = z$, $\operatorname{dist}(X, \text{rovina } xz) = y$ a $\operatorname{dist}(X, \text{rovina } yz) = x$. Tak dostaneme statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám

$$S_{xy}(V) = \iiint\limits_V z\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{4.17}$$

$$S_{xz}(V) = \iiint\limits_V y\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{4.18}$$

$$S_{yz}(V) = \iiint\limits_V x\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{4.19}$$

Označme konečně $T(V) = [\xi, \eta, \zeta]$ *těžiště trojrozměrného tělesa V*. Pro jeho souřadnice platí:

$$\xi = \frac{S_{yz}(V)}{H(V)}, \qquad \eta = \frac{S_{xz}(V)}{H(V)}, \qquad \zeta = \frac{S_{xy}(V)}{H(V)}. \tag{4.20}$$

Pro statické momenty trojrozměrných těles vzhledem k rovinám lze uvést analogie poznámky 4.11.

Příklad 4.13. Vypočtěte hmotnost tělesa $V: x^2+y^2+z^2 \leqq z$, majícího v každém bodě $[x, y, z]$ hustotu $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Řešení. Podle vzorce (4.15) platí, že

$$H(V) = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

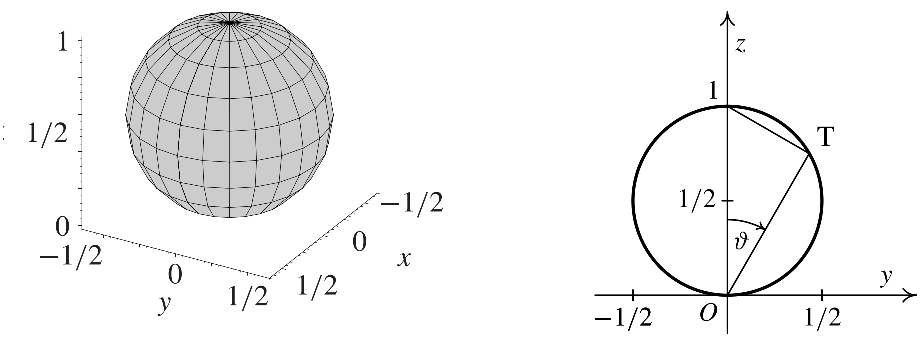
Těleso V je omezeno kvadratickou plochou o rovnici $x^2+y^2+z^2 = z$. Nejprve určíme, o jakou plochu jde. Po doplnění na úplný čtverec dostaneme:

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Jde tedy o kulovou plochu se středem $[0, 0, 1/2]$ o poloměru $1/2$. Těleso V je proto koule znázorněná na obr. 4.9 a).

Vzhledem k tvaru integrované funkce bude výhodné použít transformaci do sférických souřadnic. Určíme závislost ϱ na úhlech φ a ϑ. Dosadíme-li do rovnice kulové plochy sférické souřadnice (3.14), dostaneme s využitím rovnosti $x^2+y^2+z^2 = \varrho^2$, že platí $\varrho^2 = \varrho\cos\vartheta$. Tedy buď $\varrho = 0$, což odpovídá počátku souřadnic, nebo $\varrho = \cos\vartheta$.

Na obr. 4.9 b) znázorňujícím řez kulové plochy rovinou $x = 0$ je ukázán význam tohoto výsledku. Pro délku úsečky $\overline{OT}$ platí $\left|\overline{OT}\right| = \cos\vartheta$, což jinak



a) b)

Obr. 4.9

plyne i z Thaletovy věty (srv. příklad 3.13). Z obrázku je také zřejmé, že do popisu množiny V budou patřit nerovnosti $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$. Protože kolmý průmět koule V do roviny xy je zřejmě kruh se středem v počátku a poloměrem $1/2$, budou součástí popisu V také nerovnosti $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. Množina V se tedy transformuje na množinu

$$B\colon\ \begin{aligned} &0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\\ &0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2},\\ &0 \leqq \varrho \leqq \cos\vartheta, \end{aligned}$$

což je elementární množina vzhledem k rovině $\varphi\vartheta$. Na transformovaný integrál tedy použijeme Fubiniovu větu. Dostaneme:

$$\begin{aligned} H(V) &= \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_B \varrho\cdot\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \\ &= \int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\cos\vartheta}\varrho^3\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\vartheta = \\ &= \int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{\cos\vartheta}\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\vartheta = \\ &= \int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cos^4\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\cos^4\vartheta\sin\vartheta\,\big[\varphi\big]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\vartheta = \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \left|\begin{array}{c} \cos\vartheta = t \\ -\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}t \\ \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = -\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1,\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 0 \end{array}\right| = \\ &= -\frac{\pi}{2}\int_1^0 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

▲

Poznámka 4.14. Možná by někdo považoval za výhodnější použít posunutí $x = u$, $y = v$, $z = w + 1/2$ a poté transformaci do zobecněných sférických souřadnic

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\varrho\cos\varphi\sin\vartheta,\\ v &= \frac{1}{2}\varrho\sin\varphi\sin\vartheta,\\ w &= \frac{1}{2}\varrho\cos\vartheta\,. \end{aligned}$$

Množina V by se transformovala postupně na jednotkovou kouli se středem v počátku souřadnic a následně na trojrozměrný interval. Tím by se sice zjednodušilo omezení pro proměnnou ϱ, bylo by totiž $0 \leqq \varrho \leqq 1$, avšak velmi podstatně by se zkomplikoval integrand. Vyšlo by (po úpravě):

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\varrho^2 + 2\varrho\cos\vartheta + 1}.$$

Výpočet jednoduchého integrálu z této funkce (ať podle ϱ nebo ϑ) je však značně netriviální.

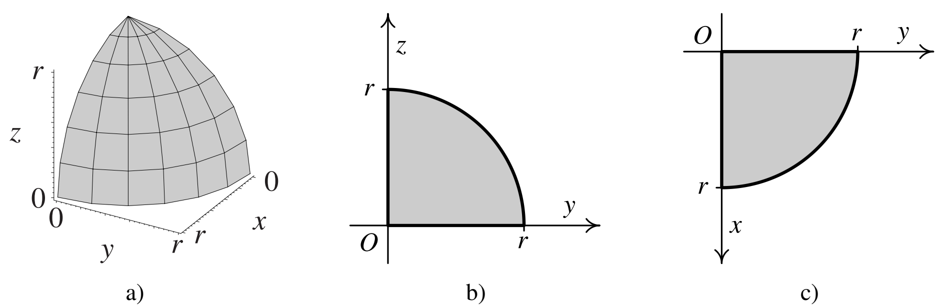
Ze stejného důvodu by nebylo ani v příkladu 3.13 možné zvolit eliptické souřadnice s posunutým středem. K výpočtu integrálu z příkladu 4.13 však bylo možné použít transformace do válcových souřadnic (3.13). Popis koule V ve válcových souřadnicích je $V^* = \{[\varphi, \varrho, z] \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ 0 \leqq z \leqq 1,\ 0 \leqq \varrho \leqq \sqrt{z - z^2}\}$ a integrál $H(V) = \iiint\limits_{V^*} \sqrt{\varrho^2 + z^2}\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}z$ lze užitím věty 3.20 a Fubiniovy věty snadno spočítat.

Příklad 4.15. Vypočtěte souřadnice těžiště části koule se středem v počátku a s poloměrem $r > 0$ ležící v prvním oktantu, je-li hustota v libovolném bodě úměrná jeho vzdálenosti od počátku.

Řešení. Označme V zadanou osminu koule. Ta je znázorněna na obr. 4.10 a). Pro výpočet trojných integrálů přes tuto množinu použijeme sférické souřadnice. Na obr. 4.10 b) a 4.10 c) jsou znázorněny kolmé průměty V do rovin yz a xy. V obou případech jde o čtvrtkruhy v prvním kvadrantu. Množina V se tedy transformuje na trojrozměrný interval

$$B\colon\ \begin{aligned} &0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2},\\ &0 \leqq \varrho \leqq r,\\ &0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Na vzniklé integrály pak budeme moci použít Fubiniovu větu.



Obr. 4.10

Ze zadání dále vyplývá, že existuje konstanta $k > 0$ taková, že pro hustotu tělesa V platí $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Nejprve vypočteme podle vzorce (4.15) hmotnost tělesa V:

$$H(V) = \iiint\limits_V k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_B k\varrho \cdot \varrho^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= k\int_0^r \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= k\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^r \cdot \left[\varphi\right]_0^{\pi/2} \cdot \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} = k\,\frac{r^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = k\,\frac{\pi r^4}{8}.$$

Dále vypočteme podle vzorců (4.17)–(4.19) potřebné statické momenty. Protože hustota závisí pouze na vzdálenosti od počátku, tj. je sféricky symetrická, lze vzhledem k tvaru tělesa V očekávat, že všechny tři statické momenty vyjdou stejně. O tom se ale přesvědčíme výpočtem. Dostaneme:

$$S_{xy}(V) = \iiint\limits_V kz\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_B k\varrho\cos\vartheta \cdot \varrho \cdot \varrho^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \iiint\limits_B k\varrho^4 \cos\vartheta\,\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^r \varrho^4\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{k}{2}\left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^r \cdot \left[\varphi\right]_0^{\pi/2} \cdot \left[-\frac{1}{2}\cos 2\vartheta\right]_0^{\pi/2} = \frac{k}{2}\,\frac{r^5}{5} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = k\,\frac{\pi r^5}{20},$$

$$S_{xz}(V) = \iiint\limits_V ky\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_B k\varrho\sin\varphi\sin\vartheta \cdot \varrho \cdot \varrho^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \iiint\limits_B k\varrho^4 \sin\varphi\,\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^r \varrho^4\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{k}{2}\left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^r \cdot \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\vartheta - \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right]_0^{\pi/2} = \frac{k}{2}\frac{r^5}{5} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = k\,\frac{\pi r^5}{20},$$

$$S_{yz}(V) = \iiint\limits_V kx\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_B k\varrho\cos\varphi\sin\vartheta \cdot \varrho \cdot \varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \iiint\limits_B k\varrho^4\cos\varphi\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^r \varrho^4\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{k}{2}\left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^r \cdot \left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\vartheta - \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right]_0^{\pi/2} = \frac{k}{2}\frac{r^5}{5} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = k\,\frac{\pi r^5}{20}.$$

Nyní ze vztahů (4.20) určíme souřadnice těžiště:

$$\xi = \eta = \zeta = \frac{k\,\frac{\pi r^5}{20}}{k\,\frac{\pi r^4}{8}} = \frac{2r}{5} \qquad \Rightarrow \qquad T = \left[\frac{2r}{5}, \frac{2r}{5}, \frac{2r}{5}\right].$$

▲

4.2.3. Moment setrvačnosti rovinné desky a trojrozměrného tělesa

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina, kterou budeme chápat jako model tenké rovinné desky. Označme $\rho(x, y)$ plošnou hustotu v bodě $X = [x, y] \in A$ a předpokládejme, že nezáporná funkce ρ je integrovatelná na množině A.

Buď p přímka v rovině. Označme $\mathrm{d}(X, p)$ vzdálenost bodu X od přímky p. *Moment setrvačnosti rovinné desky A vzhledem k přímce p* pak definujeme vztahem

$$I_p(A) = \iint\limits_A \mathrm{d}^2(X, p)\,\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.21}$$

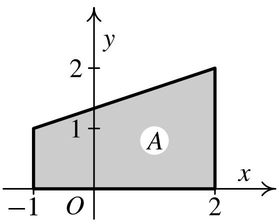
Všimněte si, že na rozdíl od statických momentů *v rovině* nepracujeme s orientovanou vzdáleností. Výsledek by však byl stejný, protože ve vzorci je druhá mocnina vzdálenosti, a tudíž $\mathrm{d}^2(X, p) = \mathrm{dist}^2(X, p)$.

Nás bude speciálně zajímat případ, když za přímku zvolíme některou ze souřadnicových os. Zřejmě platí $\mathrm{d}(X, \text{osa } x) = |y|$ a $\mathrm{d}(X, \text{osa } y) = |x|$. Tak dostaneme momenty setrvačnosti

$$I_x(A) = \iint\limits_A y^2 \rho(x, y)\, dx dy, \tag{4.22}$$

$$I_y(A) = \iint\limits_A x^2 \rho(x, y)\, dx dy. \tag{4.23}$$

Příklad 4.16. Vypočtěte momenty setrvačnosti vzhledem k souřadnicovým osám tenké rovinné homogenní lichoběžníkové desky A, která má vrcholy $[-1, 0]$, $[2, 0]$, $[2, 2]$ a $[-1, 1]$ (viz obr. 4.11), je-li její plošná hustota $\rho(x, y) = 1$.



Obr. 4.11

Řešení. Lichoběžník A je elementární množina vzhledem k ose x, která ho zároveň omezuje zdola. Najdeme rovnici přímky, která ho omezuje shora, tj. která prochází body $[-1, 1]$, $[2, 2]$. Směrnice této přímky bude

$$k = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3},$$

tedy její rovnice má tvar

$$y = 1 + k\,(x+1) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Integrační obor je tudíž popsán nerovnostmi

$$A: \quad \begin{aligned} -1 \leqq\ & x \leqq 2, \\ 0 \leqq\ & y \leqq \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Integrály (4.22) a (4.23) proto spočítáme snadno pomocí Fubiniovy věty. Vyjde:

$$\begin{aligned} I_x(A) &= \iint\limits_A y^2\, dx dy = \int_{-1}^{2} \left(\int_0^{x/3+4/3} y^2\, dy \right) dx = \\ &= \int_{-1}^{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{x/3+4/3} dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right)^3 dx = \frac{1}{81} \int_{-1}^{2} (x+4)^3\, dx = \\ &= \left| \begin{array}{c} x + 4 = t \\ dx = dt \\ -1 \rightsquigarrow 3,\ \ 2 \rightsquigarrow 6 \end{array} \right| = \frac{1}{81} \int_3^6 t^3\, dt = \frac{1}{81} \left[\frac{t^4}{4} \right]_3^6 = \frac{6^4 - 3^4}{81 \cdot 4} = \frac{15}{4}, \end{aligned}$$

$$I_y(A) = \iint_A x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\left(\int_0^{x/3+4/3} x^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{2} x^2 \big[y\big]_0^{x/3+4/3}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x^2\left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}(x^3+4x^2)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{16-1}{4} + \frac{4(8+1)}{3}\right) = \frac{21}{4}.$$

▲

Nechť $V \subseteq \mathbb{R}^3$ je uzavřená měřitelná množina, kterou budeme chápat jako model trojrozměrného tělesa. Označme $\rho(x, y, z)$ jeho (objemovou) hustotu v bodě $X = [x, y, z]$ a předpokládejme, že nezáporná funkce ρ je integrovatelná na množině V.

Nechť p je přímka v prostoru. Označme $\mathrm{d}(X, p)$ vzdálenost bodu X od přímky p. *Moment setrvačnosti trojrozměrného tělesa V vzhledem k přímce p* pak definujeme vztahem

$$I_p(V) = \iiint_V \mathrm{d}^2(X, p)\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{4.24}$$

Všimněte si, že zatímco u statických momentů *v prostoru* jsme pracovali s *orientovanou* vzdáleností *od roviny*, zde máme *neorientovanou* vzdálenost *od přímky*.

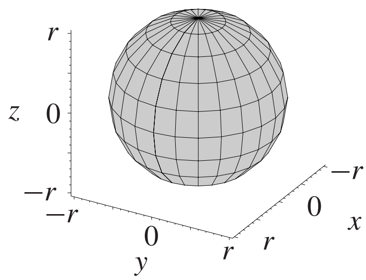
Nás bude speciálně zajímat případ, když za přímku zvolíme některou ze souřadnicových os x, y resp. z. Zřejmě platí, že $\mathrm{d}(X, \text{osa } x) = \sqrt{y^2+z^2}$, $\mathrm{d}(X, \text{osa } y) = \sqrt{x^2+z^2}$ a $\mathrm{d}(X, \text{osa } z) = \sqrt{x^2+y^2}$. Tak dostaneme momenty setrvačnosti

$$I_x(V) = \iiint_V (y^2+z^2)\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{4.25}$$

$$I_y(V) = \iiint_V (x^2+z^2)\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{4.26}$$

$$I_z(V) = \iiint_V (x^2+y^2)\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{4.27}$$

Příklad 4.17. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní koule s jednotkovou hustotou a poloměrem r vzhledem k libovolné přímce jdoucí jejím středem.



Obr. 4.12

Řešení. Z vzorce (4.24) je zřejmé, že vzhledem k symetrii koule a vzhledem k tomu, že je homogenní, bude výsledek pro libovolnou přímku procházející středem koule stejný bez ohledu na polohu koule. Umístíme proto kouli do počátku a za přímku vybereme například osu z. Označme tuto kouli V. Tedy $V: x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2$, kde $r > 0$ je poloměr koule.

Na výpočet integrálu (4.27) použijeme transformaci do sférických souřadnic. Kouli V v těchto souřadnicích odpovídá trojrozměrný interval

$$B:\ \begin{aligned} 0 &\leqq \varrho \leqq r, \\ 0 &\leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ 0 &\leqq \vartheta \leqq \pi. \end{aligned}$$

Transformovaný integrál vypočteme pomocí Fubiniovy věty. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
I_z(V) &= \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&= \iiint\limits_B (\varrho^2 \cos^2\varphi \sin^2\vartheta + \varrho^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta)\,\varrho^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \\
&= \iiint\limits_B \varrho^4 \sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \\
&= \int_0^r \varrho^4\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\vartheta) \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \\
&= \left| \begin{array}{c} \cos\vartheta = t \\ -\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}t \\ \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = -\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1,\ \ \pi \rightsquigarrow -1 \end{array} \right| = \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^r \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \int_1^{-1} (1 - t^2)(-1)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{r^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{2\pi r^5}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi r^5}{15}.
\end{aligned}$$

▲

4.2.4. Elektrický náboj

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina, kterou budeme chápat jako model tenké rovinné desky. Označme $\sigma(x, y)$ plošnou hustotu elektrického náboje v bodě $X = [x, y] \in A$ a předpokládejme, že σ je integrovatelná funkce na množině A, přičemž σ může nabývat kladných i záporných hodnot. Pak *celkový elektrický náboj $Q(A)$ rozložený na desce A* je určen vztahem

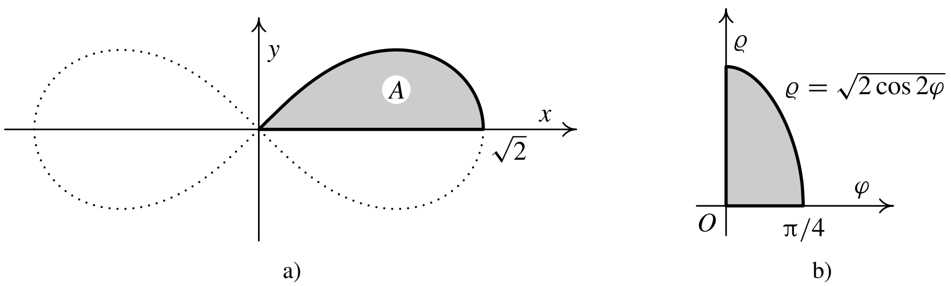
$$Q(A) = \iint_A \sigma(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.28}$$

Příklad 4.18. Vypočtěte celkový elektrický náboj rozložený na tenké desce A, která leží v 1. kvadrantu a je omezena osou x a křivkou o rovnici $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, je-li plošná hustota elektrického náboje $\sigma(x, y) = xy(x^2 - y^2)$.

