

Globální analýza. Cvičení ke kapitole 8

1. Necht' $A \in \otimes^r V$, $r \geq 2$. Ukažte, že platí následující tvrzení:
 $\text{Sym}A \in S^r V$; $A \in S^r V \Leftrightarrow \text{Sym}A = A$; $\text{Alt}A \in \Lambda^r V$; $A \in \Lambda^r V \Leftrightarrow \text{Alt}A = A$;
 $\text{Sym}(\text{Sym}A) = \text{Sym}A$; $\text{Alt}(\text{Alt}A) = \text{Alt}A$; $\text{Sym}(\text{Alt}A) = 0$; $\text{Alt}(\text{Sym}A) = 0$;
 $\Lambda^r V \cap S^r V = \{0\}$.
2. Určete dimenzi prostorů $\Lambda^r V$, $S^2 V$, $S^3 V$, jestliže $\dim V = n$.
3. Ukažte, že $\otimes^2 V = S^2 V \oplus \Lambda^2 V$.
4. Necht' $A \in \Lambda^2 V$, $B \in V$ jsou tenzory se souřadnicemi A^{ij} a B^i . Určete souřadnice tensoru $A \wedge B$.
5. Necht' $A \in \otimes^2 \mathbb{R}^2 \otimes (\mathbb{R}^2)^*$ je tensor se souřadnicemi
 $A_1^{11} = 3$, $A_2^{11} = 0$, $A_1^{12} = 2$, $A_2^{12} = 1$,
 $A_1^{21} = 0$, $A_2^{21} = 1$, $A_1^{22} = 0$, $A_1^{11} = 5$.
Určete kontrakce dolního indexu s každým z horních indexů.
6. Určete vztah mezi souřadnicemi $A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$ a $A_{j'_1, \dots, j'_s}^{i'_1, \dots, i'_r}$ tenzoru $A \in \otimes^r V \otimes \otimes^s V^*$ v různých bázích.