

1 Opakování

1.1 Hornerovo schéma

Rozložte polynomy pomocí Hornerova schématu:

$$1. x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 32x^2 - 54x + 36 = ?$$

$$[(x-2)(x-3)(x+3)(x^2-2x+2)]$$

$$2. x^5 - 19x^4 + 130x^3 - 400x^2 + 544x - 256 = ?$$

$$[(x-1)(x-2)(x-4)^2(x-8)]$$

$$3. x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = ?$$

$$[(x-1)^2(x-2)^2]$$

1.2 Dělení polynomu polynomem

Napište racionální lomenou funkci jako součet polynomu a ryze lomené funkce (dělte polynomy):

$$1. (x^5 - x^4 + 6x^2 + x - 2) \div (x^4 - 2x^3)$$

$$\left[(x+1) + \frac{2x^3+6x^2+x-2}{x^4-2x^3} \right]$$

$$2. (x^4 + 6x^2 + x - 2) \div (x^4 - 2x^3)$$

$$\left[1 + \frac{2x^3+6x^2+x-2}{x^4-2x^3} \right]$$

$$3. (2x^5 - x^4 + 3x^2 - x + 1) \div (x^2 - 2x + 4)$$

$$\left[2x^3 + 3x^2 - 2x - 13 + \frac{-19x+53}{x^2-2x+4} \right]$$

1.3 Rozklad na parciální zlomky

Rozložte ryze lomenné funkce na parciální zlomky:

$$1. \frac{-5x+2}{x^4-x^3+2x^2}$$

$$\left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x^2-x+2} \right]$$

$$2. \frac{9x^3-4x+1}{x^4-x^2}$$

$$\left[\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} \right]$$

$$3. \frac{x^3-4x^2+x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$$

$$\left[\frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{(x-1)^2} \right]$$

$$4. \frac{x^7+2x^6+3x^5+5x^4-2x^3+3x^2+1}{x^5+2x^3+x}$$

$$\left[x^2 + 2x - 1 + \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x} \right]$$

1.4 Limita posloupnosti

Spočtěte limity posloupností:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$ [0]

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1}$ [∞]

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n}}$ [0]

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ [0]

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ [0]

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^2(1-4n)(n+1)}{2n^4-100n^3}$ [-2]

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+(-1)^n \cdot n}{n+2}$ [neexistuje]

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n})$ [1]

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{a + \frac{1}{n}} - \sqrt{a} \right)$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{a}} \right]$

1.5 Limita funkce

Spočtěte limity funkcí:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$ $\left[-\frac{1}{2} \right]$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$ $\left[\frac{5}{2} \right]$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6} \quad \left[\frac{1}{4}\right]$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5-x^4}{\sqrt[3]{1+x^3}-1} \quad \left[-3\right]$$

(Rada: Využijte vzoreček $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.)

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \quad \left[\frac{a+b}{2}\right]$$

1.6 Taylorův vzorec

Určete Taylorův polynom 2. stupně se středem v bodě $[x_0, y_0]$ funkcí:

$$1. f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, [x_0, y_0] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$\left[T_2(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left((x - \frac{1}{2}) + (y - \frac{1}{2}) \right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left((x - \frac{1}{2})^2 + 2(x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) + (y - \frac{1}{2})^2 \right)\right]$$

$$2. f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}, [x_0, y_0] = [0, 0]$$

$$\left[T_2(x, y) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right]$$

$$3. f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, [x_0, y_0] = [0, 1]$$

$$\left[T_2(x, y) = x - x(y - 1)\right]$$

$$4. f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, [x_0, y_0] = [1, 1]$$

$$\left[T_2(x, y) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \left((x - 1) + (y - 1) \right) - \frac{1}{2} (x - 1)(y - 1)\right]$$

$$5. f(x, y) = \sin x \sin y, [x_0, y_0] = [0, 0]$$

$$\left[T_2(x, y) = xy\right]$$

$$6. f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}, [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$$

$$\left[T_2(x, y) = 1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1) - (x - 1)(z - 1)\right]$$

Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně určete přibližné funkční hodnoty:

$$1. 1,04^{2,02} \quad \left[1,0824, [x_0, y_0] = [1, 2]\right]$$

$$2. \sqrt{(2,98)^2 + (4,05)^2} \quad \left[5,0281, [x_0, y_0] = [3, 4]\right]$$

$$3. \sin 29^\circ \cdot \tan 46^\circ \quad \left[\frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{180} + \frac{2\sqrt{6}-4\sqrt{3}-1}{2} \frac{\pi^2}{2 \cdot 180^2}\right]$$