Řešení. Použijeme vzorec (4.28). Nejprve určíme, jak vypadá množina A. Při úpravách budeme v dalším potřebovat vzorce $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. K vyjádření použijeme polární souřadnice ϱ, φ. Po jejich dosazení do rovnice křivky dostaneme:

$$(\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi)^2 = 2(\varrho^2\cos^2\varphi - \varrho^2\sin^2\varphi), \text{ odkud } \varrho = 0,\ \varrho^2 = 2\cos 2\varphi.$$

Hodnota $\varrho = 0$ odpovídá počátku. Dále výraz $2\cos 2\varphi$ musí být nezáporný (protože je roven ϱ^2), tj. $\varphi \in \langle -\pi/4, \pi/4\rangle \cup \langle 3\pi/4, 5\pi/4\rangle$. Celá křivka je nakreslena tečkovaně na obr. 4.13 a). Jde o tzv. *Bernoulliovu*[1] *lemniskátu*.



Obr. 4.13

[1] **Jacob Bernoulli** (1654–1705) (čti bernuli) — významný švýcarský matematik. Pracoval v matematické analýze, teorii diferenciálních rovnic, variačním počtu, pravděpodobnosti atd. Jeden z rozsáhlé rodiny významných matematiků téhož jména (přes 10 osob). Článek o křivce publikoval v r. 1694.

Rovněž uvažovaná množina A je znázorněna na obr. 4.13 a). Její vyjádření v polárních souřadnicích tudíž bude

$$B: \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{4}, \\ 0 \leqq \varrho \leqq \sqrt{2\cos 2\varphi}, \end{array}$$

což je zápis elementární množiny vzhledem k ose φ (viz obr. 4.13 b)). Na transformovaný integrál proto použijeme Fubiniovu větu. Vyjde:

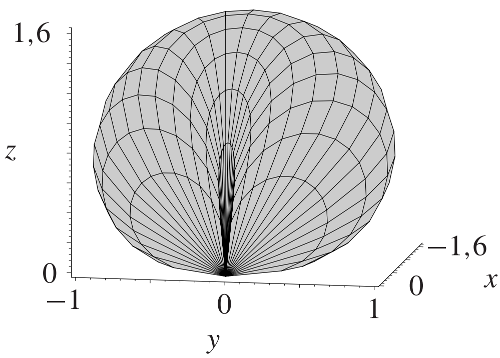
$$\begin{aligned} Q(A) &= \iint\limits_A xy(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \iint\limits_B \varrho\cos\varphi\cdot\varrho\sin\varphi(\varrho^2\cos^2\varphi-\varrho^2\sin^2\varphi)\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{2}\iint\limits_B \varrho^5\sin 2\varphi\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\varrho^5\sin 2\varphi\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin 2\varphi\cos 2\varphi\left[\frac{\varrho^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/4}\sin 2\varphi\cos^4 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \left|\begin{array}{c} \cos 2\varphi = t \\ -2\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t \\ 2\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1,\ \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow 0 \end{array}\right| = -\frac{1}{3}\int_1^0 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

▲

Nechť $V \subseteq \mathbb{R}^3$ je uzavřená měřitelná množina, kterou budeme chápat jako model trojrozměrného tělesa. Označme $\sigma(x,y,z)$ objemovou hustotu náboje v bodě $X = [x,y,z] \in V$ a předpokládejme, že σ je integrovatelná funkce na množině V, jejíž hodnoty mohou mít libovolná znaménka. Pak *celkový elektrický náboj $Q(V)$ rozložený v tělese V* je určen vztahem

$$Q(V) = \iiint\limits_V \sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{4.29}$$

Příklad 4.19. Vypočtěte celkový elektrický náboj rozložený v trojrozměrném tělese V, které leží v poloprostoru $z \geqq 0$ a je omezené plochou o rovnici $(x^2+y^2+z^2)^2 = -8xz$, je-li objemová hustota elektrického náboje $\sigma(x,y,z) = 2x + z$.



Obr. 4.14

Řešení. Použijeme vzorec (4.29). Abychom si udělali představu, jak vypadá těleso V, vyjádříme zadanou plochu ve sférických souřadnicích ϱ, φ, ϑ:

$$(\varrho^2)^2 = -8\varrho\cos\varphi\sin\vartheta\cdot\varrho\cos\vartheta, \quad \text{tj.} \quad \varrho = 0 \text{ nebo } \varrho^2 = -4\cos\varphi\sin 2\vartheta.$$

Hodnota $\varrho = 0$ odpovídá počátku. Dále součin $-4\cos\varphi\sin 2\vartheta$ musí být nezáporný (protože je roven ϱ^2). Z rovnice plochy plyne, že výraz $-8xz$ je nezáporný. Protože má být $z \geqq 0$ (tj. $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$), musí být $x \leqq 0$ (tj. $\pi/2 \leqq \varphi \leqq 3\pi/2$). Vyjádření množiny V ve sférických souřadnicích proto bude

$$B\colon \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \dfrac{3\pi}{2}, \\ 0 \leqq \vartheta \leqq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \leqq \varrho \leqq 2\sqrt{-\cos\varphi\sin 2\vartheta}. \end{array}$$

Těleso V je znázorněno na obrázku 4.14. Množina B je elementární množina vzhledem k rovině $\varphi\vartheta$, takže na transformovaný integrál budeme moci použít Fubiniovu větu. Vzniklý integrál pak rozdělíme na části, které pro přehlednost spočítáme samostatně. Pro velikost celkového elektrického náboje tudíž dostaneme:

$$Q(V) = \iiint_V (2x + z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$= \iiint_B (2\varrho\cos\varphi\sin\vartheta + \varrho\cos\vartheta)\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left\{ \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\sqrt{-\cos\varphi\sin 2\vartheta}} \varrho^3 (2\cos\varphi \sin^2\vartheta + \cos\vartheta \sin\vartheta)\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\vartheta \right\} \mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left\{ \int_0^{\pi/2} (2\cos\varphi \sin^2\vartheta + \cos\vartheta \sin\vartheta) \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^{2\sqrt{-\cos\varphi\sin 2\vartheta}} \mathrm{d}\vartheta \right\} \mathrm{d}\varphi = \\
&= 4 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left\{ \int_0^{\pi/2} (2\cos\varphi \sin^2\vartheta + \cos\vartheta \sin\vartheta) \cos^2\varphi \sin^2 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \right\} \mathrm{d}\varphi = \\
&= 8 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \sin^2 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta + \\
&\quad + 2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta.
\end{aligned}
$$

Při výpočtu vzniklých čtyř jednoduchých integrálů použijeme mimo jiné goniometrické vzorce $\cos^2\alpha = (1+\cos 2\alpha)/2$ a $\sin^2\alpha = (1-\cos 2\alpha)/2$. Postupně vyjde:

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} \sin\varphi = t \\ \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t \\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 1,\ \frac{3\pi}{2} \rightsquigarrow -1 \end{array} \right| = \\
&= \int_1^{-1} (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_1^{-1} = -\frac{4}{3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \sin^2 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1-\cos 2\vartheta)\sin^2 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2\vartheta \sin^2 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \\
&= \left| \begin{array}{r} \sin 2\vartheta = t \\ 2\cos 2\vartheta = \mathrm{d}t \\ \cos 2\vartheta = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 0,\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1-\cos 4\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta - \\
&\quad - \frac{1}{4} \int_0^0 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} \left[\vartheta - \frac{\sin 4\vartheta}{4} \right]_0^{\pi/2} - 0 = \frac{\pi}{8},
\end{aligned}
$$

$$
\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1+\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{\pi}{2},
$$

$$
\int_0^{\pi/2} \sin^3 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 2\vartheta)\sin 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \left| \begin{array}{r} \cos 2\vartheta = t \\ -2\sin 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}t \\ \sin 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1,\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow -1 \end{array} \right| =
$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{1}^{-1}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Po dosazení čtyř dílčích hodnot do odvozeného vyjádření $Q(V)$ obdržíme

$$Q(V) = 8\left(-\frac{4}{3}\right)\frac{\pi}{8} + 2\,\frac{\pi}{2}\,\frac{2}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

▲

4.2.5. Další fyzikální aplikace

Dosavadní ukázky se týkaly dvojných a trojných integrálů. Avšak i integrály vyšších rozměrností mají významné aplikace. Jednu z nich nyní popíšeme. Uvažujme trojrozměrné hmotné těleso a předpokládejme, že v jeho gravitačním poli se nachází další těleso, které se s prvním tělesem neprotíná. Matematickým modelem těchto těles jsou dvě kompaktní disjunktní měřitelné množiny A, B v $\mathbb{R}^3$. Nechť jejich hustoty jsou dány po řadě funkcemi ρ_A a ρ_B, které jsou nezáporné a integrovatelné na množině A, resp. B. Označme $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ gravitační sílu, kterou první těleso přitahuje těleso druhé. Pak pro složky síly F_i síly $\boldsymbol{F}$ platí

$$F_i = \iiiint\!\!\iint_{A\times B} \frac{G\rho_A(x_1,x_2,x_3)\rho_B(y_1,y_2,y_3)(x_i-y_i)}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3,$$

kde G je gravitační konstanta. Obdobně pro potenciální energii E tělesa B v gravitačním poli tělesa A platí

$$E = \iiiint\!\!\iint_{A\times B} \frac{G\rho_A(x_1,x_2,x_3)\rho_B(y_1,y_2,y_3)}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2]^{1/2}}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3.$$

Poznámka 4.20. V oddílu o fyzikálních aplikacích jsme ukázali, jak se z jistých tzv. *intenzivních veličin* (např. hustota, plošná hustota elektrického náboje, objemová hustota elektrického náboje a další) určí pomocí dvojného resp. trojného integrálu tzv. *extenzivní veličiny* jako hmotnost, momenty setrvačnosti a celkový elektrický náboj.

Všechny extenzivní veličiny mají důležitou vlastnost, tzv. *aditivitu*: rozdělíme-li množinu A na dvě disjunktní části A_1 a A_2, pak veličina přiřazená množině A je součtem veličin přiřazených množinám A_1 a A_2.

Ve fyzice i v jiných disciplínách se setkáváme s řadou dalších extenzivních veličin, které mohou být často určeny pomocí integrálů z intenzivních veličin. Integrály totiž jsou *aditivní vzhledem k integračnímu oboru* — viz věta 1.50, část c). U veličin, které nejsou aditivní, proto nelze očekávat, že půjdou vyjádřit pomocí integrálů z intenzivních veličin.

Cvičení

1. Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah množiny omezené křivkami:

   a) $xy = 4,\ y = x,\ x = 4,$ b) $y^2 = 4 + x,\ x + 3y = 0,$

   c) $y = \ln x,\ x - y = 1,\ y = -1,$ d) $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x \geqq 0,$

   e) $xy = a^2,\ x + y = \dfrac{5}{2}a,\ a > 0,$ f) $y = x^2,\ 4y = x^2,\ x = \pm 2,$

   g) $y^2 = \dfrac{b^2}{a}x,\ y = \dfrac{b}{a}x,\ a, b > 0,$ h) $y = \operatorname{tg} x,\ y = \dfrac{2}{3}\cos x,\ x = 0,$

   i) $xy = 1,\ xy = 8, y^2 = x,\ y^2 = 8x.$

2. Vypočtěte obsah rovinného obrazce určeného nerovnostmi:

   a) $y \leqq -x^3,\ y \leqq 2x^3,\ y \geqq x^3 - 1,$

   b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leqq 1,\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} \geqq 1,$

   c) $y \leqq 1,\ y \leqq x - 1,\ y \geqq \ln x,$

   d) $y \leqq x^2 + 1,\ y \geqq (x - 1)^3,\ y \leqq -x + 3,\ x \geqq 0,$

   e) $y^2 \leqq 2px + p^2,\ y^2 \leqq -2qx + q^2,\ p > 0,\ q > 0.$

3. Vypočtěte obsah:

   a) rovinného obrazce omezeného křivkami $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = 0$, $y = x$,
   b) rovinného obrazce určeného v prvním kvadrantu křivkou $x^3 + y^3 = 3axy$, kde $a > 0$ (Descartův list),
   c) asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, kde $a > 0$ je konstanta,
   d) „čtyřlístku“ $\varrho = a|\sin 2\varphi|$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

4. Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem:

   a) válce omezeného podstavou $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \leqq 0,\ z = 0\}$, válcovou plochou tvořenou rovnoběžkami s osou z vedenými z bodů hranice množiny A a plochou $z = x + y$,
   b) tělesa $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \geqq -2,\ 0 \leqq y \leqq -x,\ 0 \leqq z \leqq (x + 1)^2 + 1\}$.

5. Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa omezeného plochami:

   a) $az = x^2 - y^2,\ x = a,\ a > 0,$ v I. oktantu,

   b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0,$

   c) $z^2 = xy,\ x = 0, x = a,\ y = 0,\ y = a,\ a > 0,$

   d) $z = a - x,\ y^2 = ax,\ z = 0,\ a > 0,$

   e) $z = \sin \dfrac{\pi y}{2x},\ z = 0,\ y = x,\ y = 0,\ x = \pi,$

   f) $z = x + 6y,\ z = 0,\ y = x,\ y = 5x,\ x = 1,$

   g) $y = x^2,\ x + y + z = 4,\ y = 1,\ z = 0,$

   h) $x + y + z = 6,\ 3x + 2y = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$

   i) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ a, b, c > 0,$ v I. oktantu,

   j) $x = 0,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 4,\ z = 0,\ z = x^2 + y^2 + 1.$

6. Vypočtěte obsah:

   a) části plochy $z = 4 - x - y,$ omezené rovinami $x = 0,\ y = 0,\ x = 2,$ $y = 2,$

   b) části plochy $z = x^2/2$, kde $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$, $x/2 \leqq y \leqq 2x$,

   c) části plochy $z = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$, kde $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq x$,

   d) části kuželové plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}$, ležící uvnitř válcové plochy $x^2 + y^2 = 4$,

   e) části plochy $x^2 + z^2 = 1$, určené nerovnostmi $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $x + y \leqq 2$,

   f) části plochy $z^2 = 2xy$, kde $x \geqq 0$, $x \leqq 3$, $y \geqq 0$, $y \leqq 6$, $z \geqq 0$,

   g) části plochy $2z = x^2 + y^2$, kde $x^2 + y^2 \leqq 1$,

   h) části plochy $z = 2 - (x^2 + y^2)$, kde $0 \leqq y \leqq x$, $z \geqq 0$,

   i) plochy vyťaté na kulové ploše $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ plochou $y^2 = ay - x^2$, kde $a > 0$.

7. Vypočtěte hmotnost rovinné desky A omezené danými křivkami resp. určené danými nerovnostmi, je-li ρ plošná hustota:

   a) $A\colon 1 \leqq x \leqq 3,\ -1 \leqq y \leqq 2,\ \rho(x,y) = x^2 + y^2,$

   b) $A\colon x \geqq 0,\ x \leqq 4,\ y \geqq 0,\ y \leqq 3,\ \rho(x,y)$ je v libovolném bodě přímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti tohoto bodu od počátku $O = (0,0)$,

   c) $A\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ a,b > 0,\ \rho(x,y) = kxy,\ k > 0,$

   d) $A\colon x^2 - y - 1 \leqq 0,\ x - y + 1 \geqq 0,\ \rho(x,y) = |x-1|,$

   e) $A\colon x^2 + y^2 - 2y \leqq 0,\ \rho(x,y) = |xy|,$

   f) $A\colon x^2 + y^2 - 2x \geqq 0,\ x^2 + y^2 - 4x \leqq 0,\ \rho(x,y) = |y|.$

8. Určete uvedený statický moment rovinné desky A omezené danými křivkami resp. určené danými nerovnostmi, je-li ρ plošná hustota:

   a) $S_y,\ A\colon y \leqq x,\ y \leqq 1/x,\ y \geqq 1/2,\ \rho(x,y) = 2y,$

   b) $S_x,\ A\colon 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ y \geqq x, y \geqq 0,\ \rho(x,y) = x^2,$

   c) $S_x,\ A\colon y = x,\ x = y^2,\ \rho(x,y) = 1\big/\sqrt{x+1},$

   d) $S_y,\ A\colon x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \ln x \leqq y \leqq 1,\ \rho(x,y) = xy,$

   e) $S_y,\ A\colon x^2 + y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ \rho(x,y) = x\sqrt{4 - x^2 - y^2},$

   f) statický moment vzhledem ke straně a, přičemž A je obdélník o stranách a, b a $\rho(x,y) = 1$.

9. Určete těžiště T rovinné desky o plošné hustotě ρ (není-li dáno jinak, je $\rho = 1$) omezené danými křivkami resp. určené danými nerovnostmi:

   a) $y = 0$ a jedna půlvlna sinusoidy $y = \sin x,\ 0 \leqq x \leqq \pi,$

   b) $y = x^2,\ x = 4,\ y = 0,$

   c) $x^2 + y^2 = a^2,\ y \geqq 0,\ a > 0,$

   d) $y^2 = ax,\ x = a,\ y \geqq 0,\ a > 0,$

   e) $y = a^2 - x^2,\ y = 0,\ a > 0,$

   f) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 \leqq 1,\ y \geqq 0,$ $a, b > 0,$

   g) $ay = x^2,\ x + y = 2a,\ a > 0,$

   h) $y = x,\ y = x^2,$

i) $x^2 + y^2 \leqq a^2,\ a > 0,$ je-li $\rho(x, y)$ přímo úměrné vzdálenosti bodu $[x, y]$ od bodu $[a, 0]$.

