Globální analýza. Cvičení ke kapitole 11

1. Určete $\int_M \omega$, kde

a. $\omega = (x-y)dx + (x+y)dy$ a M je úsečka AB, $A=(2,3)$, $B=(3,5)$;

b. $\omega = ydx + xdy$, $M = \{(\cos t, \sin t) | t \in (0, \frac{\pi}{2})\} \subset \mathbb{R}^2$;

c. $\omega = xdx + ydy + (x+y-1)dz$ a M je úsečka AB, $A=(1,1,1)$, $B=(2,3,4)$.

2. Určete

$$\int_M dx_3 \wedge dx_4 + x_1 x_3 dx_2 \wedge dx_4,$$

kde $M = T^2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\}$. Uvažujte parametrizaci $g(u,v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$, $(u,v) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$.

3. Pomocí Stokesovy věty určete $\int_M \omega$, kde

a. $\omega = (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$ a M je obvod trojúhelníku s vrcholy $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(0,1)$;

b. $\omega = xydy \wedge dz + yzdz \wedge dx + xzdx \wedge dy$ a M je hranice standardního trojrozměrného simplexu v $\mathbb{R}^3$.

4. Ukažte, že 2-forma $\omega = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ je uzavřená, ale není exaktní.