1.7 Parciální derivace složené funkce

Nalezněte parciální derivace z_x, z_y :

1. $z = e^u \sin v, u = xy, v = x + y$

$$[z_x = e^{xy}(y \sin(x+y) + \cos(x+y)), z_y = e^{xy}(x \sin(x+y) + \cos(x+y))]$$

S využitím uvedené substituce najděte všechny funkce splňující danou rovnost:

1. $xz_x + yz_y = 0, u = x, v = \frac{y}{x}$

$$[z(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)]$$

2. $t_x + t_y + t_z, u = x + y - 2z, v = x - 2y + z, w = z$

$$[t(x, y, z) = f(x + y - 2z, x - 2y + z)]$$

3. $yz_x - xz_y = 0, \varphi = \arctan \frac{x}{y}, r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (polární souřadnice)

$$[z(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})]$$

Diferenciální rovnice transformujte do nových proměnných u, v .

1. $y^2 z_{xx} + x^2 z_{yy} - 2xyz_{xy} - xz_x - yz_y = 0, u = \sqrt{x^2 + y^2}, v = xy$

$$[z_{vv} = 0]$$

2. $x^2 z_{xx} - (x^2 + y^2) z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0, u = x + y, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$$[u(4 - uv)z_{uv} - 2z_v = 0]$$

3. $xyz_{xx} - (x^2 + y^2) z_{xy} + xyz_{yy} + yz_x + xz_y = 0, u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), v = xy$

$$[(u^2 - v^2)z_{uv} - vz_u]$$

2 Nekonečné číselné řady

2.1 Součet číselné řady

Určete součet těchto řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$ [$\frac{23}{90}$]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ [$\frac{1}{3}$]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ [$1 - \sqrt{2}$]

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$ [$-\frac{3}{5}$]

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n}$ [$-\frac{2}{5}$]

6. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ [*diverguje*]

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ [2]

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$
(Rada: Postupujte podobně jako v předchozím příkladě, jen spočtete $s_n - \frac{s_n}{3}$.) [$\frac{3}{4}$]

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}})$ [5]

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n}$ [-2]

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^n - 3^{n+1}}{6^n}$ [9]

Vyjádřete ve tvaru zlomku:

1. $0,53\bar{9}$

$\left[\frac{27}{50}\right]$

2. $-1,7\bar{15}$

$\left[\frac{-566}{330}\right]$

Můžou následující řady konvergovat?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan n}$

$[ne]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$

$[ne]$

2.2 Číselné řady s nezápornými členy

Pomocí vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$[D \text{ (např. limitní srovnávací - s } \frac{1}{n} \text{)}]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$[K \text{ (např. limitní podílové) }]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

$[K \text{ (např. srovnávací - s } \frac{1}{n^2} \text{)}]$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

$[K \text{ (např. limitní odmocninové) }]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

$[D \text{ (např. limitní Raabeovo) }]$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

$[D \text{ (např. limitní podílové) }]$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$[D \text{ (např. srovnávací - s } \frac{1}{n} \text{)}]$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

[K (např. limitní srovnávací - s $\frac{1}{n^2}$)]

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n}(\sqrt{3})^n}$

[K (např. limitní podílové)]

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

[D (např. srovnávací s $\frac{1}{n}$)]

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

[D (např. limitní srovnávací - s $\frac{1}{n}$)]

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\arctan n}\right)^n, a > 0, a \in \mathbb{R}$

[K pro $a < \frac{\pi}{2}$, D pro $a > \frac{\pi}{2}$ (např. limitní odmocninové)]

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}, a > 0, a \in \mathbb{R}$

[D pro $a \leq 1$, K pro $a > 1$ (např. limitní podílové)]

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)!}$

[K (např. limitní podílové)]

2.3 Alternující číselné řady

Rozhodněte o konvergenci alternujících řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$

[K]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

[D]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n-\ln n}$

[K]