10. Vypočtěte uvedený moment setrvačnosti rovinné desky A omezené danými křivkami resp. určené danými nerovnostmi, je-li ρ plošná hustota:

a) $I_y,\ A\colon x = 0,\ x = 4,\ y = x/2 + 3,\ y = x/2 - 3,\ \rho(x, y) = x,$

b) $I_x,\ A\colon x^2 \leqq y \leqq x,\ \rho(x, y) = k,\ k > 0,$

c) $I_x,\ A\colon x^2 + y^2 \leqq r^2,\ \rho(x, y) = 1,\ r > 0,$

d) $I_x,\ A\colon 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ y \geqq x,\ y \geqq -x,\ \rho(x, y) = y,$

e) $I_x,\ A\colon \dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} = 1,\ \dfrac{x^2}{a_2^2} + \dfrac{y^2}{b_2^2} = 1,\ 0 < a_1 < a_2,\ 0 < b_1 < b_2,$ $\rho(x, y) = 1.$

11. Vypočtěte objem tělesa omezeného danými plochami resp. určeného danými nerovnostmi:

a) $z = x^2 + y^2,\ x + y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$

b) $y = x^2,\ z = 0,\ y + z = 2,$

c) $x - y + z = 6,\ x + y = 2,\ x = y,\ y = 0,\ z = 0,$

d) $z = 4 - y^2,\ z = y^2 + 2,\ x = -1,\ x = 2,$

e) $z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ y = 1,\ z = 0,$

f) $z = x^2 + y^2,\ z = x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = 2x,\ x = 1,$

g) $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ z = 0,\ x + z = 6,$

h) $x + y + z = \alpha,\ x^2 + y^2 = R^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ \alpha, R > 0,$ $\alpha \geqq \sqrt{2}R.$

12. Vypočtěte objem tělesa omezeného danými plochami pomocí transformace do cylindrických resp. sférických souřadnic:

a) $z = 4\big/(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,$

b) $x + y + z = 3a,\ x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0,\ a > 0,$

c) $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0,$

d) $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 - z^2 = -4,$

e) $x^2 + y^2 + z^4 = 1,$

f) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x,\ a > 0.$

13. Vypočtěte objem tělesa omezeného danými plochami resp. určeného danými nerovnostmi pomocí transformace do zobecněných cylindrických resp. sférických souřadnic:

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq \dfrac{z^2}{c^2},\ z \geqq 0,\ a, b, c > 0,$

b) $z = xy,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ \dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{4b^2} = 1,\ a, b > 0,$ v I. oktantu,

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b, c > 0.$

14. Vypočtěte objem tělesa V, kde

a) $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 1 \leqq y \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq z \leqq x/y\},$

b) $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqq r^2,\ 0 \leqq z \leqq (v/r)y\},\ r > 0,\ v > 0,$

c) $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqq ax,\ a^2 z^2 \leqq c^2(x^2 + y^2),\ z \geqq 0\},$ $a > 0,\ c > 0,$

d) $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \geqq x,\ x^2 + y^2 \leqq 2x,\ x + z \geqq 0,\ x^2 + y^2 \geqq z\},$

e) $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2x \leqq 0,\ z \leqq 2 - x^2 - y^2,\ z \geqq 0\},$

f) $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2,\ x^2 + y^2 \leqq a^2\},\ 0 < a < r,$

g) V je průnik válců $x^2 + y^2 \leqq a^2$, $x^2 + z^2 \leqq a^2$, $a > 0$,

h) V je omezeno horní polovinou kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ a kuželovou plochou $x^2 + y^2 = z^2$, $a > 0$,

i) $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2,\ x^2 + y^2 \leqq rx\},\ r > 0$, je Vivianiho[1] těleso (průnik válce s koulí),

j) V je omezené plochami $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ \dfrac{2z}{c} = \dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2}$ a $z = 0,\ a > 0,$ $b > 0,\ c > 0,\ p > 0,\ q > 0,$

[1] **Vincenzo Viviani** (1622–1703) (čti viviany) — italský inženýr. Zabýval se geometrií.

k) V je omezené plochami $x + y + z = a$, $x + y + z = 2a$, $x + y = z$, $x + y = 2z$, $y = x$, $y = 3x$, $a > 0$,

i) pomocí transformace $x = u - v$, $y = u + v$, $z = z$,
ii) pomocí transformace $x + y + z = u$, $(x + y)/z = v$, $y/x = w$.

15. Vypočtěte hmotnost nehomogenního tělesa o objemové hustotě $\rho(x, y, z)$

a) omezeného rovinami $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 1$, $z = 4$, $\rho(x, y, z) = x^2 y$,
b) omezeného válcovou plochou $x^2 = 2y$ a rovinami $y + z = 1$, $2y + z = 2$, $\rho(x, y, z) = y$,
c) omezeného válcovou plochou $x^2 + y^2 = 9$ a rovinami $z = 0$, $z = 5$, $\rho(x, y, z) = 4 + x$,
d) omezeného plochou $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ a rovinou $z = c$, $\rho(x, y, z) = z, c > 0$,
e) omezeného plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$, $k > 0$.

16. Určete daný statický moment nehomogenního tělesa M o hustotě $\rho(x, y, z)$:

a) S_{yz}, M je omezeno plochami $z = -x^2$, $z = -y^3$, $x \leqq 1$, přičemž $-x \leqq y \leqq 0$, $\rho(x, y, z) = |y|$,
b) S_{yz}, M je omezeno plochami $z = -x^3$, $z = \mathrm{e}^x$, $y = 1 - x$, přičemž $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $\rho(x, y, z) = x$,
c) S_{xy}, M je omezeno plochami $z = x^2 + y^2$, $z = 3$, přičemž $y \geqq |x|$, $\rho(x, y, z) = y$,
d) S_{xz}, M je určeno nerovnostmi $x^2 + y^2 \geqq 1$, $1 \leqq z \leqq 5 - x^2 - y^2$, $y \geqq |x|$, $\rho(x, y, z) = |y|$.

17. Určete těžiště tělesa o hustotě $\rho(x, y, z)$ (není-li dáno jinak, je $\rho = 1$), které je omezené plochami:

a) $x^2/p + y^2/q = 2z$, $z = c$, $p > 0$, $q > 0$, $c > 0$, v I. oktantu,

b) $z = y^2/2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$,

c) $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 4$, $\rho(x, y, z) = x$,

d) $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $a > 0$,

e) $z = y^2/2$, $2x + 3y - 12 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 8$.

18. Určete těžiště (ρ je objemová hustota):

a) osminy elipsoidu $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ v prvním oktantu, kde $\rho(x, y, z) = \kappa$, $a, b, c, \kappa > 0$,

b) části koule se středem v počátku a poloměrem $r > 0$ ležící v prvním oktantu, je-li hustota ρ v každém bodě přímo úměrná jeho vzdálenosti od počátku,

c) krychle $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, je-li hustota dána vztahem $\rho(x, y, z) = \kappa\, x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}\, y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}\, z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}$, kde $\kappa > 0$, $1/2 \leqq \alpha < 1$, $1/2 \leqq \beta < 1$, $1/2 \leqq \gamma < 1$,

d) výseče koule o poloměru $r > 0$ se středem v počátku, která má středový úhel 2α a jejíž osa leží v kladné části osy z; přitom $\rho(x, y, z) = 1$,

⋆e) kulového klínu vyťatého z koule o poloměru $r > 0$ se středem v počátku; roviny vytínající klín procházejí osou x a svírají úhel 2α, osa souměrnosti klínu leží v kladné části osy z; přitom $\rho(x, y, z) = 1$.

19. Určete moment setrvačnosti (ρ je hustota):

a) homogenního rotačního válce vzhledem k ose rotace, je-li výška válce v a podstava je určena kružnicí $x^2 + y^2 = r^2$, $v > 0$, $r > 0$, $\rho = 1$,
b) nehomogenní koule $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ vzhledem k ose jdoucí středem, $R > 0$, je-li $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
c) homogenního rotačního kužele o poloměru podstavy $r > 0$ a výšce $h > 0$ vzhledem k jeho ose rotace, $\rho = 1$,
d) homogenního kvádru o rozměrech $a \times b \times c$ vzhledem k ose jdoucí středem kvádru rovnoběžně s hranami délky a, $\rho = 1$,
e) homogenní krychle o velikosti hrany a vzhledem k její tělesové úhlopříčce, $\rho = 1$,
f) osminy koule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, v I. oktantu vzhledem k ose z, je-li $\rho(x, y, z) = z$,
g) rotačního válce $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqq r^2$, $0 \leqq z \leqq v$, kde $r > 0$, $v > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, vzhledem k ose z, je-li $\rho(x, y, z) = 1$.

20. Vypočtěte celkový elektrický náboj Q rozložený na rovinné desce M omezené danými křivkami, resp. určené danými nerovnostmi, je-li dána jeho plošná hustota σ:

a) $M\colon 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \pi/2,\ \sigma(x, y) = x \sin y$,

b) $M\colon 1 \leqq x \leqq 3,\ x = y,\ y = x + 2,\ \sigma(x, y) = 2x + 3y$,

c) $M\colon y = x,\ \ y = x^2,\ \ \sigma(x, y) = x + y,$

d) $M\colon 0 \leqq x \leqq 1,\ \ y \geqq 0,\ \ y \leqq 1 - x,\ \ \sigma(x, y) = x + y - xy,$

e) $M\colon x = y,\ \ y = x^2,\ \ \sigma(x, y) = x^2 + y^2,$

f) $M\colon x + y = \pm a,\ \ x - y = \pm a,\ \ \sigma(x, y) = 2\sqrt{a^2 - x^2},\ \ a > 0.$

21. Vypočtěte celkový elektrický náboj Q rozložený v tělese M určeném danými nerovnostmi, je-li dána objemová hustota σ tohoto náboje:

a) $M\colon x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ z \geqq 0,\ \ x + y + z \leqq 1,\ \ \sigma(x, y, z) = xyz,$

b) $M\colon x + y \leqq 3,\ \ x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ 0 \leqq z \leqq 4,\ \ \sigma(x, y, z) = \dfrac{x + y}{4 + z},$

c) $M\colon x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ z \leqq 0,\ \ 4x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,\ \ \sigma(x, y, z) = x^2yz,$

d) $M\colon 0 \leqq x \leqq \mathrm{e} - 1,\ \ 0 \leqq y \leqq \mathrm{e} - x - 1,\ \ \mathrm{e} \leqq z \leqq x + y + \mathrm{e},$

$$\sigma(x, y, z) = \frac{\ln(z - x - y)}{(x - \mathrm{e})(x + y - \mathrm{e})}.$$

22. Vypočtěte objemy následujících těles:

a) n-rozměrného rovnoběžnostěnu omezeného rovinami $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \pm h_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, kde $h_i > 0$ a $\det(a_{ij}) \neq 0$.

b) n-rozměrného jehlanu $\dfrac{x_1}{a_1} + \dfrac{x_2}{a_2} + \dots + \dfrac{x_n}{a_n} \leqq 1$, $x_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, je-li $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

c) n-rozměrného elipsoidu $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \dfrac{x_n^2}{a_n^2} \leqq 1$, je-li $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

23. Nechť M, N jsou měřitelné množiny v $\mathbb{R}^3$, které leží mezi rovinami $z = a$ a $z = b$, kde $a < b$. Nechť pro každé $z \in \langle a, b\rangle$ jsou řezy $M_{(\cdot,\cdot,z)}$, $N_{(\cdot,\cdot,z)}$ měřitelné množiny v $\mathbb{R}^2$ (viz označení z lemmatu 3.47). Nechť existuje konstanta $k > 0$ taková, že $\mathrm{m}_2(M_{(\cdot,\cdot,z)}) = k\,\mathrm{m}_2(N_{(\cdot,\cdot,z)})$ pro každé $z \in \langle a, b\rangle$. Dokažte, že pak platí $\mathrm{m}_3(M) = k\,\mathrm{m}_3(N)$ (tzv. *Cavalieriův*[1] *princip*).

24. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina. Označme $B = \big\{[x_1, \dots, x_n, 0] \in \mathbb{R}^{n+1} : [x_1, \dots, x_n] \in A\big\}$. Buď $V = [0, \dots, 0, v] \in \mathbb{R}^{n+1}$, kde $v > 0$. Uvažujme

[1] **Bonaventura Francesco Cavalieri** (1598–1647) (čti kavalieri) — italský matematik. Ve své *teorii nedělitelných veličin* rozvinul Archimedovu *exhaustivní metodu* — viz [25]. Jeho myšlenky přispěly k rozvoji integrálního počtu.

„jehlan“ s podstavou B a vrcholem V v $\mathbb{R}^{n+1}$, tj. množinu

$$M = \left\{[(1-\lambda)x_1, \dots, (1-\lambda)x_n, \lambda v] : [x_1, \dots, x_n, 0] \in B,\ 0 \leqq \lambda \leqq 1\right\}$$

(M je tvořena body úseček spojujících vrchol V s body podstavy B). Je-li M měřitelná množina, najděte vzorec pro vyjádření $\mathrm{m}_{n+1}(M)$ pomocí $\mathrm{m}_n(A)$ a v.

25. Ukažte, že při označení ze cvičení 24 z měřitelnosti množiny A v $\mathbb{R}^n$ plyne měřitelnost množiny M v $\mathbb{R}^{n+1}$, takže tento předpoklad lze vynechat.

Výsledky

1. a) $6 - 4\ln 2$, b) $20\,\frac{5}{6}$, c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}$, d) $\sqrt{2} - 1$,
e) $a^2\left(\frac{15}{8} - \ln 4\right)$, f) 4, g) $\frac{ab}{6}$, h) $\frac{1}{3} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$, i) $7\ln 2$.

2. a) $\frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$, b) $\frac{3}{2}(\pi - 2)$, c) $\frac{2\mathrm{e}-5}{2}$, d) $\frac{17}{6}$, e) $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$.

3. a) 3π,
b) $\frac{3}{2}a^2$ (použijte transformaci do zobecněných eliptických souřadnic $x = \varrho\cos^2\varphi$, $y = \varrho\sin^2\varphi$),
c) $\frac{3}{8}\pi a^2$ (použijte transformaci do zobecněných eliptických souřadnic $x = \varrho\cos^3\varphi$, $y = \varrho\sin^3\varphi$),
d) $\frac{1}{2}\pi a^2$.

4. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{8}{3}$.

5. a) $\frac{a^3}{6}$, b) $\frac{16}{3}ab^2$, c) $\frac{8}{9}a^3$, d) $\frac{8}{15}a^3$, e) π,
f) $\frac{76}{3}$, g) $\frac{68}{15}$, h) 32, i) $\frac{abc}{6}$, j) $\frac{560}{3}$.

6. a) $4\sqrt{3}$, b) 13, c) $1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$, d) $4\pi\sqrt{2}$, e) 2π,
f) 36, g) $\frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{8} - 1\right)$, h) $\frac{13}{24}\pi$, i) $2a^2(\pi - 2)$.

7. a) 32, b) $100k$, c) $\frac{1}{8}ka^2b^2$, d) $\frac{37}{12}$, e) $\frac{4}{3}$, f) $\frac{28}{3}$.

8. a) $\ln 2 - \frac{15}{64}$, b) $\frac{31(\sqrt{2}+4)}{60}$, c) $\frac{6-4\sqrt{2}}{5}$,
d) $\frac{2\mathrm{e}^3+1}{27}$, e) $\frac{32}{15}\pi$, f) $\frac{1}{2}ab^2$.

9. a) $T = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right]$, b) $T = \left[3, \frac{24}{5}\right]$, c) $T = \left[0, \frac{4a}{3\pi}\right]$,

d) $T = \left[\frac{3a}{5}, \frac{3a}{8}\right]$, e) $T = \left[0, \frac{2a^2}{5}\right]$, f) $T = \left[0, \frac{4b}{3\pi}\right]$,

g) $T = \left[-\frac{1}{2}\,a, \frac{8}{5}\,a\right]$, h) $T = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right]$, i) $T = \left[-\frac{a}{5}, 0\right]$.

10. a) 384, b) $\frac{k}{28}$, c) $\frac{\pi r^4}{4}$, d) $\frac{31}{6}\sqrt{2}$, e) $\frac{\pi}{4}(b_2^3 a_2 - b_1^3 a_1)$.

11. a) $\frac{128}{3}$, b) $\frac{32}{15}\sqrt{2}$, c) $\frac{16}{3}$, d) 8,

e) $\frac{88}{105}$, f) $\frac{1}{2}$, g) $\frac{48}{5}\sqrt{6}$, h) $\frac{\pi\alpha R^2}{4} - \frac{2}{3}R^3$.

12. a) $8\pi\ln 2$, b) $3\pi a^3$, c) $\frac{45}{32}\,\pi$,

d) $\frac{32\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$, e) $\frac{8}{5}\,\pi$, f) $\frac{\pi a^3}{3}$.

13. a) $\frac{\pi}{3}\,abc\,(2-\sqrt{2})$, b) $\frac{15}{8}\,a^2b^2$, c) $\frac{4\pi}{3}\,abc\,(2\sqrt{2}-1)$.

14. a) $2\ln 2 - \frac{3}{4}$, b) $\frac{2}{3}\,vr^2$, c) $\frac{4}{9}\,a^2c$, d) $\frac{73}{32}\,\pi$,

e) $\frac{3}{4}\,\pi$, f) $\frac{4\pi}{3}\left[r^3 - (r^2-a^2)\sqrt{r^2-a^2}\right]$, g) $\frac{16}{3}\,a^3$,

h) πa^3, i) $\frac{2}{3}\,r^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$, j) $\frac{\pi abc}{8}\left(\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2}\right)$, k) $\frac{49a^3}{864}$.

15. a) 2, b) $\frac{8}{35}\sqrt{2}$, c) 180π, d) $\frac{\pi c^4}{4}$, e) $\frac{128k\pi}{5}$.

16. a) $\frac{47}{420}$, b) $\frac{126\mathrm{e}-335}{42}$, c) $\frac{18\sqrt{6}}{7}$, d) $\frac{9}{8}(\pi+2)$.

17. a) $T = \left[\frac{16}{15\pi}\sqrt{2cp}, \frac{16}{15\pi}\sqrt{2cq}, \frac{2c}{3}\right]$, b) $T = \left[\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right]$,

c) $T = \left[\frac{4}{3}, 1, 2\right]$, d) $T = \left[0, 0, \frac{a}{3}\right]$, e) $T = \left[\frac{54}{25}, \frac{28}{25}, \frac{112}{25}\right]$.

18. a) $T = \left[\frac{3}{8}\,a, \frac{3}{8}\,b, \frac{3}{8}\,c\right]$, b) $T = \left[\frac{2}{5}\,r, \frac{2}{5}\,r, \frac{2}{5}\,r\right]$, c) $T = [\alpha, \beta, \gamma]$,

d) $T = \left[0, 0, \frac{3}{4}\,r\cos^2\frac{\alpha}{2}\right]$, e) $T = \left[0, 0, \frac{3\pi r}{16\alpha}\,\sin\alpha\right]$.

19. a) $\frac{1}{2}\,\pi v r^4$, b) $\frac{4\pi R^6}{9}$, c) $\frac{\pi h r^4}{10}$, d) $\frac{1}{12}\,abc\,(b^2+c^2)$,

e) $\frac{1}{6}\,a^5$, f) $\frac{\pi a^6}{48}$, g) $\pi r^2 v\,(r^2/2 + a^2 + b^2)$.

20. a) $\frac{1}{2}$, b) 52, c) $\frac{3}{20}$, d) $\frac{7}{24}$, e) $\frac{3}{35}$, f) $\frac{2}{3}\,a^3(3\pi-4)$.

21. a) $\frac{1}{720}$, b) $9\ln 2$, c) $-\frac{1}{840}$, d) $2\mathrm{e}-5$.

22. a) $\frac{2^n h_1 h_2 \cdots h_n}{|\det(a_{ij})|}$ (použijte afinní transformaci $u_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$, $i = 1, \dots, n$, viz cvičení 5 ke kapitole 3),
    b) $\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!}$ (srovnejte příklad 4.6),
    c) $\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!!} \cdot 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (použijte dilataci (3.19) a sférické souřadnice (3.20) — srovnejte příklad 4.7).

