

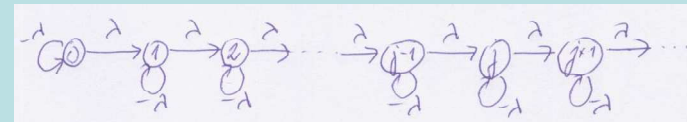
14. Poissonův proces

14.1. Definice: Definice Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{0, 1, 2, \dots\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$ a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda > 0 \text{ je konstanta, nazývá se } \text{intenzita}.$$

Přechodový diagram:



Tento HMŘ se nazývá **Poissonův proces** (s parametrem λ).

(Vidíme, že v Poissonově procesu je možné jen setrvání v dosavadním stavu nebo přechod do nejbližšího vyššího stavu.)

Vysvětlení: Poissonův proces popisuje např. náhodné a navzájem nezávislé události. Náhodná veličina $X_t \in \{0, 1, \dots\}$ udává počet událostí, které nastanou v intervalu $(0, t)$. Přitom střední hodnota počtu událostí, které nastanou za časovou jednotku, je konstanta $\lambda > 0$. Pravděpodobnost $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ vyjadřuje, že v intervalu $(0, t)$ nenastala žádná událost. Označíme-li S dobu čekání na změnu mezi stavy (tj. dobu čekání na příchod události resp. dobu setrvání ve stavu), pak $P(S > t) = e^{-\lambda t}$, tedy

$$P(S \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \text{ To znamená, že je-li rozložení počtu událostí, které nastaly v intervalu } (0, t) \text{ Poissonovo, je}$$

rozložení doby čekání na změnu resp. doby setrvání ve stavu exponenciální.

Příklady uvažovaných událostí:

- dopady částic kosmického záření zaznamenávané čítačem částic
- rozpady radioaktivního prvku
- výzvy přicházející do telefonní ústředny
- dopravní nehody registrované na nějakém silničním úseku
- poruchy automatického stroje
- příchody zákazníků do nějakého systému obsluhy apod.

Upozornění: U těchto praktických příkladů není splněn předpoklad, že intenzita výskytu událostí λ je nezávislá na čase.

Provoz v telefonní ústředně je jistě živější dopoledne než večer; silniční provoz záleží jak na denní době tak na dnu v týdnu; množství radioaktivní látky časem ubývá a tedy ubývá i intenzita rozpadu jejích atomů; poruchovost stroje se může zvyšovat s jeho opotřebením apod. Často se ale sleduje výskyt těchto událostí jen po nějakou omezenou dobu, během níž lze předpokládat neměnnost intenzity λ .

14.2. Věta: Věta o pravděpodobnostním rozložení složek Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Pak platí: $\forall t \in T \forall j \in J : p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$.

Vysvětlení: Náhodná veličina X_t , která udává např. počet zákazníků, kteří přijdou do fronty v intervalu $(0, t)$, se řídí rozložením $Po(\lambda t)$. Číslo $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ udává pravděpodobnost, že v intervalu $(0, t)$ nenastane žádná změna.

Důkaz: Sestavíme systém evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$.

$$(\mathbf{p}'_0(t), \mathbf{p}'_1(t), \mathbf{p}'_2(t), \dots) = (\mathbf{p}_0(t), \mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \dots) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \begin{cases} \mathbf{p}'_0(t) = -\lambda \mathbf{p}_0(t) \\ \mathbf{p}'_1(t) = \lambda \mathbf{p}_0(t) - \lambda \mathbf{p}_1(t) \\ \mathbf{p}'_2(t) = \lambda \mathbf{p}_1(t) - \lambda \mathbf{p}_2(t) \\ \vdots \end{cases}$$

Obecně: $\mathbf{p}'_j(t) = \lambda \mathbf{p}_{j-1}(t) - \lambda \mathbf{p}_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}_0(0) = 1$, $\mathbf{p}_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \dots$

Při řešení těchto rovnic použijeme LT.

