16. Speciální případy procesu vzniku a zániku

16.1. Definice: Definice lineárního procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (0, 1, 0, …) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -2(\mu+\lambda) & 2\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda > 0, \mu > 0 \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá lineární proces vzniku a zániku s intenzitami λ, μ.

(Intenzity přechodu jsou lineárními funkcemi pořadí stavů, v nichž byl proces v předešlém okamžiku,

tj. $\lambda_j = j\lambda$, j = 0, 1, 2, … $\mu_j = j\mu$, j = 1, 2, …)

16.2. Věta: Věta o absolutních pravděpodobnostech v lineárním procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces vzniku a zániku s intenzitami λ, μ. Pak absolutní pravděpodobnosti jsou dány vztahy:

Pro λ = μ: $p_0(t) = \dfrac{\lambda t}{1+\lambda t}$, $p_j(t) = \dfrac{(\lambda t)^{j-1}}{(1+\lambda t)^{j+1}}, j = 1,2,\dots$

Pro λ ≠ μ zavedeme označení $A(t) = \dfrac{1-e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}$. Pak $p_0(t) = \mu A(t)$, $p_j(t) = [1-\lambda A(t)][1-\mu A(t)][\lambda A(t)]^{j-1}, j = 1,2,\dots$

Důkaz: Uvedené vztahy získáme řešením systému evolučních diferenciálních rovnic.

16.3. Důsledek: Pravděpodobnost zániku

Pravděpodobnost, že soubor objektů v čase t zanikne, je $P(X_t = 0) = p_0(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda t}{1+\lambda t} \text{ pro } \lambda = \mu \\ \mu A(t) \text{ pro } \lambda \neq \mu \end{cases}$. Limitním přechodem pro $t \to \infty$ zjistíme, že limitní pravděpodobnost zániku je $\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \begin{cases} 1 \text{ pro } \lambda \leq \mu \\ \dfrac{\mu}{\lambda} \text{ pro } \lambda > \mu \end{cases}$.

16.4. Věta: Střední hodnota a rozptyl rozsahu souboru

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces vzniku a zániku s intenzitami λ, μ. Předpokládejme, že v čase t = 0 má soubor rozsah $k_0 \geq 1$. Pak pro střední hodnotu a rozptyl rozsahu souboru v čase t > 0 platí:

Pro λ = μ: $E(X_t) = k_0,\ D(X_t) = 2k_0\lambda t$.

Pro λ ≠ μ: $E(X_t) = k_0 e^{(\lambda-\mu)t},\ D(X_t) = k_0 \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} e^{(\lambda-\mu)t}\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right]$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

16.5. Poznámka: Limitním přechodem pro $t \to \infty$ zjistíme, že limitní střední hodnota rozsahu souboru je

$$\lim_{t\to\infty} E(X_t) = \begin{cases} k_0 \text{ pro } \lambda = \mu \\ 0 \text{ pro } \lambda < \mu \\ \infty \text{ pro } \lambda > \mu \end{cases}$$

16.6. Příklad: Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces vzniku a zániku s množinou stavů J = {0, 1, 2}, intenzitou vzniku λ = 0,01 a intenzitou zániku μ = 0,001.

a) Jaká je pravděpodobnost, že proces zanikne v čase t = 100?

b) Jaká je limitní pravděpodobnost zániku?

Řešení:

Ad a) Podle důsledku 16.3. $p_0(t) = \mu \frac{1-e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}$, tedy $p_0(100) = 0{,}001 \frac{1-e^{0,9}}{0{,}001 - 0{,}01e^{0,9}} = 0{,}0619$

Pravděpodobnost, že v čase t = 100 proces zanikne, je 6,2 %.

Ad b) $\lim\limits_{t \to \infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{0{,}001}{0{,}01} = 0{,}1$

Limitní pravděpodobnost zániku je 10 %.

16.7. Příklad: V příkladu 16.6. předpokládejme, že v čase t = 0 soubor obsahoval 20 objektů. Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka rozsahu souboru v čase t = 100?