23. Z verze Fubiniovy věty uvedené v lemmatu 3.47 vyplývá, že platí $\mathrm{m}_3(M) = \iiint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \Big(\iint\limits_{M_{(\cdot,\cdot,z)}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{m}_2(M_{(\cdot,\cdot,z)})\,\mathrm{d}z$ a analogicky $\mathrm{m}_3(N) = \int_a^b \mathrm{m}_2(N_{(\cdot,\cdot,z)})\,\mathrm{d}z$. Tudíž $\mathrm{m}_3(M) = \int_a^b k\,\mathrm{m}_2(N_{(\cdot,\cdot,z)})\,\mathrm{d}z = k\,\mathrm{m}_3(N)$.

24. Množina M leží mezi nadrovinami $x_{n+1} = 0$ a $x_{n+1} = v$. Uvažujme její řezy $M_{(\cdot,x_{n+1})}$, $0 \leqq x_{n+1} \leqq v$. Z rovnice $\lambda v = x_{n+1}$ plyne, že $\lambda = x_{n+1}/v$, tedy $M_{(\cdot,x_{n+1})} = \big\{[(1 - x_{n+1}/v)x_1, \dots, (1 - x_{n+1}/v)x_n] : [x_1, \dots, x_n] \in A\big\}$. Tudíž $M_{(\cdot,x_{n+1})}$ je afinním obrazem (konkrétně jde o dilataci — viz (3.19)) množiny A. Podle cvičení 5 ke kapitole 3 je proto každý řez měřitelná množina a platí $\mathrm{m}_n(M_{(\cdot,x_{n+1})}) = (1 - x_{n+1}/v)^n\,\mathrm{m}_n(A)$. Užitím verze Fubiniovy věty z lemmatu 3.47 dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}_{n+1}(M) &= \int\limits_M \cdots \int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n+1} = \int_0^v \Big(\int\limits_{M_{(\cdot,x_{n+1})}} \cdots \int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \Big)\,\mathrm{d}x_{n+1} = \\
&= \int_0^v \mathrm{m}_n(M_{(\cdot,x_{n+1})})\,\mathrm{d}x_{n+1} = \int_0^v \Big(1 - \frac{x_{n+1}}{v}\Big)^n \mathrm{m}_n(A)\,\mathrm{d}x_{n+1} = \\
&= \mathrm{m}_n(A) \Big[-\frac{v}{n+1} \Big(1 - \frac{x_{n+1}}{v}\Big)^{n+1} \Big]_0^v = \frac{\mathrm{m}_n(A)v}{n+1}.
\end{aligned}$$

25. Nejprve určíme vnitřek množiny M. Uvažujme zobrazení $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ dané vztahem $F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = [(1-\lambda)x_1, \dots, (1-\lambda)x_n, \lambda v]$. Pak F je diferencovatelné a pro jeho jakobián platí

$$J_F = \begin{vmatrix}
1-\lambda & 0 & \dots & 0 & -x_1 \\
0 & 1-\lambda & \dots & 0 & -x_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1-\lambda & -x_n \\
0 & 0 & \dots & 0 & v
\end{vmatrix} = (1-\lambda)^n v.$$

Množina $\mathring{A} \times (0,1)$ je otevřená v $\mathbb{R}^{n+1}$ a F je na ní regulární. Podle důsledku 3.37 je množina $F(\mathring{A} \times (0,1))$ otevřená a je částí M, takže $F(\mathring{A} \times (0,1)) \subseteq \mathring{M}$. Protože body uzávěru množiny M jsou limity konvergentních posloupností bodů této množiny, snadno se ověří, že

$$\overline{M} = \big\{[(1-\lambda)x_1, \dots, (1-\lambda)x_n, \lambda v] : [x_1, \dots, x_n] \in \overline{A},\ 0 \leqq \lambda \leqq 1\big\}.$$

Tudíž $h(M) \subseteq \overline{B} \cup C$, kde (připomeňme, že $B = A \times \{0\}$)

$$C = \left\{[(1-\lambda)x_1, \dots, (1-\lambda)x_n, \lambda v] : [x_1, \dots, x_n] \in h(A),\ 0 \leqq \lambda \leqq 1\right\}.$$

(Není těžké ověřit, že ve skutečnosti $F(\mathring{A} \times (0, 1)) = \mathring{M}$ a $h(M) = \overline{B} \cup C$, ale tento výsledek nebudeme potřebovat.) Protože množina $\overline{B}$ je omezená a je podmnožinou nadroviny $x_{n+1} = 0$, je podle cvičení 18 ke kapitole 2 měřitelná a $\mathrm{m}_{n+1}(\overline{B}) = 0$.
Nechť $R \subset \mathbb{R}^n$ je n-rozměrný nedegenerovaný interval. Uvažujme jehlan K s podstavou R a vrcholem V. Hranice kvádru R v $\mathbb{R}^n$ je sjednocením $2n$ degenerovaných n-rozměrných intervalů $H_1, \dots, H_{2n}$. Zavedeme-li množinu C analogickým způsobem jako výše, bude platit $C = C_1 \cup \dots \cup C_{2n}$, kde

$$C_i = \left\{[(1-\lambda)x_1, \dots, (1-\lambda)x_n, \lambda v] : [x_1, \dots, x_n] \in H_i,\ 0 \leqq \lambda \leqq 1\right\}.$$

$i = 1, \dots, 2n$. Každá množina C_i je omezená a je podmnožinou jisté nadroviny v $\mathbb{R}^{n+1}$, takže podle cvičení 18 ke kapitole 2 je měřitelná a $\mathrm{m}_{n+1}(\overline{C_i}) = 0$. To však znamená, že $\mathrm{m}_{n+1}(h(K)) = 0$. Podle analogie důsledku 1.41 pro obecné n je proto množina K měřitelná. Podle cvičení 24 k této kapitole platí $\mathrm{m}_{n+1}(K) = \mathrm{m}_n(R)v/(n+1)$.
Nyní již důkaz snadno dokončíme. Protože množina A je měřitelná v $\mathbb{R}^n$, podle zmíněného důsledku 1.41 je $\mathrm{m}_n(h(A)) = 0$. Podle analogie cvičení 17 ke kapitole 1 pro obecné n existují k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ n-rozměrné intervaly $R_1, \dots, R_k$ takové, že $\bigcup_{i=1}^{k} R_i \supseteq h(A)$ a $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{m}_n(R_i) < \varepsilon/v$. Nechť K_i je jehlan s podstavou R_i a vrcholem V, $i = 1, \dots, k$. Podle předchozího jsou množiny K_i měřitelné a $\mathrm{m}_{n+1}(K_i) = \mathrm{m}_n(R_i)v/(n+1)$. Z definice původně zavedené množiny C vyplývá, že $C \subseteq K_1 \cup \dots \cup K_k$, tudíž platí $\mathrm{m}_{n+1}(C) \leqq \mathrm{m}_{n+1}(K_1) + \dots + \mathrm{m}_{n+1}(K_k) = \mathrm{m}_n(R_1)v/(n+1) + \dots + \mathrm{m}_n(R_k)v/(n+1) < \varepsilon/(n+1) < \varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, musí být $\mathrm{m}_{n+1}(C) = 0$. Odtud $\mathrm{m}_{n+1}(h(M)) = 0$, takže podle důsledku 1.41 je množina M měřitelná.

Kapitola 5

Nevlastní vícerozměrné integrály

Integrály, které jsme zavedli v předchozích kapitolách, měly dvě podstatná omezení — integračním oborem byla omezená množina a integrand byla ohraničená funkce. Pro jednoduchý určitý Riemannův integrál se v základním kurzu zavádí zobecnění, tzv. nevlastní Riemannův integrál. Podobné rozšíření je možné udělat i pro vícerozměrné integrály. Omezíme se na dva případy — funkci s omezeným integračním oborem, která je neohraničená v okolí jednoho bodu, a funkci s neomezeným integračním oborem. V poznámce 5.27 se zmíníme o obecnější definici. Kvůli jednoduchosti výklad provedeme pro funkce dvou proměnných. Zobecnění na funkce většího počtu proměnných je snadné.

5.1. Nevlastní integrál z neohraničené funkce

Uvažujme funkci f definovanou na neprázdné množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

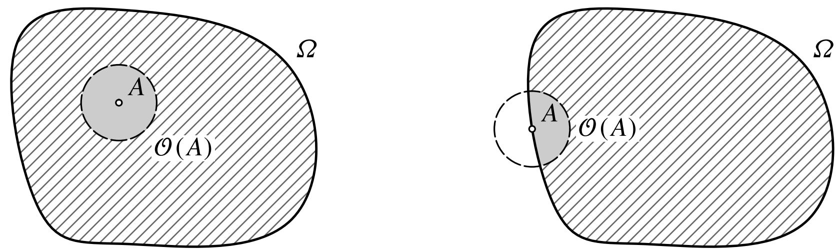
Definice 5.1. Bod $A \in \overline{\Omega}$ se nazývá *singulární bod* funkce f, jestliže f není ohraničená na žádné množině tvaru $\Omega \cap \mathscr{O}(A)$, kde $\mathscr{O}(A)$ je libovolné kruhové okolí bodu A.

Protože bod A nemůže být izolovaným bodem množiny Ω, jsou možné dva případy. Buď je A vnitřním bodem množiny Ω (obr. 5.1 a)), nebo je jejím hromadným hraničním bodem (obr. 5.1 b)); v druhém případě nemusí A ležet v množině Ω.

Definice 5.2. Řekneme, že posloupnost omezených množin $\{M_n\}$, $M_n \subseteq \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, se *smršťuje k bodu* A, jestliže:

i) Bod A je vnitřním bodem každé z množin M_n.
ii) Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{d}(M_n) = 0$.

Číslo $\mathrm{d}(M) = \sup\{\varrho(X, Y) : X, Y \in M\}$ je průměr množiny $M \subseteq \mathbb{R}^2$; přitom ϱ je eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^2$. Posloupnost $\{M_n\}$ nemusí být monotonní (nerostoucí resp.



a) Vnitřní bod b) Hraniční bod

Obr. 5.1: Singulární bod

klesající) vzhledem k inkluzi, tj. nemusí platit $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$, a množiny M_n nemusí být souvislé.

Dále učiníme o funkci f definované na omezené množině Ω a mající A za singulární bod následující předpoklad (není podstatné, zda je f definovaná v bodě A).

Předpoklad 5.3. Funkce f je integrovatelná na každé množině $\Omega \setminus M$, kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je libovolná měřitelná množina obsahující A ve svém vnitřku. (Z tohoto předpokladu plyne, že je množina Ω měřitelná — viz cvičení 1 k této kapitole.)

Nyní již můžeme zformulovat definici nevlastního integrálu.

Definice 5.4. Nechť funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující předpoklad 5.3.
Řekneme, že *nevlastní integrál* z funkce f *konverguje* na množině Ω, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega \setminus M_n} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = I$ pro libovolnou posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ smršťující se k bodu A. Pak píšeme

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = I.$$

V opačném případě, tj. pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál z funkce f na množině Ω *diverguje*.

Existence limity z předchozí definice ani její hodnota I tudíž *nesmí záviset* na volbě posloupnosti množin smršťující se k singulárnímu bodu A. Integrál ve smyslu definice 1.3 resp. 1.45 budeme v dalším textu pro odlišení nazývat *vlastní*. Podotkněme ještě, že obecně může limita z definice 5.4 záviset na výběru posloupnosti měřitelných množin smršťující se k bodu A. Situace je podobná jako v případě nevlastního integrálu na neomezené množině (viz odstavec 5.2, příklad 5.22 a jemu předcházející komentář).

Poznámka 5.5. Vzhledem k aditivitě vlastního integrálu vůči integračnímu oboru lze při vyšetřování konvergence nevlastního integrálu funkce f přes omezenou množinu Ω se singulárním bodem A nahradit Ω jinou vhodnou množinou Ω_1. Je-li A vnitřní bod Ω, lze za Ω_1 vzít libovolnou měřitelnou podmnožinu množiny Ω, pro niž je A vnitřní bod. Je-li A hraniční bod Ω, lze za Ω_1 vzít průnik Ω s libovolnou měřitelnou množinou, pro niž je A vnitřním bodem. Tím se sice obecně změní hodnota nevlastního integrálu, ale nezmění se jeho vlastnost „být konvergentní“ resp. „být divergentní“.

Naskýtá se přirozená otázka, co se stane, když postup z definice 5.4 použijeme na funkci f integrovatelnou na množině Ω, pro niž bod A není singulární. Odpověď dává následující lemma, podle kterého, stručně řečeno, počítáme-li vlastní integrál jako by šlo o nevlastní, dostaneme správný výsledek. (Jiná verze následujícího lemmatu je uvedena jako cvičení 2 k této kapitole.).

Lemma 5.6. *Nechť funkce f je integrovatelná na měřitelné množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Nechť posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ se smršťuje k bodu $A \in \overline{\Omega}$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega\setminus M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Podle předpokladu je funkce f integrovatelná na Ω, tedy existuje konstanta K taková, že $|f(x,y)| \leqq K$ pro každé $[x,y] \in \Omega$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost $\Omega \setminus (\Omega \setminus M_n) = \Omega \cap M_n$. Jelikož $\mathrm{d}(M_n) \to 0$ pro $n \to \infty$, bude $\mathrm{m}(M_n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Protože množiny $\Omega \cap M_n$ jsou měřitelné a $\Omega \cap M_n \subseteq M_n$, dostaneme $0 \leqq \mathrm{m}(\Omega \cap M_n) \leqq \mathrm{m}(M_n)$, takže $\mathrm{m}(\Omega \cap M_n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Odtud vyjde

$$\left|\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\Omega\setminus M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| = \left|\iint\limits_{\Omega\cap M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqq$$

$$\leqq \iint\limits_{\Omega\cap M_n} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \iint\limits_{\Omega\cap M_n} K\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K\,\mathrm{m}(\Omega\cap M_n) \to 0$$

pro $n \to \infty$, což dokazuje tvrzení. □

Následující výsledek ukazuje, že nevlastní integrál je (stejně jako vlastní integrál) lineární funkcí svého integrandu.

Věta 5.7. *Nechť funkce f, g jsou definované na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a A je jejich společný singulární bod. Nechť obě funkce splňují předpoklad 5.3.*

Jestliže nevlastní integrály $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a $\iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konvergují a α, β jsou libovolné konstanty, pak konverguje také integrál $\iint\limits_{\Omega} [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (pokud je vůbec nevlastní) a platí

$$\iint\limits_{\Omega} [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5.1}$$

Důkaz. Nechť $\{M_n\}$ je libovolná posloupnost měřitelných množin, která se smršťuje k bodu A. Podle předpokladů platí rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega\smallsetminus M_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega\smallsetminus M_n} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Z linearity vlastního integrálu vzhledem k integrandu (věta 1.49) plyne, že

$$\iint\limits_{\Omega\smallsetminus M_n} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \iint\limits_{\Omega\smallsetminus M_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \iint\limits_{\Omega\smallsetminus M_n} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Odtud limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega\smallsetminus M_n} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \iint\limits_{\Omega} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Pokud je $\iint\limits_{\Omega} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nevlastní, znamená to podle definice 5.4, že je konvergentní, protože posloupnost $\{M_n\}$ byla libovolná, a že platí rovnost (5.1). Vzhledem k lemmatu 5.6 je tato rovnost správná i v případě, že je zmíněný integrál vlastní. □

Poznámka 5.8. Z důkazu věty 5.7 a lemmatu 5.6 je zřejmé, že jestliže jeden z integrálů, např. $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, bude vlastní, bude integrál $\iint\limits_{\Omega} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (který je nevlastní, pokud je $\beta \neq 0$) konvergentní a bude platit rovnost (5.1).

Následující věta udává nutnou a postačující podmínku konvergence nevlastního integrálu pro případ, kdy je integrand nezáporná funkce.

Věta 5.9. *Nechť nezáporná funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega \smallsetminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující předpoklad 5.3.*

Pak nevlastní integrál $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je konvergentní právě tehdy, když existuje posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ smršťující se k bodu A taková, že číselná posloupnost mající členy $\iint\limits_{\Omega\smallsetminus M_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $n \in \mathbb{N}$, je ohraničená.

Důkaz. Nutnost podmínky je zřejmá. Dokážeme postačitelnost.

Předpokládejme, že existuje posloupnost množin $\{M_n\}$ smršťující se k bodu A taková, že číselná posloupnost se členy

$$\iint\limits_{\Omega\smallsetminus M_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.2}$$

je ohraničená.

1) Nejprve ukážeme, že existuje posloupnost množin $\{N_n\}$ smršťující se k bodu A, jež je klesající vzhledem k inkluzi a taková, že číselná posloupnost (5.2) (v níž

M_n nahradíme N_n) je konvergentní. Tuto posloupnost zkonstruujeme jako vybranou podposloupnost z $\{M_n\}$.

Položme $i_1 = 1$. Protože A je vnitřním bodem každé množiny M_n a $d(M_n) \to 0$ pro $n \to \infty$, musí existovat index $i_2 > i_1$ tak, že $M_{i_1} \supset M_{i_2}$. Obdobně najdeme index $i_3 > i_2$ tak, že $M_{i_2} \supset M_{i_3}$, atd. Pro každé n zvolme $N_n = M_{i_n}$ a označme $\Omega_n = \Omega \setminus N_n$. Posloupnost množin $\{\Omega_n\}$ je rostoucí. Protože dvojný integrál je aditivní vzhledem k integračnímu oboru a funkce f je nezáporná na Ω, platí $\iint\limits_{\Omega_{n+1}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega_n} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\Omega_{n+1}\setminus\Omega_n} f(x,y)\,dx\,dy \geqq \iint\limits_{\Omega_n} f(x,y)\,dx\,dy$ pro každé n. Tedy posloupnost se členy $\iint\limits_{\Omega\setminus N_n} f(x,y)\,dx\,dy$, $n \in \mathbb{N}$, je neklesající. Jelikož je vybraná z posloupnosti (5.2), je ohraničená, a tedy konvergentní (viz [7, věta 2.20]). Označme její limitu I.

2) Dokážeme, že pro libovolnou *nerostoucí* posloupnost měřitelných množin $\{L_n\}$, která se smršťuje k bodu A, platí

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega\setminus L_n} f(x,y)\,dx\,dy = I, \tag{5.3}$$

kde $I \neq \infty$ je limita určená v závěru části 1).

Protože posloupnost $\{L_n\}$ je nerostoucí, je posloupnost $\{\Omega \setminus L_n\}$ neklesající, takže vzhledem k nezápornosti f na Ω je číselná posloupnost se členy $\iint\limits_{\Omega\setminus L_n} f(x,y)\,dx\,dy$ neklesající.

Nechť $\{N_n\}$ je posloupnost z bodu 1). Podobně jako v předchozí části zkonstruujeme posloupnost množin $\{K_n\}$, vybranou z $\{N_n\}$ a takovou, že $K_n \subseteq L_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak s ohledem na $\iint\limits_{\Omega\setminus K_n} f(x,y)\,dx\,dy \geqq \iint\limits_{\Omega\setminus L_n} f(x,y)\,dx\,dy$ je posloupnost se členy $\iint\limits_{\Omega\setminus L_n} f(x,y)\,dx\,dy$, $n \in \mathbb{N}$, ohraničená. Protože je současně neklesající, je konvergentní. Označme její limitu I_1. Z předchozích nerovností limitním přechodem vyplývá, že $I_1 \leqq I$.