Obraz 1. rovnice: $zP_0(z) - p_0(0) = 1 = -\lambda P_0(z) \Rightarrow P_0(z) = \frac{1}{z + \lambda} \Rightarrow p_0(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{z + \lambda}\right) = e^{-\lambda t}$

Obraz 2. rovnice: $zP_1(z) - p_1(0) = 0 = \lambda P_0(z) - \lambda P_1(z) \Rightarrow P_1(z) = \frac{\lambda}{(z + \lambda)^2} \Rightarrow p_1(t) = L^{-1}\left(\frac{\lambda}{(z + \lambda)^2}\right) = \lambda t e^{-\lambda t}$

Obraz 3. rovnice: $zP_2(z) - p_2(0) = 0 = \lambda P_1(z) - \lambda P_2(z) \Rightarrow P_2(z) = \frac{\lambda^2}{(z + \lambda)^3} \Rightarrow p_2(t) = L^{-1}\left(\frac{\lambda^2}{(z + \lambda)^3}\right) = \frac{1}{2!} (\lambda t)^2 e^{-\lambda t}$

Obecně: $p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$, $j = 0, 1, 2, \dots$

14.3. Příklad: Majitel obchodu s potravinami zjistil, že v ranní špičce přichází do obchodu průměrně 20 zákazníků za 5 minut. Majitelova manželka se domnívá, že v průběhu 10 minut může očekávat v průměru 30 zákazníků, zatímco optimističtější majitel v průběhu 10 minut očekává 40 zákazníků. Který odhad je pravděpodobnější?

Řešení:

Příchody zákazníků do obchodu lze modelovat Poissonovým procesem $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = j$, když za časový interval $(0, t)$ přijde do obchodu právě j zákazníků, $j = 0, 1, 2, \dots$

Parametr procesu (intenzita procesu): $\lambda = \frac{20}{5} = 4$ zákazníci za 1 minutu .

Podle předpokladu: $X_t \sim \text{Po}(4t)$, tedy $P(X_t = j) = \frac{(4t)^j}{j!} e^{-4t}$

Odhad manželky: $P(X_{10} = 30) = \frac{(4 \cdot 10)^{30}}{30!} e^{-4 \cdot 10} = p_{30}(10) = 0,01847$

V MATLABu: `poisspdf(30,40)`

Odhad manžela: $P(X_{10} = 40) = \frac{(4 \cdot 10)^{40}}{40!} e^{-4 \cdot 10} = p_{40}(10) = 0,06297$

V MATLABu: `poisspdf(40,40)`

Optimistický odhad majitele je pravděpodobnější než opatrný odhad jeho manželky.

14.4. Věta: Věta o pravděpodobnostech přechodu v Poissonově procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Pak platí: $\forall t \in T \forall i, j \in J: p_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & \text{pro } j \geq i \\ 0 & \text{pro } j < i \end{cases}$.

Důkaz: Z matice intenzit přechodu plyne, že jediný přechod s nenulovou pravděpodobností je přechod do stavu o 1 vyššího.

Přitom počáteční stav je nulový, tedy $p_j(t) = p_{0j}(t)$. V důsledku homogenity: $p_{ij}(t) = p_{0,j-i}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & \text{pro } j \geq i \\ 0 & \text{pro } j < i \end{cases}$.

14.5. Věta: Věta o střední hodnotě a rozptylu Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Pak $E(X_t) = \lambda t$, $D(X_t) = \lambda t$.

Důkaz: Plyne z vlastností Poissonova rozložení, protože $X_t \sim \text{Po}(\lambda t)$.

14.6. Věta: Věta o rozložení doby setrvání řetězce v daném stavu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Označme S_j dobu, kterou řetězec setrvá ve stavu $j-1$, $j = 1, 2, \dots$. Pak $S_j \sim \text{Ex}(\lambda)$ a střední hodnota doby setrvání řetězce ve stavu $j-1$ je $\frac{1}{\lambda}$.

Důkaz: Plyne z věty 12.8.

14.7. Věta: Věta o nezávislosti dob setrvání řetězce v daných stavech

Náhodné veličiny S_j , $j = 1, 2, \dots$ jsou stochasticky nezávislé.

Důkaz: Nebudeme provádět.

14.8. Příklad: Na autobusovou zastávku přijíždějí autobusy linek č. 1 a č. 2. Předpokládáme, že příjezdy autobusů obou linek tvoří události Poissonových procesů s parametry λ_1, λ_2 , přičemž tyto procesy probíhají nezávisle na sobě. Vypočtěte pravděpodobnost, že za časový interval délky t přijede na zastávku právě k autobusů.