Řešení:

$$E(X_t) = k_0 e^{(\lambda-\mu)t} = 20e^{0,9} = 49{,}1921, \sqrt{D(X_t)} = \sqrt{k_0 \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} e^{(\lambda-\mu)t}\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right]} = \sqrt{20 \frac{11}{9} e^{0,9}\left(e^{0,9} - 1\right)} = 9{,}3679$$

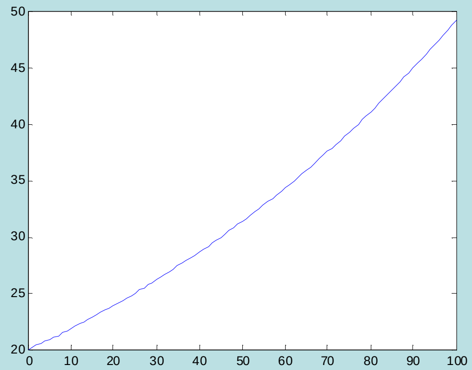
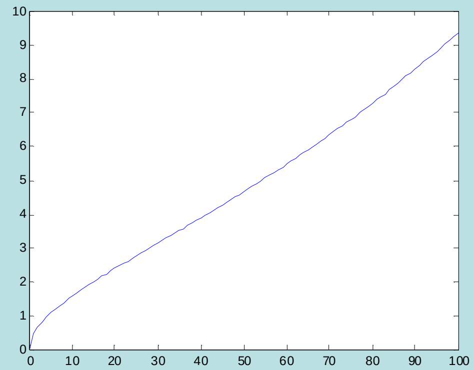
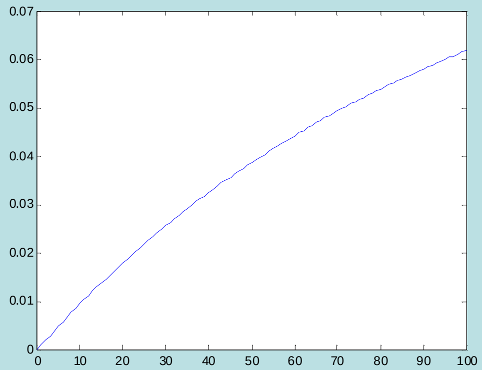
16.8. Poznámka: Vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku lze v MATLABu ilustrovat pomocí funkce lpvz.m:

```
function [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
% funkce lpvz ilustruje vlastnosti linearniho procesu vzniku a zaniku
% syntaxe: [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
% vstupni parametry:
% lambda je intenzita vzniku, mi intenzita zaniku
% tau je konecny cas, k0 rozsah souboru v case t=0
% vystupni parametry:
% M je vektor strednich hodnot rozsahu souboru v case t=0 az tau
% S je vektor smerodatnych odchylek rozsahu souboru v case t=0 az tau
% P je pravdepodobnost zaniku souboru v case t=0 az tau
t=[0:tau]';
M=k0*exp((lambda-mi).*t);
S=sqrt(k0*((lambda+mi)/(lambda-mi))*exp((lambda-mi).*t).*(exp((lambda-mi).*t)-1));
P=mi*((1-exp((lambda-mi).*t)))./(mi-lambda*exp((lambda-mi).*t));
plot(t,M)
figure
plot(t,S)
figure
plot(t,P)
```

Použijeme tuto funkci pro proces popsaný v př. 16.6. a 16.7.

lambda=0.01;mi=0.001;tau=100;k0=20;

Dostaneme

<table>
<tr>
<td>graf závislosti středních hodnot rozsahu souboru na čase</td>
<td>graf závislosti směrodatných odchylek rozsahu souboru na čase</td>
<td>graf závislosti pravděpodobnosti zániku na čase</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

16.9. Definice: Definice Erlangova procesu

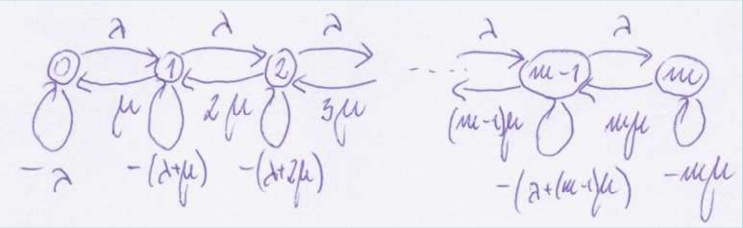
Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je proces vzniku a zániku, který má konečnou množinu stavů J = {0, 1, 2, …, m}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0, …, 0) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (m-1)\mu & -((m-1)\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m\mu & -m\mu \end{pmatrix}$$, kde $\lambda > 0$ a $\mu > 0$ jsou konstanty.

Tento řetězec se nazývá Erlangův proces.