2.4 Absolutní konvergence číselných řad

Rozhodněte o absolutní a neabsolutní konvergenci řad:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \quad [KN]$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \quad [KN]$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln^n 10}, \alpha \in \mathbb{R} \quad [KA]$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n-5} \quad [D]$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad [KN]$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{n^2}}{n!} \quad [D]$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n \quad [KA]$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{9n+1}}{\sqrt{4n+1}} \quad [D]$$

Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ řady konvergují absolutně, neabsolutně, divergují:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)^n}{n} \quad [KA \text{ pro } |a| < 1, KN \text{ pro } x = -1, D \text{ pro } |a| > 1 \text{ a } x = 1]$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} a x^n \quad [KA \text{ pro } |a| < 2, KN \text{ pro } x = -2, D \text{ pro } |a| > 2 \text{ a } x = 2]$$

3 Posloupnosti a řady funkcí

3.1 Bodová konvergence

Znázorněte prvních pár členů posloupností funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a určete jejich limitu:

1. $f_n(x) = \arctan nx, x \in \mathbb{R}$

$$\left[\frac{\pi}{2} \text{ pro } x > 0, 0 \text{ pro } x = 0, -\frac{\pi}{2} \text{ pro } x < 0\right]$$

2. $f_n(x) = n \sin x, x \in [-\pi, \pi]$

$$[-\infty \text{ pro } x \in (-\pi, 0), 0 \text{ pro } x = \pm\pi \text{ a } x = 0, \infty \text{ pro } x \in (0, \pi)]$$

3. $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, x \in [-\pi, \pi]$

$$[0]$$

Určete obor konvergence funkčních řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \tan \frac{x}{2^n}$

$$[x \in (-2, 2)]$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$

$$[x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)]$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, x \in \mathbb{R}$

$$[x \in (1, \infty)]$$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}, x \in \mathbb{R}$

$$[x \in (0, \infty)]$$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln x}}, x > 0$

$$[x \in (e, \infty)]$$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\ln x}}, x > 0$

$$[x \in (1, \infty)]$$

3.2 Stejněměrná konvergence

Určete limitu posloupností funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a rozhodněte, zda se jedná o stejnoměrnou konvergenci na intervalu I :

1. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, I = (0, \infty)$

$[f(x) = 0, ANO]$

2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, I = [0, 1]$

$[f(x) = 0, NE]$

3. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, I = [1, 2]$

$[f(x) = 0, ANO]$

4. $f_n(x) = \arctan nx, I = \mathbb{R}$

$[f(x) = -\frac{\pi}{2} \text{ pro } x < 0, 0 \text{ pro } x = 0, \frac{\pi}{2} \text{ pro } x > 0, NE]$

5. $f_n(x) = e^{-nx}, I = \mathbb{R}$

$[f(x) = \infty \text{ pro } x < 0, 1 \text{ pro } x = 0, 0 \text{ pro } x > 0, NE]$

Pomocí Weierstrassova kritéria dokažte stejnoměrnou konvergenci řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, I = \mathbb{R}$

$[majoranta : \frac{1}{n^2}]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}, s \in \mathbb{R}, I = [-1, 1]$

$[majoranta : \frac{1}{n^s}]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, I = \mathbb{R}$

$[majoranta : \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}]$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x^2n^2}}{n^2}, I = \mathbb{R}$

$[majoranta : \frac{1}{n^2}]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, I = [0, \infty)$

$[majoranta : \frac{1}{n(n+1)}]$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan nx}{n^2}, I = \mathbb{R}$

$[majoranta : \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2}]$

3.3 Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí

1. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$, $0 < r < 1$, má na $I = \mathbb{R}$ spojitý součet $s(x)$ a určete $\int_0^{2\pi} s(x)dx$.

[spojitost pomocí stejnoměrné konvergence, 2π]

2. * Určete obor konvergence a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.
(Rada: Použijte geometrickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ a její derivaci.)

$$\left[x \in (-1, 1), \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \right]$$

4 Mocninné řady

Určete poloměr a obor konvergence mocninných řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$ [$r = 1$, $O = (-1, 1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^{n-1}}$ [$r = 3$, $O = [-3, 3]$]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x+2)^n$ [$r = 1$, $O = (-3, -1)$]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$, $a > 1$ [$r = \infty$, $O = (-\infty, \infty)$]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$ [$r = \infty$, $O = (-\infty, \infty)$]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$ [$r = 1$, $O = (-1, 1)$]