Záměnou posloupností $\{N_n\}$ a $\{L_n\}$ analogicky dostaneme, že $I \leqq I_1$. Tudíž platí rovnost (5.3).

3) Nakonec dokážeme, že rovnost (5.3) platí pro libovolnou (nikoliv nutně nerostoucí) posloupnost měřitelných množin $\{L_n\}$, která se smršťuje k bodu A.

Buď a hromadný bod posloupnosti nezáporných čísel $\iint\limits_{\Omega\setminus L_n} f(x,y)\,dx\,dy$, $n \in \mathbb{N}$ (viz [7, str. 32] — každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod). Pak $0 \leqq a \leqq +\infty$ a existuje podposloupnost $\{L_{k_n}\}$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega\setminus L_{k_n}} f(x,y)\,dx\,dy = a$.

Přitom lze předpokládat (po případném přechodu k podposloupnosti), že $\{L_{k_n}\}$ je nerostoucí. Z části 2) nyní vyplývá, že $a = I$. Připomeňme, že $I \neq \infty$.

Hromadný bod a byl libovolný, takže posloupnost $\iint\limits_{\Omega\setminus L_n} f(x,y)\,dx\,dy$, $n \in \mathbb{N}$, má jediný hromadný bod I. Tudíž je konvergentní (viz [7, věta 2.42]) a platí (5.3). Podle definice 5.4 je integrál $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ konvergentní. $\square$

V konkrétních případech obvykle vystačíme s následujícím důsledkem.

Důsledek 5.10. *Nechť nezáporná funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega \smallsetminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující předpoklad 5.3. Buď $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kruhů se středy v bodě A a poloměry r_n, přičemž posloupnost $\{r_n\}$ je klesající a $r_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Pak je integrál $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konvergentní právě tehdy, když je posloupnost $\iint\limits_{\Omega \smallsetminus K_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $n \in \mathbb{N}$, ohraničená.*

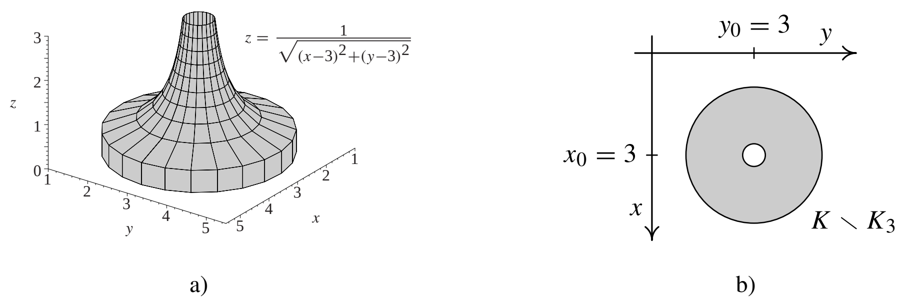
Příklad 5.11. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina, $A = [x_0, y_0]$ její vnitřní bod a α reálné číslo. Označme $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Dokažte, že nevlastní integrál $\iint\limits_{M} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}$ konverguje pro $0 < \alpha < 2$ a diverguje pro $\alpha \geqq 2$ (pro $\alpha \leqq 0$ jde o vlastní integrál).

Řešení. Bod A je pro $\alpha > 0$ zřejmě singulárním bodem integrandu $1/r^\alpha$, protože $1/r^\alpha \to +\infty$ pro $[x, y] \to [x_0, y_0]$. Podle poznámky 5.5 lze množinu M při vyšetřování konvergence nahradit kruhem K se středem A o dostatečně malém poloměru $R > 0$. Označme K_n kruh se středem v A a poloměrem $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{K_n\}$ se smršťuje k singulárnímu bodu A a pro každé $n \geqq n_0$, kde $n_0 = \lfloor 1/R \rfloor + 1$, je $K_n \subset K$.

Vypočítáme integrály $\iint\limits_{K \smallsetminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}$, $n \geqq n_0$. Protože množina $K \smallsetminus K_n$ je mezikružím se středem v bodě A s poloměry $1/n$ a R, použijeme transformaci T, která je složením transformace do polárních souřadnic a posunutí o vektor (x_0, y_0). Tedy $x = x_0 + \varrho \cos\varphi$, $y = y_0 + \varrho \sin\varphi$. Jakobián této transformace je $J_T = \varrho$. Množina $K \smallsetminus K_n$ je obrazem obdélníku $L_n = \langle 1/n, R\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$. Vyjde

$$\iint\limits_{K \smallsetminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \iint\limits_{L_n} \frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi}{\varrho^\alpha} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{1/n}^{R} \varrho^{1-\alpha}\,\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \begin{cases} 2\pi\left[\frac{\varrho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{1/n}^{R} = \frac{2\pi}{2-\alpha}(R^{2-\alpha} - n^{\alpha-2}) & \text{pro } \alpha \neq 2, \\ 2\pi[\ln\varrho]_{1/n}^{R} = 2\pi(\ln R + \ln n) & \text{pro } \alpha = 2. \end{cases}$$



Obr. 5.2

Odtud je vidět, že pro $0 < \alpha < 2$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{K \setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = 2\pi R^{2-\alpha}/(2-\alpha)$, zatímco pro $\alpha \geqq 2$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{K \setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = +\infty$. Protože integrand $1/r^\alpha$ je kladná funkce, podle důsledku 5.10 integrál konverguje právě pro $0 < \alpha < 2$.

Na obr. 5.2 je znázorněno těleso omezené shora grafem funkce $1/r^\alpha$ a zdola rovinou $z = 0$ na mezikruží $K \setminus K_3$ pro $\alpha = 1$, $x_0 = y_0 = 3$ a $R = 2$. ▲

Poznámka 5.12. Analogicky lze dokázat zobecnění výsledku z příkladu 5.11:

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $A = [y_1, \dots, y_n]$ její vnitřní bod a α reálné číslo. Označme $r = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$. Pak nevlastní integrál $\int\limits_M \cdots \int \frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}{r^\alpha}$ konverguje pro $0 < \alpha < n$ a diverguje pro $\alpha \geqq n$ (pro $\alpha \leqq 0$ jde o vlastní integrál).

Při výpočtu se použijí sférické souřadnice (3.20) — srovnejte příklad 3.32. Je-li speciálně $M = K$, kde K je n-rozměrná koule se středem v bodě A a poloměrem $R > 0$, vyjde pro $\alpha < n$ konvergentní integrál s hodnotou

$$\int\limits_K \cdots \int \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}{r^\alpha} = \frac{R^{n-\alpha}}{(n-\alpha)(n-2)!!} \cdot 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Pro $n = 1$ je třeba v předchozím vzorci položit $(-1)!! = 1$. Vzorec platí i pro $\alpha \leqq 0$, kdy jde o vlastní integrál — srovnejte s výsledkem příkladu 3.32, v němž je vzhledem k odlišnému označení integrandu třeba nahradit číslo α číslem $-\alpha/2$.

Při rozhodování o konvergenci nevlastních integrálů nám může pomoci následující kritérium, které je obdobou známého kritéria pro nevlastní jednorozměrné Riemannovy integrály (viz [20, str. 45]).

Věta 5.13 (Srovnávací kritérium). *Nechť nezáporné funkce f, g jsou definované na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a A je jejich společný singulární bod. Nechť obě funkce splňují předpoklad 5.3. Předpokládejme, že platí $f(x,y) \leqq g(x,y)$ pro každé $[x,y] \in \Omega$.*

i) *Jestliže integrál $\iint\limits_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konverguje, konverguje i integrál $\iint\limits_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.*

ii) *Jestliže integrál $\iint\limits_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ diverguje, diverguje i integrál $\iint\limits_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.*

Důkaz. Tvrzení vyplývá bezprostředně z věty 5.9 a věty 1.49, část d). □

Ve zbývající části tohoto oddílu se budeme zabývat vztahem mezi konvergencí integrálů z funkcí f a $|f|$.

Lemma 5.14. *Nechť funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující předpoklad 5.3. Jestliže nevlastní integrál $\iint\limits_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konverguje, pak konverguje i integrál $\iint\limits_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.*

Důkaz. Položme $g = |f| - f$. Pak platí $0 \leqq g \leqq 2|f|$ na Ω. Ze srovnávacího kritéria 5.13 a předpokladu, že integrál $\iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dx dy$ konverguje, plyne, že rovněž integrál $\iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dx dy$ konverguje. Protože $f = |f| - g$, vyplývá z věty 5.7, že integrál $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx dy$ je konvergentní. □

Věta 5.15. *Nechť funkce f, g jsou definované na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a A je jejich společný singulární bod. Nechť obě funkce splňují předpoklad 5.3. Předpokládejme, že funkce g je nezáporná, $|f(x,y)| \leqq g(x,y)$ pro každé $[x,y] \in \Omega \setminus \{A\}$ a integrál $\iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dx dy$ je konvergentní. Pak je konvergentní i integrál $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx dy$.*

Důkaz. Tvrzení plyne bezprostředně z věty 5.13 a lemmatu 5.14. □

Definice 5.16. Řekneme, že nevlastní integrál $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx dy$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje integrál $\iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dx dy$.

Z lemmatu 5.14 vyplývá, že každý absolutně konvergentní integrál je rovněž konvergentní. Ukážeme, že žádné jiné konvergentní integrály než absolutně konvergentní neexistují. To vyplývá z následující věty, v níž se dokazuje opačné tvrzení k tvrzení lemmatu 5.14.

Věta 5.17. *Nechť funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující předpoklad 5.3. Jestliže nevlastní integrál $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx dy$ konverguje, pak konverguje i integrál $\iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dx dy$.*

Důkaz. Připusťme, že integrál $\iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dx dy$ diverguje. Označme $f^+ = (|f| + f)/2$ a $f^- = (|f| - f)/2$ kladnou a zápornou část funkce f (srovnejte cvičení 29 ke kapitole 1). Zřejmě f^+ a f^- jsou nezáporné a $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Z věty 5.7 vyplývá, že oba integrály $\iint\limits_{\Omega} f^+(x,y)\,dx dy$, $\iint\limits_{\Omega} f^-(x,y)\,dx dy$ musí být divergentní.

Zvolme libovolnou klesající (vzhledem k inkluzi) posloupnost uzavřených soustředných kruhů $\{\widehat{K}_n\}$ majících střed v bodě A, která se smršťuje k bodu A, tj. $d(\widehat{K}_n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Označme $K_n = \widehat{K}_n \cap \Omega$. Pak $\Omega \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$. Protože $\{\widehat{K}_n\}$ se smršťuje k bodu A, $\Omega \setminus \widehat{K}_n = \Omega \setminus K_n$, funkce f^+ je nezáporná a její integrál přes Ω diverguje, musí platit

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega \setminus K_n} f^+(x,y)\,dx dy = +\infty. \tag{5.4}$$

Zvolme pevně $n \in \mathbb{N}$. Pak pro přirozené $m > n$ platí $\Omega \setminus K_m = (K_n \setminus K_m) \cup (\Omega \setminus K_n)$, přičemž $(K_n \setminus K_m) \cap (\Omega \setminus K_n) = \emptyset$. Platí tudíž $K_n \setminus K_m = (\Omega \setminus K_m) \setminus (\Omega \setminus K_n)$.

Jelikož rozdíl měřitelných množin je opět měřitelná množina, plyne z předpokladu 5.3, že množina $K_n \setminus K_m$ je pro každé přirozené číslo $m > n$ měřitelná. Z (5.4) nyní vyplývá, že $\lim\limits_{m\to\infty} \iint\limits_{K_n \setminus K_m} f^+(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = +\infty$. Lze tedy předpokládat (případným přechodem k podposloupnosti), že posloupnost $\{K_n\}$ je zvolena tak, že platí

$$\iint\limits_{K_n \setminus K_{n+1}} f^+(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y > \iint\limits_{\Omega \setminus K_n} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + n. \tag{5.5}$$

Zvolme pevně $n \in \mathbb{N}$. Buď R obdélník takový, že $R \supset M_n$, kde $M_n = K_n \setminus K_{n+1}$. Z definice vlastního dvojného integrálu a nerovnosti (5.5) plyne existence dělení D obdélníku R s dílky R_i, $i \in J = \{1, \dots, k\}$, takového, že

$$\begin{aligned}\iint\limits_{M_n} f^+(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{R} (\chi_{M_n} f^+)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \\ \geqq s(D, \chi_{M_n} f^+) > \iint\limits_{\Omega \setminus K_n} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + n.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Označme $u_i = \inf\{(\chi_{M_n} f^+)(x,y) : [x,y] \in R_i\}$ pro $i \in J$. Dále položme $J_1 = \{i \in J : u_i > 0\}$. Pro $i \in J_1$ je $R_i \subseteq M_n$. Označme $G_n = \bigcup\limits_{i \in J_1} R_i \subseteq M_n$. Na množině G_n platí $f = f^+$.

Uvažujme nyní funkci $\chi_{G_n} f^+$. Označme $v_i = \inf\{(\chi_{G_n} f^+)(x,y) : [x,y] \in R_i\}$, $i \in J$. Pro $i \in J_1$ platí $u_i = v_i > 0$ a pro $i \in J \setminus J_1$ platí $u_i = v_i = 0$, tudíž $s(D, \chi_{M_n} f^+) = s(D, \chi_{G_n} f^+)$. Odtud a z (5.6) dostaneme

$$\begin{aligned}\iint\limits_{G_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{G_n} f^+(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{R} (\chi_{G_n} f^+)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \\ \geqq s(D, \chi_{G_n} f^+) = s(D, \chi_{M_n} f^+) > \iint\limits_{\Omega \setminus K_n} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + n.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Zřejmě platí

$$\iint\limits_{\Omega \setminus K_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq - \iint\limits_{\Omega \setminus K_n} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x. \tag{5.8}$$

Označme $H_n = (\Omega \setminus K_n) \cup G_n$. Zřejmě $H_n \subseteq \Omega \setminus K_{n+1}$, odkud plyne $K_{n+1} \subseteq \Omega \setminus H_n$. Protože množiny $\Omega \setminus K_n$ a G_n jsou disjunktní, dostaneme sečtením (5.7) a (5.8), že

$$\iint\limits_{H_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y > n. \tag{5.9}$$

Protože n bylo zvoleno libovolně, platí nerovnost (5.9) pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Položme $P_n = (\Omega \setminus H_n) \cup (\widehat{K}_n \setminus \Omega)$. Pak platí $\Omega \setminus P_n = H_n$ a $\widehat{K}_n \supseteq P_n \supseteq \widehat{K}_{n+1}$. To znamená, že A je vnitřním bodem P_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\mathrm{d}(P_n) \to 0$ pro $n \to \infty$, takže posloupnost $\{P_n\}$ se smršťuje k bodu A. Protože integrál z funkce f podle předpokladu konverguje na Ω, musí platit

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega \setminus P_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{H_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I,$$

kde $I \in \mathbb{R}$, což není možné vzhledem k nerovnostem (5.9). Předpoklad, že integrál $\iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ diverguje, tedy vede ke sporu, takže tento integrál musí konvergovat. □

Poznámka 5.18. Jak již bylo řečeno, analogicky lze vybudovat nevlastní n-rozměrné integrály z neohraničené funkce přes omezené množiny pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Tyto integrály jsou tzv. *absolutně konvergentní*, tj. integrál z funkce f konverguje právě tehdy, když konverguje integrál z $|f|$.

V základním kurzu se zavádí nevlastní Riemannův integrál funkcí jedné proměnné (viz [20, str. 43]). Tento integrál však *není absolutně konvergentní*, existují funkce, jejichž integrál konverguje, avšak integrál jejich absolutní hodnoty je divergentní. Pro $n = 1$ máme tedy dva různé pojmy nevlastního integrálu, které dávají různé třídy funkcí majících konvergentní integrály. Nevlastní integrál v základním kurzu se zavádí jen na intervalech. Např. je-li b jediný singulární bod funkce f na $\Omega = \langle a, b)$, definuje se $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$. Tedy množiny smršťující se k bodu b jsou pouze intervaly tvaru $K_c = (c, b)$, takže $\Omega \setminus K_c = \langle a, c\rangle$ jsou opět intervaly, tj. souvislé množiny (jiné souvislé množiny než intervaly v $\mathbb{R}$ neexistují). V definici 5.4 se však souvislost množin $\Omega \setminus M_n$ nepředpokládá. K rozdílu mezi těmito pojmy se ještě vrátíme v příkladu 5.25.

Dalo by se očekávat, že pro $n \geqq 2$ bude situace obdobná a že požadavek souvislosti množin v definici 5.4 povede na jinou množinu funkcí majících konvergentní integrál. Tak tomu ale není. Obecně není možné požadovat souvislost množin $\Omega \setminus M_n$. Např. je-li počátek singulárním bodem funkce f na množině $\Omega = (K_1 \setminus K_2) \cup (K_3 \setminus K_4) \cup \cdots$, kde K_n je kruh se středem v počátku a poloměrem $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, nelze najít smršťující posloupnost $\{M_n\}$ tak, aby množiny $\Omega \setminus M_n$ byly souvislé. Pokud je ovšem singulární bod vnitřním bodem množiny Ω, takže lze vzhledem k poznámce 5.5 předpokládat, že Ω je kruh, je možné uvažovat pouze souvislé množiny $\Omega \setminus M_n$. I pak však věta 5.17 zůstane v platnosti. Z jejího důkazu je totiž vidět, že obdélníky R_i tvořící množinu G_n lze spojit úzkými „pásky“ s mezikružím $\Omega \setminus K_n$ tak, aby zůstala zachovaná nerovnost (5.9). Pak budou množiny H_n souvislé, přesto obdržíme stejný spor.

5.2. Nevlastní integrál na neomezené množině

Pro každé $r > 0$ označme $K(r)$ kruh se středem v počátku a poloměrem r.

Definice 5.19. Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ neomezená množina. Řekneme, že posloupnost omezených množin $\{M_n\}$, $M_n \subseteq \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, *vyčerpává množinu* Ω, jestliže:

i) Platí $M_n \subset \Omega$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
ii) Ke každému $r > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geqq m$ platí $\Omega \cap K(r) \subset M_n$

Posloupnost $\{M_n\}$ nemusí být monotonní (neklesající resp. rostoucí) vzhledem k inkluzi, tj. nemusí platit $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$, a množiny M_n nemusí být souvislé.

Uvažujme funkci f definovanou na neomezené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. O funkci f učiníme následující předpoklad.

Předpoklad 5.20. Funkce f je integrovatelná na každé (omezené) měřitelné množině $M \subset \Omega$.

Nyní již můžeme zformulovat definici nevlastního integrálu.

Definice 5.21. Nechť funkce f je definovaná na neomezené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Nechť je splněn předpoklad 5.20.
Řekneme, že *nevlastní integrál* z funkce f *konverguje* na množině Ω, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{M_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I$ pro libovolnou posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$, která vyčerpává množinu Ω. Pak píšeme

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I.$$

V opačném případě, tj. pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál z funkce f na množině Ω *diverguje*.

