

Globální analýza. Cvičení ke kapitolám 13–17

1. Necht' ∇ je lineární konexe na \mathbb{R}^2 s nulovými Christoffelovými symboly vůči souřadnicím x, y . Určete symbol $\Gamma_{r\varphi}^\varphi$ konexe ∇ vůči polárním souřadnicím r, φ .
2. Necht' ∇ je lineární konexe bez torse na varietě M a S je paralelní distribuce na M , tj. $\nabla_Y X \in \Gamma(S)$ pro všechna $X \in \Gamma(S)$, $Y \in \Gamma(TM)$. Ukažte, že distribuce S je involutivní.
3. Necht' dvě konexe Γ_{ij}^k a $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ mají stejné geodetické dráhy. Ukažte, že každá konexe $\alpha\Gamma_{ij}^k + \beta\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ ($\alpha + \beta = 1$) má tytéž geodetické dráhy.
4. Určete metriku na sféře vůči sférickým souřadnicím a vůči souřadnicím definovaným pomocí stereografické projekce.
5. Určete Christoffelovy symboly pro metriku na sféře vůči souřadnicím úlohy 4.
6. Určete R , ∇R , Ric , ∇Ric a skalární křivost metriky na sféře vůči sférickým souřadnicím.
7. Určete delku kružnice $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 1$ vůči metrice $g = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}((dx)^2 + (dy)^2)$.
8. Řešte rovnice paralelního přenosu na sféře s metrikou $(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2$ podél rovnoběžky $\theta = \theta_0$, $\varphi = t \in [-\pi, \pi]$. Určete úhel mezi tečným vektorem ke sféře a jeho obrazem při paralelním přenosu podél této rovnoběžky.