4.1 Vlastnosti a součet mocninné řady

Určete poloměr konvergence a součet mocninných řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ [$r = 1$, $\ln(1+x)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$ [$r = 1$, $\frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arctan x$]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ [$r = 1$, $\ln(x+1) - x$]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)x^{2n}$ [$r = 1$, $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (n)^2 x^{n-1}$

$$\left[r = 1, \frac{1+x}{(1-x)^3} \right]$$

Pomocí součtu mocninné řady určete součet číselných řad:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$[\ln 2]$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

$$[\ln 2]$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\left[\frac{80}{27} \right]$$

4.2 Taylorova a Maclaurinova řada

Rozviňte následující funkce do Maclaurinovy řady a určete jejich obor konvergence:

$$1. f(x) = e^{\frac{x}{2}}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}, x \in \mathbb{R} \right]$$

$$2. f(x) = x^2 e^x$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}, x \in \mathbb{R} \right]$$

$$3. f(x) = (1+x)e^{-x}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n + x^{n+1}}{n!}, x \in \mathbb{R} \right]$$

$$4. f(x) = \sin x^2$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}, x \in \mathbb{R} \right]$$

$$5. f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

(Rada: $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$)

$$\left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, |x| < 1 \right]$$

$$6. f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n, |x| < 1 \right]$$

$$7. f(x) = \arctan x$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| \leq 1 \right]$$

$$8. f(x) = \frac{1}{3-2x}$$

$$\left[\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}x\right)^n, |x| < \frac{3}{2} \right]$$

9. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$$\left[-\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, |x| < 1 \right]$$

Určete součet následujících mocninných řad:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$

$$\left[e^{x^2} (1 + 2x^2) \right]$$

2. * $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$

$$\left[e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + 1 \right) \right]$$

Rozviňte následující funkce do Taylorovy řady se středem v bodě x_0 . Postupujte podle definice (přes derivace funkce f).

1. $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 3$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{3^{n+1}} \right]$$

2. $f(x) = e^x, x_0 = -2$

$$\left[e^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} \right]$$

3. $f(x) = \ln x, x_0 = 1$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} \right]$$

5 Užití mocninných řad

Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních n členů:

1. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$, $n = 4$ [0, 778]
2. $(1,5)^2$, $n = 3$ [2, 25]
3. $\sqrt[3]{128}$, $n = 3$ [5, 03968]
4. $\ln \frac{1}{2}$, $n = 3$ [-0, 693]

Určete přibližnou hodnotu výrazu s chybou menší než ϵ :

1. $\sin 10^\circ$, $\epsilon = 10^{-6}$ [0, 17364]
2. $\arcsin \frac{1}{2}$, $\epsilon = 10^{-5}$ [0, 5236]

Určete následující limity:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{1+x^2}}{x}$ [- $\frac{1}{2}$]
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \right]$ [-1]
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$ [- $\frac{1}{3}$]

Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních n členů a odhadněte chybu:

1. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, $n = 3$ [0, 77; $|R_3| < 0, 03$]
2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx$, $n = 3$

$$[0, 4872; |R_3| < 10^{-4}]$$

$$3. \int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx, n = 4$$

$$[2, 834]$$

Určete přibližnou hodnotu výrazu s chybou menší než ϵ :

$$1. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}, \epsilon = 10^{-4}$$

$$[0, 494]$$

$$2. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \arctan \frac{x}{4} dx, \epsilon = 10^{-4}$$

$$[0, 12]$$

$$3. \int_0^1 \cos x^2 dx, \epsilon = 10^{-4}$$

$$[0, 905]$$

Vyjádřete mocninnou řadou:

$$1. \int_0^x \sin t^2 dt$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}, x \in (-\infty, \infty) \right]$$

$$2. \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}, x \in (-\infty, \infty) \right]$$

$$3. \int_0^x \frac{dt}{1-t^9}$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{9n-8}}{9n-8}, x \in [-1, 1) \right]$$

$$4. \int \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, x \in (-\infty, \infty) \right]$$

Řešte diferenciální rovnice pomocí mocninných řad:

$$1. y' = \frac{1}{2}y$$

$$[y = a_0 e^{\frac{x}{2}} \sin x]$$

$$2. y'' + xy' + y = 0$$

$$[y = a_0(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + \dots) + a_1(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{100}x^7 + \dots)]$$