Vysvětlení: Erlangův proces charakterizuje např. provoz telefonní ústředny, do níž vede m linek. Nechť X_t je počet obsazených linek v okamžiku t, X_t = 0, 1, …, m. Počet obsazených linek se v krátkém časovém intervalu můžem změnit jen o jedničku. Intenzita nové výzvy je λ, zatímco intenzita ukončování hovoru je úměrná momentálnímu počtu obsazených linek s koeficientem úměrnosti μ. Výzva, která přichází k plně obsazené telefonní ústředně, se ztrácí.

Přechodový diagram:



Agner Krarup Erlang (1878 – 1929) byl dánský matematik, jako první se vědecky zabýval problematikou telefonních sítí. Pracoval 20 let pro Kodaňskou telefonní společnost. Na jeho počest byl zaveden 1 erlang jako jednotka telefonního provozu.

16.10. Věta: Věta o stacionárním rozložení Erlangova procesu

Stacionární rozložení Erlangova procesu je dáno vzorcem: $a_j = \dfrac{\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k},\ j = 0,1,\ldots,m$. Stacionární rozložení existuje vždy.

Důkaz: Hledáme řešení systému **aQ** = **0**, $\sum_{j=0}^{m} a_j = 1$.

$$(a_0, a_1, \ldots, a_m)\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)\mu & -((m-1)\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & m\mu & -m\mu \end{pmatrix} = (0,0,\ldots,0)$$

$$\lambda a_0 + \mu a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda}{\mu} a_0$$

$$\lambda a_{j-1} - (\lambda + j\mu)\mu a_j + (j+1)\mu a_{j+1} = 0 \Rightarrow a_{j+1} = \frac{1}{j+1}\left(-\frac{\lambda}{\mu} a_{j-1} + \frac{\lambda + j\mu}{\mu} a_j\right), j = 1,2,\ldots,m-1$$

$$\lambda a_{m-1} - m\mu = 0$$

Nechť j = 1: $a_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{\mu}a_0 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}a_1\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{\mu}a_0 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{\mu}a_0\right) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 a_0$. Obecně: $a_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j a_0,\ j = 1,2,\ldots,m$.

Přitom $1 = \sum_{j=0}^{m} a_j = \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j a_0 \Rightarrow a_0 = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}$. Celkem: $a_j = \dfrac{\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k},\ j = 0,1,\ldots,m$

16.11. Příklad: V dílně pracují tři opraváři. Do této dílny přichází v průměru 24 zákazníků za 1 h. Jestliže příchozí zákazník najde volného opraváře, je k němu přiřazen a začne oprava. Jestliže není žádný opravář volný, zákazník nečeká a odchází. Předpokládáme, že doba opravy se řídí exponenciálním rozložením, přičemž průměrná doba opravy je 5 min.

a) Jakou procentuální část pracovní doby jsou opraváři nevyužiti?

b) Kolik procent potenciálních zákazníků je odmítnuto?

c) Jaký je průměrný počet obsluhujících opravářů?

Řešení: Zavedeme Erlangův proces $\{X_t; t \in T\}$, kde X_t je počet obsluhujících opravářů v okamžiku t, X_t = 0, 1, 2, 3.

Přitom $\lambda = 24, \mu = \frac{1}{\frac{1}{12}} = 12, \frac{\lambda}{\mu} = 2, m = 3$

Ad a) $a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{3} \frac{1}{j!} 2^j} = \left(1 + 2 + \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{6}2^3\right)^{-1} = \frac{3}{19} = 0{,}158$, tedy 15,8 % pracovní doby opraváři nepracují.

Ad b) Zákazník bude odmítnut, když budou všichni tři opraváři pracovat. Počítáme $a_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 a_0 = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \frac{3}{19} = 0{,}211$, tedy 21,1 % potenciálních zákazníků bude odmítnuto.

Ad c) Vypočítáme zbylé složky stacionárního rozložení **a** = (a_0, a_1, a_2, a_3): $a_1 = \frac{\lambda}{\mu} a_0 = \frac{6}{19}$, $a_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 a_0 = \frac{6}{19}$

Střední hodnota počtu obsluhujících opravářů: $\sum_{j=0}^{3} j a_j = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = \frac{6}{19} + \frac{12}{19} + \frac{12}{19} = \frac{30}{19} = 1{,}579$.