Existence limity z předchozí definice ani její hodnota I tudíž *nesmí záviset* na volbě posloupnosti množin vyčerpávající Ω. Následující příklad ukazuje, že limita z definice 5.21 obecně může záviset na výběru posloupnosti množin vyčerpávající Ω.

Příklad 5.22. Ukažte, že nevlastní integrál $\iint\limits_{\Omega} \sin(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$, diverguje.

Řešení. Nalezneme dvě vyčerpávající posloupnosti $\{K_n\}$, $\{M_n\}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{K_n} \sin(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \neq \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{M_n} \sin(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tím bude dokázáno, že daný integrál diverguje.

Označme $K_R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq R^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$, $M_a = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq a\}$ pro $R > 0$, resp. $a > 0$. Pak transformací do polárních souřadnic dostaneme

$$\iint\limits_{K_R} \sin(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R \varrho \sin \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{-\cos \varrho^2}{2} \right]_0^R = \frac{\pi}{4}(1 - \cos R^2),$$

takže limita $\lim\limits_{R\to\infty} \iint\limits_{K_R} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ neexistuje. Naproti tomu

$$\lim_{a\to\infty} \iint\limits_{M_a} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{a\to\infty} \iint\limits_{M_a} (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \lim_{a\to\infty} \left(\int_0^a \sin x^2\,\mathrm{d}x \int_0^a \cos y^2\,\mathrm{d}y \right) + \lim_{a\to\infty} \left(\int_0^a \cos x^2\,\mathrm{d}x \int_0^a \sin y^2\,\mathrm{d}y \right) =$$
$$= 2 \int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x \int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},$$

neboť pro *Fresnelovy*[1] integrály $\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x$ platí $\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ (viz např. [15], příklad 2 na str. 340 v kapitole VIII, nebo [16], cvičení 23 v kapitole 5). Přitom posloupnosti M_n, K_n, kde $n \in \mathbb{N}$, jsou posloupnosti množin vyčerpávající Ω. ▲

Nyní je možné přenést na tento typ nevlastního integrálu všechna tvrzení z oddílu 5.1. Zejména platí, že každý integrál konverguje absolutně. Důkazy jsou téměř analogické, takže je nebudeme uvádět.

Příklad 5.23. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je vnějšek otevřeného kruhu se středem v bodě $[x_0, y_0]$ a poloměrem $R > 0$ a α je reálné číslo. Označme $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Dokažte, že nevlastní integrál $\iint\limits_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 2$ a diverguje pro $\alpha \leqq 2$.

Řešení. Výpočet bude podobný jako v příkladu 5.11. Označme K_n mezikruží se středem v bodě $A = [x_0, y_0]$, vnitřním poloměrem R a vnějším poloměrem n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq n_0$, kde $n_0 = \lfloor R \rfloor + 1$. Posloupnost $\{K_n\}$ zřejmě vyčerpává množinu M.

Vypočítáme integrály $\iint\limits_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}$, $n \geqq n_0$. Protože množina K_n je mezikružím se středem v bodě A s poloměry R a n, použijeme transformaci T, která je složením transformace do polárních souřadnic a posunutí o vektor (x_0, y_0). Tedy $x = x_0 + \varrho\cos\varphi$, $y = y_0 + \varrho\sin\varphi$. Jakobián této transformace je $J_T = \varrho$. Množina K_n je obrazem obdélníku $L_n = \langle R, n\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$. Vyjde

$$\iint\limits_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \iint\limits_{L_n} \frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi}{\varrho^\alpha} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_R^n \varrho^{1-\alpha}\,\mathrm{d}\varrho =$$
$$= \begin{cases} 2\pi \left[\frac{\varrho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_R^n = \frac{2\pi}{2-\alpha}(n^{2-\alpha} - R^{2-\alpha}) & \text{pro } \alpha \neq 2, \\ 2\pi[\ln\varrho]_R^n = 2\pi(\ln n - \ln R) & \text{pro } \alpha = 2. \end{cases}$$

Odtud je vidět, že pro $\alpha > 2$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = 2\pi R^{2-\alpha}/(\alpha-2)$, zatímco pro $\alpha \leqq 2$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = +\infty$. Protože integrand $1/r^\alpha$ je kladná funkce, podle analogie důsledku 5.10 integrál konverguje právě pro $\alpha > 2$. ▲

[1] **Augustin Jean Fresnel** (1788–1827) (čti frenel) — francouzský matematik, fyzik a inženýr.

Poznámka 5.24. Analogicky lze dokázat zobecnění výsledku z příkladu 5.23:

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je vnějšek n-rozměrné koule se středem v bodě $A = [y_1, \dots, y_n]$ a poloměrem $R > 0$. Označme $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$. Pak nevlastní integrál $\underset{M}{\int \cdots \int} \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}{r^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > n$ a diverguje pro $\alpha \leqq n$.

Při výpočtu se použijí sférické souřadnice (3.20) — srovnejte příklad 3.32. Pro $\alpha > n$ vyjde

$$\underset{M}{\int \cdots \int} \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}{r^\alpha} = \frac{R^{n-\alpha}}{(\alpha - n)(n-2)!!} \cdot 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Pro $n = 1$ je třeba v předchozím vzorci položit $(-1)!! = 1$.

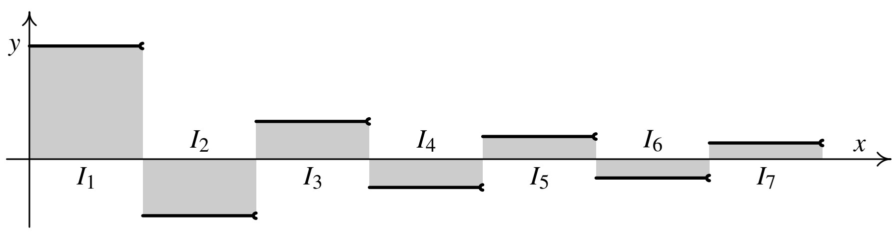
Příklad 5.25. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $I_n = \langle n-1, n)$. Definujme funkci f na intervalu $\langle 0, \infty)$ vztahem $f(x) = (-1)^{n-1}/n$ pro $x \in I_n$ (obr. 5.3). Rozhodněte, zda integrál $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje:

1) jako nevlastní integrál zaváděný v základním kurzu pomocí $\lim\limits_{b \to \infty} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) jako nevlastní integrál zavedený v definici 5.21.

Řešení. Položme $g = |f|$, $h = f/|f|$; pak $f(x) = g(x)h(x)$, $x \geqq 0$. Platí $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$, $0 \leqq \int_0^b h(x)\,\mathrm{d}x \leqq 1$ pro každé $b \geqq 0$. Podle Dirichletova kritéria (viz [20, str, 46]) tudíž integrál $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty g(x)h(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje jako nevlastní integrál zaváděný v základním kurzu. Dále funkce $F(b) = \int_0^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ je rostoucí na $\langle 0, \infty)$ a pro $n \in \mathbb{N}$ je $\int_0^n |f(x)|\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, což je n-tý částečný součet harmonické řady, která diverguje. Proto $\lim\limits_{b \to \infty} F(b) = \infty$. Konvergence je tedy neabsolutní, což již znamená, že nevlastní integrál ve smyslu definice 5.21 diverguje. I když je řešení příkladu úplné, posuďme ještě existenci a hodnotu limit z definice 5.21 pro některé posloupnosti, které vyčerpávají interval $\langle 0, \infty)$.

Zvolme nejprve $M_n = I_1 \cup \dots \cup I_n = \langle 0, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí $\int_{M_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. To je n-tý částečný součet alternující řady, která podle Leibnizova kritéria konverguje (viz [8, str. 23]; její součet je $\ln 2$, což není



Obr. 5.3

podstatné — ověření lze provést např. pomocí mocninných řad). Řada konverguje neabsolutně, protože řada z absolutních hodnot jejích členů je harmonická řada, která je divergentní.

Označme $a_n = (-1)^{n-1}/n$, $n \in \mathbb{N}$. Podle Riemannovy věty (viz [8, str. 30]) existuje takové přerovnání $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ této řady, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \infty$. Zvolme $N_n = I_{k_1} \cup \dots \cup I_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že posloupnost $\{N_n\}$ vyčerpává interval $\langle 0, \infty)$. Buď $r > 0$ libovolné. Označme $m = \lfloor r \rfloor + 1$. Pak existují indexy $k_{s_1}, \dots, k_{s_m}$ takové, že $I_1 = I_{k_{s_1}}, \dots, I_m = I_{k_{s_m}}$. Položme $p = \max\{s_1, \dots, s_m\}$. Pro každé $n \geqq p$ je $N_n \supset \langle 0, r\rangle$. Přitom platí $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{N_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} (a_{k_1} + \dots + a_{k_n}) = \infty$.

Podobně lze vzhledem k Riemannově větě najít vyčerpávající posloupnosti takové, že limita příslušných integrálů z funkce f je rovna libovolnému předem danému číslu I, resp. že tato limita vůbec neexistuje. Členy takových vyčerpávajících posloupností jsou ovšem nesouvislé množiny (na přímce). ▲

Poznámka 5.26.

1) V definicích 5.4 a 5.21 jsme předpokládali, že funkce má buď jediný singulární bod, nebo nemá žádný singulární bod a integrační obor je neomezený. Analogicky je možné zavést integrál v případě libovolného konečného počtu singulárních bodů a případně současně neomezeného integračního oboru. K tomu stačí rozdělit integrační obor na části tak, aby přesně jedna z nich byla neomezená a neobsahovala žádný singulární bod a ostatní byly omezené a obsahovaly po jednom singulárním bodu; přitom integrované funkce v těchto částech musí splňovat předpoklady 5.3 resp. 5.20. Výsledný integrál bude konvergentní právě tehdy, když budou konvergentní všechny integrály na těchto částech; v tom případě bude roven jejich součtu. Definice je korektní, protože výsledek nezávisí na konkrétním rozkladu, což plyne z aditivity vlastního integrálu vzhledem k integračnímu oboru.
2) Pro jednorozměrný Riemannův nevlastní integrál se zavádí pojem *hlavní hodnoty* (viz např. [13] poznámka 3.15 v kapitole 3). Obdobou pro vícerozměrné nevlastní integrály je požadavek, že limity v definicích 5.4 a 5.21 existují pro monotónní (vzhledem k inkluzi) posloupnosti soustředných kruhů resp. mezikruží.

Poznámka 5.27. V aplikacích se setkáváme s integrály majícími nekonečně mnoho singulárních bodů, které vyplňují např. nějakou křivku nebo obecněji nadplochu. Takovým je např. integrál z příkladu 4.9, kde množina singulárních bodů vyplňuje povrch S_{n-2} $(n-1)$-rozměrné koule K_{n-1}. Srovnejte též poznámku 4.10. Uvedeme nyní, jakým způsobem je možné zobecnit definici nevlastního (vícerozměrného) integrálu na takové případy (viz [27, str. 154]).

1) Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Řekneme, že posloupnost měřitelných množin $\{M_k\}$, neklesající vzhledem k inkluzi, *vyčerpává* Ω, jestliže $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k = \Omega$.
2) Buď f funkce definovaná na celém Ω. Řekneme, že *nevlastní integrál* funkce f na množině Ω *konverguje*, právě když existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že pro libovolnou

posloupnost $\{M_k\}$, která vyčerpává množinu Ω a je taková, že f je integrovatelná na každé množině M_k, platí $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{M_k}\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = I$. (Předpokládáme, že alespoň jedna taková posloupnost existuje.) Pak klademe

$$\int\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = I.$$

Pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál *diverguje*.

3) Pokud je množina Ω jordanovsky měřitelná a funkce f je na ní riemannovsky integrovatelná, je nevlastní integrál roven vlastnímu integrálu — viz cvičení 2 k této kapitole.
4) O takto definovaném nevlastním integrálu je možné dokázat všechna tvrzení z oddílu 5.1 resp. 5.2. Důkazy jsou vesměs analogické. Zejména platí:
   a) Ke konvergenci integrálu z nezáporné funkce je nutné a stačí, aby existovala alespoň jedna vyčerpávající posloupnost $\{M_k\}$ taková, že číselná posloupnost integrálů $\int\limits_{M_k}\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$, $k\in\mathbb{N}$, je ohraničená (viz cvičení 4 k této kapitole).
   b) Platí srovnávací kritérium a z absolutní konvergence plyne konvergence.
   c) Z konvergence plyne absolutní konvergence (viz cvičení 5 k této kapitole).
5) Pro nevlastní integrály (jak pro předchozí typy, tak pro toto zobecnění) je možné dokázat za jistých předpokladů Fubiniovu větu a větu o transformaci integrálu (detaily viz [2, 10, 27]). Zhruba lze říci následující (formulace jsou kvůli jednoduchosti pro dvojný integrál):
   i) Pokud jde o Fubiniovu větu, lze přechodem k charakteristické funkci $\chi_M f$ vždy předpokládat, že integračním oborem je $\mathbb{R}^2$. Je-li integrand nezáporný, konvergence dvojnásobného integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\big)\,\mathrm{d}x$ zaručuje konvergenci dvojného integrálu $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; v tom případě pak platí rovnost

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5.10}$$

   V případě integrandu majícího hodnoty libovolných znamének konvergence dvojnásobného integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\big)\,\mathrm{d}x$ zaručuje konvergenci integrálu $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a platnost rovnosti (5.10).

   ii) Pokud jde o substituci, z konvergence integrálu $\iint\limits_{T(A)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $A\subseteq\mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $T\colon A\to T(A)$ je difeomorfismus, plyne konvergence integrálu $\iint\limits_{A}(f\circ T)(u,v)|J_T(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$; oba integrály jsou si pak rovny. Často se stává, že druhý integrál je vlastní.

Cvičení

1. Dokažte, že předpoklad 5.3 zaručuje, že množina Ω v něm vystupující je měřitelná.

2. Nechť $\{M_k\}$ je neklesající posloupnost měřitelných množin v $\mathbb{R}^n$ taková, že množina $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$ je měřitelná. Nechť funkce f je integrovatelná na M. Dokažte, že pak platí:

   a) $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{m}_n(M_k) = \mathrm{m}_n(M)$.

   b) $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{M_k}\cdots\int f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int\limits_{M}\cdots\int f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$.

3. Nechť $\{N_k\}$ je posloupnost po dvou disjunktních měřitelných množin v $\mathbb{R}^n$ taková, že množina $N = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N_k$ je měřitelná. Nechť funkce f je integrovatelná na N. Dokažte, že pak platí:

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}_n(N_k) = \mathrm{m}_n(N)$.

   b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{N_k}\cdots\int f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int\limits_{N}\cdots\int f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$.

4. Dokažte tvrzení 4 a) z poznámky 5.27.

5. Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť funkce f, která je definovaná na Ω, je integrovatelná na každé kompaktní měřitelné podmnožině množiny Ω. Jestliže nevlastní integrál z funkce f přes množinu Ω konverguje (ve smyslu poznámky 5.27), pak konverguje také nevlastní integrál z funkce $|f|$ přes Ω. Dokažte.

6. Dokažte, že integrál ze cvičení 13 ke kapitole 2, který je nevlastní pro $a < 0$, je konvergentní, právě když $-n < a < 0$, a pro tato a najděte jeho hodnotu.

7. Vypočtěte nevlastní dvojný integrál dané funkce přes danou množinu Ω:

   a) $\iint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\qquad \Omega = \langle 0, +\infty)^2$,

   b) $\iint\limits_{\Omega} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\qquad \Omega\colon 0 < x^2 + y^2 \leqq x$,

c) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt[3]{xy - x - y + 1}}\,,$ $\quad \Omega = \big(\langle 0, 1) \cup (1, 28\rangle\big)^2,$

d) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\,,$ $\quad \Omega\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ a > 0,\ b > 0,$

e) $\displaystyle\iint_{\Omega} \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad \Omega\colon 0 < y \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq \sqrt{x},$

f) $\displaystyle\iint_{\Omega} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad \Omega\colon 0 < x^2 + y^2 \leqq a,\ a > 0,$

⋆g) $\displaystyle\iint_{\Omega} \ln\sin(x - y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad \Omega\colon 0 < y < x < \pi,$

h) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1 + x^2 + y^2}\,,$

i) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + a^2)^2}\,,$ $\quad \Omega = \langle 0, +\infty)^2,\ a > 0,$

j) $\displaystyle\iint_{\Omega} \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad \Omega\colon 0 \leqq x \leqq y,$

k) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad a > 0,\ b > 0,$

l) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-|x|-|y|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

m) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p y^q}\,,$ $\quad \Omega\colon xy \geqq 1,\ x \geqq 1,\ p > 0,\ q > 0,$

n) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x + y)^p}\,,$ $\quad \Omega\colon x + y \geqq 1,\ 0 \leqq x \leqq 1,\ p > 0,$

⋆o) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4 + y^2}\,,$ $\quad \Omega\colon y \geqq x^2 + 1,$

p) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

q) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cos(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

r) $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

⋆s) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\qquad \Omega: 0 < x^2+y^2 \leqq 2ax,\ a > 0.$

8. Vypočtěte nevlastní trojný resp. n-rozměrný integrál dané funkce přes danou množinu Ω:

a) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^7},$ $\qquad \Omega = \langle 0, +\infty)^3,$

b) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \ln(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\qquad \Omega: 0 < x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,\ a > 0,$

c) $\displaystyle\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$

d) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{xyz} x^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ $\qquad \Omega: 0 \leqq x \leqq 1/yz,\ 1 \leqq y \leqq +\infty,$
$1 \leqq z \leqq +\infty,$

e) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p y^q z^r},$ $\qquad \Omega = (0, 1\rangle^3,\ p > 0,\ q > 0,\ r > 0,$

f) $\displaystyle\int\cdots\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$

g) $\displaystyle\int\cdots\int\limits_{\Omega} \ln(x_1^2+\cdots+x_n^2)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$ $\qquad \Omega: 0 < x_1^2+\cdots+x_n^2 \leqq a^2,\ a > 0.$

9. Vypočtěte gravitační potenciál U homogenní koule $K: x^2+y^2+z^2 \leqq R^2$ o hustotě ρ a poloměru $R > 0$ v libovolném bodě $A = [x_0, y_0, z_0]$. (Gravitační potenciál je dán vztahem $U(x_0, y_0, z_0) = \iiint\limits_K \frac{G\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$, kde G je gravitační konstanta. Jedná se vlastně o potenciální energii hmotného bodu $[x_0, y_0, z_0]$ o jednotkové hmotnosti v gravitačním poli koule K.)

10. Vypočtěte intenzitu $\boldsymbol{g}$ gravitačního pole homogenní koule $K: x^2+y^2+z^2 \leqq R^2$ o hustotě ρ a poloměru $R > 0$ v libovolném bodě $A = [x_0, y_0, z_0]$. (Intenzita $\boldsymbol{g}(x_0, y_0, z_0) = (g_1, g_2, g_3)$ je dána vztahy

$$g_1 = \iiint\limits_K \frac{G\rho(x-x_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^3}}, \qquad g_2 = \iiint\limits_K \frac{G\rho(y-y_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^3}},$$

$$g_3 = \iiint\limits_K \frac{G\rho(z-z_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^3}},$$

kde G je gravitační konstanta. Jedná se vlastně o sílu, kterou přitahuje koule K hmotný bod $[x_0, y_0, z_0]$ o jednotkové hmotnosti.)

