Globální analýza. Cvičení ke kapitolám 1–3

1. Vypočtěte Jakobiho matice a Jakobiány (pokud existují) následujících zobrazení. Které z těchto zobrazení jsou imerse, submerse a difeomorfismy na svůj obraz?

1) $x = 3\rho \cos t, \quad y = 4\rho \sin t, \quad (\rho, t) \in (0,1) \times (0, 2\pi)$.

2) $x = \cos u \cos v, \quad y = \sin u \cos v, \quad z = \sin v, \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

3) $x = \sqrt{\rho} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\rho} \sin \varphi, \quad z = \rho, \quad (\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$.

4) $x = \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \quad y = \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Dokažte, že podmnožina $M = \{(x, y) | \, xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ není podvarietou prostoru $\mathbb{R}^2$ (návod: předpokládejte, že existuje difeomorfismus ψ nějakého okolí U bodu $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ na otevřenou podmnožinu v $\mathbb{R}^2$, který zobrazuje $M \cap U$ na podmnožinu množiny $\{(x, 0) | \, x \in \mathbb{R}\}$ a ukažte, že Jakobián zobrazení ψ v bodě $(0,0)$ je roven 0).

3. Dokažte, že trojúhelník není podvarietou roviny.

4. Ukažte, že množina $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ všech čtvercových matic n-tého řádu s nenulovým determinantem je podvarietou prostoru $\mathbb{R}^{n^2}$. Určete její dimenzi.

5. Ukažte, že množina $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ všech čtvercových matic n-tého řádu s determinantem 1 je podvarietou prostoru $\mathbb{R}^{n^2}$. Určete její dimenzi.

6. Necht' $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ a $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ jsou m_1 a m_2 rozměrné podvariety. Dokažte, že $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ je $(m_1 + m_2)$-rozměrnou podvarietou.

7. Ukažte aspoň dvěma způsoby, že anuloid (též torus) $T^m = S^1 \times \cdots \times S^1$ je podvarietou prostoru $\mathbb{R}^{2m}$.

8. Dokažte, že graf zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ třídy C^r je n-rozměrnou podvarietou prostoru $\mathbb{R}^{n+m}$ třídy C^r.