Určete řešení diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:

$$1. y' - y^2 - x(x+1) = 0, y(0) = 1$$

$$[y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{19}{12}x^4 + \dots]$$

$$2. y'' - y \cos x - x = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$[y = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots]$$

6 Fourierovy řady

Nalezněte Fourierovu řadu funkcí:

1. $f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in [-\pi, \pi]$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x \right]$$

2. $f(x) = 1, x \in (0, \pi)$ a $-1, x \in (-\pi, 0)$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x \right]$$

3. $f(x) = e^x, x \in [0, 2\pi]$

$$\left[\frac{e^{2\pi}-1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} \cos nx - \frac{n}{n^2+1} \sin nx \right) \right) \right]$$

4. $f(x) = \pi^2 - x^2, x \in [-\pi, \pi]$

$$\left[\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2} \right]$$

5. $f(x) = 0, x \in [-\pi, 0]$ a $\sin x, x \in [0, \pi]$

$$\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \right]$$

6. $f(x) = 0, x \in [-\pi, 0]$ a $x, x \in [0, \pi]$

$$\left[\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \right) \right]$$

7. $f(x) = |x|, x \in (-l, l)$

$$\left[\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l} \right]$$

Sestrojte pokračování funkce $f(x)$ na intervalu I :

1. sudé: $f(x) = \cos x, I = [0, \pi]$

$$\left[\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} \right]$$

2. liché: $f(x) = x(\pi - x), I = (0, \pi)$

$$\left[\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} \right]$$

3. sudé: $f(x) = \cos x, I = [0, \frac{\pi}{2}]$ a $-\cos x, I = [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\left[\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \right]$$

4. liché: $f(x) = 1, I = (0, 1)$

$$\left[\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{\pi(2n-1)} \right]$$

7 Integrální počet funkcí více proměnných

7.1 Dvojný integrál

Vypočtete dvojný integrál $\int \int_M f(x, y) dx dy$ funkce $f(x, y)$ přes obdélník M :

1. $f(x, y) = \sqrt{y} + x - xy^2$, $M = [0, 1] \times [1, 3]$

$$[2\sqrt{3} - 4]$$

2. $f(x, y) = \frac{1}{(2x+y+1)^2}$, $M = [0, 4] \times [0, 1]$

$$[\frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}]$$

3. $f(x, y) = xy^2 e^{xy}$, $M = [0, 2] \times [0, 1]$

$$[2]$$

4. $f(x, y) = x + y$, $M = [a, b] \times [c, d]$

$$[\frac{1}{2}(a-b)(c-d)(a+b+c+d)]$$

Vypočtete dvojný integrál $\int \int_M f(x, y) dx dy$ funkce $f(x, y)$ přes množinu M . Nejprve si načrtněte obrázek.

1. $f(x, y) = x - y$, M je omezena křivkami $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$

$$[\frac{2}{3}]$$

2. $f(x, y) = x^2 + y$, M je omezena křivkami $y = x^2$, $y^2 = x$

$$[\frac{33}{140}]$$

3. $f(x, y) = e^{2x+y}$, M je omezena křivkami $x + y = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$

$$[\frac{e^4 - e^3 - e + 1}{2}]$$

4. $f(x, y) = \cos(x + y)$, M je omezena křivkami $y = \pi$, $y = x$, $x = 0$

$$[-2]$$

5. $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$, M je omezena křivkami $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$

$$[\frac{9}{4}]$$

Vypočtete míru $m(M)$ množiny M omezené následujícími křivkami. Nejprve si načrtněte obrázek.

1. $y = 6 - x^2$, $x + y - 4 = 0$

$$[\frac{9}{2}]$$

2. $y = x^2, y = 8 - x^2$

[$\frac{64}{3}$]

3. $x^2 = 4y, x^2 = 8y, y^2 = 2x, y^2 = 4x$

[$\frac{8}{3}$]

Zaměňte pořadí integrace v integrálu. Nejprve si načrtněte obrázek.