11. Vypočtěte gravitační potenciál U (viz příklad 9) gravitačního pole daného homogenního tělesa M o hustotě ρ v daných bodech A, příp. B:

   ⋆a) M je rotační válec o poloměru základny $R > 0$ a výšce $h > 0$, bod A je střed základny.

   ⋆b) M je rotační kužel o poloměru základny $R > 0$ a výšce $h > 0$, bod A je vrchol, bod B je střed základny.

Výsledky

1. Nejprve dokážeme, že pro libovolné dvě množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ platí $h(A \cup B) \subseteq h(A) \cup h(B)$ (tvrzení platí pro libovolné metrické prostory). Připomeňme, že pro každé $C, D \subseteq \mathbb{R}^2$ je $h(C) = \overline{C} \cap \overline{C'}$ ($C' = \mathbb{R}^2 \setminus C$ je doplněk C), $\overline{C \cup D} = \overline{C} \cup \overline{D}$ a $\overline{C \cap D} \subseteq \overline{C} \cap \overline{D}$ — viz [6]. Odtud $h(A \cup B) = \overline{A \cup B} \cap \overline{(A \cup B)'} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{A' \cap B'} \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A'} \cap \overline{B'}) = (\overline{A} \cap \overline{A'} \cap \overline{B'}) \cup (\overline{B} \cap \overline{A'} \cap \overline{B'}) \subseteq (\overline{A} \cap \overline{A'}) \cup (\overline{B} \cap \overline{B'}) = h(A) \cup h(B)$.
   Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Nechť M je uzavřený čtverec se středem v singulárním bodě A takový, že $\mathrm{m}(M) < \varepsilon/2$. Platí $\Omega = (\Omega \setminus M) \cup (\Omega \cap M)$. Podle předpokladu 5.3 je množina $\Omega \setminus M$ měřitelná, tedy její hranice má míru nula (důsledek 1.41). Podle cvičení 17 ke kapitole 1 existují obdélníky M_k, $k = 1, \dots, n$, takové, že $h(\Omega \setminus M) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} M_k$, $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{m}(M_k) < \varepsilon/2$. Dále platí $h(\Omega \cap M) \subseteq M$. Pak $h(\Omega) \subseteq h(\Omega \setminus M) \cup h(\Omega \cap M) \subseteq M \cup \bigcup_{k=1}^{n} M_k$ a $\mathrm{m}(M) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{m}(M_k) < \varepsilon$. Podle téhož cvičení je $\mathrm{m}(h(\Omega)) = 0$, takže množina Ω je měřitelná.

2. a) Protože posloupnost $\{\mathrm{m}(M_k)\}$ je neklesající a shora ohraničená, neboť $\mathrm{m}(M_k) \leqq \mathrm{m}(M)$, $k \in \mathbb{N}$, existuje její limita a platí $\lim_{k\to\infty} \mathrm{m}(M_k) \leqq \mathrm{m}(M)$. Stačí tedy ukázat, že platí i opačná nerovnost.
   Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože M je měřitelná, je podle důsledku 1.41 $\mathrm{m}(h(M)) = 0$, takže podle cvičení 17 ke kapitole 1 existují obdélníky R_k, $k = 1, \dots, r$, takové, že $h(M) \subset \bigcup_{k=1}^{r} R_k$, $\sum_{k=1}^{r} \mathrm{m}(R_k) < \varepsilon$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že obdélníky R_k jsou otevřené (stačí nepatrně zvětšit jejich rozměry tak, aby zůstala v platnosti poslední nerovnost). Označme $N = \bigcup_{k=1}^{r} R_k$ a $\widetilde{M} = N \cup M$. Pak $\widetilde{M}$ a N jsou otevřené, $\mathrm{m}(N) < \varepsilon$ a $\overline{M} \subset \widetilde{M}$.
   Předchozí konstrukci zopakujeme pro každou množinu M_k, $k \in \mathbb{N}$, s číslem $\varepsilon/2^k$. Dostaneme posloupnosti otevřených množin N_k a $\widetilde{M}_k = M_k \cup N_k$ takových, že $M_k \subseteq \overline{M_k} \subset \widetilde{M}_k$, $\mathrm{m}(N_k) < \varepsilon/2^k$ a $\bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{M}_k \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = M$.
   Otevřené množiny $N, \widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2, \dots$ tvoří pokrytí kompaktní množiny $\overline{M}$. Podle

Heineho-Borelova lemmatu existuje index k_0 tak, že $N, \widetilde{M}_1, \dots \widetilde{M}_{k_0}$ je konečné pokrytí $\overline{M}$. Protože $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_k$ pro každé $k \geqq k_0$, jsou množiny $N, N_1, \dots, N_k, M_k$ rovněž pokrytím $\overline{M}$, přičemž $\mathrm{m}(M) \leqq \mathrm{m}(\overline{M}) \leqq \mathrm{m}(M_k) + {}+ \mathrm{m}(N) + \mathrm{m}(N_1) + \dots + \mathrm{m}(N_k) < \mathrm{m}(M_k) + \varepsilon + \varepsilon/2 + \dots + \varepsilon/2^k < \mathrm{m}(M_k) + 2\varepsilon$. Odtud vyplývá, že $\mathrm{m}(M) \leqq \lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{m}(M_k) + 2\varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je $\mathrm{m}(M) \leqq \lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{m}(M_k)$, což s první částí dává, že $\mathrm{m}(M) = \lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{m}(M_k)$.

b) Protože funkce f je integrovatelná na M, existuje konstanta $K > 0$ tak, že $|f(x)| < K$ pro $x \in M$. Z dokázané části a), věty 1.52 a aditivity vlastního integrálu vzhledem k integračnímu oboru vyplývá, že platí $\Bigl|\int\limits_M \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x - {}-\int\limits_{M_k} \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x\Bigr| = \Bigl|\int\limits_{M \smallsetminus M_k} \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x\Bigr| \leqq \int\limits_{M \smallsetminus M_k} \cdots \int |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqq K\,\mathrm{m}(M \smallsetminus M_k) \to 0$ pro $k \to \infty$.

3. Položme $M = N$, $M_k = N_1 \cup \dots \cup N_k$, $k \in \mathbb{N}$. Tvrzení plyne ze cvičení 2 k této kapitole.
Tvrzení říká, že Jordanova míra je aditivní i vzhledem ke sjednocení spočetně mnoha po dvou disjunktních měřitelných množin (tzv. σ-aditivita), pokud je jejich sjednocení měřitelná množina (což obecně neplatí — srovnejte cvičení 27 ke kapitole 1). Obdobný výsledek platí pro aditivitu integrálu vzhledem k integračnímu oboru, pokud je funkce integrovatelná na sjednocení spočetně mnoha disjunktních integračních oborů.

4. Nechť funkce f je nezáporná na množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, posloupnosti množin $\{A_m\}$, $\{B_m\}$ vyčerpávají Ω (ve smyslu poznámky 5.27), f je integrovatelná na každé A_m resp. B_m a číselná posloupnost $\int\limits_{A_m} \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x$ je ohraničená. Protože je neklesající, existuje konečná limita $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{A_m} \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x = I_A$. Pro pevné k označme $C_m = {}= A_m \cap B_k$. Posloupnost $\{C_m\}$ vyčerpává množinu B_k, tudíž podle cvičení 2 k této kapitole platí $\int\limits_{B_k} \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{C_m} \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{A_m} \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x = I_A$. Protože posloupnost $\int\limits_{B_k} \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x$ je neklesající, existuje $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{B_k} \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x = {}= I_B \leqq I_A$. Záměnou posloupností $\{A_m\}$ a $\{B_m\}$ obdržíme opačnou nerovnost, takže platí $I_A = I_B$. Jelikož posloupnost $\{B_m\}$ byla libovolná, integrál $\int\limits_{\Omega} \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje (ve smyslu poznámky 5.27).
Poznámka: Dokázaný výsledek umožňuje zavést pojem *neomezené* měřitelné množiny konečné míry.
Neomezenou množinu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme *měřitelnou*, právě když konverguje nevlastní integrál $\int\limits_{\Omega} \cdots \int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$. Míru měřitelné množiny pak definujeme vztahem $\mathrm{m}_n(\Omega) = \int\limits_{\Omega} \cdots \int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$. Z dokázaného výsledku plyne, že množina Ω bude měřitelná právě tehdy, když existuje její vyčerpávající posloupnost (omezených) měřitelných množin $\{A_m\}$ taková, že číselná posloupnost $\{\mathrm{m}_n(A_m)\}$ je ohraničená.

5. Nejprve ukážeme, že libovolnou neprázdnou otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha kompaktních n-rozměrných nedegenerovaných intervalů takových, že libovolné různé dva z nich nemají společné vnitřní body. Uvažujme všechny n-rozměrné krychle o hraně délky 1 tvaru $\langle k_1, k_1 + 1\rangle \times \cdots \times \times \langle k_n, k_n + 1\rangle$, kde $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Buď A_1 sjednocení všech takových krychlí, které jsou podmnožinou Ω. Dále uvažujme všechny n-rozměrné krychle o hraně délky 1/2 tvaru $\langle k_1/2, k_1/2 + 1/2\rangle \times \cdots \times \langle k_n/2, k_n/2 + 1/2\rangle$, kde $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Přidejme k A_1 body všech takových krychlí, které jsou podmnožinou Ω, avšak nejsou podmnožinou A_1. Dostaneme množinu A_2. Analogicky postupujeme dále. Dostaneme posloupnost $\{A_m\}$, která je neklesající vzhledem k inkluzi, každá A_m je sjednocením konečně nebo spočetně mnoha krychlí, které nemají společné vnitřní body, přičemž $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = \Omega$. Systém všech krychlí tvořících množiny A_m, $m \in \mathbb{N}$, má požadované vlastnosti. (Zvažte, že nemůže být konečný — Ω by byla omezená neprázdná množina, která by byla současně otevřená i uzavřená, což je spor se souvislostí prostoru $\mathbb{R}^n$.)
Nechť $\{K_r\}$ je výše popsaný systém krychlí. Označme $E_m = K_1 \cup \cdots \cup K_m$, $m \in \mathbb{N}$. Každá množina E_m je sjednocením konečně mnoha krychlí, a je tudíž kompaktní a měřitelná. Takovou množinu nazveme *elementární kompaktní množina*. Posloupnost $\{E_m\}$ vyčerpává množinu Ω. Připusťme, že integrál funkce $|f|$ přes Ω diverguje. Pak $\lim\limits_{m\to\infty} \int\cdots\int\limits_{E_m} |f(x)|\,\mathrm{d}x = +\infty$.
Tvrzení se nyní dokáže obdobně jako věta 5.17. Uvedeme tudíž jen hlavní body:
   a) Protože integrál f přes Ω konverguje a integrál $|f|$ diverguje, musí také integrály $f^+ = (|f| + f)/2$ a $f^- = (|f| - f)/2$ přes Ω divergovat.
   b) Lze předpokládat (přechodem k podposloupnosti), že platí $\int\cdots\int\limits_{E_{m+1}\setminus E_m} f^+(x)\,\mathrm{d}x > > \int\cdots\int\limits_{E_m} |f(x)|\,\mathrm{d}x + m$ pro každé $m \in \mathbb{N}$.
   c) Z definice dolního integrálu se odvodí pro každé $m \in \mathbb{N}$ existence elementární kompaktní množiny F_m takové, že $F_m \subseteq E_{m+1} \setminus E_m$ a platí $\int\cdots\int\limits_{F_m} f(x)\,\mathrm{d}x > > \int\cdots\int\limits_{E_m} |f(x)|\,\mathrm{d}x + m$ pro každé $m \in \mathbb{N}$.
   d) Posloupnost $\{G_m\}$, kde $G_m = E_m \cup F_m$, je tvořena elementárními kompaktními množinami a vyčerpává Ω. Přitom $\int\cdots\int\limits_{G_m} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\cdots\int\limits_{F_m} f(x)\,\mathrm{d}x + + \int\cdots\int\limits_{E_m} f(x)\,\mathrm{d}x > \int\cdots\int\limits_{E_m} |f(x)|\,\mathrm{d}x + m - \int\cdots\int\limits_{E_m} |f(x)|\,\mathrm{d}x = m \to \infty$ pro $m \to \infty$, což je spor.

V následujících výsledcích $\{S_m\}$ resp. $\{V_m\}$ značí smršťující se resp. vyčerpávající posloupnost množin, pomocí níž lze určit hodnotu daného integrálu.

6. $\frac{1}{(n+a)(n-1)!}$, $S_m = \{[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n : |x_1| + \cdots + |x_n| \leqq 1/m\}$. Postupujte jako ve cvičení 27 z kapitoly 3.

7. a) $1/4,\ V_m = \langle 0, m\rangle^2$,
   b) $2,\ S_m : x^2 + y^2 \leqq x/m$,
   c) $144,\ V_m = (\langle 0, 1 - 1/m\rangle \cup \langle 1 + 1/m, 28\rangle)^2$,
   d) $\pi ab/2,\ V_m : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqq 1 - 1/m,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$,
   e) $1/2,\ S_m : 0 < y \leqq 1/m,\ 0 \leqq x \leqq y^2$,
   f) $\pi a^2(1 - 2\ln a)/2,\ S_m : x^2 + y^2 < 1/m^2$,
   g) $-(\pi^2 \ln 2)/2,\ V_m : 1/m < x < \pi - 1/m,\ 0 < y < x - 1/m$,
   h) diverguje, $V_m : x^2 + y^2 \leqq m^2$,
   i) $\pi/(4a^2),\ V_m : x^2 + y^2 \leqq m^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$,
   j) $1/2,\ V_m : 0 \leqq x \leqq y \leqq m$,
   k) $\pi ab,\ V_m : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqq m^2$,
   l) $4,\ V_m = \langle -m, m\rangle^2$,
   m) $1/[(p - q)(q - 1)],\ p > q > 1$ (jinak diverguje), $V_m : 1 \leqq x \leqq m$, $1/x \leqq y \leqq m/x$,
   n) $1/(p - 1),\ p > 1$ (jinak diverguje), $V_m : 0 \leqq x \leqq 1,\ 1 - x \leqq y \leqq m - x$,
   o) $\pi\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)},\ V_m :\ -m \leqq x \leqq m,\ 1 + x^2 \leqq y \leqq m + x^2$,
   p) $\pi,\ V_m : x^2 + y^2 \leqq m^2$,
   q) $\pi/2,\ V_m : x^2 + y^2 \leqq m^2$,
   r) $\pi/2,\ V_m : x^2 + y^2 \leqq m^2$,
   s) $2\pi a^2 \ln a,\ S_m : x^2 + y^2 \leqq x/m$.

Návod:

g) Použijte transformaci $T : x = u + v,\ y = v$ a Fubiniovu větu. Platí $J_T = 1$, $T^{-1}(\Omega) : 0 < u < \pi,\ 0 < v < \pi - u$. Podle poznámky 5.27, část 5), je $I = \iint\limits_{\Omega} \ln\sin(x - y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\pi \big(\int_0^{\pi - u} \ln\sin u\,\mathrm{d}v\big)\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi (\pi - u)\ln\sin u\,\mathrm{d}u =$ $= |\text{subst. } \pi - u = s| = \int_0^\pi s\ln\sin s\,\mathrm{d}s$, odkud $2I = \pi\int_0^\pi \ln\sin s\,\mathrm{d}s$. Dále ze symetrie grafu funkce sinus vzhledem k přímce o rovnici $x = \pi/2$ plyne $\int_0^\pi \ln\sin s\,\mathrm{d}s = 2\int_0^{\pi/2} \ln\sin s\,\mathrm{d}s$. Konečně $I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln\sin s\,\mathrm{d}s = |\text{subst. } s =$ $= 2t| = 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/4} (\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t)\,\mathrm{d}t = (\pi/2)\ln 2 +$ $+ 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,\mathrm{d}t = |\text{subst. } t = \pi/2 - r| = (\pi/2)\ln 2 +$ $+ 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\cos(\pi/2 - r)\,\mathrm{d}r = (\pi/2)\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t\,\mathrm{d}t +$ $+ 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin r\,\mathrm{d}r = (\pi/2)\ln 2 + 2I_1$, takže $I_1 = -(\pi/2)\ln 2$.

o) Použijte Fubiniovu větu. Podle poznámky 5.27, část 5), je $I = \iint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\int_{1+x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{x^4 + y^2}\big)\,\mathrm{d}x$. Dále pro $x \neq 0$ je $F(x) = \int_{1+x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{x^4 + y^2} = \frac{1}{x^2}\big(\frac{\pi}{2} -$ $- \operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x^2}\big)$ a pro $x = 0$ je $F(0) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = 1$. L'Hospitalovým pravidlem se lze přesvědčit, že F je spojitá v nule.

Odtud integrací per partes (volíme $u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x^2}$ a $v' = \frac{1}{x^2}$; výraz $[G(x)]_{-\infty}^{+\infty}$

je třeba chápat jako $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) - \lim\limits_{x\to-\infty} G(x))$ dostaneme $I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x =$ $= -2\big[\frac{1}{x}\big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x^2}\big)\big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1/2}$. Snadno se vidí, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x^2}\big) = 0$, tedy $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1/2}$.
Platí $x^4 + x^2 + 1/2 = (x^2 - 1\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2}-1)x^2 = \big(x^2 - \sqrt{\sqrt{2}-1}\,x + 1/\sqrt{2}\big)\big(x^2 + \sqrt{\sqrt{2}-1}\,x + 1/\sqrt{2}\big)$. Označme $h(x) = x^2 + \sqrt{\sqrt{2}-1}\,x + 1/\sqrt{2}$. Pak $x^4 + x^2 + 1/2 = h(-x)h(x)$. Rozklad na parciální zlomky má tvar

$$\frac{1}{x^4+x^2+1/2} = \frac{Ax+B}{h(-x)} + \frac{Cx+D}{h(x)},$$

kde $C = -A = \sqrt{\sqrt{2}+1}\big/\sqrt{2}$, $B = D = 1/\sqrt{2}$.
Nevlastní integrál funkce $1/(x^4 + x^2 + 1/2)$ konverguje na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, +\infty)$. Dále pro $c > 0$ je $\int_{-c}^{c}\frac{Ax+B}{h(-x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-c}^{c}\frac{Cx+D}{h(x)}\,\mathrm{d}x$. Odsud odvodíme, že $I = 2\lim\limits_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}\frac{Cx+D}{h(x)}\,\mathrm{d}x$. (Pozor, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Cx+D}{h(x)}\,\mathrm{d}x$ je divergentní!) Platí

$$\int_{-c}^{c}\frac{Cx+D}{h(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2\sqrt{2}}\big[\ln h(x)\big]_{-c}^{c} + \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{2x+\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\right]_{-c}^{c} \to$$
$$\to \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2\sqrt{2}}\ln 1 + \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}\big(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{2}\big) = \frac{\pi\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}} \quad \text{pro } c\to+\infty.$$

s) Použijte polární souřadnice a Fubiniovu větu. Množina Ω má v polárních souřadnicích popis $-\pi/2 \leqq \varphi \leqq \pi/2$, $0 \leqq \varrho \leqq 2a\cos\varphi$ (srovnejte obrázek 3.7 k příkladu 3.13). Podle poznámky 5.27, část 5), je $I = \iint\limits_{\Omega}\ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ $= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(\int_0^{2a\cos\varphi}\varrho\ln\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\big)\,\mathrm{d}\varphi$. Vnitřní integrál je $\int_0^{2a\cos\varphi}2\varrho\ln\varrho\,\mathrm{d}\varrho = |\text{p. p.}| =$ $= 2a^2(2\ln 2a - 1)\cos^2\varphi + 4a^2\cos^2\varphi\ln\cos\varphi$. Tudíž, protože integrand je sudá funkce, $I = 2a^2(2\ln 2a - 1)\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + 8a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\ln\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$ $= |\text{subst. } \cos\varphi = t| = \pi a^2(2\ln 2a - 1) + 8a^2\int_0^1\frac{t^2\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\pi a^2\ln a$. Platí totiž

$$I_1 = \int_0^1\frac{t^2\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} u = t\ln t & u' = \ln t + 1 \\ v' = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} & v = -\sqrt{1-t^2}\end{matrix}\right| = \big[-t\ln t\sqrt{1-t^2}\big]_0^1 +$$
$$+ \int_0^1(\ln t + 1)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1\ln t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^1\frac{(1-t^2)\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t - \int_0^1\frac{t^2\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Z předchozích rovnic dostaneme

$$I_1 = \frac{1}{2}\Big(\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\ln 2,$$

protože $\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = |\text{subst. } t = \sin u| = \int_0^{\pi/2}\ln\sin u\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ — viz návod k úloze g) tohoto cvičení.

