ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC POMOCÍ MOCNINNÝCH ŘAD

Máme dif. rovnici $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Hledáme řešení $y(x)$, což je funkce závislá na x.

Budeme jej hledat ve tvaru mocninné řady, tj. $\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n}$,

kde x je proměnná! – chceme tedy zjistit koeficienty a_n.

Př. $\boxed{y' = \frac{1}{2} y}$

dosadíme $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \quad \text{(derivace mocninné řady)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \quad \dots \text{ přečíslujeme:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \cdot x^{n-1}$$

chceme ~~určit~~ koeficienty a_n – budeme porovnávat pro jednotlivé mocniny x v poslední rovnosti:

$n = 1 \rightarrow 1 \cdot a_1 = \frac{1}{2} \cdot a_0$

$n = 2 \rightarrow 2 \cdot a_2 = \frac{1}{2} \cdot a_1$

$n = 3 \rightarrow 3 \cdot a_3 = \frac{1}{2} \cdot a_2$

$\vdots$

$$n \cdot a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}$$

Bez dodatečných (okrajových) podmínek se nám nepodaří určit všechny koeficienty a_n, můžeme ale vyjádřit $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ v závislosti na a_0:

$n \cdot a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}$

$(n-1) \cdot a_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot a_{n-2} \Rightarrow a_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot a_{n-2}$

$\Rightarrow n \cdot a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \underbrace{a_{n-2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdot a_{n-3} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-2} \cdot a_{n-3}$

$= \ldots = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot a_0$

$\Rightarrow \underline{a_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot a_0}$

Dosadíme $\underline{y(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot a_0 \cdot x^n =$

$= \underline{a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot x^n}$, $\underline{a_0 \in \mathbb{R}}$

$= a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^n}{n!} = \underline{a_0 \cdot e^{\frac{x}{2}}}$

\+ Pokud přidáme okrajovou podmínku $\boxed{y(0) = 1}$, máme

$\underline{1} = y(0) = a_0 \cdot (1 + 0 + 0 + \ldots) = \underline{a_0}$,

řj: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^n}{n!} = \underline{e^{\frac{x}{2}}}$

Př. $\boxed{y'' + y = 0}$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$

$\underline{\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot x^{n-2} = 0}$

případně jinak:

$\underline{\sum_{n=2}^{\infty} [n \cdot (n-1) \cdot a_n + a_{n-2}] \cdot x^{n-2} = 0}$

buď zase porovnáme pro jednotlivá $n = 2, 3, 4, \dots$ nebo rovnou napíšeme obecně:

$$\underline{n \cdot (n-1) \cdot a_n + a_{n-2} = 0}$$

Opět nedokážeme zjistit všechna a_n, ale můžeme je zase vyjádřit v závislosti - tentokrát ale na a_0 a a_1:

$$n \cdot (n-1) \cdot a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-2}}{n \cdot (n-1)} \Rightarrow a_{n-2} = -\frac{a_{n-4}}{(n-2)(n-3)}$$

$$\Rightarrow \underline{a_n} = -\frac{a_{n-2}}{n \cdot (n-1)} = \frac{a_{n-4}}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)} =$$

$$= \dots = \begin{cases} \dfrac{a_0 \cdot (-1)^{\frac{n}{2}}}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1} = \underline{\dfrac{a_0 \cdot (-1)^{\frac{n}{2}}}{n!}} & \text{pro } n \text{ sudé} \\[2ex] \dfrac{a_1 \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2} = \underline{\dfrac{a_1 \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!}} & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$$

nebo možná přehledněji:

$n = 2 \rightarrow 2 \cdot 1 \cdot a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = \dfrac{-a_0}{2 \cdot 1} = \dfrac{-a_0}{2!}$

$n = 3 \rightarrow 3 \cdot 2 \cdot a_3 + a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = \dfrac{-a_1}{3 \cdot 2} = -\dfrac{a_1}{3!}$

$n = 4 \rightarrow 4 \cdot 3 \cdot a_4 + a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = \dfrac{-a_2}{4 \cdot 3} = \dfrac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{a_0}{4!}$

$n = 5 \rightarrow 5 \cdot 4 \cdot a_5 + a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = \dfrac{-a_3}{5 \cdot 4} = \dfrac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \dfrac{a_1}{5!}$

$n = 6 \qquad a_6 = -\dfrac{a_0}{6!}$

$n = 7 \qquad a_7 = -\dfrac{a_1}{7!}$

$n = 2k$ (tj. sudé) $\qquad \underline{a_{2k} = \dfrac{(-1)^k \cdot a_0}{(2k)!}}$

$n = 2k+1$ (tj. liché) $\qquad \underline{a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k \cdot a_1}{(2k+1)!}}$

$$\Rightarrow y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{2k} \cdot x^{2k} + a_{2k+1} \cdot x^{2k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k \cdot a_0}{(2k)!} \cdot x^{2k} + \frac{(-1)^k \cdot a_1}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \right) = a_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k} +$$

$$+ a_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= \underline{\underline{a_0 \cdot \cos x + a_1 \cdot \sin x}} \quad , a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Pozn: - rovnice má první derivaci y' $\rightarrow$ a_n závisí na a_0 $\forall n$

- rovnice má derivaci y', y'' $\rightarrow$ a_n závisí na a_0, a_1

$\rightarrow$ rovnice má derivaci až $y^{(k)}$ $\rightarrow$ a_n závisí na $a_0, \dots, a_{k-1}$