Řešení:

Označme X_t počty příjezdů linky č. 1 v intervalu $(0, t)$, $X_t \sim \text{Po}(\lambda_1 t)$, $P(X_t = j) = \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} e^{-\lambda_1 t}$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Označme Y_t počty příjezdů linky č. 2 v intervalu $(0, t)$, $Y_t \sim \text{Po}(\lambda_2 t)$, $P(Y_t = j) = \frac{(\lambda_2 t)^j}{j!} e^{-\lambda_2 t}$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Dále označme Z_t počty příjezdů autobusů obou linek v intervalu $(0, t)$, $Z_t = X_t + Y_t$. Máme počítat $P(Z_t = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Podle věty o rozložení součtu dvou stochasticky nezávislých náhodných veličin dostáváme:

$$P(Z_t = k) = \sum_{j=0}^k P(X_t = j)P(Y_t = k - j) = \sum_{j=0}^k \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_2 t)^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda_2 t} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda_1 t)^j (\lambda_2 t)^{k-j} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

Znamená to, že $Z_t \sim \text{Po}((\lambda_1 + \lambda_2)t)$.

14.9. Věta: Věta o bodovém a intervalovém odhadu parametru λ Poissonova procesu

Nechť v intervalu $\langle 0, T \rangle$ byl sledován Poissonův proces s neznámým parametrem λ a bylo pozorováno n událostí.

a) Bodový odhad parametru λ je dán vzorcem: $\hat{\lambda} = \frac{n}{T}$, přičemž $E(\hat{\lambda}) = \lambda$ (tj. $\hat{\lambda}$ je nestranný odhad) a $D(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{T}$.

b) $100(1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro λ má meze: $d = \frac{1}{2T} \chi^2_{\alpha/2}(2n+2)$, $h = \frac{1}{2T} \chi^2_{1-\alpha/2}(2n+2)$.

14.10. Příklad: Na určitém zařízení byly po dobu 580 h sledovány poruchy. Za tuto dobu jich nastalo 22. Za předpokladu, že poruchy tvoří události Poissonova procesu s parametrem λ , odhadněte tento parametr a najděte pro něj 95% empirický interval spolehlivosti.

Řešení:

$$T = 580, n = 22, \text{ tedy } \hat{\lambda} = \frac{n}{T} = \frac{22}{580} = 0,0379$$

$$d = \frac{1}{2T} \chi^2_{\alpha/2}(2n+2) = \frac{1}{2 \cdot 580} \chi^2_{0,025}(46) = \frac{1}{1160} 29,2 = 0,0252$$

$$h = \frac{1}{2T} \chi^2_{1-\alpha/2}(2n+2) = \frac{1}{2 \cdot 580} \chi^2_{0,975}(46) = \frac{1}{1160} 66,6 = 0,0574$$

$0,0252 < \lambda < 0,0574$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

14.11. Poznámka: Poissonův proces lze v MATLABu simulovat pomocí funkce Poisson.m:

```
function [v,abscet,relcet,p, tabulka1, tabulka2]=Poisson(CPS,lambda,t)
```

```
%vstupni parametry
```

```
%CPS ... celkovy pocet simulovanych prichodu zakazniku
```

```
%lambda ... intenzita vstupniho proudu zakazniku
```

```
%t ... casovy krok
```

```
%vystupni parametry
```

```
%v ... vektor variant poctu zakazniku
```

```
%abscet ... abs. cetnosti jednotlivych variant
```

```
%relcet ... relativni cetnosti jednotlivych variant
```

```
%p ... pravdepodobnosti jednotlivych variant
```

```
%tabulka1 ... empiricke a teoreticke charakteristiky simulovaneho poctu
```

```
%zakazniku
```

```
%tabulka2 ... empiricke a teoreticke charakteristiky doby simulace
```

Tuto funkci použijeme při řešení následujícího příkladu.

14.12. Příklad: V sobotu v době od 8 do 20 h sledujeme provoz v klidné ulici ve vilové čtvrti města. V tomto období vjíždějí auta do této ulice v průměru každých 8 minut. Předpokládejme, že intervaly mezi příjezdy aut se řídí exponenciálním rozložením. Pomocí MATLABu simulujte vjezd 20 aut do této ulice.

Řešení: V tomto případě jsou vstupní parametry tyto: CPS = 20, lambda = 1/8, časový krok zvolíme např. t = 8.

Teoretická celková doba simulace by měla být $20 \cdot 8 = 160$ min, průměr = 8 min, směrodatná odchylka = 8 min.)