16.12. Poznámka: Stacionární rozložení Erlangova procesu můžeme vypočítat v MATLABu pomocí funkce Erlang.m:

```
function [a]=Erlang(m,lambda,mi)
% funkce na vypocet stacionarniho rozlozeni Erlangova procesu
% syntaxe: [a]=Erlang(m,lambda,mi)
% vstupni parametry:
% m ... nejvyssi poradove cislo v mnozine stavu
% lambda ... intenzita vzniku
% lambda ... intenzita zaniku
% vystupni parametr
% a ... vektor stacionarnich pravdepodobnosti
a0=1/sum(((lambda/mi).^(0:m)).*(1./(factorial(0:m))));
a=((lambda/mi).^(1:m)).*(1./(factorial(1:m)))*a0;
a=[a0 a];
```

Použijeme tuto funkci pro řešení příkladu 16.3.:

```
m=3;lambda=24;mi=12;
a=Erlang(m,lambda,mi)
```

Dostaneme výsledek:

```
a =
    0.1579    0.3158    0.3158    0.2105
```

16.13. Definice: Definice procesu vzniku

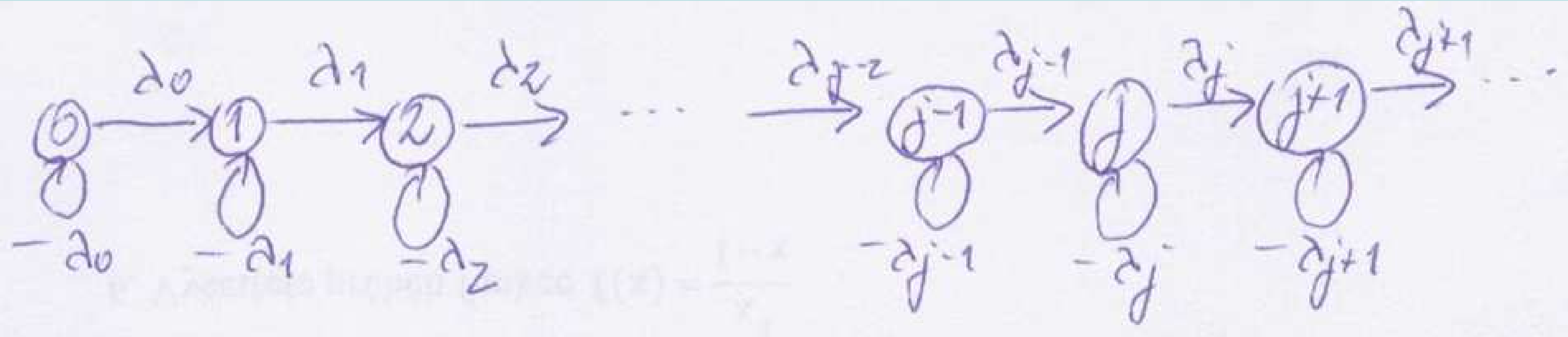
Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0, …) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda_j > 0,\ j = 0,1,2,\dots \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá proces vzniku (resp. množení) s intenzitami $\lambda_j > 0,\ j = 0,1,2,\dots$

Vysvětlení: Proces vzniku popisuje kolísání rozsahu souboru objektů v čase, přičemž objekty mohou do souboru pouze vstupvat a nemohou vystupovat. Poissonův proces je speciálním případem procesu vzniku, kde $\lambda_j = \lambda$, j = 0, 1, 2, …

Přechodový diagram:



.

16.14. Věta: Absolutní pravděpodobnosti a pravděpodobnosti přechodu v procesu vzniku

Nechť $\{X_t ; t \in T\}$ je proces vzniku s intenzitami $\lambda_j > 0,\ j = 0,1,2,\dots$ Pak platí:

a) Absolutní pravděpodobnosti jsou dány vztahy:

$$p_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$$

$$p_j(t) = (-1)^j \lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1} \sum_{i=0}^{j} \frac{e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_i - \lambda_0) \cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_j)},\ j = 1,\ 2,\ \ldots$$

b) Pravděpodobnosti přechodu jsou dány vztahy:

$$p_{j,j+1} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}\left(e^{-\lambda_j t} - e^{-\lambda_{j+1} t}\right) \text{pro } \lambda_{j+1} \neq \lambda_j \\ \lambda_j t e^{-\lambda_j t} \text{ pro } \lambda_{j+1} = \lambda_j \end{cases}$$

Důkaz:

Ad a) Plyne ze systému evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \ldots)$

Ad b) Plyne ze systému Kolmogorovových prospektivních diferenciálních rovnic $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$

s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$

16.15. Příklad: Nechť v procesu vzniku jsou intenzity vzniku dány vztahem $\lambda_j = (N + j)\lambda$, kde N je dané přirozené číslo a $\lambda > 0$ je konstanta. Odvoďte vektor absolutních pravděpodobností.

