

Globální analýza. Cvičení ke kapitolám 9–10

1. Určete vztah mezi souřadnicemi tenzoru T typu (r, s) na \mathbb{R}^n ve dvou souřadnicových systémech x^1, \dots, x^n a $x^{1'}, \dots, x^{n'}$.
2. Necht' x^1, x^2 a $x^{1'}, x^{2'}$ jsou souřadnicové systémy, pro které

$$x^{1'} = x^1 + x^2, \quad x^{2'} = x^1 x^2.$$

Určete souřadnice tenzoru a vůči druhému systému, jestliže a má následující souřadnice vůči prvnímu systému:

$$\bullet a_{11} = (x^1)^2 + (x^2)^2, \quad a_{12} = x^1, \quad a_{21} = x^2, \quad a_{22} = 1;$$

$$\bullet a_1^1 = x^1, \quad a_1^2 = x^1 + x^2, \quad a_2^1 = x^1 - x^2, \quad a_2^2 = x^2.$$

3. Necht' $w = (x^2 + y^2)dx + xzdz$ a $\theta = zdy \wedge dx + xdz \wedge dx$

Určete dw , $d\theta$, $w \wedge w$, $\theta \wedge \theta$, $w \wedge \theta$, $d(w \wedge w)$, $d(\theta \wedge \theta)$, $d(w \wedge \theta)$.

4. Určete dw , jestliže

$$\bullet w = x^2 y dy - xy^2 dx; \quad \bullet w = x dy + y dx;$$

$$\bullet w = f(x)dx + g(y)dy; \quad \bullet w = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

5. Ověřte, které z následujících 1-forem w jsou uzavřené na D . Určete všechny funkce φ splňující $d\varphi = w$.

$$\bullet w = xy dx + \frac{x^2}{2} dy, \quad D = \mathbb{R}^2;$$

$$\bullet w = x dx + xz dy + xy dz, \quad D = \mathbb{R}^2;$$

$$\bullet w = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(y dx - x dy), \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}.$$

6. Necht' $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(u, v) = (uv, u \cos v, e^v)$ je zobrazení. Určete dw , g^*w , g^*dw pro následující formy w na \mathbb{R}^3 :

$$w = x dy; \quad w = y dz \wedge dx; \quad w = dx \wedge dy \wedge dz.$$