[v,abscet,relcet,p, tabulka1, tabulka2]=Poisson(CPS,lambda,t)

Počet aut, která vjíždějí vždy během 8 minut	Abs. četnost	Rel. četnost	pravděpodobnost
0	15	0,5357	0,3679
1	6	0,2143	0,3679
2	6	0,2143	0,1839
4	1	0,0357	0,0153

Průměrný počet aut za časový krok: 0,7857

Střední hodnota počtu aut za časový krok: 1

Pozorovaná směr. odch. počtu aut za časový krok: 1,0313

Směrodatná odchylka počtu aut za časový krok: 1

Celková doba simulace: 214,7869

Teoretická celková doba simulace: $20 \cdot 8 = 160$

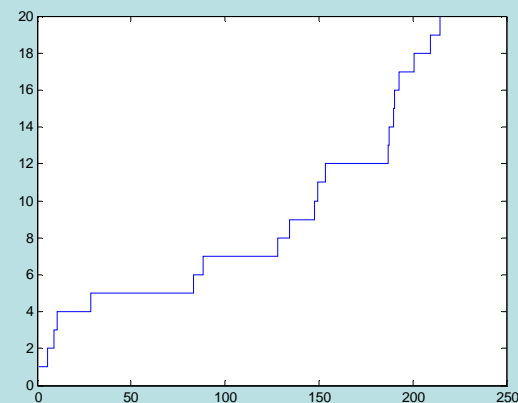
Průměrná doba mezi vjezdy aut: 10,7393

Střední hodnota doby mezi vjezdy aut: 8

Pozorovaná směr. odch. doby mezi vjezdy aut: 14,8255

Směrodatná odchylka doby mezi vjezdy aut: 8

Realizace Poissonova procesu:



15. Proces vzniku a zániku

15.1. Motivace: Budeme se zabývat popisem kolísání rozsahu souboru objektů v čase za předpokladu, že

a) v náhodných okamžicích vstupují do tohoto souboru nové objekty, přičemž pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t + h)$ vstoupí do souboru rozsahu j nový objekt, je $\lambda_j h + o(h)$, kde $\lambda_j > 0$ je **intenzita vstupu do stavu j** ;

b) v náhodných okamžicích vystupují z tohoto souboru jiné objekty, přičemž pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t + h)$ vystoupí ze souboru rozsahu j jeden objekt, je $\mu_j h + o(h)$, kde $\mu_j > 0$ je **intenzita výstupu ze stavu j** ;

c) vstupy a výstupy objektů jsou stochasticky nezávislé jevy;

d) během krátkého časového intervalu zůstává rozsah souboru týž nebo se jedničku zvětší či zmenší.

Bude nás především zajímat, jak se chová rozsah tohoto souboru po dostatečně dlouhé době, tj. po odeznění vlivu počátečních podmínek.

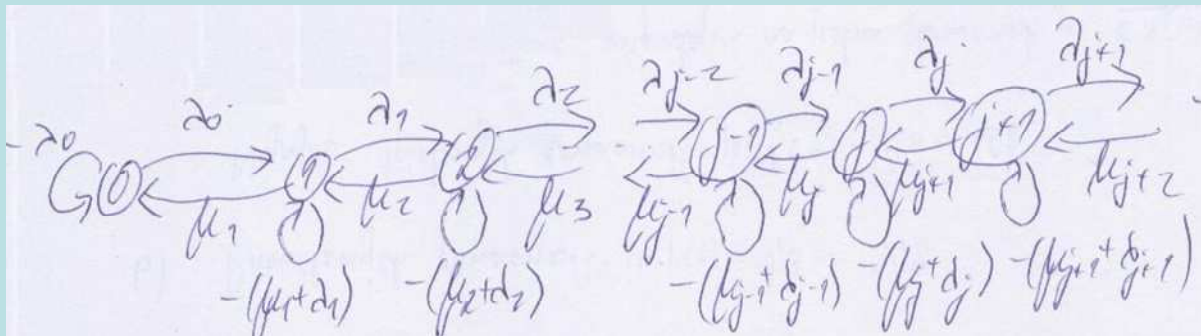
15.2. Definice: Definice procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{0, 1, 2, \dots\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$ a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda_j > 0, j=0,1,2,\dots \text{ a } \mu_j > 0, j=1,2,\dots \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá **proces vzniku a zániku** (resp. množení a úmrtí).