1. $\int_a^b \left(\int_a^x f(x, y) dy \right) dx$

[$\int_a^b \left(\int_y^b f(x, y) dx \right) dy$]

2. $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx \right) dy$

[$\int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x, y) dy \right) dx$]

3. $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx$

[$\int_0^1 \left(\int_{y^2}^y f(x, y) dx \right) dy$]

4. $\int_0^2 \left(\int_{y \ln \sqrt{3}}^{\ln(y+1)} f(x, y) dx \right) dy$

[$\int_0^{\ln 3} \left(\int_{e^x-1}^{\frac{2x}{\ln 3}} f(x, y) dy \right) dx$]

7.2 Trojný integrál

Vypočtěte trojný integrál $\int \int \int_M f(x, y, z) dx dy dz$ funkce $f(x, y, z)$ přes kvádr M . Nejprve si načrtněte obrázek.

1. $f(x, y, z) = xy^2z, M = [0, 2] \times [1, 3] \times [1, 2]$

[26]

2. $f(x, y, z) = 6e^{3x+2y+z}, M = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

[$(e^3 - 1)(e^2 - 1)(e - 1)$]

3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2, M = [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]$

[$\frac{8}{3}abc(a^2 + b^2)$]

Vypočtěte trojný integrál $\int \int \int_M f(x, y, z) dx dy dz$ funkce $f(x, y, z)$ přes množinu M . Nejprve si načrtněte obrázek.

1. $f(x, y, z) = z$, M je omezena plochami $z = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 0$, $x + z = 1$

$$\left[\frac{8}{105} \right]$$

2. $f(x, y, z) = z$, M je omezena plochami $x = 0$, $y = x$, $y^2 + z^2 = 1$

$$\left[\frac{1}{8} \right]$$

3. $f(x, y, z) = y \cos(x + z)$, M je omezena plochami $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$

$$\left[\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \right]$$

4. $f(x, y, z) = (x + y)z$, M je osmina koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ležící v 1. oktantu

$$\left[\frac{2}{15} \right]$$

5. $f(x, y, z) = x^2$, M je koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $a > 0$

$$\left[\frac{4}{15} \pi a^5 \right]$$

Vypočtěte míru $m(M)$ množiny M omezené následujícími plochami. Nejprve si načrtněte obrázek.

1. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = \frac{\pi}{2}$, $z = \cos y \sin y$

$$\left[\frac{\pi}{4} \right]$$

2. $z = 0$, $x + y + z = 6$, $y = 0$, $3x + 2y = 12$

$$[4]$$

3. $x = y^2$, $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$

$$\left[\frac{3}{35} \right]$$

4. $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$, $x + y + z = 4$

$$\left[\frac{55}{6} \right]$$

7.3 Transformace integrálu

Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočtěte integrál $\int \int_A f(x, y) dx dy$ funkce $f(x, y)$ přes množinu A omezenou podmínkami:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq |x|$

$$\left[\frac{15}{8} \pi \right]$$

2. $f(x, y) = 2x - 3y$, $A: x^2 + y^2 \leq 9$

$$[0]$$

3. $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $A: x^2 + y^2 \leq 1$

$$\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

4. $f(x, y) = 1$, $A: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq x + y$

$$\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right]$$

Transformujte do polárních souřadnic integrál $\int \int_A f(x, y) dx dy$, kde množina A je omezena podmínkami:

1. $A: a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, y \geq 0, x \geq y$

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_a^b \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho \right) d\varphi \right]$$

2. $A: x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1$

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^1 \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho \right) d\varphi \right]$$

3. $A: x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0$

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4 \cos \varphi} \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho \right) d\varphi \right]$$

Pozn: Zde je možno použít i substituci $x = 2 + \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$, pak je výsledek

$$\left[\int_0^{\pi} \left(\int_0^2 \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho \right) d\varphi \right]$$

Pomocí dané transformace vypočtete integrál $\int \int_A f(x, y) dx dy$ funkce $f(x, y)$ přes množinu A omezenou křivkami:

1. $f(x, y) = x^2 - y + 2$, $A: xy = 1, xy = 4, y = 4x, y = \frac{x}{4}$, transformace: $xy = u, \frac{y}{x} = v$

$$\left[\frac{113}{16} + 12 \ln 2\right]$$

2. $f(x, y) = 1$, $A: x^2 = 4y, x^2 = 8y, y^2 = 2x, y^2 = 4x$, transformace: $\frac{x^2}{y} = u, \frac{y^2}{x} = v$

$$\left[\frac{8}{3}\right]$$

Pomocí transformace do cylindrických souřadnic vypočtete integrál $\int \int \int_A f(x, y, z) dx dy dz$ funkce $f(x, y, z)$ přes množinu A omezenou podmínkami:

1. $f(x, y, z) = xz\sqrt{x^2 + y^2}$, $A: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 3, x \geq 0, y \geq 0$

$$\left[-\frac{135}{8}\right]$$

2. $f(x, y, z) = 1$, $A: x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = y^2$

$$[4\pi]$$

3. $f(x, y, z) = 1$, $A: x^2 + y^2 = x, x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 2$

(Pozn: Zde je možno použít i substituci $x = \frac{1}{2} + \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z$.)

$$\left[\frac{3}{16}\pi + \frac{1}{12}\right]$$

4. $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+z^2+1}$, $A: y \leq 2 - \sqrt{x^2 + z^2}$, $y \geq 1$
(Pozn: Zde je vhodné použít substituci pro rotační těleso s osou rotace v ose y .)

$$\left[2\pi\left(-1 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

5. $f(x, y, z) = 1$, $A: 2z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\left[\frac{4}{3}\pi\right]$$

6. $f(x, y, z) = 4xyz$, $A: z \geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, $x^2 + y^2 \leq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

$$\left[\frac{7}{6}\pi\right]$$

7. $f(x, y, z) = 1$, $A: z = 0$, $z = b$, $b > 0$, $z = \ln(x^2 + y^2)$

$$\left[\pi(e^b - 1)\right]$$

Pomocí transformace do sférických souřadnic vypočtete integrál $\int \int \int_A f(x, y, z) dx dy dz$ funkce $f(x, y, z)$ přes množinu A omezenou podmínkami:

1. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, A je část koule o poloměru 1 ležící v 1. oktantu

$$\left[\frac{\pi}{8}\right]$$

2. $f(x, y, z) = x + y + z$, $A: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

$$[4\pi]$$

3. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $A: z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

$$\left[\frac{15(2-\sqrt{2})}{4}\pi\right]$$

4. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $A: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$

$$\left[\frac{8\pi}{5}\right]$$

5. $f(x, y, z) = 1$, $A: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, $x^2 + y^2 \leq 3z^2$

$$\left[\frac{5\pi}{9}\right]$$

8 Aplikace vícerozměrných integrálů

Pomocí dvojného, resp. trojného integrálu odvoďte obsah, resp. objem rovinného, resp. prostorového tělesa:

(Pozn. Obsah tělesa počítáme stejně jako míru tohoto tělesa jakožto množiny, tj. jako integrál z $f = 1$. Pro určení mezí v integrálu je potřeba si dané těleso vhodně umístit do souřadných os - středy kružnic do počátku, některé strany čtverců přímo do os atd.)

1. čtverec o straně a

$$[a^2]$$

2. obdélník o stranách a a b

$$[ab]$$

3. rovnoramenný trojúhelník o základně a a výšce $\frac{a}{2}$

$$\left[\frac{a^2}{4}\right]$$

4. kruh o poloměru r

$$[\pi r^2]$$

5. krychle o hraně a

$$[a^3]$$

6. hranol o hranách a, b, c

$$[abc]$$

7. jehlan o podstavě tvaru čtverce o straně a a výšce $\frac{a}{2}$

$$\left[\frac{a^3}{6}\right]$$

8. válec o poloměru r a výšce v

$$[\pi r^2 v]$$

9. kužel o poloměru r a výšce v

$$\left[\frac{\pi r^2 v}{3}\right]$$

10. koule o poloměru r

$$\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]$$

9 Křivkový integrál

Vypočtěte délku $L(K)$ křivky K :

1. K je půlkružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$, $r > 0$

$$[L(K) = r\pi; \text{ parametrizace : } x = r \cos t, y = r \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle]$$

2. K je polovina elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $y \geq 0$

$$[L(K) = 7,933; \text{ parametrizace : } x = 3 \cos t, y = 2 \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle]$$

3. K je cykloida $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$

$$[L(K) = 8a]$$

4. K je řetězovka $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $x \in \langle -a, a \rangle$, $a > 0$

$$[L(K) = a(e - \frac{1}{e}); \text{ parametrizace : } x = t, y = \frac{a}{2}(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}), t \in \langle -a, a \rangle]$$

Vypočtěte $\int_K f(x, y, z) ds$, resp. $\int_K f(x, y) ds$:

1. $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, K má parametrizaci $F(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in \langle 0, \ln 2 \rangle$

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

2. $f(x, y, z) = x + y^2 - z$, K je úsečka mezi body $A = [2, -1, 1]$, $B = [1, 3, 3]$

$$\left[\frac{11}{6}\sqrt{21}; \text{ parametrizace : } x = 2 - t, y = -1 + 4t, z = 1 + 2t, t \in \langle 0, 1 \rangle \right]$$

3. $f(x, y) = x^2$, $K = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y = \ln x, x \in \langle 1, 2 \rangle\}$

$$\left[\frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}); \text{ parametrizace : } x = t, y = \ln t, t \in \langle 1, 2 \rangle \right]$$

4. $f(x, y) = |y|$, K je oblouk paraboly $y^2 = 2x$, $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$

$$\left[\frac{3}{2}(2\sqrt{2} - 1); \text{ parametrizace : } x = \frac{t^2}{2}, y = t, t \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

5. $f(x, y) = xy$, K je obdélník o vrcholech $[0, 0]$, $[0, 2]$, $[4, 0]$, $[4, 2]$

(Rada: Obdélník považujte za sjednocení 4 úseček, spojujících vždy 2 vedlejší vrcholy. Integrál přes obdélník je pak součtem 4 integrálů přes úsečku.)

$$[24]$$

6. * $f(x, y) = y$, K je křivka popsaná rovnicí $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, pro $x > 0$, $y > 0$
(Rada: polární souřadnice)

$$\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ parametrizace : } x = \sqrt{\cos 2t} \cos t, y = \sqrt{\cos 2t} \sin t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle \right]$$

Vypočtěte $\int_K A dr$:

1. $A dr = x dx + y dy + z dz$, K je křivka $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (s počátečním bodem $[1, 0, 0]$)

[2π²]

2. $A dr = (2 - y) dx + x dy$, K je křivka $x = t - \sin t$, $y = t - \cos t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

[-2π]

3. $A dr = x dx + y dy + (xz - y) dz$, K je křivka $x = t^2$, $y = 2t$, $z = 4t^2$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ s počátečním bodem $[1, 2, 4]$

[- $\frac{5}{2}$]

4. $A dr = (x + y) dx - 2y dy$, K je část křivky dané rovnicí $y = x^2 + 1$, mezi body $[0, 1]$ a $[2, 5]$

[- $\frac{52}{3}$; parametrizace: $x = t$, $y = t^2 + 1$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$]

5. $A dr = (x + y) dx + (x - y) dy$, K je kladně orientovaná (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček) elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

[0; parametrizace: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$]

6. $A dr = x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n$, K je úsečka v \mathbb{R}^n s počátkem $[1, \dots, 1]$ a koncem $B = [5, \dots, 5]$

[12n; parametrizace: $x_i = t$, $i = 1, \dots, n$, $t \in \langle 1, 5 \rangle$]

Pomocí Greenovy věty vypočtete $\oint_K A dr$:

1. $A dr = (x + 2y) dx + (y - 4x) dy$, K je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 1$

[-6π]

2. $A dr = y dx - x dy$, K je záporně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 2x$

[2π]

3. $A dr = (x + y) dx + (x - y) dy$, K je kladně orientovaná elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

[0]

Dokažte, že $\int_K A dr$ nezávisí na integrační cestě a vypočtete jeho hodnotu pro libovolnou křivku s počátečním bodem A a koncovým bodem B :

1. $A dr = x dx + y dy$, $A = [0, 1]$, $B = [3, -4]$

[12]

2. $A dr = \frac{1}{x^2}(y dx - x dy)$, $A = [1, 2]$, $B = [2, 1]$

[$\frac{3}{2}$]

3. $A dr = \frac{-x dx - y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $A = [2, 5]$, $B = [0, 1]$

$$[\sqrt{29} - 1]$$

4. $A dr = (x + yz) dx + (y + xz) dy + (z + xy) dz$, $A = [0, 0, 0]$, $B = [1, 2, 3]$

$$[13]$$

5. $A dr = y^2 z dx + (2xyz + 1) dy + xy^2 dz$, $A = [1, 2, 1]$, $B = [2, 1, 2]$

$$[-1]$$

6. $A dr = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $A = [1, 1, 1]$, $B = [2, 2, 2]$

$$[\sqrt{3}]$$