Řešení:

$$p_0(t) = e^{-\lambda_0 t} = e^{-N\lambda t}$$

$$p_j(t) = (-1)^j \lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1} \sum_{i=0}^{j} \frac{e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_i - \lambda_0)\cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})\cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_j)} =$$

$$= (-1)^j \lambda^j N(N+1)\ldots(N+j-1) \sum_{i=0}^{j} \frac{e^{-(N+i)\lambda t}}{((N+i)\lambda - N\lambda)\cdot \ldots \cdot ((N+i)\lambda - (N+i-1)\lambda)((N+i)\lambda - (N+i+1)\lambda)\cdot \ldots \cdot ((N+i)\lambda - (N+j)\lambda)}$$

$$= (-1)^j \lambda^j \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!} \sum_{i=0}^{j} \frac{e^{-(N+i)\lambda t}}{i\lambda(i-1)\lambda\ldots\lambda(-1)\lambda\ldots(i-j)\lambda} = (-1)^j \lambda^j \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!} \frac{1}{\lambda^j} e^{-N\lambda t} \sum_{i=0}^{j} \frac{e^{-i\lambda t}}{(-1)^j i!(j-i)!} =$$

$$= \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!} e^{-N\lambda t} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \left(e^{-\lambda t}\right)^i (-1)^{j-i} = \binom{N+j-1}{j} e^{-N\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^j$$

Znamená to, že $X_t \sim Ps(N, e^{-\lambda t})$.

16.16. Definice: Definice lineárního procesu vzniku

Nechť v procesu vzniku jsou intenzity vzniku úměrné rozsahu souboru, tj. $\lambda_j = j\lambda$, j = 1, 2, …, $\lambda > 0$. Předpokládejme, že na začátku je v souboru jeden objekt. Matice intenzit přechodu má tedy tvar $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Tento proces se nazývá lineární proces vzniku (Yuleův proces).

16.17. Věta: Absolutní pravděpodobnosti v Yuleově procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Yuleův proces s intenzitou vzniku $\lambda > 0$. Pak absolutní pravděpodobnosti jsou dány vzorcem:

$$p_j(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j-1} e^{-\lambda t},\ j = 1, 2, \dots$$

Znamená to, že rozsah souboru v čase t zmenšený o 1 se řídí rozložením Ge($e^{-\lambda t}$).

Důkaz: Plyne z příkladu 16.7., kde položíme N = 1.

16.18. Věta: Střední hodnota a rozptyl v Yuleově procesu

V Yuleově procesu je střední hodnota rozsahu souboru v čase t rovna $e^{\lambda t}$ a rozptyl $e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)$.

Důkaz: Plyne z vlastností geometrického rozložení.

(Proces vzniku i Yuleův proces mají v praxi jen malý význam, protože v reálném světě neexistují populace, jejichž jedinci nepodléhají zániku. Nicméně, uvedených procesů je možno použít např. k modelování krátkodobého růstu kolonie bakterií v prostředí s dostatkem živin.)

16.19. Příklad: Nechť je dán Yuleův proces s parametrem $\lambda = 2{,}34$.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v čase t = 0,6 bude rozsah souboru nejvýše 5?

b) Vypočtěte střední hodnotu a směrodatnou odchylku rozsahu souboru v čase t = 0,2.

Řešení:

Ad a) $p_j(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j-1} e^{-\lambda t}, \; j = 1, 2, \ldots$

$$P\left(X_{0,6} \le 5\right) = \sum_{j=0}^{5} p_j(0{,}6) = \sum_{j=0}^{5} \left(1 - e^{-2{,}34\cdot 0{,}6}\right)^{j-1} e^{-2{,}34\cdot 0{,}6} = 0{,}7557$$

Ad b) $E\left(X_t\right) = e^{\lambda t}, \; D\left(X_t\right) = e^{\lambda t}\left(e^{\lambda t} - 1\right)$