Přechodový diagram:



Upozornění: Je zřejmé, že Poissonův proces je speciálním případem procesu vzniku a zániku, v němž

$\mu_j = 0, j = 1, 2, \dots$ a $\lambda_j = \lambda, j = 0, 1, 2, \dots$

15.3. Věta: Stacionární rozložení procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je proces vzniku a zániku s intenzitami vzniku $\lambda_j > 0, j=0,1,2,\dots$ a intenzitami zániku $\mu_j > 0, j=1,2,\dots$

Pak stacionární rozložení tohoto procesu je dáno vzorcem: $\forall j \in J: a_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j} a_0$, kde $a_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j}}$ za

předpokladu, že řada $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j}$ absolutně konverguje. Jinak stacionární rozložení neexistuje.

Důkaz: Hledáme řešení systému rovnic $\mathbf{aQ} = \mathbf{0}$, $a_0 + a_1 + \dots = 1$, tj.

$(a_0, a_1, a_2, \dots) \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (0, 0, 0, \dots),$	$-\lambda_0 a_0 + \mu_1 a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} a_0$
$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = 1$	$-\lambda_{j-1} a_{j-1} - (\mu_j + \lambda_j) a_j + \mu_{j+1} a_{j+1} = 0, j=1, 2, \dots \Rightarrow$ $a_{j+1} = -\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_{j+1}} a_{j-1} + \frac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_{j+1}} a_j$
	$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = 1$

Nechť $j = 1: a_2 = -\frac{\lambda_0}{\mu_2} a_0 + \frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_2} a_1 = -\frac{\lambda_0}{\mu_2} a_0 + \frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} a_0 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} a_0$

Obecně: $a_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j} a_0$, přičemž $1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j} a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j}}$, pokud

řada $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j}$ absolutně konverguje.

15.4. Příklad: Necht' $\{X_t; t \in T\}$ je proces vzniku a zániku s množinou stavů $j = \{0,1\}$, intenzitou vzniku λ a intenzitou zániku μ . Najděte:

- a) vektor absolutních pravděpodobností $\mathbf{p}(t)$
- b) matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}(t)$
- c) stacionární rozložení \mathbf{a} .

Řešení: Matice intenzit přechodu: $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$

Ad a) Sestavíme systém evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = (1,0)$.

$$(p_0'(t), p_1'(t)) = (p_0(t), p_1(t)) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}, p_0(t) + p_1(t) = 1 \Rightarrow p_1(t) = 1 - p_0(t)$$

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \Rightarrow p_0'(t) = -\lambda p_1(t) + \mu - \mu p_0(t) \Rightarrow p_0'(t) + (\lambda + \mu)p_0(t) = \mu, p_0(0) = 1$$

$$\text{Laplaceův obraz: } zP_0(z) - p_0(0) = 1 + (\lambda + \mu)P_0(z) = \frac{\mu}{z} \Rightarrow P_0(z) = \frac{\lambda + \mu}{z(z + \lambda + \mu)} \Rightarrow P_0(z) = \frac{\mu}{z} + \frac{\lambda}{z + \lambda + \mu}$$

$$p_1(t) = L^{-1} \left(\frac{\mu}{z} + \frac{\lambda}{z + \lambda + \mu} \right) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, \quad p_1(t) = 1 - p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

$$\text{Celkem: } \mathbf{p}(t) = \frac{1}{\lambda + \mu} (\mu + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t}, \lambda - \lambda e^{-(\lambda + \mu)t})$$

Ad b) Pravděpodobnosti přechodu určíme např. ze systému Kolmogorovových retrospektivních diferenciálních rovnic

$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$ s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$.

$$\begin{pmatrix} p_{00}'(t) & p_{01}'(t) \\ p_{10}'(t) & p_{11}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \text{ pro řešení tohoto systému opět využijeme Laplaceovu}$$

transformaci a získáme výsledek:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \mu + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t} & \lambda - \lambda e^{-(\lambda + \mu)t} \\ \mu - \mu e^{-(\lambda + \mu)t} & \lambda + \mu e^{-(\lambda + \mu)t} \end{pmatrix}.$$

Ad c) Stacionární rozložení můžeme určit několika způsoby. Podle věty 15.3. máme:

$$a_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad a_1 = 1 - a_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

$$\text{Celkem: } \mathbf{a} = \frac{1}{\lambda + \mu}(\mu, \lambda)$$