NEZÁVISLOST KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU II. DRUHU NA INTEGRAČNÍ CESTĚ

v $\mathbb{R}^2$: $\int_k f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ nezávisí na integrační cestě
$\Leftrightarrow$ výraz $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ je diferenciálem nějaké kmenové funkce F, tj.
$f(x,y) = F_x$, $g(x,y) = F_y$ $\longrightarrow$ $\underline{f_y(x,y) = F_{xy} = F_{yx} = g_x(x,y)}$

v $\mathbb{R}^3$: $\int_k f(x,y,z)\,dx + g(x,y,z)\,dy + h(x,y,z)\,dz$ nezávisí na integrační cestě $\Leftrightarrow$ výraz $f(x,y,z)\,dx + g(x,y,z)\,dy + h(x,y,z)\,dz$ je diferenciálem nějaké kmenové funkce F, tj. $f(x,y,z) = F_x$, $g(x,y,z) = F_y$, $h(x,y,z) = F_z$
$\longrightarrow$ $\underline{f_y = g_x,\ f_z = h_x,\ g_z = h_y}$

7. Dokažte, že $\int_k (y^2+2xy)\,dx + (x^2+2xy)\,dy$, kde k je libovolná křivka mezi body $[0,0]$ a $[2,2]$, nezávisí na integrační cestě a vypočtěte jej.

$$\int_k \underbrace{(y^2+2xy)}_{f(x,y)}\,dx + \underbrace{(x^2+2xy)}_{g(x,y)}\,dy \qquad \left.\begin{aligned} f_y &= 2y+2x \\ g_x &= 2x+2y \end{aligned}\right\} \ \underline{f_y = g_x} \to \text{NEZÁVISÍ}$$

b) kmenová funkce: $F(x,y) = ?$

$F_x = f(x,y)$, $F_y = g(x,y)$

$F(x,y) = \int f(x,y)\,dx = \int (y^2+2xy)\,dx = xy^2 + x^2y + C(y)$

$F_y(x,y) = 2xy + x^2 + C'(y) = x^2 + 2xy \ (= g(x,y)) \Rightarrow C'(y) = 0 \to C(y) = k$

$\Rightarrow \underline{F(x,y) = x^2y + xy^2 + k}$, $k \in \mathbb{R}$

$$I = \left[F(x,y)\right]_{[0,0]}^{[2,2]} = \left[x^2y + xy^2 + k\right]_{[0,0]}^{[2,2]} = 8 + 8 + k - 0 - 0 - k = \underline{\underline{16}}$$

a) jakákoliv křivka spojující body $[0,0]$ a $[2,2]$
- např. úsečka $\longrightarrow$ DÚ

5

8. $\int_k yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, k mezi body $[1,2,3]$ a $[6,1,1]$

$$\int_k \underbrace{yz}_{f(x,y,z)}dx + \underbrace{xz}_{g(x,y,z)}dy + \underbrace{xy}_{h(x,y,z)}dz$$

$f_y(x,y,z) = z \qquad g_x(x,y,z) = z \qquad f_y = g_x$

$f_z(x,y,z) = y \qquad h_x(x,y,z) = y \qquad f_z = h_x \quad \Big\} \to$ nezávislé

$g_z(x,y,z) = x \qquad h_y(x,y,z) = x \qquad g_z = h_y$

a) úsečka $[1,2,3] \to [6,1,1] \longrightarrow$ DÚ

b) kmenová funkce: $F(x,y,z)$

$F_x = f(x,y,z)$, $F_y = g(x,y,z)$, $F_z = h(x,y,z)$

$F(x,y,z) = \int f(x,y,z)\,dx = \int yz\,dx = xyz + C(y,z)$

$F_y(x,y,z) = xz + C_y(y,z) = xz \to C_y(y,z) = 0$

$F_z(x,y,z) = xy + C_z(y,z) = xy \longrightarrow C_z(y,z) = 0 \quad \Big\} \; C(y,z) = k$

$\Rightarrow \underline{F(x,y,z) = xyz + k}$, $k \in \mathbb{R}$

$$I = \left[F(x,y,z)\right]_{[1,2,3]}^{[6,1,1]} = \left[xyz + k\right]_{[1,2,3]}^{[6,1,1]} = 6.1.1 + k - 1.2.3 - k = \underline{\underline{0}}$$