APLIKACE VÍCEROZMĚRNÝCH INTEGRÁLŮ

MÍRA (OBSAH) MNOŽINY V $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$

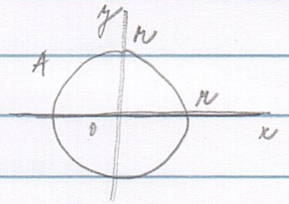
$m(A) = \iint_A dx\,dy$ v $\mathbb{R}^2$

$m(A) = \iiint_A dx\,dy\,dz$ v $\mathbb{R}^3$

(viz cvičení na dvojné a trojné integrály)

Jiný typ příkladu:

Př5 Odvoďte obsah kruhu o poloměru r pomocí dvojného integrálu



a) bez pomocí transformace do polárních souřadnic:

obsah = míra $\quad A: -r \le x \le r$

$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \quad (z\ x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2 = 1-x^2)$

$\Rightarrow I = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\, dy \right) dx = \dots (= \pi r^2)$

b) lepší způsob: pomocí transformace do polárních souřadnic

$F: x = \rho\cos\varphi \qquad J = \rho \qquad F^{-1}(A): 0 \le \varphi \le 2\pi$

$\quad y = \rho\sin\varphi \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le \rho \le r$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho\, d\rho \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^r d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\, d\varphi = \frac{r^2}{2} \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \underline{\pi r^2}$$

- analogicky pro jiná rovinná i prostorová tělesa (čtverec, obdélník, trojúhelník, koule, válec, kužel, ...) – počítáme bez substituce nebo se substitucí (záleží na konkrétním příkladu)