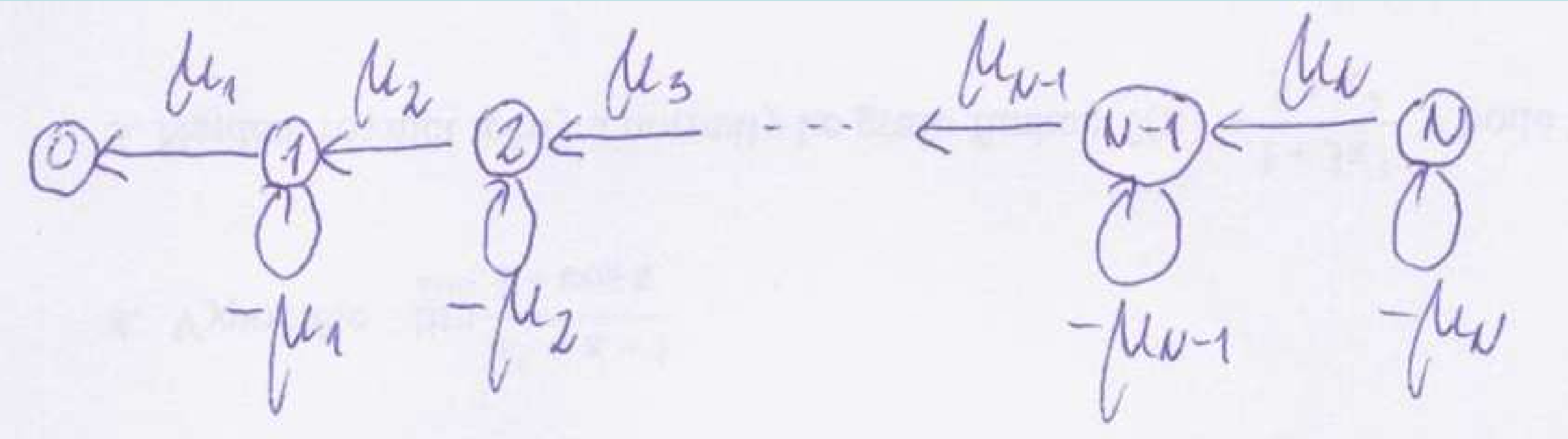
$$E\left(X_{0,2}\right) = e^{2{,}34\cdot 0{,}6} = 1{,}5968, \; \sqrt{D\left(X_{0,2}\right)} = \sqrt{e^{2{,}34\cdot 0{,}6}\left(e^{2{,}34\cdot 0{,}6} - 1\right)} = 0{,}9762$$

16.20. Definice: Definice procesu zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …, N}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (0, 0, …, 1) a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_N & -\mu_N \end{pmatrix}$, kde $\mu_j > 0, j = 1,2,\dots,N$ jsou konstanty. Tento proces se nazývá proces zániku.

Vysvětlení: Na počátku má soubor N objektů. Objekty mohou ze souboru jenom vystupovat, přičemž intenzita výstupu ze souboru rozsahu j je μ_j, j = 1, 2, …, N. Proces končí zánikem souboru.

Přechodový diagram:



16.21. Definice: Definice lineárního procesu zániku

Nechť v procesu zániku jsou intenzity zániku úměrné rozsahu souboru, tj. $\mu_j = j\mu$, j = 0, 1, …, N, $\mu > 0$. Matice intenzit přechodu má tedy tvar: $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N\mu & -N\mu \end{pmatrix}$. Tento proces se nazývá lineární proces zániku.

16.22. Věta: Absolutní pravděpodobnosti v lineárním procesu zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces zániku s intenzitou zániku $\mu > 0$. Pak absolutní pravděpodobnosti jsou dány vzorcem:

$p_j(t) = \binom{N}{j}\left(e^{-\mu t}\right)^j\left(1 - e^{-\mu t}\right)^{N-j}, j = 0,1,\dots,N$. Znamená to, že rozsah souboru v čase t se řídí rozložením Bi(N, $e^{-\mu t}$).

Důkaz: Plyne z evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = (0, 0, \dots, 1)$.

16.23. Věta: Střední hodnota a rozptyl v lineárním procesu zániku

V lineárním procesu zániku je střední hodnota rozsahu souboru v čase t rovna $Ne^{-\mu t}$ a rozptyl $Ne^{-\mu t}(1- e^{-\mu t})$.

Důkaz: Plyne z vlastností binomického rozložení.