8. a) $1/120,\ V_m = \langle 1/m, 1\rangle^3$,
   b) $(8/9)\pi a^3(3\ln a - 1),\ S_m\colon x^2+y^2+z^2 < 1/m^2$,
   c) $\pi^{3/2},\ V_m = \langle -m, m\rangle^3$ (viz cvičení 16 ke kapitole 3),
   d) $e/2 - 1,\ V_m\colon 1 \leqq y \leqq m,\ 1 \leqq z \leqq m,\ 0 \leqq x \leqq 1/yz$,
   e) $1/[(1-p)(1-q)(1-r)],\ p<1,\ q<1,\ r<1$ (jinak diverguje), $V_m = \langle 1/m, 1\rangle^n$,
   f) $\pi^{n/2},\ V_m = \langle -m, m\rangle^n$ (viz cvičení 16 ke kapitole 3),
   g) $\frac{a^n}{n^2}(n\ln a - 1)2^{\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor}\cdot\pi^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor},\ S_m\colon x_1^2+\dots+x_n^2 < 1/m^2$.

9. Označme $a = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. Při $a \leqq R$ je integrál pro $U(x_0, y_0, z_0)$ nevlastní. Jeho konvergence vyplývá z poznámky 5.12 (pro $a < R$) a věty 5.13 (pro $a = R$). Vyjde:

$$U(x_0, y_0, z_0) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho G \frac{1}{a} & \text{pro } a \geqq R, \\ \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right)\rho G & \text{pro } a \leqq R. \end{cases} \tag{5.11}$$

Postup: Předpokládejme nejprve, že $A = [0, 0, z_0]$, $z_0 \geqq 0$, tj. $a = z_0$. Podle Fubiniovy věty 3.47 s použitím polárních souřadnic platí:

$$U(0,0,z_0) = \iiint_K \frac{G\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = G\rho\int_{-R}^{R}\Big(\iint_{K_{(\cdot,\cdot,z)}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\Big)\,\mathrm{d}z =$$
$$= 2\pi G\rho\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-2az+a^2} - |z-a|\right)\mathrm{d}z,$$

kde $K_{(\cdot,\cdot,z)} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqq R^2 - z^2\}$. Dále

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-2az+a^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3a}[(R+a)^3 - |R-a|^3] = \begin{cases} \frac{2}{3}R^3\frac{1}{a} + 2Ra & \text{pro } a \geqq R, \\ 2R^2 + \frac{2}{3}a^2 & \text{pro } a \leqq R \end{cases}$$

a

$$\int_{-R}^{R}|z-a|\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2Ra & \text{pro } a \geqq R, \\ R^2 + a^2 & \text{pro } a \leqq R, \end{cases}$$

odkud vyjde (5.11) pro tento případ.

Pro $A = [0, 0, z_0]$, $z_0 \leqq 0$, tj. $a = -z_0$, použijeme transformaci $S\colon x = u,\ y = v,\ z = -w$ s jakobiánem $J_S = -1$. Z věty o transformaci integrálu dostaneme $U(0,0,z_0) = U(0,0,-z_0) = U(0,0,a)$, takže (5.11) platí i v tomto případě.

V obecném případě, kdy $x_0^2 + y_0^2 > 0$, použijeme vhodnou izometrickou transformaci T (viz cvičení 5 a 6 ke kapitole 3), která převede bod $A = [x_0, y_0, z_0]$ do bodu $B = [0, 0, a]$ a počátek souřadnicového systému ponechá na místě (např. otočení kolem vhodné přímky procházející počátkem souřadnicové soustavy). Nechť $[x, y, z]^T = Q[u, v, w]^T$, kde Q je jistá ortogonální matice; pak $[x_0, y_0, z_0]^T = Q[0, 0, a]^T$, $T(K) = K$ a pro jakobián platí $|J_T| = |\det Q| = 1$. Dále platí $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = x^2+y^2+z^2 - 2(x_0x + y_0y + z_0z) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = [x, y, z][x, y, z]^T - 2[x_0, y_0, z_0][x, y, z]^T + a^2 = [u, v, w]Q^TQ[u, v, w]^T - 2[0, 0, a]Q^TQ[u, v, w]^T + a^2 = [u, v, w][u, v, w]^T - 2[0, 0, a][u, v, w]^T + a^2 = u^2 + v^2 + w^2 - 2aw + a^2 = u^2 + v^2 + (w-a)^2$. Z věty o transformaci dostaneme,

že $U(x_0, y_0, z_0) = U(0, 0, a)$, což dokazuje (5.11). Všimněte si, že jsme nepotřebovali konkrétní prvky matice Q, stačila nám jen informace, že jde o ortogonální matici, tj. že $Q^T Q$ je jednotková matice.
Poznamenejme, že Fubiniova věta i věta o transformaci zde platí i v případě, že daný integrál je nevlastní — viz poznámka 5.27, část 5).

10. Označme $a = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. Při $a \leqq R$ jsou integrály pro složky g_i nevlastní. Jejich konvergence vyplývá z věty 5.13 a z poznámky 5.12. Pro $A \neq (0, 0, 0)$ vyjde:

$$\boldsymbol{g}(x_0, y_0, z_0) = -\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}, \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\right)|\boldsymbol{g}|, \tag{5.12}$$

kde

$$|\boldsymbol{g}| = \begin{cases} \frac{4}{3}\,\pi\rho G \frac{R^3}{a^2} & \text{pro } a \geqq R, \\ \frac{4}{3}\,\pi a\rho G & \text{pro } a \leqq R. \end{cases}$$

Pro $A = [0, 0, 0]$ je $\boldsymbol{g}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.
Postup: Při výpočtu budeme postupovat obdobně jako ve cvičení 9 k této kapitole. Předpokládejme nejprve, že $A = [0, 0, z_0]$, $z_0 \geqq 0$, tj. $a = z_0$. Podle Fubiniovy věty 3.47 s použitím polárních souřadnic platí:

$$\begin{aligned} g_3(0, 0, z_0) &= \iiint\limits_K \frac{G\rho(z-a)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^3}} = \\ &= G\rho \int_{-R}^{R}\left((z-a) \iint\limits_{K_{(\cdot,\cdot,z)}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^3}}\right)\mathrm{d}z = \\ &= 2\pi G\rho \int_{-R}^{R}\left(\frac{z-a}{|z-a|} - \frac{z-a}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

kde $K_{(\cdot,\cdot,z)} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq R^2 - z^2\}$. Dále

$$\int_{-R}^{R} \frac{z-a}{|z-a|}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \operatorname{sgn}(z-a)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} -2R & \text{pro } a \geqq R, \\ -2a & \text{pro } a \leqq R \end{cases}$$

a (substitucí $t = \sqrt{R^2 - 2az + a^2}$)

$$\int_{-R}^{R} \frac{z-a}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \frac{2}{3}\frac{R^3}{a^2} - 2R & \text{pro } a \geqq R, \\ -\frac{4}{3}a & \text{pro } a \leqq R. \end{cases}$$

Celkem vyjde

$$g_3(0, 0, z_0) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\,\pi\rho G \frac{R^3}{a^2} & \text{pro } a \geqq R, \\ -\frac{4}{3}\,\pi a\rho G & \text{pro } a \leqq R. \end{cases}$$

Dále analogicky dostaneme

$$g_1(0,0,z_0) = \iiint\limits_K \frac{G\rho x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^3}} = G\rho \int_{-R}^{R}\Bigg(\iint\limits_{K(\cdot,\cdot,z)} \frac{x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^3}}\Bigg)\,\mathrm{d}z = 0,$$

$$g_2(0,0,z_0) = \iiint\limits_K \frac{G\rho y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^3}} = G\rho \int_{-R}^{R}\Bigg(\iint\limits_{K(\cdot,\cdot,z)} \frac{y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^3}}\Bigg)\,\mathrm{d}z = 0$$

(vnitřní dvojné integrály jsou rovny nule pro každé $z \in \langle -R, R\rangle$), což odpovídá vztahu (5.12).
Transformací $S\colon x = u,\ y = v,\ z = -w$ s jakobiánem $J_S = -1$ ověříme, že vztah (5.12) platí i pro $A = [0,0,z_0]$, $z_0 \leqq 0$, tj. $a = -z_0$.
V obecném případě, kdy $x_0^2 + y_0^2 > 0$, použijeme izometrickou transformaci T (viz cvičení 5 a 6 ke kapitole 3), která převede bod $A = [x_0, y_0, z_0]$ do bodu $B = [0,0,a]$ a počátek souřadnicového systému ponechá na místě. Oproti cvičení 9 k této kapitole budeme potřebovat prvky ortogonální matice Q, která odpovídá této transformaci. Nechť T_1 je rotace kolem souřadnicové osy z taková, že $T_1(x_0, y_0, z_0) = \big[\sqrt{x_0^2+y_0^2}, 0, z_0\big]$, a T_2 je rotace kolem souřadnicové osy y taková, že $T_2\big(\sqrt{x_0^2+y_0^2}, 0, z_0\big) = \big[0,0,\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\big] = [0,0,a]$. Pak transformace $T_2 \circ T_1$ má požadované vlastnosti. Matice odpovídající transformacím T_1, T_2 jsou

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} & \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} & 0 \\ -\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} & \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} & 0 & -\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} & 0 & \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} \end{pmatrix}.$$

Buď $T = T_2 \circ T_1\colon [x,y,z] \mapsto [u,v,w]$ jejich složení. Potom platí $[u,v,w]^T = Q_2 Q_1 [x,y,z]^T$, tj. $[x,y,z]^T = Q_1^T Q_2^T [u,v,w]^T$. Odtud dostaneme, že

$$z = -\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}\,u + \frac{z_0}{a}\,w.$$

Stejně jako ve cvičení 9 odvodíme, že $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = u^2 + v^2 + (w-a)^2$. Protože $T(K) = K$ a jakobián $J_T = |\det(Q_2 Q_1)| = 1$, obdržíme z věty o transformaci integrálu, že

$$\begin{aligned} g_3(x_0,y_0,z_0) &= \iiint\limits_K \frac{G\rho(z-z_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^3}} = \\ &= -\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}\iiint\limits_K \frac{G\rho u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w}{\sqrt{[u^2+v^2+(w-a)^2]^3}} + \frac{z_0}{a}\iiint\limits_K \frac{G\rho(w-a)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w}{\sqrt{[u^2+v^2+(w-a)^2]^3}} = \\ &= -\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}\,g_1(0,0,a) + \frac{z_0}{a}\,g_3(0,0,a) = \frac{z_0}{a}\,g_3(0,0,a). \end{aligned}$$

Obdobně se odvodí, že

$$g_1(x_0, y_0, z_0) = \frac{x_0}{a}\, g_1(a, 0, 0) = \frac{x_0}{a}\, g_3(0, 0, a),$$

$$g_2(x_0, y_0, z_0) = \frac{y_0}{a}\, g_2(0, a, 0) = \frac{y_0}{a}\, g_3(0, 0, a).$$

Poznamenejme, že Fubiniova věta i věta o transformaci zde platí i v případě, že dané integrály jsou nevlastní — viz poznámka 5.27, část 5).
Platí $\boldsymbol{g}(x_0, y_0, z_0) = \operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial}{\partial x} U, \frac{\partial}{\partial y} U, \frac{\partial}{\partial z} U\right)$, kde U je potenciál ze cvičení 9 k této kapitole. Takové pole $\boldsymbol{g}$ se nazývá *potenciálové*.
Všimněme si ještě pro zajímavost velikosti intenzity zemského gravitačního pole v bodě na povrchu zeměkoule. Předpokládejme pro jednoduchost, že Země má tvar dokonalé koule o poloměru $R = 6\,378 \cdot 10^3$ m a že se jedná o homogenní těleso o hustotě $\rho = 5\,518\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Položíme-li $a = R$ a vezmeme-li v úvahu, že pro gravitační konstantu platí $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$, dostáváme z odvozeného vzorce hodnotu $|\boldsymbol{g}| = 9{,}83\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Tato hodnota představuje velikost gravitačního zrychlení na povrchu Země. Podotkněme ještě, že gravitační zrychlení je třeba odlišovat od tíhového zrychlení, ve kterém se bere v úvahu také odstředivá síla způsobená rotací Země kolem své osy.

11. a) $U(A) = \rho G \pi R^2 \ln \frac{h+\sqrt{R^2+h^2}}{R} + \rho G \pi h\left(\sqrt{R^2+h^2} - h\right)$.
Zvolte umístění $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqq R,\ 0 \leqq z \leqq h\}$, $A = [0, 0, 0]$.

b) $U(A) = \pi h(l - h)\rho G$, $U(B) = \frac{\pi R^2 h^3}{l^3} \rho G \ln \frac{R(l+R)}{h(l-h)} + \frac{\pi R^2 h}{l^2} \rho G(R - h)$, kde $l = \sqrt{R^2 + h^2}$.
Zvolte umístění $M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqq (z - h)^2 \frac{R^2}{h^2},\ 0 \leqq z \leqq h\right\}$, $A = [0, 0, h]$, $B = [0, 0, 0]$.

Návod: Postupujte jako ve cvičení 9 k této kapitole.

Literatura

[1] Berman, G. N. *Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analiza*. 7. izdanije. Moskva: Gosudarstvennoje izdatelstvo techniko-teoretičeskoj literatury, 1957. 436 s.

[2] Budak, B. M. – Fomin, S. V. *Multiple Integrals, Field Theory and Series*. Moscow: MIR Publishers, 1973. 640 s.

[3] Dĕmidovič B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. 460 s. ISBN 80-7200-587-1.

[4] Dold, A. *Lectures on algebraic topology*. Berlin: Springer, 1972. (Rusky Moskva: MIR, 1976. 464 s.)

[5] Došlá, Z. – Došlý, O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Třetí vydání. Brno: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, 2006. 4+144 s. Skriptum. ISBN 80-210-4159-5.

[6] Došlá, Z. – Došlý, O. *Metrické prostory*. Třetí vydání. Brno: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, 2006. 8+90 s. Skriptum. ISBN 80-210-4160-9.

[7] Došlá, Z. – Kuben, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. Druhý dotisk 1. vydání. Brno: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, 2008. 6+209 s. Skriptum. ISBN 80-210-3121-2.

[8] Došlá, Z. – Novák, V. *Nekonečné řady*. První dotisk 1. vydání. Brno: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, 2002. 4+113 s. Skriptum. ISBN 80-210-1949-2.

[9] Eliaš, J. – Horváth, J. – Kajan, J. – Šulka, R. *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 4. časť. 2. vydanie. Bratislava: ALFA, 1972. 285 s.

[10] Fichtengoľc, G. M. *Kurs differenciaľnogo i integraľnogo isčislenija*. Tom III. 5. izdanije. Moskva: Nauka, 1969. 656 s.

[11] Fuchs, E. *Metrické prostory*. Brno: Přírodovědecká fakulta Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Brně, 1974. 65 s. Skriptum.

[12] Goluzin, G. M. *Geometričeskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo*. Moskva: Gosudarstvennoje izdateľstvo techniko teoretičeskoj literatury, 1952. 540 s.

[13] Hošková, Š. – Kuben, J. *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. 1. vydání. Brno: Vojenská akademie v Brně, 2004. 205 s. Skriptum. ISBN 80-85960-75-3.

[14] Hošková, Š. – Kuben, J. – Račková, P. *Integrální počet funkcí více proměnných*. 1. vydání. Brno: Vojenská akademie v Brně, 2005. 6+140 s. Skriptum. ISBN 80-7231-031-3.

[15] Jarník, V. *Integrální počet (II)*. Praha: Academia, 1976. 764 s.

[16] Kalas, J. *Analýza v komplexním oboru*. 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2006. 4+202 s. ISBN 80-210-4045-9.

[17] Kluvánek, I. – Mišík, L. – Švec, M. *Matematika pre štúdium technických vied*. II. diel. 3. nezmenené vydanie. Bratislava: ALFA, 1970. 815 s.

[18] Minorskij, V. P. *Sbornik zadač po vyssej matematike*. 6. izdanije. Moskva: Gosudarstvennoje izdatelstvo techniko-teoretičeskoj literatury, 1961. 350 s.

[19] Nagy, J. – Nováková, E. – Vacek, M. *Integrální počet*. Matematika pro vysoké školy technické, sešit VI. Praha: SNTL, 1984. 311 s.

[20] Novák, V. *Integrální počet v* $\mathbb{R}$. 3. vydání. Brno: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, 2001. 85 s. Skriptum. ISBN 80-210-2720-7.

[21] Novotný, M. *Integrální počet*. Praha: SPN, 1969. 132+11 s. Skriptum.

[22] Petr, K. *Počet integrální*. Praha: JČMF, 1915. XXIII+638 s.

[23] Ráb, M. *Riemannův integrál v* $\mathbb{E}^n$. Brno: Přírodovědecká fakulta Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Brně, 1985. 80 s. Skriptum.

[24] Ráb, M. *Zobrazení a Riemannův integrál v* $\mathbb{E}^n$. 1. vydání. Praha: SPN, 1988. 97 s. Skriptum.

[25] Schwabik, Š. – Šarmanová, P. *Malý průvodce historií integrálu*. Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, Dějiny matematiky, sv. 6. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1996. 96 s. ISBN 80-7196-038-1.

[26] Sikorski, R. *Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných.* Druhé, změněné a doplněné vydání. Vydání překladu 1. Praha: Academia, 1973. 496 s.

[27] Zorič, V. A. *Matematičeskij analiz. Časť II.* Moskva: Nauka, 1984. 640 s.

Rejstřík